投資案の選択について

伊　藤　駒　之

1　序

我々は，先に，going concern としての企業の経営計画の吟味に重点を置いた予算シミュレーション——長期経営計画における（特に投資のための）部分計画としての——[1] のモデルを紹介した。そして，その稿において，d.p.u.u.（decision problem under uncertainty）モデルを基礎とした投資案選択方法が提案され，その選択方法における選択規準として maximin criterion を採用することが述べられた。本稿では，d.p.u.u. に適用される他の代表的規準（Laplace's criterion，Hurwicz's criterion，Savage's criterion）にも検討が加えられ，maximin criterion 採用の事情が論述されている。

さて，我々の取扱う問題は普通の d.p.u.u. とは異なった形式をなしている。この点の説明から議論を進めよう。

A　我々の選択問題

いま，m個の投資案 s_1，s_2，……，s_m があり，これら投資案の中から一つの投資案が合理的に選択されることが望まれているとする。そしてこの選択はn個の分析指標 a_1，a_2，……，a_n により行なわれるとしよう。ある投資案 s_i がある分析指標 a_j においてもつ指数は K_{ij} と表される。そうすると，我々の選択対象 K_i は上記のような指数 K_{ij} の組になる。すなわち，

$$K=\{K_i \mid i\in I\}$$

$$K_i=(K_{i1},\ K_{i2},\ \cdots\cdots,\ K_{in}),\quad i\in I$$

$$K_{ij}=K(s_i,\ a_j),\quad i\in I,\ j\in J$$

$$S = \{ s_i \mid i \in I \}$$
$$A = \{ a_j \mid j \in J \}$$
$$I = \{ 1, 2, \cdots\cdots, m \}$$
$$J = \{ 1, 2, \cdots\cdots, n \}$$

となる。また，便宜上，指数の増加は満足度の増加を招くとする。

我々の問題は，上述のような状況のもとで，半順序関係[②] をもつ集合Kより最適な選択対象 K_i を選択することとなる。明らかなように，投資案 s_i に対して選択対象 K_i が対応している。

B　*d.p.u.u.*[③]

意志決定者は行動の集合 $\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m\}$ から一つの行動を選択しなければならないとする。しかし各行動の望ましさは“自然の状態 $\{s_1, s_2, \cdots\cdots, s_n\}$” に依存している。ここで言及している“自然”とは，意志決定者に全く未知な意図を持つ対象として考慮されている。また，“自然の状態”はある特定の選択問題に関連しかつ意志決定者には不確定な状況の集合として表現される。すなわち，これらの状況は相互に排反的で全てをつくすような仕方で列挙されている集合を構成する。この集合の要素の一つが true であり，選択の時点においてはどの要素が true であるかは意志決定者には未知であると仮定されている。

一般的に，一つの行動と一つの状態から構成される対 (a_i, s_j) に対応して一つの結果（outcome）が存在する。これら結果に関する意志定者の選考は，効用理論の意味で，consistent であると仮定される。

いま，u_{ij} は対 (a_i, s_j) の結果に連ねる効用の支払（utility payoff）とする。このような前提のもとで定義される d.p.u.u. とは，ある最適規準（some optimality criterion）に従って一つの行動または複数の行動を選ぶことである。

① 拙稿「予算シミュレーション——長期経営計画における（特に投資のための）部分計画としての——」山口経済学雑誌，第20巻 第4号 参照。

② (イ) Kのすべての要素K_i に対して，$K_i \geqq K_i$ である。

(ロ)　もし $K_i \geqq K_j$ かつ，$K_j \geqq K_k$ が成立するならば，$K_i \geqq K_k$が成立する。
上記２つの条件を満足すること。

③　Luce and Raiffa, "Games and Decisions," John Wiley, 1957, Chapter 13「Individual Decision Making under Uncertainty」参照。

2　d.p.u.u. における選択規準[①]

本節では，我々は d.p.u.u. を解決するために規定されている諸規準すなわち Laplace's Criterion, Wald's Criterion, Hurwicz's Criterion, Savage's Criterion の内容について簡単に論述する。

A　Laplace's Criterion (principle of insufficient reason)

自然の状態 s_1, s_2, ………, s_n のうちどれが事象として発生するかが未知であるなら，それらは equally likely であると仮定される。それゆえに，もし意志決定者が a_i なる行動を選ぶなら，意志決定の利得は算術平均 $\overline{u}_i$ になる。

ただし　$\overline{u}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}$

そして Laplace's Criterion は $\underset{i}{\mathrm{Max}}\ \overline{u}_i$ なる行動を選ぶことを要請する。

B　Wald's Criterion

この規準は意志決定者と自然との間における仮想上のゲームにおいて適用される maximin 規準である。

$$\max_{x \in X}\ \min_{j}\ \sum_{i=1}^{m} x_i u_{ij},\quad \mathrm{X}: \text{mixed strategy の空間}^{②}$$

なる戦略を選択せよ。

C　Hurwicz's Criterion

行動 a_i に対して，m_i は効用 u_{i1}, u_{i2}, ………, u_{in} の最小値であり，M_i はそれらの最大値としよう。意志決定者の楽観性の程度を反映する指数 α $(1>\alpha>0)$ も与えられているとする。各行動 a_i に指数 $\alpha m_i+(1-\alpha)M_i$ が対応させられる。我々はこの指数を a_i の α—指数と呼ぶ。いま，仮に数個の行動が問題となっているとされるなら，それらのうちで最も高い α—指数を

もつ行動が選択される。

形式的には

$$\max_i h_i$$

ただし　$h_i = \alpha m_i + (1-\alpha) M_i$

なる行動を選択せよ。

D　Savage's Criterion

minimax risk または regret 規準とも呼ばれる。この規準による手続は以下の通りである。

(a)　効用 u_{ij} に対してリスクの支払 (risk payoffs) r_{ij} を算定せよ。ただし r_{ij} は行動 a_i における最大効用から u_{ij} を減算した量として定義される。

(b)　各行動における最大リスクを最小にするような行動を選択せよ。

すなわち

$$\min_j \max_{x \in X} (x,\ y_j)$$

ただし　X : *mixed strategy* の空間[2]

$$y_j = (y_{1j},\ y_{2j},\ \cdots\cdots\cdots,\ y_{mj})$$

$$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\cdots x_m)$$

$$y_{ij} = \max u_{kj} - u_{ij}$$

なる戦略を選択せよ。

① Luce and Raiffa, op. cit., chapter 13 参照

② 意志決定者は $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ a_m$ なる行動に $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_m)$ なる確率分布を付与するものとする。そのとき

$$X = \{x \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geqq 0,\ (i = 1,\ \cdots\cdots\cdots,\ m)\}$$

となる。

3　我々の問題に対する適用

本節では前節で述べた（d.p.u.u.を解決するために提案された）諸規準が我々の選択問題に適用されるであろう。しかしながら，それらの諸規準には諸々の難点が指摘される。このことも含めて，我々は各規準についての議論を以下で進める。

我々の問題すなわちこのような選択問題は論理的には選択理論により解決される[①]。そのさい，無差別領域は選択対象の順序づけの確定に関して明確にされていることが前提となっている。無差別領域の明確化は意志決定者の選好を通じて実現される。意志決定者の選好を通じての無差別領域の設定は，当面の問題では，連続の場で行なわれなければならない。そのようなとき，先に我々が紹介したAlgorithm[②]を忠実に適用したならば，我々は，有限回のステップでは，問題の解決を見出だすことはできない。仮に，忠実性を無視することによって矛盾を避けるとしても，ぼう大な情報処理が必要とされる。このような理由から，我々は選択理論による解決の方向を断念せざるをえない。したがって，我々の問題を解決するには，上述のような方法で意志決定を行なうことが不可能である以上，近似的にしろ我々の目的に適合していると期待される実行可能な規準に従わざるを得ない。

A　相対的価値

我々が意志決定のモデルを検討しようとするときには，measurementの形が問題になる。我々の選択問題では，異なる分析指標の指数を生で比較することは無意味であると考えられる。そこで採用される措置としては，結果（outcome）の相対的価値の導入がある。

意志決定者にとっての，結果の相対的価値を考慮するさいに，「相対的」なる用語はつぎの3通りの意味で使用されるとしよう[③]。

(1)　結果の価値は「結果の集合Q」に関して相対的である。

(2)　結果の価値は「ある環境Λ」において意志決定者に関して相対的である。

(3) 結果の価値は意志決定者が保有する「目的の集合 θ 」に関して相対的である。

上記3通りの意味を結合すると，相対的価値とは，目的の集合 θ によって動機を与えられた意志決定者が，ある環境 Λ において，考慮せられている結果の集合 Q の各要素 O_j に付与する重要性の程度を指すとする。

このことを記号化するために，結果に実数を付与する関数 V を考え，これらの実数が結果の相対的価値の measure を表現するものと見なされる。そのとき

$$V\ (O_j)=V\ (O_j\ ;\ Q,\ \theta,\ \Lambda)$$

となる。

ここでは，一般的には関数 V の形が Q, θ, V によって異なることを指摘するにとどめ，当面の問題に対処するために，より限定された結果の集合 $Z_j=\{K_{1j},\ K_{2j},\ \cdots\cdots,\ K_{mj}\}$ に適用された関数 V により相対的価値 L_{ij} は定まるとする。すなわち

$$L_{ij}=V\ (K_{ij}\ ;\ Z_j,\ \theta,\ \Lambda)\ ,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

ただし　$Z_j=\{K_{1j},\ K_{2j},\ \ \cdots,\ K_{mj}\}$

となる。以下では，このような L_{ij} を用いて検討が行なわれる。いま，上記のような場合について簡単な例をあげると

$$L_{ij}=\frac{K_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} K_{ij}},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

なる相対的価値 L_{ij} がある。また，形式化の重複を避ける意味で，我々は L_{ij} の代りに K_{ij} なる文字を使用する。それゆえに，以下では K_{ij} は L_{ij} の意味である。

B　Dominance

いま，つぎのようなベクトル b が存在するとしよう，そのとき K_h は dominate されていると呼ばれる。

$$b=(b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ b_i,\ \cdots\cdots\cdots,\ b_t),$$

$$b_i \geqq 0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ t,\ \sum_{i=1}^{t} b_i = 1,$$

かつ，もし $h \in \{1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ t\}$ なら $b_h = 0$,

かつ，$\sum_{i=1}^{t} b_i K_i \geqq K_{h\sigma}$

換言すれば，上記の関係が成立するとき，K_h は他の選択対象 K_i の凸一次結合によって dominate されている。

dominance 関係における特殊形式としての pure dominance 関係がある。すなわちベクトル b が一つの $b_i=1$ $(i \neq h)$ でかつ他の $b_i=0$ なる制約条件も満すとき pure dominance が存在する。以下では，我々は pure strategy だけを問題にする。mix strategy が許されるときには，投資案の内容はそのような投資を許す形をとっていることが要求される。たとえば，投資が証券投資の形をとっているときにはそのような事情が妥当する④。また，我々が問題にしている設備投資についても，選択された投資に対する適当な出資者が存在するときには mixed strategy に対応する投資の配分も可能である。しかしながら，我々はそのような柔軟な投資形体をとることができない状況を仮定することにする。それゆえに，dominance 関係についても pure dominance しか成立しないケースに限定される。

そのようなとき，我々の選択問題は上述で定義された pure dominance 関係をもつ投資案が排除されたような形で再形式化されうる。以下の所論はこのような形式化のもとで述べられる。

C　Laplace's Criterion の適用

$$K(i^*) = \max_i \overline{K}_i$$

ただし　$\overline{K}_i = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}$

なる $K(i^*)$ $(\in K)$ を選べ，すなわち投資案 $s(i^*)$ を選択することになる。

この投資案 $s(i^*)$ を選択することの意味はつぎのように解釈される。意志決定者は各分析指標に関する相対的価値についての算術平均値のうち最大の

ものをもつ投資案を選ぶ。

この規準は，分析指標の集合が可付番無限であるときには，役にたたない。しかしながら，可付番無限集合が我々の選択問題に組みこまれる恐れは全くない。それにもかかわらず，実際にはこの原則は極端に不鮮明であるために，無差別的な適用がしばしば無意味な結論をもたらすことは周知の事実である。また，我々の選択問題に即して考察すると，Laplace's Criterion によれば，ある分析指標においての値は小さくとも投資案選択に決定的な要因とならない。このことは分析指標の集合の全ての要素に妥当する。分析指標の性格によっては財務的不均衡をもたらす投資案が最適投資案とされる可能性がある。また算術的平均値を計算することの意味が問題となろう。すなわち，算術的平均値を計算することは投資案に対する評価関数をスカラー化しており，しかもその算定方法は最も単純な等加重計算になっている。このような等加重計算が我々の選択問題を解決するならば，投資案に対するスカラー評価関数は適切でかつ計算可能な形に構成されていることになる。このことは，問題意識との矛盾から，我々の論述の不必要性を示す⑤。

D　Wald's Criterion の適用

$$K\,(i^*j^*)=\max_{i}\ \min_{j}\ K_{ij}$$

なる$K(i^*)$　($\in K$) を選べ，すなわち投資案$s(i^*)$を選択することになる。

この投資案$s(i^*)$を選択することの意味はつぎのように解釈される。意志決定者は，どのような分析指標においても，各分析指標に関する相対的価値について保証することのできる最大値として$K(i^*,\ j^*)$なる値をもつことができる。

この maximin 原則は，２人零和ゲームにおける最適戦略選択の問題に適用されている規準である。d.p.u.u. に関しては，このような規準は２人零和ゲームとの類似性に基ずいて構成されている。事実，自然が敵であり，敵の利益が意志決定者の損失であり，また未知の状況が自然によって選択される

戦略であると仮想されるなら，maximin 規準は合理的なものかもしれない。しかしながら，このような仮定は不当に conservative と思われる。なぜなら，上記の仮定には敵は用心深い相対物であるということが含まれているので，maximin 規準は発生しないかもしれない the worst state に対する防禦に重点を置いている。それゆえに，我々は，d.p.u.u.に関しては，2人零和ゲームとの analogy により，maximin 規準の正当性を主張することはできない。しかし，我々の選択問題においては事情が少し異なる。

さて，いくつかの選択対象があるとしよう。これらには dominance 関係がないとするとき，対象選択はどのようになされるべきか。Wald's Criterion の適用により選択された対象が我々の選択問題に不適当であるとするなら，それはどのような状況に相当するのか。いま，$K(i^*, j^*)$ が定まったとしよう。そのとき，ある j に対応する分析指標は我々の選択問題にほとんど影響を与えていない。なぜなら，ある j に対応する分析指標に関しては，それの相対価値が $K(i^*, j)$ より小なる選択対象が存在し，しかもどの選択対象についても上記のような j が少くとも一つ存在することが，Wald's Criterion の適用による選択によって保証されている。（ただし，この j は j^* であるかもしれない）

このような（我々の選択問題に無影響な）分析指標が現われる原因としてはつぎの2つのものが考えられる。

(1) 上記の j に対応する分析指標は本質的に選択関係を定義しない要因であるケース。

(2) ある分析指標において，$K(i^*, j)$ と near-indifferent なる近傍点[6]が存在するケース。

(1)のように本質的に選択関係を定義しないような要素が分析指標の集合に含まれるなら，Wald's Criterion は我々の選択問題に対して適切でない可能性がある。このような可能性を除去するためには，我々は分析指標の集合の要素を慎重に吟味しなければならない。

(2)の問題は d.p.u.u. における Continuity の公理[7]に関連することが

らであるが，near-indifference 関係から定まる相対価値の測定単位の選択により解決されるようにみえる。しかしながら，これは完全な手段とは考えられない。そこで，もし near-indifference 関係が定式化されているなら，$K(i^*j^*)$ が定まった時点で，$K(i^*, j)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ とnear-indifferent なる近傍点を探索し，探索された点 $(ex._{(i^{**},k)})$ を軸として $K(i^{**}, j)$と$K(i^*, j)$ が near-indifferent であるか $K(i^*, j) \geqq K(i^*, j)$，$(j=1, 2, \cdots, n)$ であるとき，我々は投資案 $s(i^{**})$ を選ぶ。さもなくば，すなわち上述の２つの関係が満されないときは我々は $s(i^*)$ を選ぶ。

いま $K(i^{**}, j^{**})=\min\limits_j K(i^{**}, j)$ とする。この投資案 $s(i^*)$ または $s(i^{**})$ を選択することの意味は，先に述べられた解釈から拡張されて，つぎのようになる。意志決定者は，どのような分析指標においても，各分析指標に関する相対価値について near-indffernce 関係の意味から保証することのできる最大値として $K(i^*, j^*)$ または $K(i^{**}, j^{**})$ をもつことができる。

E　Hurwicz's Criterion の適用

$$h(i^*)=\max_i h_i$$

ただし
$$h_i=\alpha m_i+(1-\alpha)M_i,$$
$$m_i=\min_j K_{ij}$$
$$M_i=\max_j K_{ij},$$
$$1>\alpha>0$$

なる番号 i^* に対応する投資案 $s(i^*)$ をを選択せよ。

楽観的な意志決定者はゼロの近傍に α の値をとる。なぜなら，$\alpha=0$ のときは Hurwicz's Criterion は maximax Criterion と同じになる。また，悲観的な意志決定者は１の近傍に α の値をとる。なぜなら，$\alpha=1$ のときは Hurwicz's Criterion は maximin Criterion と同じになる。そうすると，$\alpha=\frac{1}{2}$の近傍の値は両極面の中間的態度を表現しているようにみえる。

この方法にはつぎのような難点がある。2つ以上の分析指標があるとき（これは我々の選択問題においては異常なことではない。），各選択対象における中間の値（M_i でも m_i でもない値）を無視することがそれである。また，この難点に関連することであるが， Laplace's Criterion について述べたことと同じ理由によってあるαの値すなわち1の近傍以外の値では，財務的均衡の観点からみて不適当な投資案が選択されるかもしれない。また，α の値が楽観—悲観の程度を示す指数であることは確認されるとしても，現実に，意志決定者の態度がどのようなαの値に相当するかということの判断はかなり困難な問題である。

F Savage's Critericn の適用

$$r\ (i^*,\ j^*)=\min_i\ \max_j\ r_{ij}$$

$$\text{ただし}\quad r_{ij}=\max_i\ K_{ij}-K_{ij}$$

なる番号i^*に対応する投資案 s （i^*）を選択せよ。この規準の解釈はつぎのようになる。すなわち，投資案 s （i^*） を選ぶことによって，各分析指標における risk（または regret）が r （i^*, j^*） を下まわることはない。

我々の選択問題に則して考慮されるとき，risk r_{ij} は投資案の risk 表現の measure として有効であろうか。この疑問には否定的な解が対応する。

minimax risk 規準によれば，risk は自然の状態に起因する不可避な risk と戦略の選択に起因する risk の和から構成されると考えられる[8]。そのとき，自然状態に起因する不可避リスクについては改善の方途はない。それゆえに，意志決定者は戦略の選択に起因する risk（すなわち r_{ij}）に焦点をしぼるべきであると主張されるかもしれない。

しかしながら，ある投資案 s_i の risk r_{ij}, r_{il}（$i^*\fallingdotseq k^*$, $i^*=\{i \mid \max_i K_{ij}\}$, $k^*=\{k \mid \max_k K_{kl}\}$）をとりあげよう。そして，論述の簡単化のために，最適投資案 s （i^*） がなんらかの方法で決定されているとする。そうすると，risk r_{ij} は分析指標a_jにおける，投資案s_iの risk 表現としては適切であるが，r_{il} は分析指標a_lにおける，投資案s_iの risk を示してい

るとは考えられない。すなわち，この r_{il} ではなく，$K(i^*, l)-K_{il}$ が正しくそれに相当するものといわれるべきである。

① 横山保，需要理論の研究，1960，第Ⅰ部—2「選好に関する単調増加性の条件」参照。

② 拙稿，op. cit. 参照。

③ Fishburn, "Decision and Value Theory," John wiley, 1964, Chapter 3—2「Relative Value of Consequences」参照。

④ Kaufmann, "Graphs, Dynamic Programming, and Finite Games," Academic Press, 1967, p 182 参照。

⑤ 拙稿，op. cit. 参照。

⑥ near-indifferent なる近傍点：厳密には different であるが他の分析指標との関係から indifferent になるかもしれない近傍点。near-indifference 関係はある分析指標においてのみであって異なる分析指標間は問題にしていない点を注目されたい。

⑦ Continuity の公理：If A′ is preffered to A″ in a sequence of d. p. u. u. 's, then A″ is not preffered to A′ in the limmit d. p. u. u. Luce and Raiffa, op. cit p 297 参照。

⑧ Chernoff, "Rational Selection of Decision functions," Econometrica, 22, 1954 参照。

4　結　　び

以上の分析の導くところによれば，4つの規準のなかで Wald's Criterion が最も欠陥の少ない規準である。Laplace's Criterion も Hurwicz's Criterion も，主として財務的均衡という点から眺めたとき，不適切な投資案を選択する傾向をもつ。後者は特殊形式として Wald's Criterion を含むが，このような特殊形式からの背離の程度が進めば進むほど，上記の問題点はますます深刻さを加える。また Laplace's Criterion は非常に不明瞭で，安易な適用は望ましくない。この規準を利用する意図があるならば，主観的な（かなり粗い）加重に基ずくスカラー評価関数を構成することがより適切であると考えられる。

Savage's Criterion では，risk 表現そのものが投資案の選択に結びつかな

い。すなわち，その risk は投資案の risk ではなく，ある分析指標における最大値に関連する。それでは，投資案に関連する risk 表現が考慮されるならば，Savage's Criterion は意義をもつと考えられるか。否な。選択的構造は risk 表現の原点として選ばれた投資案そのものを最適とするようになっている①。それゆえに，risk 表現の原点として選ばれた投資案の選択が問題になり，Savage's Criterion の適用は無為に等しい。

Wald's Criterion は悲観的または保守的であると非難される点をもつが，これは，逆に，長所であると主張されるかもしれない。先に述べたように，分析指標の集合の各要素が厳しい点検を受けているかぎり，「保守的である」という論難は無視されてもよいだろう。しかし，「厳しい点検」そのものは相対的価値の導入にも関連させて考慮されるべきである。

① なんとならば。いま risk 表現の原点としての投資案を s_r としよう。そのとき，risk は

$$K_{ij}-K_{rj},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

となる。この risk 表現に Savage's Criterion を適用させる，すなわち

$$\min_i \max_j\ (K_{ij}-K_{rj})$$

である。各投資案間には，dominance 関係がないのだから，各投資案 s_i ($i \neq r$) には $K_{ij}>K_{rj}$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) なる番号 j が少くとも一つある。そこで

$$G_i=\max_j\ (K_{ij}-K_{rj}),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

とおけば，上記の式はつぎのようにかける。

$$\min_i\{G_1,\ G_2,\ \cdots,\ G_{r-1},\ 0,\ G_{r+1},\ \cdots,\ G_m\}$$

である。そうすると明白なように，

$$\min_i \max_j\ (K_{ij}-K_{rj})=0$$

となり，投資案 s_r が選択される。