反対称的推移関係

橋　本　　　寛

1．はじめに

反対称的な推移関係について考察を行い，主として反対称的な推移関係に関するいくつかの同値な表現を明らかにしている。一般に，２項関係は０，１の要素をもつブール行列によって表現できるので[12]，関係をブール行列で表現し，そのブール行列の性質を調べることによって関係の性質を明らかにしている。推移性や反対称性は２項関係における基本的な概念であり，また応用上も重要な概念である[1][2]。

反対称的推移関係の性質については，これまでにも連結性との関連において考察を行い，種々の性質を明らかにしてきた[4]-[10]。今回はすでに知られている反対称的推移関係の２，３の性質[10]を若干精密化し，また連結性の条件をはずした場合に成立する性質についても考察をおこなっている。最後に，与えられた関係が反対称的推移関係となるための必要十分条件についてまとめている。

2．演算の定義

本論文で使用するブール行列に関する記法及び演算の定義は文献（11）などに従うものとするが，念のため一部のものを示せば次のとおりである。すなわち，n 次ブール行列 $R=[r_{ij}]$ に対して

$\bar{R}=[\bar{r}_{ij}]=[1-r_{ij}]$

$\Delta R=R\wedge\bar{R}'$

$\nabla R=R\wedge R'$

$R^0=I=[\delta_{ij}]$

と定める。R'は行列 R の転置を示す。

与えられた R が，ブール演算のもとで $R^2\leqq R$ となるとき，R は推移的といわれ，また $\nabla R\leqq I$ のとき反対称的，$R\vee R'\vee I=E$ のとき連結的と呼ばれる。なお，E は全要素が1の行列である。

3．結果

反対称的推移関係は，前述の定義によれば $R^2\leqq R$ かつ $\nabla R\leqq I$ なるブール行列 R で表現される。以下では与えられた行列 R が $R^2\leqq R$ かつ $\nabla R\leqq I$ となるための必要十分条件を中心に関連する性質を調べる。

［性質1］(4)

$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O \Longrightarrow \nabla R=O$

［性質2］(10)

$R^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I \Longrightarrow R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

［性質3］

$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I} \Longleftrightarrow R^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I$

（証明）　(1) $R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$ のとき

明らかに

$$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$$

であるから

$$\begin{aligned}R^2&=((R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge I))^2\\&=((R\wedge\bar{I})^2\vee(R\wedge\bar{I})\times(R\wedge I)\vee(R\wedge I)\times(R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge I)^2\\&\leqq(R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge\bar{I})\times I\vee I\times(R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge I)\\&=(R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge I)=R\end{aligned}$$

いま $(R\wedge\bar{I})^2\leqq(R\wedge\bar{I})$ でまた $(R\wedge\bar{I})\wedge I=O$ だから性質1によって

$\nabla(R \wedge \bar{I}) = O$ すなわち

$$(R \wedge \bar{I}) \wedge (R \wedge \bar{I})' = O$$

となる。したがって $R \wedge R' \leqq I$ すなわち $\nabla R \leqq I$。

(2) $R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$ のとき

性質 2 によって　$R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$。　(証明終)

上の性質 3 に関連して，次の 2 つの命題は，一般には成立しない。

$$R^2 \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I} \Longrightarrow R^2 \leqq R$$

$$R^2 \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I} \Longrightarrow \nabla R \leqq I$$

たとえば，いま

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば $R^2 \times (R \wedge \bar{I}) = R \wedge \bar{I}$ となるが, $R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$ はともに成立しない。

なお，性質25 (2) に示すように，一般に

$$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I} \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I$$

が成立する[6]。

[性質 4] [10]

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow (R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I}$$

[性質 5]

$$(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I} \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I$$

(証明)　(1)　$(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I}$ のとき

$$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq (R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I}$$

であるから

$$\begin{aligned} R^2 &= ((R \wedge \bar{I}) \vee (R \wedge I))^2 \\ &= (R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I}) \times (R \wedge I) \vee (R \wedge I) \times (R \wedge \bar{I}) \vee (R \wedge I)^2 \\ &\leqq (R \wedge \bar{I}) \vee (R \wedge \bar{I}) \vee (R \wedge \bar{I}) \vee (R \wedge I) = R \end{aligned}$$

(2)　$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$ のとき

性質4によって　$(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I}$。　(証明終)

［性質6］(10)

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow \text{すべての}\ \ell\ (\ell=1,2,\cdots)\ \text{に対して}\ R^\ell \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$$

［性質7］

すべての ℓ ($\ell=1,2,\cdots$) に対して $R^\ell \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

$\Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I$

(証明)　(1)　すべての ℓ ($\ell=1,2,\cdots$) に対して $R^\ell \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$ のとき

$\ell=1$ とおけば $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$。したがって性質3によって $R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I$。

(2)　$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I$ のとき

性質6によって，すべての ℓ ($\ell=1,2,\cdots$) に対して

$R^\ell \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$　(証明終)

なお，上の性質7に関して，次の命題は一般には成立しない。

ある ℓ ($\ell=1,2,\cdots$) に対して $R^\ell \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

$\Longrightarrow R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I$

これが，例えば $\ell=2$ の場合に，一般には成立しないことは，すでに性質3のところで示している。

［性質8］(10)

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow \text{すべての}\ \ell\ (\ell=1,2,\cdots)\ \text{に対して}\ (R \wedge \bar{I}) \times R^\ell \leqq R \wedge \bar{I}$$

［性質9］

すべての ℓ ($\ell=1,2,\cdots$) に対して $(R \wedge \bar{I}) \times R^\ell \leqq R \wedge \bar{I}$

$\Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I$

(証明)　(1)　すべての ℓ ($\ell=1,2,\cdots$) に対して $(R \wedge \bar{I}) \times R^\ell \leqq R \wedge \bar{I}$ のとき

$\ell=1$ とおけば $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I}$。したがって性質5によって $R^2 \leqq$

R, $\nabla R \leqq I$。

（2）　$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$ のとき

性質8によって，すべての ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$) に対して

$(R \wedge \bar{I}) \times R^{\ell} \leqq R \wedge \bar{I}$　(証明終)

［性質10］(10)

$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I \Longrightarrow$ すべての ℓ, m (ℓ, $m = 0, 1, 2, \cdots$) に対して

$R^{\ell} \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \leqq R \wedge \bar{I}$

［性質11］

すべての ℓ, m (ℓ, $m = 0, 1, 2, \cdots$) に対して

$R^{\ell} \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \leqq R \wedge \bar{I}$

$\Longleftrightarrow R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$

(証明)　（1）　すべての ℓ, m (ℓ, $m = 0, 1, 2, \cdots$) に対して

$R^{\ell} \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \leqq R \wedge \bar{I}$

のとき

$\ell = 1$, $m = 0$ とおけば

$R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

したがって性質3によって $R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$。

（2）　$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$ のとき

性質10によって，すべての ℓ, m (ℓ, $m = 0, 1, 2, \cdots$) に対して

$R^{\ell} \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \leqq R \wedge \bar{I}$　(証明終)

［性質12］(10)

$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I \Longrightarrow$ すべての ℓ, m (ℓ, $m = 0, 1, 2, \cdots$) に対して

$R^{\ell} \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \leqq \bar{R}'$

この性質12に関連して，

$R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \bar{R}' \Longrightarrow R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$

とはいえない。また

$R \vee R' \vee I = E$, $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \bar{R}' \Longrightarrow R^2 \leqq R$

ともいえない。いま

$$R=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

とおけば，明らかに $R\vee R'\vee I=E$, $R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\bar{R}'$ であるけれども $R^2\leqq R$ とはならない。

しかし，次の2つの命題は，それぞれ性質14，性質13に示すように成立する。

$$R\vee R'=E,\ R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\bar{R}' \Longrightarrow R^2\leqq R$$

$$R\vee R'=E,\ R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\bar{R}'\vee I \Longrightarrow R^2\leqq R$$

［性質13］(10)

$$R\vee R'=E,\ R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\bar{R}'\vee I \Longrightarrow R^2=R,\ \nabla R=I$$

［性質14］(10)

$$R\vee R'=E,\ R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\bar{R}' \Longrightarrow R^2=R,\ \nabla R=I$$

（証明）　性質13による。　　　　　　　　　（証明終）

いま性質14の例として

$$R=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

とおけば

$$R'=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},\ \bar{R}'=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\ R\wedge\bar{I}=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$R\times(R\wedge\bar{I})=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=\bar{R}'$$

$$R^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=R,\ \nabla R=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I$$

この例において $R\times(R\wedge\bar{I})=\bar{R}'=R\wedge\bar{I}$ となっているが，これは性質20で示すように，$R\vee R'=E$ かつ $R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\bar{R}'$ のとき一般に成立する。

［性質15］(10)

$$R \vee R' = E,\ (R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \bar{R}' \vee I \implies R^2 = R,\ \nabla R = I$$

［性質16］(10)

$$R \vee R' = E,\ (R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \bar{R}' \implies R^2 = R,\ \nabla R = I$$

(証明)　性質15による。　(証明終)

［性質17］(10)

$$R \vee R' = E,\ (R \wedge \bar{I})^2 \leqq \bar{R}' \vee I \implies R^2 = R$$

上の性質17の条件のもとでは $\nabla R \leqq I$ とはいえない。すなわち，一般には

$$R \vee R' = E,\ (R \wedge \bar{I})^2 \leqq \bar{R}' \vee I \Rightarrow \nabla R \leqq I$$

は成立しない。いま，

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$R \vee R' = E$，$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \bar{R}' \vee I$ であるけれども $\nabla R \leqq I$ とはならない。

なお，一般には

$$(R \wedge \bar{I})^3 \wedge I = O \iff (R \wedge \bar{I})^2 \leqq \bar{R}' \vee I$$

であるので(9)，性質17は次の性質(7)と同値である。

$$R \vee R' = E,\ (R \wedge \bar{I})^3 \wedge I = O \implies R^2 = R$$

［性質18］(8)

$R \vee R' \vee I = E$，ある ℓ ($\ell = 0, 1, 2, \cdots$) に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3\ell} \leqq R \vee \bar{R}' \vee I$

$$\implies R^2 \leqq R \vee I$$

なお，上記の性質18と同じ条件のもとで $(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ となることが知られている。すなわち，

$R \vee R' \vee I = E$，ある ℓ ($\ell = 0, 1, 2, \cdots$) に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3\ell} \leqq R \vee \bar{R}' \vee I$

$$\Longrightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$$

が成立する[11]。この$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$となるRはnegatively transitiveであるといわれる。

[性質19]

$$R \vee R' \vee I = E,\ (R \wedge \bar{I})^2 \leqq \bar{R}' \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R \vee I$$

(証明)　性質18による。　(証明終)

この性質19は，すでに述べたように一般に

$$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \bar{R}' \vee I \Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^3 \wedge I = O$$

が成立するので[9]，次の命題[7]と同値である。

$$R \vee R' \vee I = E,\ (R \wedge \bar{I})^3 \wedge I = O \Longrightarrow R^2 \leqq R \vee I$$

[性質20]

$$R \vee R' = E,\ R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \bar{R}' \Longleftrightarrow R \times (R \wedge \bar{I}) = \bar{R}' = R \wedge \bar{I}$$

(証明)　(1)　$R \vee R' = E,\ R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \bar{R}'$のとき

(a)　$R \times (R \wedge \bar{I}) = \bar{R}'$となること

これは$\bar{R}' \leqq R \times (R \wedge \bar{I})$を示せば十分である。いま$r_{ji} = 0$とすれば，$R \vee R' = E$によって$j \neq i$かつ$r_{ij} = 1$となる。したがって$r_{ii} = 1$および$r_{ij} = 1$によって$r_{ii} \wedge r_{ij} \wedge \bar{\delta}_{ij} = 1$。ゆえに$\bar{R}' \leqq R \times (R \wedge \bar{I})$となる。

(b)　$R \wedge \bar{I} = \bar{R}'$となること

(i)　$r_{ij} \wedge \bar{\delta}_{ij} = 1$のとき

$r_{ii} = 1$だから$R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \bar{R}'$によって$r_{ji} = 0$。したがって　$R \wedge \bar{I} \leqq \bar{R}'$。

(ii)　$r_{ji} = 0$のとき

$R \vee R' = E$によって$r_{ij} = 1$。また$I \leqq R$だから$r_{ji} = 0$によって$i \neq j$となる。したがって$r_{ij} \wedge \bar{\delta}_{ij} = 1$となり，$\bar{R}' \leqq R \wedge \bar{I}$となる。

(2)　$R \times (R \wedge \bar{I}) = \bar{R}' = R \wedge \bar{I}$のとき

$\bar{R}' = R \wedge \bar{I}$によって$\bar{R}' \vee R' = (R \wedge \bar{I}) \vee R' = R \vee R'$。ところで$\bar{R}' \vee R' = E$であるから$R \vee R' = E$。また明らかに$R \times (R \wedge \bar{I}) = \bar{R}'$によって$R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \bar{R}'$。　(証明終)

［性質21］

$$R \vee R'=E,\ (R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \bar{R}' \iff (R \wedge \bar{I}) \times R=\bar{R}'=R \wedge \bar{I}$$

(証明)　(1)　$R \vee R'=E$, $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \bar{R}'$のとき

(a)　$(R \wedge \bar{I}) \times R=\bar{R}'$となること

これは$\bar{R}' \leqq (R \wedge \bar{I}) \times R$を示せば十分である。いま$r_{ji}=0$とすれば，$R \vee R'=E$によって$j \neq i$かつ$r_{ij}=1$となる。したがって$r_{ij}=1$および$r_{jj}=1$によって$r_{ij} \wedge \bar{\delta}_{ij} \wedge r_{jj}=1$。ゆえに$\bar{R}' \leqq (R \wedge \bar{I}) \times R$となる。

(b)　$R \wedge \bar{I}=\bar{R}'$となること

(i)　$r_{ij} \wedge \bar{\delta}_{ij}=1$のとき

$r_{jj}=1$だから$(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \bar{R}'$によって$r_{ji}=0$。したがって$R \wedge \bar{I} \leqq \bar{R}'$。

(ii)　$r_{ji}=0$のとき

$R \vee R'=E$によって$r_{ij}=1$。また$I \leqq R$だから$r_{ji}=0$によって$i \neq j$となる。したがって$r_{ij} \wedge \bar{\delta}_{ij}=1$となり，$\bar{R}' \leqq R \wedge \bar{I}$となる。

(2)　$(R \wedge \bar{I}) \times R=\bar{R}'=R \wedge \bar{I}$のとき

$\bar{R}'=R \wedge \bar{I}$によって$\bar{R}' \vee R'=(R \wedge \bar{I}) \vee R'=R \vee R'$。ところで$\bar{R}' \vee R'=E$であるから$R \vee R'=E$。また明らかに$(R \wedge \bar{I}) \times R=\bar{R}'$によって$(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \bar{R}'$。　(証明終)

［性質22］

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \iff \text{すべての}\ \ell,\ m\ (\ell,\ m=0,1,2,\cdots)\ \text{に対して}\ R^\ell \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \leqq \Delta R$$

(証明)　(1)　$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$のとき

性質10によって

$$R^\ell \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \leqq R \wedge \bar{I}$$

性質12によって

$$R^\ell \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \leqq \bar{R}'$$

ゆえに

$$R^\ell \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \leqq R \wedge \bar{I} \wedge \bar{R}'=\Delta R$$

（2）　すべてのℓ，m（ℓ，m=0,1,2,…）に対して

$$R^{\ell}\times(R\wedge\bar{I})\times R^{m}\leqq\Delta R$$

のとき

$\ell=1$，$m=0$とおけば

$$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\Delta R\leqq R\wedge\bar{I}$$

となるので，性質3によって$R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq I$。　(証明終)

[性質23]

$$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\Delta R \iff R^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I$$

(証明)　（1）$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\Delta R$のとき

$$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\Delta R\leqq R\wedge\bar{I}$$

したがって，性質3によって$R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq I$。

（2）　$R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq I$のとき

性質22によって$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\Delta R$。　(証明終)

[性質24]

$$(R\wedge\bar{I})\times R\leqq\Delta R \iff R^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I$$

(証明)　（1）$(R\wedge\bar{I})\times R\leqq\Delta R$のとき

$$(R\wedge\bar{I})\times R\leqq\Delta R\leqq R\wedge\bar{I}$$

したがって，性質5によって$R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq I$。

（2）　$R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq I$のとき

性質22によって$(R\wedge\bar{I})\times R\leqq\Delta R$。　(証明終)

性質23および性質24に関連する性質として次の性質が知られている。

[性質25] (6)(9)

（1）　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq\Delta R \iff R^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I$

（2）　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I} \iff R^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I$

[性質26]

$$R^2\leqq\Delta R \iff R^2\leqq R,\ \nabla R=O$$

(証明)　（1）　$R^2\leqq\Delta R$のとき

$$R^2\leqq\Delta R\leqq R$$

いま $r_{ii}=1$ とすれば $r_{ii}^{(2)}=1$ となり，$R^2 \leqq \Delta R$ と矛盾するので，$r_{ii}=0$ すなわち $R \wedge I=O$ となる。一方，$R^2 \leqq R$ であるから，性質１によって $\nabla R=O$ となる。

（２）　$R^2 \leqq R,\ \nabla R=O$ のとき

$R^2 \leqq R$ のとき $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$ となり(4)，また $\nabla R=O$ のとき $\Delta R=R$ となるから(4)，

$$R^2=(\Delta R)^2 \leqq \Delta R \qquad \text{(証明終)}$$

一般に，$R^2 \leqq R$ のとき $R \wedge I=O \iff \nabla R=O$ であるから(4)，上の性質26は次の命題(9)と同値である。

$$R^2 \leqq \Delta R \iff R^2 \leqq R,\ R \wedge I=O$$

さらに，推移性のもとで成立する ΔR の基本的な性質として，次の２つの性質がある。

［性質27］(3)

$$R^2 \leqq R \implies R \times \Delta R \leqq \Delta R$$

（証明）　いま $r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \bar{r}_{jk}=1$ とおけば，$r_{ik} \wedge r_{kj}=1$ によって $r_{ij}=1$。もし $r_{ji}=1$ とすれば $r_{ik}=1$ だから $r_{jk}=1$ となるが，これは $\bar{r}_{jk}=1$ と矛盾する。よって $r_{ji}=0$ となり，$r_{ij} \wedge \bar{r}_{ji}=1$ となる。　(証明終)

［性質28］(3)

$$R^2 \leqq R \implies \Delta R \times R \leqq \Delta R$$

（証明）　いま $r_{ik} \wedge \bar{r}_{ki} \wedge r_{kj}=1$ とおけば，$r_{ik} \wedge r_{kj}=1$ によって $r_{ij}=1$。もし $r_{ji}=1$ とすれば $r_{kj}=1$ だから $r_{ki}=1$ となるが，これは $\bar{r}_{ki}=1$ と矛盾する。よって $r_{ji}=0$ となり，$r_{ij} \wedge \bar{r}_{ji}=1$ となる。　(証明終)

［性質29］

$\nabla R \leqq I,\ D \leqq I$ のとき

$$(R \vee D)^2 \leqq R \vee D \iff R^2 \leqq R$$

（証明）　（１）　$(R \vee D)^2 \leqq R \vee D$ のとき

$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき $r_{ij}=1$ となることを示す。

（ａ）　$i=k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 1$

(b)　$k = j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 1$

(c)　$i \neq k$, $k \neq j$ のとき

$\nabla R \leqq I$ によって $i \neq j$ となる。また $(R \vee D)^2 \leqq R \vee D$ によって $r_{ij} \vee d_{ij} = 1$ となり，$i \neq j$ だから $r_{ij} = 1$ となる。

(2)　$R^2 \leqq R$ のとき

$$
\begin{aligned}
(R \vee D)^2 &= (R \vee D) \times (R \vee D) \\
&= R^2 \vee R \times D \vee D \times R \vee D^2 \\
&\leqq R \vee R \times I \vee I \times R \vee D \\
&= R \vee D
\end{aligned}
$$

(証明終)

[性質30]

$\nabla R \leqq I$ のとき

$$(R \vee I)^2 \leqq R \vee I \iff R^2 \leqq R$$

(証明)　性質29による。　(証明終)

[性質31] (5)

(1)　$\nabla R \leqq I$, $D \leqq I$ のとき

$$(R \wedge \bar{D})^2 \leqq R \wedge \bar{D} \iff R^2 \leqq R$$

(2)　$\nabla R \leqq I$ のとき

$$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I} \iff R^2 \leqq R$$

[性質32]

$D \leqq I$ のとき

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow (R \wedge \bar{D})^2 \leqq R \wedge \bar{D}$$

(証明)　性質31(1)による。　(証明終)

[性質33]

$$D \leqq I,\ (R \wedge \bar{D})^2 \leqq R \wedge \bar{D} \Longrightarrow R^2 \leqq R$$

(証明)　$r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき，$r_{ij} = 1$ となることを示す。

(1)　$i = k$ のとき

$r_{ij}=r_{kj}=1$

（2）　$k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=1$

（3）　$i\neq k$，$k\neq j$ のとき

$r_{ik}\wedge\bar{d}_{ik}=r_{kj}\wedge\bar{d}_{kj}=1$

したがって $r_{ij}\wedge\bar{d}_{ij}=1$ となり，$r_{ij}=1$ となる。　(証明終)

［性質34］

$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R \iff R^2\leqq R$

(証明)　（1）　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R$ のとき

$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき，$r_{ij}=1$ となることを示す。

（a）　$i=k$ のとき

$r_{ij}=r_{kj}=1$

（b）　$k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=1$

（c）　$i\neq k$，$k\neq j$ のとき

$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R$ によって $r_{ij}=1$。

（2）　$R^2\leqq R$ のとき

$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R^2\leqq R$　(証明終)

［性質35］(6)

$\nabla R\leqq I \iff R\wedge\bar{I}=\Delta R$

［性質36］

$\nabla R\leqq I$ のとき

$(\Delta R)^2\leqq R \iff R^2\leqq R$

(証明)　性質34および性質35による。　(証明終)

［性質37］

$\nabla R\leqq I$ のとき

$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\vee I \iff R^2\leqq R$

(証明)　（1）　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\vee I$ のとき

$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき $r_{ij}=1$ となることを示す。

(a)　$i=k$ のとき

$$r_{ij}=r_{kj}=1$$

(b)　$k=j$ のとき

$$r_{ij}=r_{ik}=1$$

(c)　$i\neq k,\ k\neq j$ のとき

$\nabla R\leqq I$ によって $i\neq j$ となり，また $(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\vee I$ から $r_{ij}\vee\delta_{ij}=1$ となるので $r_{ij}=1$ となる。

(2)　$R^2\leqq R$ のとき

$$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R^2\leqq R\leqq R\vee I$$　(証明終)

[性質38]

$\nabla R\leqq I$ のとき

$$(\Delta R)^2\leqq R\vee I \iff R^2\leqq R$$

(証明)　性質35および性質37による。　(証明終)

なお，性質37，性質38に関連して次の性質も知られている。

[性質39][8]

$\nabla R\leqq I$ のとき

$$R^2\leqq R\vee I \iff R^2\leqq R$$

[性質40]

次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I$

(2)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I$

(3)　$(\Delta R)^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I$

(4)　$(R\vee I)^2\leqq R\vee I,\ \nabla R\leqq I$

(5)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\vee I,\ \nabla R\leqq I$

(6)　$(\Delta R)^2\leqq R\vee I,\ \nabla R\leqq I$

(7)　$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(8)　$(R\wedge\bar{I})\times R\leqq R\wedge\bar{I}$

(9)　すべてのℓ ($\ell=1,2,\cdots$) に対して $R^{\ell}\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(10)　すべてのℓ ($\ell=1,2,\cdots$) に対して $(R\wedge\bar{I})\times R^{\ell}\leqq R\wedge\bar{I}$

(11)　すべてのℓ, m (ℓ, $m=0,1,2,\cdots$) に対して $R^{\ell}\times(R\wedge\bar{I})\times R^{m}\leqq R\wedge\bar{I}$

(12)　すべてのℓ, m (ℓ, $m=0,1,2,\cdots$) に対して $R^{\ell}\times(R\wedge\bar{I})\times R^{m}\leqq\Delta R$

(13)　$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\Delta R$

(14)　$(R\wedge\bar{I})\times R\leqq\Delta R$

(証明)　性質3，性質5，性質7，性質9，性質11，性質22，性質23，性質24，性質30，性質34，性質36，性質37，性質38による。　(証明終)

さらに，$R^2\leqq R$, $\nabla R\leqq I$ と同値な条件に関して，すでに述べた性質25および性質39のほかに以下の性質も知られている。

[性質41] (6)

次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq I$

(2)　$R^2\leqq R$，$R^2\leqq\bar{R}'\vee I$

(3)　$R^2\leqq R$，すべての k ($k=1,2,\cdots$) に対して $R^k\leqq\bar{R}'\vee I$

(4)　$R^2\leqq R$，ある k ($k=1,2,\cdots$) に対して $R^k\leqq\bar{R}'\vee I$

(5)　$R^2\leqq R$，$(R\wedge\bar{I})^n=O$

(6)　$R^2\leqq\Delta R\vee(R\wedge I)$

なお，$\nabla R\leqq I$ と同値な条件として，すでに述べた性質35のほかに次の性質も知られている。したがって性質40および性質41における $\nabla R\leqq I$ をこれらの同値条件で置き換えることができる。

[性質42] (5)(6)(8)(9)

次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R\leqq I$

(2)　$R\leqq\bar{R}'\vee I$

(3)　$R \vee I \leqq \bar{R}' \vee I$

(4)　$R = \Delta R \vee (R \wedge I)$

(5)　$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O$

(6)　$\nabla (R \wedge \bar{I}) = O$

(7)　$R \wedge \bar{I} \leqq \bar{R}'$

(8)　$R \wedge \bar{I} \leqq \bar{R}' \vee \acute{I}$

4. むすび

反対称的推移関係に関する種々の同値条件および関連する性質を明らかにすることができた。これらの条件や性質はだいたいにおいて自明であるけれども，いくつかのものはこれまで一般には知られていない性質のように思われる。また，反対称的推移関係がさらに反射的であれば半順序となるが，ここでの結果は半順序などの議論においても有用であろうと考えられる。

今回は推移関係のもつ性質で反対称性と直接関連する性質を中心に調べたが，反対称性と直接には関連しない推移関係の性質にもいくつかの興味深い性質がある。これらの性質については次の機会に報告したい。

文　献

1) Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).
2) Fishburn, P. C.: "The Theory of Social Choice," Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1973).
3) 橋本　寛："推移関係を表わすブール行列の対称核とべき零部分″，電子通信学会研究会資料 AL80-24 (1980年9月).
4) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質″，山口経済学雑誌，第34巻，第3・4号，pp.387-405 (昭和60年6月).
5) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質II″，山口経済学雑誌，第35巻，第3・4号，pp.281-293 (昭和61年1月).
6) 橋本　寛："連結的関係に関する若干の性質″，山口経済学雑誌，第36巻，第5・6号，pp.245-261 (昭和62年5月).
7) 橋本　寛："連結性のもとでの関係行列の性質″，山口経済学雑誌，第37巻，

第1・2号, pp.75-88 (昭和62年9月).
8) 橋本　寛："連結的関係行列の初等的性質", 山口経済学雑誌, 第38巻, 第3・4号, pp.557-576 (平成元年7月).
9) 橋本　寛："変更された推移性と連結的関係行列", 山口経済学雑誌, 第39巻, 第3・4号, pp.397-416 (平成2年11月).
10) 橋本　寛："反射的で反対称的な連結的推移関係", 山口経済学雑誌, 第39巻, 第5・6号, pp.621-637 (平成3年7月).
11) 橋本　寛："Negative Transitivityに関するいくつかの十分条件について", 山口経済学雑誌, 第41巻, 第1・2号, pp.45-60 (平成5年1月).
12) Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).