反射的で反対称的な連結的推移関係

橋　本　　　　寛

1．はじめに

特殊な二項関係である反射的でかつ反対称的な連結的推移関係について考察をおこない，その初等的性質を明らかにしている。この反射的で反対称的な連結的推移関係は順序や選好関係の議論において重要な関係であり，従来から種々の興味ある性質が知られている[(1)(3)(7)]。本論文では二項関係をブール行列によって表現し，その関係行列の性質を調べることによって，関係の性質を明らかにしている。

まず，連結性のもとでの推移性について調べている。すなわち，一般の連結性のもとで，与えられた関係行列が推移的となるためのいくつかの条件を示し，次に反射的な連結性のもとで推移的となる条件を調べている。また反射的な連結性のもとで推移性と同値になる条件も示している。さらに，反対称性の条件について考察をおこない，与えられた関係行列が反対称的となる条件，とくに反射性のもとで反対称的となる条件を示している。次に反対称的推移関係について調べ，この関係のもつ若干の性質を明らかにしている。最後に連結性のもとでの反対称的推移関係について考察をおこない，一般の連結性のもとで反対称的推移性と同値になる条件，そして反射的連結性のもとで反対称的推移性と同値になる条件などについて考察をおこなっている。

2．定　義

関係を０，１の要素からなる正方のブール行列で表わす[(10)]。いまn次

ブール行列 $R=[r_{ij}]$, $S=[s_{ij}]$ に対して, $R\vee S=[r_{ij}\vee s_{ij}]=[\max(r_{ij},\ s_{ij})]$, $R\wedge S=[r_{ij}\wedge s_{ij}]=[\min(r_{ij},\ s_{ij})]$, $R'=[r_{ji}]$, $\overline{R}=[\overline{r_{ij}}]=[1-r_{ij}]$, $\nabla R=R\wedge R'$ と定める。また行列積を

$$R\times S=[(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})]$$

と定義し,

$$R^0=I=[\delta_{ij}],\quad R^{k+1}=[r_{ij}^{(k+1)}]=R^k\times R\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

と定める。ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

特殊な行列として全要素が1の行列を E で表わす。このとき連結的な関係は $R\vee R'\vee I=E$ なる R で表わされ, 反射的な連結的関係は $I\leqq R$ かつ $R\vee R'\vee I=E$ なる R, すなわち $R\vee R'=E$ なる R で表わされる。$R'=R$ のとき R は対称であるといわれ, $\nabla R\leqq I$ であれば R は反対称的であるといわれる。また $R^2\leqq R$ であれば R は推移関係を表現する行列となる。

3. 結　果

連結性とくに反射的な連結性のもとで, 推移関係およびその特別な場合である反対称的推移関係の性質を調べている。すなわち, 主として反射的でかつ反対称的である連結的推移関係について考察をおこなっている。与えられた関係が反射的で, 反対称的で, 連結的で, かつ推移的であれば, その関係は一般に全順序 (total order) または線形順序 (linear order) とよばれる[10]。

3.1　連結性のもとでの推移性

一般の連結性および反射的な連結性のもとで与えられた関係行列が推移的となる条件を示す。また反射的連結性のもとで推移性と同値になる条件を示す。

〔性質1〕[9]

$R\vee R'\vee I=E$ のとき,

ある ℓ ($\ell=1,\ 2,\ \cdots$) に対して $(R\wedge\overline{I})^{6\ell-1}\leqq\overline{R'}\vee I \Longrightarrow R^2\leqq R$

〔性質2〕[6]

$R\vee R'\vee I=E$, ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{6\ell-1}\leqq\overline{R'}\vee I$

$\Longrightarrow R^2\leqq R$

(証明) 性質1による。 (証明終)

〔性質3〕

$R\vee R'\vee I=E$, ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{6\ell-1}\vee I\leqq\overline{R'}\vee I\Longrightarrow$ $R^2\leqq R$

(証明) $R^{6\ell-1}\leqq R^{6\ell-1}\vee I\leqq\overline{R'}\vee I$ であるから性質2によって $R^2\leqq R$。

(証明終)

〔性質4〕[9]

$R\vee R'\vee I=E$, ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $(R\wedge\overline{I})^{3\ell-1}\leqq R\vee\overline{R'}\vee I$

$\Longrightarrow R^2\leqq R\vee I$

〔性質5〕

(1) $R\vee R'=E$, ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $(R\wedge\overline{I})^{3\ell-1}\leqq R\vee\overline{R'}$ $\vee I\Longrightarrow R^2=R$

(2) $R\vee R'=E$, $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee\overline{R'}\vee I\Longrightarrow R^2=R$

(証明) (1) 性質4によって $R^2\leqq R\vee I$。また $I\leqq R$ であるから $R^2\leqq R$ となり $R^2=R$ となる。

(2) (1)による。 (証明終)

〔性質6〕

$R\vee R'=E$, $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I\Longrightarrow R^2=R$

(証明) 性質5による。 (証明終)

〔性質7〕

(1) $R\vee R'=E$, $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}\vee I\Longrightarrow R^2=R$

(2) $R\vee R'=E$, $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}\vee I\Longrightarrow R^2=R$

(証明) 性質6による。 (証明終)

〔性質8〕

$R\vee R'=E$, $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\Longrightarrow R^2=R$

（証明）　性質6による。　（証明終）

〔性質9〕

(1)　$R \vee R' = E$, $R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \Longrightarrow R^2 = R$

(2)　$R \vee R' = E$, $(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \Longrightarrow R^2 = R$

（証明）　性質8による。　（証明終）

〔性質10〕

$R \vee R' = E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　すべての k $(k = 1, 2, \cdots)$ に対して $R^k = R$

(3)　ある k $(k = 2, 3, \cdots)$ に対して $R^k \leqq R$

(4)　すべての k $(k = 1, 2, \cdots)$ に対して $R^k = R \vee \overline{R'} \vee I$

(5)　ある k $(k = 2, 3, \cdots)$ に対して $R^k \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

（証明）　(1)　$\Longrightarrow$　(2)　$I \leqq R$ であるから $R^2 \leqq R$ によって $R^2 = R$。したがって

$$R = R^2 = \cdots\cdots = R^k$$

(2)　$\Longrightarrow$　(3)　明らかである。

(2)　$\Longrightarrow$　(4)　$R \vee R' = E$ のとき $R \vee \overline{R'} = R \vee \overline{R'} \wedge (R \vee R') = R$ だから $R \vee \overline{R'} \vee I = R \vee I = R$ となる。よって

$$R^k = R = R \vee \overline{R'} \vee I$$

(3)　$\Longrightarrow$　(5)　明らかである。

(4)　$\Longrightarrow$　(5)　明らかである。

(5)　$\Longrightarrow$　(1)　$R \vee R' = E$ のとき $R \vee \overline{R'} \vee I = R$ だから $R^k \leqq R$。また $I \leqq R$ であるから

$$R \leqq R^2 \leqq \cdots\cdots \leqq R^k$$

となり，$R^k \leqq R$ および $k \geqq 2$ によって $R = R^2 = \cdots\cdots = R^k$ となる。ゆえに $R^2 \leqq R$。　（証明終）

〔性質11〕

次の条件は同値である。

(1) $R\vee R'=E$, $R^2\leqq R$

(2) $R=R^2=R\vee\overline{R'}\vee I$

(3) すべての k ($k=1$, 2, …) に対して $R^k=R\vee\overline{R'}\vee I$

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2) $R\vee R'=E$ から $I\leqq R$ だから $R\leqq R^2$。一方 $R^2\leqq R$ であるから $R=R^2$。次に，明らかに $R\leqq R\vee\overline{R'}\vee I$ であるので $R\geqq R\vee\overline{R'}\vee I=R\vee\overline{R'}$ を示す。いま $r_{ij}\vee\overline{r_{ji}}=1$ とすれば，$r_{ji}=0$ のとき $r_{ij}=1$ となる。よって $R\geqq R\vee\overline{R'}=R\vee\overline{R'}\vee I$。こうして $R=R\vee\overline{R'}\vee I$。

(2) $\Longrightarrow$ (3) $R=R^2=\cdots\cdots=R^k=R\vee\overline{R'}\vee I$

(3) $\Longrightarrow$ (1) $R=R^2=R\vee\overline{R'}\vee I$ だから $R^2\leqq R$。また $R=R\vee\overline{R'}\vee I$ によって $R\vee R'=R\vee\overline{R'}\vee I\vee R'=E$。 (証明終)

〔注意 1〕

ある k ($k=2$, 3, …) に対して $R^k=R\vee\overline{R'}\vee I$ であっても $R\vee R'=E$ となるとは限らない。たとえば，

$$R=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad k=2$$

とおけば，

$$R^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \overline{R'}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$R\vee\overline{R'}\vee I=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=R^2$$

であるけれども，$R\vee R'=E$ とはならない。

3.2 反対称性の条件

与えられた関係行列が反対称的となるための条件を示す。

〔性質12〕[9]

$$R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\iff\triangledown R\leqq I$$

〔性質13〕[4]

ある ℓ ($\ell=1$, 2, …) に対して $R^{2\ell-1}\leqq\overline{R'}\vee I\Longrightarrow\triangledown R\leqq I$

〔注意2〕

一般には，

$\triangledown R \leqq I \Longrightarrow$ すべての ℓ ($\ell=1$, 2, $\cdots$) に対して $R^{2\ell-1} \leqq \overline{R'} \vee I$

とはいえない。たとえば，

$$R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad \ell=2$$

とおけば，$\triangledown R \leqq I$ であるが，

$$R^{2\ell-1}=R^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \overline{R'}\vee I=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

であって，$R^{2\ell-1} \leqq \overline{R'} \vee I$ とはならない。

〔性質14〕

$R^5 \vee I = \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R \leqq I$

（証明）　$R^5 \leqq R^5 \vee I = \overline{R'} \vee I$ だから性質13によって $\triangledown R \leqq I$。　（証明終）

〔性質15〕

$I \leqq R$，ある ℓ，m (ℓ, $m=0$, 1, 2, $\cdots$) に対して $R^{\ell} \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R = I$

（証明）　$r_{ij}=1$ ($i \neq j$) とおく。$r_{ii}=r_{jj}=1$ だから $r_{ii}^{(\ell)}=r_{jj}^{(m)}=1$ となり，$r_{ii}^{(\ell)} \wedge r_{ij} \wedge r_{jj}^{(m)}=1$ となる。したがって $\overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij}=1$ となり $r_{ji}=0$ となる。よって $\triangledown R \leqq I$ となり，$I \leqq R$ だから $\triangledown R = I$ となる。　（証明終）

〔性質16〕

$I \leqq R$，ある ℓ ($\ell=0$, 1, 2, $\cdots$) に対して $R^{\ell} \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R = I$

（証明）　性質15による。　（証明終）

〔性質17〕

$I \leqq R$, ある ℓ ($\ell=0$, 1, 2, …)に対して $(R \wedge \overline{I}) \times R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R = I$

(証明)　性質15による。 (証明終)

〔性質18〕(4)

$I \leqq R$, ある ℓ ($\ell=1$, 2, …)に対して $R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R = I$

(証明)　$R^{\ell-1} \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R^{\ell-1} \times R = R^{\ell}$ だから性質16によって $\triangledown R = I$。

(証明終)

〔性質19〕

$I \leqq R$, $R^2 \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R = I$

(証明)　性質18による。 (証明終)

〔性質20〕

$I \leqq R$, $R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R = I$

(証明)　性質16による。 (証明終)

〔性質21〕

$I \leqq R$, $(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R = I$

(証明)　性質17による。 (証明終)

〔注意3〕

一般には,

$$I \leqq R,\ (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R = I$$

とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば, $(R \wedge \overline{I})^2 = I$ であるけれども $\triangledown R = I$ ではない。しかし, 以下の性質25で示すように, 一般に

$$I \leqq R,\ (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \Longrightarrow \triangledown R = I$$

は成立する。

〔性質22〕

ある ℓ ($\ell=1$, 2, …)に対して $(R \wedge \overline{I})^{2\ell-1} \leqq \overline{R'} \Longrightarrow \triangledown R \leqq I$

（証明）　$S=R\wedge\overline{I}$ とおき，$r_{ij}=r_{ji}=1$（$i\neq j$）とする。このとき $s_{ij}=s_{ji}=1$ だから $s_{ii}^{(2)}=1$ となり $s_{ij}^{(2\ell-1)}=s_{ij}^{(2(\ell-1)+1)}=1$ となる。したがって $\overline{r_{ji}}=1$ となるが，これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。よって $\triangledown R\leqq I$ となる。　（証明終）

〔注意4〕

すでに性質13で示したように，一般に

$$\text{ある } \ell\ (\ell=1,\ 2,\ \cdots) \text{ に対して } R^{2\ell-1}\leqq\overline{R'}\vee I \Longrightarrow \triangledown R\leqq I$$

が成立する。

〔性質23〕

$I\leqq R$，ある ℓ（$\ell=1,\ 2,\ \cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{2\ell}\leqq\overline{R'}\Longrightarrow\triangledown R=I$

（証明）　$S=R\wedge\overline{I}$ とおき，$r_{ij}=r_{ji}=1$（$i\neq j$）とする。このとき $s_{ij}=s_{ji}=1$ だから $s_{ii}^{(2)}=1$ となり，$s_{ii}^{(2\ell)}=1$ となる。したがって $\overline{r_{ii}}=1$ となるが，これは $r_{ii}=1$ と矛盾する。よって $\triangledown R\leqq I$ となり，また $I\leqq R$ だから $\triangledown R=I$ となる。　（証明終）

〔性質24〕

$I\leqq R$，ある ℓ（$\ell=1,\ 2,\ \cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{\ell}\leqq\overline{R'}$

$\Longrightarrow\triangledown R=I$

（証明）　性質22および性質23による。　（証明終）

〔性質25〕

$I\leqq R$，$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\Longrightarrow\triangledown R=I$

（証明）　性質24による。　（証明終）

〔性質26〕

ある ℓ，m（$\ell,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{2\ell}\times R\times(R\wedge\overline{I})^{2m}\leqq\overline{R'}\vee I\Longrightarrow\triangledown R\leqq I$

（証明）　$S=R\wedge\overline{I}$ とおき，$r_{ij}=r_{ji}=1$（$i\neq j$）とする。このとき $s_{ij}=s_{ji}=1$ で $s_{ii}^{(2)}=s_{jj}^{(2)}=1$ だから $s_{ii}^{(2\ell)}=s_{jj}^{(2m)}=1$ となり $s_{ii}^{(2\ell)}\wedge r_{ij}\wedge s_{jj}^{(2m)}=1$ となる。したがって $\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}=1$ となり，$r_{ji}=0$ となるが，これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。よって $\triangledown R\leqq I$。　（証明終）

〔性質27〕

ある ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$) に対して $R \times (R \wedge \overline{I})^{2\ell} \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \nabla R \leqq I$

（証明）性質26による。（証明終）

〔性質28〕

ある ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$) に対して $(R \wedge \overline{I})^{2\ell} \times R \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \nabla R \leqq I$

（証明）性質26による。（証明終）

3.3　反対称的推移関係の性質

反対称的な推移関係のもつ性質について述べるが，ここでは連結性や反射性は仮定しない。

〔性質29〕(4)

$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow$ すべての k ($k = 1, 2, \cdots$) に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$

〔性質30〕

$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

（証明）　性質29による。（証明終）

〔性質31〕

(1)　$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \vee I$

(2)　$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow (R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \vee I$

（証明）　性質30による。（証明終）

〔性質32〕(9)

$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow$ すべての k ($k = 1, 2, \cdots$) に対して $(R \wedge \overline{I})^k \leqq \overline{R'}$

〔性質33〕

(1)　$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I}$

(2)　$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow$ すべての ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$) に対して $R^\ell \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I}$

（証明）　(1)　$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ ($k \neq j$) とおく。$R^2 \leqq R$ によって $r_{ij} = 1$ となり，また $\nabla R \leqq I$ によって $r_{jk} = 0$ となる。$r_{ik} = 1$ および $r_{jk} = 0$ によって $i \neq j$。したがって $r_{ij} \wedge \overline{\delta}_{ij} = 1$。

(2)　(1)によって

$$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I}$$

$$R^2 \times (R \wedge \overline{I}) = R \times R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I}$$

$$R^3 \times (R \wedge \overline{I}) = R \times R^2 \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I}$$

以下同様にして

$R^{\ell} \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I}$　　(証明終)

〔性質34〕

(1) $R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow (R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R \wedge \overline{I}$

(2) $R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow$ すべての ℓ ($\ell = 1,\ 2,\ \cdots$)に対して$(R \wedge \overline{I}) \times R^{\ell} \leqq R \wedge \overline{I}$

(証明) (1) $r_{ik} = r_{kj} = 1$ $(i \neq k)$とおく。$R^2 \leqq R$ によって$r_{ij} = 1$となり，また$\nabla R \leqq I$ によって$r_{ki} = 0$となる。$r_{kj} = 1$および$r_{ki} = 0$によって$i \neq j$。したがって$r_{ij} \wedge \overline{\delta_{ij}} = 1$。

(2) (1)による。　　(証明終)

〔性質35〕

$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow$ すべてのℓ，m (ℓ，$m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)に対して$R^{\ell} \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq R \wedge \overline{I}$

(証明) 性質33および性質34によって

$R^{\ell} \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq R \wedge \overline{I}$　　(証明終)

〔性質36〕

$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow$ すべての ℓ，m (ℓ，$m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)に対して$R^{\ell} \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq \overline{R'}$

(証明) (1) $\ell = m = 0$のとき

性質12によって　$R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'}$。

(2) $\ell \geqq 1$または$m \geqq 1$のとき

性質35および性質12によって

$R^{\ell} \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'}$　　(証明終)

〔性質37〕

(1) $R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow$ すべての ℓ ($\ell = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)に対して

$R^{\ell}\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}$

(2) $R^2\leqq R,\ \triangledown R\leqq I \Longrightarrow R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}$

(証明) 性質36による。 (証明終)

〔性質38〕

(1) $R^2\leqq R,\ \triangledown R\leqq I \Longrightarrow$ すべての ℓ ($\ell=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)に対して$(R\wedge\overline{I})\times R^{\ell}\leqq\overline{R'}$

(2) $R^2\leqq R,\ \triangledown R\leqq I \Longrightarrow (R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}$

(証明) 性質36による。 (証明終)

〔性質39〕

$R^2\leqq R,\ \triangledown R\leqq I \Longrightarrow (R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}$

(証明) 性質32による。 (証明終)

3.4 連結性のもとでの反対称的推移関係

まず一般の連結性のもとで，反対称的推移性と同値になる条件，および関連する性質について述べる。次に反射的でかつ反対称的な連結的推移関係の性質，とくに反射的な連結性のもとで反対称的推移性と同値になる条件を示す。

〔性質40〕

$R\vee R'\vee I=E$ のとき次の条件は同値である。

(1) すべてのℓ ($\ell=1,\ 2,\ \cdots$)に対して$R^{6\ell-1}\vee I=\overline{R'}\vee I$

(2) $R^5\vee I=\overline{R'}\vee I$

(3) あるℓ ($\ell=1,\ 2,\ \cdots$)に対し$R^{6\ell-1}\vee I=\overline{R'}\vee I$

(4) $R^2=R,\ \triangledown R\leqq I$

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2) 明らかである。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (4) 性質3によって$R^2\leqq R$となり，また性質13によって$\triangledown R\leqq I$となる。次に$R\leqq R^2$を示す。いま$r_{ij}=1$のとき$r_{ij}^{(2)}=0$とすれば$r_{ii}=r_{jj}=0$。したがって$i\neq j$となる。

(a)　$r_{ji}=0$ のとき：$R^{6\ell-1}\vee I=\overline{R'}\vee I$ から $r_{ij}^{(6\ell-1)}=1$ となり，$R^2\leqq R$ だから

$$r_{ij}^{(6\ell-1)}\leqq r_{ij}^{(6\ell-2)}\leqq\cdots\leqq r_{ij}^{(3)}\leqq r_{ij}^{(2)}\leqq r_{ij}$$

となる。したがって $r_{ij}^{(2)}=1$ となり $r_{ij}^{(2)}=0$ と矛盾する。

(b)　$r_{ji}=1$ のとき：$r_{ii}^{(2)}=1$ となり，$R^2\leqq R$ から $r_{ii}=1$ となる。しかし，これは $r_{ii}=0$ と矛盾する。

ゆえに $r_{ij}=1$ のとき $r_{ij}^{(2)}=1$，すなわち $R\leqq R^2$ となる。

(4) $\Longrightarrow$ (1)　$R^{6\ell-1}=R$ となるから $R\vee I=\overline{R'}\vee I$ すなわち $r_{ij}\vee\delta_{ij}=\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}$ を示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i\neq j$ とする。$r_{ij}=1$ のときは $\triangledown R\leqq I$ から $r_{ji}=0$ となり $\overline{r_{ji}}=1$ となる。また $r_{ij}=0$ のときは $R\vee R'\vee I=E$ によって $r_{ji}=1$ となる。ゆえに $\overline{r}_{ji}=0$。　(証明終)

〔性質41〕

$R\vee R'\vee I=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　すべての ℓ $(\ell=1,\ 2,\ \cdots)$ に対し $R^{6\ell-1}=\overline{R'}\vee I$

(2)　$R^5=\overline{R'}\vee I$

(3)　ある ℓ $(\ell=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{6\ell-1}=\overline{R'}\vee I$

(4)　$R^2=R,\ \triangledown R=I$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　明らかである。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　$R^{6\ell-1}=\overline{R'}\vee I$ から $R^{6\ell-1}\vee I=\overline{R'}\vee I$。したがって性質40から $R^2=R,\ \triangledown R\leqq I$。いま $I\leqq R^{6\ell-1}$ であるから $I\leqq R$。よって $\triangledown R=I$。

(4) $\Longrightarrow$ (1)　性質40によって $R^{6\ell-1}\vee I=\overline{R'}\vee I$。ところで $I\leqq R$ だから $I\leqq R^{6\ell-1}$。したがって $R^{6\ell-1}=\overline{R'}\vee I$。　(証明終)

〔性質42〕

(1)　$R\vee R'\vee I=E$，ある ℓ $(\ell=1,\ 2,\ \cdots)$ に対し $R^{6\ell-1}=\overline{R'}\vee I\Longrightarrow R\vee R'=E$

(2)　$R\vee R'\vee I=E,\ R^5=\overline{R'}\vee I\Longrightarrow R\vee R'=E$

(証明)　性質41による。　(証明終)

〔性質43〕[8]

あるh, ℓ (h, $\ell=1$, 2, …)に対して$R^{2h\ell-1}=\overline{R'}\vee I=R^{\ell}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

〔性質44〕

(1) あるℓ ($\ell=1$, 2, …)に対して$R^{6\ell-1}=\overline{R'}\vee I=R^{\ell}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(2) $R^{11}=\overline{R'}\vee I=R^{2}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(証明) (1) 性質43による。

(2) (1)による。　(証明終)

〔性質45〕[8]

(1) あるℓ ($\ell=1$, 2, …)に対して$R^{12\ell-7}=\overline{R'}\vee I=R^{6\ell-3}\vee I\Longrightarrow R\vee R'=E$, $R^{2}=R$

(2) $R^{5}=\overline{R'}\vee I=R^{3}\vee I\Longrightarrow R\vee R'=E$, $R^{2}=R$

〔性質46〕

次の条件は同値である。

(1) $R\vee R'=E$, $R^{2}\leqq R$, $\triangledown R\leqq I$

(2) すべてのℓ ($\ell=1$, 2, …)に対して$R^{6\ell-1}=\overline{R'}\vee I=R^{\ell}\vee I$

(3) $R^{5}=\overline{R'}\vee I=R\vee I$

(4) あるℓ ($\ell=1$, 2, …)に対して$R^{6\ell-1}=\overline{R'}\vee I=R^{\ell}\vee I$

(5) すべてのℓ ($\ell=1$, 2, …)に対して$R^{12\ell-7}=\overline{R'}\vee I=R^{6\ell-3}\vee I$

(6) $R^{5}=\overline{R'}\vee I=R^{3}\vee I$

(7) あるℓ ($\ell=1$, 2, …)に対して$R^{12\ell-7}=\overline{R'}\vee I=R^{6\ell-3}\vee I$

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2) $I\leqq R$だから$R^{2}\leqq R$によって$R^{2}=R$となり$R=R^{6\ell-1}=R^{\ell}$となる。また$R\vee I=R$となるから，$R=\overline{R'}\vee I$すなわち$r_{ij}=\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}$を示せばよい。$i=j$のときは明らかであるから$i\neq j$とする。$r_{ij}=1$のとき，$\triangledown R\leqq I$によって$r_{ji}=0$すなわち$\overline{r_{ji}}=1$。また$r_{ij}=0$のとき，$R\vee R'=E$によって$r_{ji}=1$すなわち$\overline{r_{ji}}=0$。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　明らかである。

(4) $\Longrightarrow$ (1)　性質44によって$R \vee R' \vee I = E$。また性質41によって$R^2 = R$, $\triangledown R = I$。したがって$R \vee R' = E$。

(1) $\Longrightarrow$ (5)　$I \leqq R$ だから $R^2 \leqq R$ によって $R^2 = R$ となり $R = R^{12\ell-7} = R^{6\ell-3}$ となる。また$R \vee I = R$ となるから，$R = \overline{R'} \vee I$ すなわち $r_{ij} = \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij}$ を示せばよい。$i = j$ のときは明らかだから $i \neq j$ とする。$r_{ij} = 1$ のとき，$\triangledown R \leqq I$ によって $r_{ji} = 0$。すなわち $\overline{r_{ji}} = 1$。また $r_{ij} = 0$ のとき，$R \vee R' = E$ によって $r_{ji} = 1$ すなわち $\overline{r_{ji}} = 0$。

(5) $\Longrightarrow$ (6)　明らかである。

(6) $\Longrightarrow$ (7)　明らかである。

(7) $\Longrightarrow$ (1)　性質45(1)によって$R \vee R' = E$, $R^2 = R$。また $R^{12\ell-7} = R^{2(6\ell-3)-1} = \overline{R'} \vee I$ だから性質13によって$\triangledown R \leqq I$。　(証明終)

〔性質47〕

$R \vee R' = E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $\triangledown R \leqq I$

(2)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'}$

(3)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \vee I$

(4)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'}$

(5)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \vee I$

(6)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'}$

(7)　$R \vee (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質37(2)による。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (1)　性質 7(1)によって$R^2 = R$。また$I \leqq R$ だから性質20によって$\triangledown R = I$。

(1) $\Longrightarrow$ (4)　性質38(2)による。

(4) $\Longrightarrow$ (5)　明らかである。

(5) $\Longrightarrow$ (1)　性質 7(2)によって$R^2 = R$。また$I \leqq R$ だから性質21によって

$\triangledown R=I$。

(1) $\Longrightarrow$ (6)　性質39による。

(6) $\Longrightarrow$ (1)　性質 8 によって $R^2=R$。また $I \leqq R$ だから性質25によって $\triangledown R=I$。

(1) $\Longrightarrow$ (7)　性質39によって $(R\wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \leqq \overline{R'}\vee I$。また $\triangledown R \leqq I$ によって $R\wedge R'\wedge \overline{I}=O$ だから $R\leqq \overline{R'}\vee I$。したがって $R\vee(R\wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'}\vee I$。

(7) $\Longrightarrow$ (1)　$(R\wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'}\vee I$ だから性質 6 によって $R^2=R$。また $R \leqq \overline{R'}\vee I$ だから $R\wedge R' \leqq (\overline{R'}\vee I)\wedge R' \leqq I$ すなわち $\triangledown R \leqq I$。　(証明終)

なお，$R\vee R'=E$ のとき，$R^2\leqq R$，$\triangledown R\leqq I$ と同値になる条件に関しては，すでに多数の条件が知られている[(4)(7)]。例えば次の性質が知られている。

〔性質48〕[(4)]

$R\vee R'=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$，$\triangledown R\leqq I$

(2)　$R^2\leqq \overline{R'}\vee I$

(3)　$R^2=\overline{R'}\vee I$

(4)　すべての ℓ $(\ell=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^\ell \leqq \overline{R'}\vee I$

(5)　ある ℓ $(\ell=2,\ 3,\ \cdots)$ に対して $R^\ell \leqq \overline{R'}\vee I$

(6)　すべての ℓ $(\ell=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^\ell = \overline{R'}\vee I$

(7)　ある ℓ $(\ell=2,\ 3,\ \cdots)$ に対して $R^\ell = \overline{R'}\vee I$

〔性質49〕

$R\vee R'=E$ のとき，すべての ℓ $(\ell=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して，

$$R^\ell \leqq \overline{R'}\vee I \Longleftrightarrow R^\ell = \overline{R'}\vee I$$

(証明)　(1)　$R^\ell \leqq \overline{R'}\vee I$ のとき

$\overline{R'}\vee I\leqq R^\ell$ を示せばよい。すなわち $\overline{r_{ji}}\vee \delta_{ij}=1$ のとき $r_{ij}^{(\ell)}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i\neq j$ とする。このとき $r_{ji}=0$ であるから $r_{ij}=1$。また $r_{ii}=1$ であるから $r_{ij}=r_{ij}^{(2)}=\cdots=r_{ij}^{(\ell)}=1$。

(2)　$R^\ell = \overline{R'}\vee I$ のとき

明らかに $R^\ell \leqq \overline{R'}\vee I$。　(証明終)

4．まとめ

本論文では主として連結性のもとでの推移関係，とりわけ反対称的推移関係について考察をおこない，いくつかの基本的性質を明らかにした。それらの大部分はほとんど自明なものであるが，いくつかのものはこれまで余り気付かれていない性質のように思われる。これらの性質は二項関係の議論において，またブール行列の応用において有用ではないかと考えられる。とくに，ここでの中心的な結果は反射的でかつ反対称的な連結的推移関係すなわち全順序に関するものであるが，全順序は多くの分野において重要な基本的順序関係であるので，本論文の結果はそのような分野での議論においても興味深いものとおもわれる。

連結性のもとでの推移関係や negatively transitive 関係，またべき零の関係行列の興味ある性質については，これまでにも詳しく調べられているが[(1)(2)(5)(11)]，今回の報告に関連してさらに考察をおこなう余地が残されているように感じられる。これらについて考察をおこなうことは今後の課題の一つである。

文　献

(1) Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

(2) Behzad, M., G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster: "Graphs & Digraphs," Wadsworth, California (1979).

(3) Fararo, T. J.: "Mathematical Sociology," Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).

(4) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質Ⅱ"，山口経済学雑誌，第35巻第3・4号，pp.281-293（昭和61年1月）。

(5) 橋本　寛："Negatively Transitive 関係の性質"，山口経済学雑誌，第36巻第1・2号，pp.41-58（昭和61年9月）。

(6) 橋本　寛："連結的関係に関する若干の性質"，山口経済学雑誌，第36巻第5・6号，pp.245-261（昭和62年5月）。

(7) 橋本　寛："連結的関係行列の初等的性質"，山口経済学雑誌，第38巻第3・4号，pp.557-576（平成元年7月）。

(8) 橋本　寛："関係の連結性に関するある種の十分条件について"，山口経済学雑誌，第38巻第5・6号，pp.783-797（平成元年11月）。

(9) 橋本　寛："変更された推移性と連結的関係行列"，山口経済学雑誌，第39巻第3・4号，pp.397-416（平成2年11月）。

(10) Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).

(11) Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models, with applications to social, biological, and environmental problems," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).