連結的な反対称的推移関係

橋　本　　　寛

1．はじめに

連結的で反対称的な推移関係は順序関係やトーナメントなどの議論において重要な関係である。本論文では，この連結的で反対称的な推移関係について，ブール行列[5]を用いて考察をおこない，その基本的性質を明らかにしている。とくに，べき等的でかつ反対称的な連結的関係行列の性質を，反射的な場合と必ずしも反射的でない場合とについて調べ，それぞれの同値条件を示している。

また，これらの性質に関連して，ある種の条件を満たす関係行列の存在しないこと，さらに連結的な非反射的推移関係に関する性質についても考察をおこなっている。この連結的な関係は特別なトーナメントに対応していて，べき零行列とも関連があり，その基本的性質についてはこれまでにもよく調べられている[1][6]。

2．定　　義

演算や記法の定義は文献 (1) などに従うものとするが，主要なものを示

せば次のとおりである。0，1の要素からなるn次ブール行列 $R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$ に対して

$$R \vee S=[r_{ij} \vee s_{ij}]=[\max(r_{ij},\ s_{ij})]$$

$$R \wedge S=[r_{ij} \wedge s_{ij}]=[\min(r_{ij},\ s_{ij})]$$

$$R'=[r_{ji}]$$

$$\bar{R}=[\overline{r_{ij}}]=[1-r_{ij}]$$

$$\nabla R=R \wedge R'$$

$$R \times S=[(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$$

と定める。また，一般に行列の次数をnで示し，R^k の (i, j) 要素を $r_{ij}^{(k)}$ で表わすことにする。

単位行列をI，零行列をOとするとき，$I \leqq R$ なるRは反射的，$R \wedge I=O$ なるRは非反射的といわれる。また $\nabla R \leqq I$ であるとき反対称的，$R^2 \leqq R$ なるとき推移的，$R^2=R$ のときべき等的，$R \vee R' \vee I=E$ のとき連結的といわれる。なお，Eは全要素が1の行列である。トーナメントを表現する行列Rは $R \vee R' \vee I=E$ でかつ $\nabla R=O$ となり，$\nabla R=O$ なるRは非対称的といわれる。

3．結　果

まず，与えられた関係行列Rが反対称的すなわち $\nabla R \leqq I$ となる性質を調べ，そのあと連結的で，反対称的で，かつべき等な行列，すなわち $R \vee R' \vee I=E$ で，$\nabla R \leqq I$ で，かつ $R^2=R$ となる行列Rについて，必ずしも反射的でない場合と，反射的な場合とに分けて考察をおこなう。また，連結的な非反射的推移関係行列の性質および関連する性質についても若干の考察をおこなう。

〔性質1〕[2]

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{2\ell-1} \leqq \bar{R}' \vee I \Longrightarrow \nabla R \leqq I$

〔性質2〕

あるℓ ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して$R^{\ell} \vee R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I \Longrightarrow \nabla R \leqq I$

(証明)　性質1による。すなわち，ℓが奇数のときは$R^{\ell} \leqq \bar{R}' \vee I$によって$\nabla R \leqq I$となり，$\ell$が偶数のときは$R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$によって$\nabla R \leqq I$となる。

(証明終)

〔性質3〕

$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I \Longrightarrow \nabla R \leqq I$

(証明)　性質1による。　(証明終)

〔性質4〕

すべてのℓ ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して

$R^{2\ell-1} = \bar{R}' \vee I \Longrightarrow R \leqq R^{2\ell-1}$

(証明)　$r_{ij}=1$とおき，$r^{(2\ell-1)}_{ij}=1$となることを示す。$i=j$のときは明らかであるから$i \neq j$とする。性質1によって$\nabla R \leqq I$であるから，$r_{ji}=0$。したがって$R^{2\ell-1} = \bar{R}' \vee I$から$r^{(2\ell-1)}_{ij}=1$。　(証明終)

〔性質5〕

$R^3 = \bar{R}' \vee I \Longrightarrow R \leqq R^3$

(証明)　性質4による。　(証明終)

〔性質6〕(3)

あるℓ ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して$R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

〔性質7〕

すべてのk, ℓ ($k, \ell=1, 2, \cdots$)に対して

$R^{2k-1} \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' \leqq R^{\ell} \vee I \Longrightarrow R \leqq R^{\ell}$

(証明)　$r_{ij}=1$とおき，$r^{(\ell)}_{ij}=1$となることを示す。

(1)　$i=j$のとき

$r_{ii}=1$となるから$r^{(\ell)}_{ii}=1$。

(2)　$i \neq j$のとき

$R^{2k-1} \leqq \bar{R}' \vee I$だから$r_{ij}=1$によって$r^{(2k-1)}_{ji}=0$。いま$r^{(\ell)}_{ij}=0$とすれば$\bar{R}' \leqq R^{\ell} \vee I$から$r_{ji}=1$。したがって$r^{(2)}_{ii}=1$，$r^{(2k-1)}_{ji}=1$となるが，これは矛盾する。よって$r^{(\ell)}_{ij}=1$。　(証明終)

なお，すでに示している性質4はこの性質7からも得られる。

〔性質8〕

(1)　すべてのℓ ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して

$R^{2\ell-1} \leqq \bar{R}' \vee I, \ \bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I \Longrightarrow R \leqq R^{2\ell}$

(2)　すべてのℓ ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して

$R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I, \ \bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I \Longrightarrow R \leqq R^{2\ell}$

(証明)　性質7による。　(証明終)

〔性質9〕

あるℓ ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して$R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I, \ \bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I$

$\Longrightarrow R^2 = R, \ \nabla R \leqq I, \ R \vee R' \vee I = E$

(証明)　性質6によって$R^2 \leqq R$だから

$R^{2\ell} \leqq \cdots \leqq R^2 \leqq R$

ところで性質8 (2) によって$R \leqq R^{2\ell}$となるので

$R^{2\ell} = \cdots = R^2 = R$

また$R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$だから性質1によって$\nabla R \leqq I$。さらに$\bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I = R \vee I$から$\bar{R}' \vee R' \leqq R \vee R' \vee I$となり，$\bar{R}' \vee R' = E$であるので$R \vee R' \vee I = E$が得られる。　(証明終)

〔性質10〕

$\nabla R \leqq I, \ R \vee R' \vee I = E \Longleftrightarrow R \vee I = \bar{R}' \vee I$

(証明)　(1)　$\nabla R \leqq I, \ R \vee R' \vee I = E$のとき

$$
\begin{aligned}
\bar{R}' \vee I &= (\bar{R}' \vee I) \wedge E \\
&= (\bar{R}' \vee I) \wedge (R \vee R' \vee I) \\
&= (\bar{R}' \wedge R) \vee (\bar{R}' \wedge I) \vee (I \wedge R) \vee (I \wedge R') \vee I \\
&= (\bar{R}' \wedge R) \vee I \\
&= (\bar{R}' \wedge R) \vee \nabla R \vee I \\
&= (\bar{R}' \wedge R) \vee (R \wedge R') \vee I \\
&= R \vee I
\end{aligned}
$$

(2)　$R \vee I = \bar{R}' \vee I$のとき

$$(R \vee I) \wedge R' \wedge \bar{I} = (\bar{R}' \vee I) \wedge R' \wedge \bar{I}$$

$$R \wedge R' \wedge \bar{I} = O$$

したがって $R \wedge R' \leqq I$ すなわち $\nabla R \leqq I$。また

$$R \vee I \vee R' = \bar{R}' \vee I \vee R' = E$$

$$R \vee R' \vee I = E$$

(証明終)

〔性質11〕

$R^2 = R,\ \nabla R \leqq I,\ R \vee R' \vee I = E$

$\Longrightarrow$ すべての k, m(k, m=1, 2, …)に対して

$$R^k \vee I = \bar{R}' \vee I = R^m \vee I$$

(証明)　性質10によって $\bar{R}' \vee I = R \vee I$。また $R^2 = R$ から $R^k = R^m = R$ となるので

$$\bar{R}' \vee I = R \vee I = R^k \vee I = R^m \vee I$$

(証明終)

〔性質12〕

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 = R,\ \nabla R \leqq I,\ R \vee R' \vee I = E$

(2)　すべての k, m(k, m=1, 2, …)に対して $R^k \vee I = \bar{R}' \vee I = R^m \vee I$

(3)　すべての k, m(k, m=1, 2, …)に対して $R^k \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' \leqq R^m \vee I$

(4)　すべての ℓ (ℓ=1, 2, …)に対して $R^{2\ell+1} \vee I = \bar{R}' \vee I = R^{2\ell} \vee I$

(5)　すべての ℓ (ℓ=1, 2, …)に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I$

(6)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' \leqq R^2 \vee I$

(7)　$R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' \leqq R^2 \vee I$

(8)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I \leqq R^2 \vee I$

(9)　$R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I \leqq R^2 \vee I$

(10)　$R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I = R^2 \vee I$

(11)　ある ℓ (ℓ=1, 2, …)に対して $R^{2\ell+1} \vee I = \bar{R}' \vee I = R^{2\ell} \vee I$

(12)　ある ℓ (ℓ=1, 2, …)に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質11による。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかに $R^k \leqq R^k \vee I = \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I = R^m \vee I$。

(2) $\Longrightarrow$ (4)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (5)　明らかである。

(4) $\Longrightarrow$ (10)　明らかである。

(5) $\Longrightarrow$ (6)　明らかでかる。

(6) $\Longrightarrow$ (7)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I$ から $R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I \vee I = \bar{R}' \vee I$。

(7) $\Longrightarrow$ (8)　$R^3 \leqq R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I$ であり，また $\bar{R}' \leqq R^2 \vee I$ から $\bar{R}' \vee I \leqq R^2 \vee I \vee I = R^2 \vee I$。

(8) $\Longrightarrow$ (9)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I$ から $R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I \vee I = \bar{R}' \vee I$。

(9) $\Longrightarrow$ (12)　$R^3 \leqq R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I \leqq R^2 \vee I$ であるから $\ell = 1$ で(12)が成立する。

(10) $\Longrightarrow$ (11)　明らかである。

(11) $\Longrightarrow$ (12)　明らかに $R^{2\ell+1} \leqq R^{2\ell+1} \vee I = \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I = R^{2\ell} \vee I$。

(12) $\Longrightarrow$ (1)　性質9による。　(証明終)

なお，$R^2 = R$, $\nabla R \leqq I$, $R \vee R' \vee I = E$ と同値な条件については性質36においても述べる。

〔性質13〕

ある ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^{2\ell}$

$\Longrightarrow R^2 = R$, $\nabla R = I$, $R \vee R' = E$

(証明)　性質9によって $R^2 = R$, $\nabla R \leqq I$。また $\bar{R}' \leqq R^{2\ell} = R$ から $\bar{R}' \vee R' \leqq R \vee R'$。ところで $\bar{R}' \vee R' = E$ であるから $R \vee R' = E$。したがって $I \leqq R$ となり，$\nabla R \leqq I$ から $\nabla R = I$。　(証明終)

〔性質14〕

$\nabla R = I$, $R \vee R' = E \Longleftrightarrow R = \bar{R}' \vee I$

(証明)　(1)　$\nabla R = I$, $R \vee R' = E$ のとき

$$\begin{aligned} \bar{R}' \vee I &= (\bar{R}' \vee I) \wedge E \\ &= (\bar{R}' \vee I) \wedge (R \vee R') \\ &= (\bar{R}' \wedge R) \vee (I \wedge R) \vee (I \wedge R') \end{aligned}$$

$$=(\bar{R}'\wedge R)\vee I$$
$$=(\bar{R}'\wedge R)\vee \nabla R$$
$$=(\bar{R}'\wedge R)\vee (R\wedge R')=R$$

(2)　$R=\bar{R}'\vee I$ のとき

$$R\vee R'=\bar{R}'\vee I\vee R'=E$$

また

$$R\wedge R'=(\bar{R}'\vee I)\wedge R'=I\wedge R'\leqq I。$$

となり，$I\leqq R$ だから $\nabla R=R\wedge R'=I$。 (証明終)

〔性質15〕

$R^2=R$, $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$

$\Longrightarrow$ すべての k, m(k, m=1, 2, …)に対して $R^k=\bar{R}'\vee I=R^m$

(証明)　$R^2=R$ によって $R^k=R^m=R$ となり，また性質14によって $R^k=R^m=R=\bar{R}'\vee I$。 (証明終)

〔性質16〕(3)

ある ℓ (ℓ=1, 2, …)に対して $R^{2\ell-1}\vee I\leqq\bar{R}'\vee I$, $\bar{R}'\leqq R^{\ell}$ $\Longrightarrow$ $R\vee R'=E$

〔性質17〕

(1) ある ℓ (ℓ=1, 2, …)に対して $R^{2\ell-1}\leqq\bar{R}'\vee I$, $\bar{R}'\leqq R^{\ell}$

$\Longrightarrow$ $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$

(2) ある ℓ (ℓ=1, 2, …)に対して $R^{2\ell+1}\leqq\bar{R}'\vee I$, $\bar{R}'\leqq R^{\ell+1}$

$\Longrightarrow$ $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$

(証明)　(1)　$R^{2\ell-1}\leqq\bar{R}'\vee I$ から

$$R^{2\ell-1}\vee I\leqq\bar{R}'\vee I\vee I=\bar{R}'\vee I$$

性質16によって $R\vee R'=E$, $I\leqq R$。また性質 1 によって $\nabla R\leqq I$ となり，$I\leqq R$ だから $\nabla R=I$。

(2)　(1)による。 (証明終)

〔性質18〕

ある ℓ (ℓ=1, 2, …)に対して $R^{2\ell+1}\leqq\bar{R}'\vee I$, $\bar{R}'\leqq R^{\ell+1}$

$$\Longrightarrow R^2=R,\ \nabla R=I,\ R\vee R'=E$$

(証明)　性質17(2)によって $\nabla R=I,\ R\vee R'=E$。$\ell+1\leqq 2\ell$ だから $I\leqq R$ によって $R^{\ell+1}\leqq R^{2\ell}$ となるので

$$\bar{R}'\leqq R^{\ell+1}\leqq R^{2\ell}\leqq R^{2\ell}\vee I$$

よって性質6から $R^2\leqq R$ となり，$I\leqq R$ だから $R^2=R$ となる。　(証明終)

上記の性質18に関して，$\ell=0$ とすることはできない。すなわち，一般には

$$R\leqq\bar{R}'\vee I,\ \bar{R}'\leqq R \Longrightarrow R^2=R$$

とはならない。たとえば，いま

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\bar{R}'=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \bar{R}'\vee I=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=R$$

$$R^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\neq R$$

となり，$R\leqq\bar{R}'\vee I,\ \bar{R}'\leqq R$ であるが，$R^2=R$ とはならない。

〔性質19〕

次の条件は同値である。

(1)　$R^2=R,\ \nabla R=I,\ R\vee R'=E$

(2)　すべての k，m(k，m=1，2，…)に対して $R^k=\bar{R}'\vee I=R^m$

(3)　すべての k，m(k，m=1，2，…)対して $R^k\vee I=\bar{R}'\vee I=R^m$

(4)　すべての k，m(k，m=1，2，…)に対して $R^k\leqq\bar{R}'\vee I,\ \bar{R}'\leqq R^m$

(5)　ある ℓ ($\ell=1，2，\cdots$)に対して $R^{2\ell+1}\leqq\bar{R}'\vee I,\ \bar{R}'\leqq R^{2\ell}$

(6)　あるℓ ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^{\ell+1}$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質15による。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　$R^k = \bar{R}' \vee I$ から

$R^k \vee I = \bar{R}' \vee I \vee I = \bar{R}' \vee I$

(3) $\Longrightarrow$ (4)　$R^k \leqq R^k \vee I = \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I = R^m$

(4) $\Longrightarrow$ (5)　$k = 2\ell + 1$, $m = 2\ell$ とおいて

$R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^{2\ell}$

(4) $\Longrightarrow$ (6)　$k = 2\ell + 1$, $m = \ell + 1$ とおいて

$R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^{\ell+1}$

(5) $\Longrightarrow$ (1)　性質13による。

(6) $\Longrightarrow$ (1)　性質18による。　(証明終)

〔性質20〕

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 = R$, $\nabla R = I$, $R \vee R' = E$

(2)　$R^3 = \bar{R}' \vee I = R^2$

(3)　$R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I = R^2$

(4)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I \leqq R^2$

(5)　$R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I \leqq R^2$

(6)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^2$

(7)　$R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^2$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質15による。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　$R^3 = \bar{R}' \vee I$ から

$R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I \vee I = \bar{R}' \vee I$

(3) $\Longrightarrow$ (4)　$R^3 \leqq R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I$

(4) $\Longrightarrow$ (5)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I$ から

$R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I \vee I = \bar{R}' \vee I$

(5) $\Longrightarrow$ (6)　$R^3 \leqq R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I \leqq R^2$

(6) $\Longrightarrow$ (7)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I$ から

$R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I \vee I = \bar{R}' \vee I$

(7) $\Longrightarrow$ (1)　$R^3 \leqq R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I$

性質13によって $R^2 = R$, $\nabla R = I$, $R \vee R' = E$。　(証明終)

〔性質21〕

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 = R$, $\nabla R = I$, $R \vee R' = E$

(2)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I = R^2$

(3)　$R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I = R^2$

(4)　$R^3 = \bar{R}' \vee I \leqq R^2$

(5)　$R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I \leqq R^2$

(6)　$R^3 = \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^2$

(7)　$R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^2$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質15によって $R^3 = \bar{R}' \vee I = R^2$ となるから，当然 $R^3 \leqq \bar{R}' \vee I = R^2$。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I$ から

$R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I \vee I = \bar{R}' \vee I$

(3) $\Longrightarrow$ (1)　$R^3 \leqq R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I = R^2$

性質13によって $R^2 = R$, $\nabla R = I$, $R \vee R' = E$。

(1) $\Longrightarrow$ (4)　性質15による。

(4) $\Longrightarrow$ (5)　$R^3 = \bar{R}' \vee I$ から

$R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I \vee I = \bar{R}' \vee I$

(5) $\Longrightarrow$ (1)　$R^3 \leqq R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I \leqq R^2$

性質13によって $R^2 = R$, $\nabla R = I$, $R \vee R' = E$。

(1) $\Longrightarrow$ (6)　性質15によって $R^3 = \bar{R}' \vee I = R^2$ であるから $R^3 = \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I = R^2$。

(6) $\Longrightarrow$ (7)　$R^3 = \bar{R}' \vee I$ から

$R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I \vee I = \bar{R}' \vee I$

(7) $\Longrightarrow$ (1)　$R^3 \leqq R^3 \vee I = \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^2$

性質13によって $R^2=R$, $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$。　(証明終)

なお, $R^2=R$, $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$ と同値な条件については性質39においても示している。

〔性質22〕

次の条件は同値である。

(1)　$R\wedge I=O$

(2)　すべての ℓ ($\ell=0, 1, 2, \cdots$) に対して $R^\ell\wedge I\leqq\bar{R}\vee\bar{R}'\vee\bar{I}$

(3)　$R\wedge I\leqq\bar{R}\vee\bar{R}'\vee\bar{I}$

(4)　ある ℓ ($\ell=0, 1, 2, \cdots$) に対して $R^\ell\wedge I\leqq\bar{R}\vee\bar{R}'\vee\bar{I}$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　$R\wedge I=O$ から $\bar{R}\vee\bar{I}=E$。したがって

$$R^\ell\wedge I\leqq\bar{R}\vee\bar{I}\leqq\bar{R}\vee\bar{R}'\vee\bar{I}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　明らかである。

(4) $\Longrightarrow$ (1)　$r_{ii}=1$ とすると $\bar{R}\vee\bar{R}'\vee\bar{I}$ の(i, i)要素は0。しかし $r_{ii}=1$ のとき $r_{ii}^{(\ell)}=1$ となるので $R^\ell\wedge I$ の(i, i)要素は1となり, $R^\ell\wedge I\leqq\bar{R}\vee\bar{R}'\vee\bar{I}$ が成立しない。よって $r_{ii}=0$ でなければならない。　(証明終)

上記の性質22において, $\ell=0$ のときは $R^0=I$ と定めるものとする。

〔性質23〕

次の条件は同値である。

(1)　$R\wedge I=O$

(2)　$R\wedge I\leqq\bar{R}\wedge\bar{I}$

(3)　$R\wedge I\leqq\bar{R}\vee\bar{I}$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　$R\wedge I=O$ のとき明らかに $R\leqq\bar{I}$ かつ $I\leqq\bar{R}$ であるから $R\wedge I\leqq\bar{R}\wedge\bar{I}$。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　$R\wedge I\leqq\bar{R}\wedge\bar{I}\leqq\bar{R}\vee\bar{I}$

(3) $\Longrightarrow$ (1)　$R\wedge I\leqq\bar{R}\vee\bar{I}=\overline{R\wedge I}$

$$(R\wedge I)\wedge(R\wedge I)\leqq\overline{R\wedge I}\wedge(R\wedge I)=O$$

したがって $R\wedge I=O$。　(証明終)

〔性質24〕

次の条件は同値である。

(1)　$R \wedge I = O$

(2)　すべてのℓ ($\ell =1, 2, \cdots$)に対して $R^{\ell} \leqq \bar{R} \vee \bar{R}' \vee \bar{I}$

(3)　$R \leqq \bar{R} \vee \bar{R}' \vee \bar{I}$

(4)　あるℓ ($\ell =1, 2, \cdots$)に対して $R^{\ell} \leqq \bar{R} \vee \bar{R}' \vee \bar{I}$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　$R \wedge I = O$ から $\bar{R} \vee \bar{I} = E$。したがって

$$R^{\ell} \leqq \bar{R} \vee \bar{I} \leqq \bar{R} \vee \bar{R}' \vee \bar{I}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　明らかである。

(4) $\Longrightarrow$ (1)　性質22(4) $\Longleftrightarrow$ (1)による。　(証明終)

〔性質25〕

あるℓ ($\ell =1, 2, \cdots$)に対して $R^{\ell} \leqq \bar{R}' \Longrightarrow R \wedge I = O$

(証明)　性質24(4) $\Longleftrightarrow$ (1)による。　(証明終)

〔性質26〕(1)

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Longrightarrow R^n = O$$

〔性質27〕

あるℓ ($\ell =1, 2, \cdots$)に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I \Longrightarrow R = O$

(証明)　$R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I$ であるから性質 9 によって $R^2 = R$。ところで $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}'$ だから性質25によって $R \wedge I = O$。また性質26によって，$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$ のとき $R^n = O$ となるから

$$R = R^2 = \cdots = R^n = O$$　(証明終)

なお，次に示す性質28から明らかになるように上の性質27の条件を満たす行列の例としては $R =$〔0〕すなわち1次の零行列しかない。

〔性質28〕

$n \geqq 2$ のとき，あるℓ ($\ell =1, 2, \cdots$)に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I$ となる R は存在しない。

(証明)　性質27によって $R = O$ となる。いま $r_{ij} = 0$ ($i \neq j$) とすれば $\bar{R}' \leqq$

$R^{2\ell} \vee I$ によって $r_{ji}^{(2\ell)}=1$ となるが，$R=O$ であるからこれは矛盾する。よって $n \geqq 2$ のとき $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \leqq R^{2\ell} \vee I$ となる R は存在しない。(証明終)

上記の性質28に関連して次の性質29も知られている。

〔性質29〕[3]

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \leqq R^{2\ell}$ なる R は存在しない。

〔性質30〕[3]

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

〔性質31〕

$\ell \geqq 2$ のとき

$$R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I \Longrightarrow R^2 = R$$

(証明)　性質30によって $R^2 \leqq R$ だから，$R \leqq R^2$ を示せばよい。いま $r_{ij}=1$ とおき $r_{ij}^{(2)}=1$ となることを示す。

(1)　$i=j$ のとき

$r_{ii}=1$ だから $r_{ii}^{(2)}=1$。

(2)　$i \neq j$ のとき

$r_{ij}^{(2)}=1$ を示すために，$r_{ij}^{(2)}=0$ とおけば矛盾が生じることを示す。いま $r_{ij}^{(2)}=0$ とすれば，$r_{ij}=1$ だから $r_{ii}=0$。

(a)　$r_{ji}=0$ のとき

$\bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I$ から $r_{ij}^{(\ell)}=1$。$r_{ii}=0$ だからある $k \neq i$ に対して $r_{ik} \wedge r_{kj}^{(\ell-1)}=1$。$R^2 \leqq R$ だから $r_{kj}^{(\ell-1)}=1$ より $r_{kj}=1$。よって $r_{ij}^{(2)}=1$ となり，矛盾が生じる。

(b)　$r_{ji}=1$ のとき

$r_{ij}=1$ だから $r_{ii}^{(2)}=1$ となり，$R^2 \leqq R$ によって $r_{ii}=1$ となり，矛盾が生じる。(証明終)

〔性質32〕

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I \Longrightarrow \nabla R \leqq I$

(証明)　$R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$ でかつ $R^{\ell} \leqq \bar{R}' \vee I$ であるから性質2によって $\nabla R \leqq I$。(証明終)

〔性質33〕(3)

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

上の性質33において ℓ を 2ℓ とすれば，次の性質34が成立する。

〔性質34〕

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I = R^{2\ell} \vee I$

$\Longrightarrow R^2 = R, \ \nabla R \leqq I, \ R \vee R' \vee I = E$

(証明)　$\bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I = R^{2\ell} \vee I$ であるから性質9によって $R^2 = R$, $\nabla R \leqq I$, $R \vee R' \vee I = E$。　(証明終)

〔性質35〕

$R^2 = R, \ \nabla R \leqq I, \ R \vee R' \vee I = E$

$\Longrightarrow$ すべての k, m ($k, m = 1, 2, \cdots$) に対して $R^k \leqq \bar{R}' \vee I = R^m \vee I$

(証明)　性質11によって $R^k \vee I = \bar{R}' \vee I = R^m \vee I$。したがって

$$R^k \leqq R^k \vee I = \bar{R}' \vee I = R^m \vee I$$

(証明終)

〔性質36〕

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 = R, \ \nabla R \leqq I, \ R \vee R' \vee I = E$

(2)　すべての k, m ($k, m = 1, 2, \cdots$) に対して $R^k \leqq \bar{R}' \vee I = R^m \vee I$

(3)　すべての ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I = R^{2\ell} \vee I$

(4)　$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I = R^2 \vee I$

(5)　ある ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I = R^{2\ell} \vee I$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質35による。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　明らかである。

(4) $\Longrightarrow$ (5)　明らかである。

(5) $\Longrightarrow$ (1)　性質34による。　(証明終)

〔性質37〕

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{2\ell+1}=\bar{R}'\vee I=R^{2\ell}\vee I$

$\Longrightarrow$ $R^2=R$, $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$

(証明)　性質34によって

$R^2=R$, $\nabla R\leqq I$, $R\vee R'\vee I=E$

いま $I\leqq R^{2\ell+1}$ だから $R^2=R$ によって $I\leqq R$。ゆえに $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$。

(証明終)

〔性質38〕

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{\ell+1}\leqq\bar{R}'\vee I=R^{\ell}$

$\Longrightarrow$ $R^2=R$, $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$

(証明)　$\bar{R}'\vee I=R^{\ell}$ から $\bar{R}'\vee I=R^{\ell}\vee I$ となる。したがって性質30によって $R^2\leqq R$ となり，性質32によって $\nabla R\leqq I$ となる。また性質33によって $R\vee R'\vee I=E$ となる。ところで $I\leqq R^{\ell}$ であるから $R^2\leqq R$ によって $I\leqq R$ となる。したがって $R^2=R$, $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$ が得られる。　(証明終)

〔性質39〕

次の条件は同値である。

(1)　$R^2=R$, $\nabla R=I$, $R\vee R'=E$

(2)　すべての ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{2\ell+1}=\bar{R}'\vee I=R^{2\ell}\vee I$

(3)　$R^3=\bar{R}'\vee I=R^2\vee I$

(4)　ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{2\ell+1}=\bar{R}'\vee I=R^{2\ell}\vee I$

(5)　すべての k, m ($k, m=1, 2, \cdots$) に対して $R^{k}\leqq\bar{R}'\vee I=R^{m}$

(6)　すべての ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{\ell+1}\leqq\bar{R}'\vee I=R^{\ell}$

(7)　$R^2\leqq\bar{R}'\vee I=R$

(8)　ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{\ell+1}\leqq\bar{R}'\vee I=R^{\ell}$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質19(1) $\Longleftrightarrow$ (3)による。すなわち，$k=2\ell$, $m=2\ell+1$ とおいて

$$R^{2\ell}\vee I=\bar{R}'\vee I=R^{2\ell+1}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　明らかである。

(4) $\Longrightarrow$ (1) 性質37による。

(1) $\Longrightarrow$ (5) 性質15によって $R^k=\bar{R}'\vee I=R^m$ だから，当然 $R^k\leqq\bar{R}'\vee I=R^m$ となる。

(5) $\Longrightarrow$ (6) 明らかである。

(6) $\Longrightarrow$ (7) 明らかである。

(7) $\Longrightarrow$ (8) 明らかである。

(8) $\Longrightarrow$ (1) 性質38による。 (証明終)

ここで，すでに示している性質30によれば，

$$\text{ある } \ell\ (\ell=1,\ 2,\ \cdots) \text{ に対して } R^{\ell+1}\leqq\bar{R}'\vee I,\ \bar{R}'=R^{\ell}$$
$$\Longrightarrow R^2\leqq R$$

となるが，しかし次の性質40でわかるように，このような条件を満たすRは存在しない。

〔性質40〕

ある ℓ ($\ell=1,2,\cdots$) に対して $R^{\ell+1}\leqq\bar{R}'\vee I$ かつ $\bar{R}'=R^{\ell}$ となるRは存在しない。

(証明) $r_{ii}=1$ とすれば，$\bar{R}'=R^{\ell}$ によって $r_{ii}^{(\ell)}=0$ となるが，これは矛盾するので，$r_{ii}=0$ となる。したがって $\bar{R}'=R^{\ell}$ によって $r_{ii}^{(\ell)}=1$ となるが，性質30によって $R^2\leqq R$ であるので $r_{ii}=1$ となって，また矛盾が生じる。ゆえに，ある ℓ ($\ell=1,\ 2,\ \cdots$) に対して $R^{\ell+1}\leqq\bar{R}'\vee I$ かつ $\bar{R}'=R^{\ell}$ となるようなRは存在しない。 (証明終)

なお，上の性質40に関連して，$\bar{R}'=R$ なるRも存在しない。これは対角要素を考えれば明らかである。一方，$\bar{R}'=R^2$ となるRの例としては次のようなものがある。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

〔性質41〕[1]

$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O \Longrightarrow \nabla R = O$

〔性質42〕

あるℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$)に対して$R^{\ell+1} \leqq \bar{R}'$かつ$\bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I$なるとき

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　$R \wedge I = O$

(3)　$\nabla R = O$

(4)　$R^n = O$

(5)　$R \vee R' \vee I = E$

(証明)　(1)　性質30による。

(2)　$R^{\ell+1} \leqq \bar{R}'$だから性質25によって$R \wedge I = O$。

(3)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$だから性質41によって$\nabla R = O$。

(4)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$のとき性質26によって$R^n = O$。

(5)　性質33によって$R \vee R' \vee I = E$。　(証明終)

この性質42に関しては，以下の性質43に示すように，$n \geqq 2$かつ$\ell \geqq 2$のとき，$R^{\ell+1} \leqq \bar{R}'$かつ$\bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I$を満たすようなRは存在しない。

〔性質43〕

$n \geqq 2$かつ$\ell \geqq 2$のとき，$R^{\ell+1} \leqq \bar{R}'$かつ$\bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I$なるRは存在しない。

(証明)　$n \geqq 2$だから$i \neq j$とする。

(1)　$r_{ij} = 0$のとき

$\bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I$によって$r^{(\ell)}_{ji} = 1$。したがって性質42(2)によってある$k \neq j$に対し$r_{jk} \wedge r^{(\ell-1)}_{ki} = 1$となる。$r_{jk} = 1$および性質42(3)によって$r_{kj} = 0$となり，$\bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I$から$r^{(\ell)}_{jk} = 1$。したがって$r^{(\ell)}_{jk} \wedge r^{(\ell-1)}_{ki} = 1$だから$r^{(2\ell-1)}_{ji} = r^{(2(\ell-1)+1)}_{ji} = 1$となる。また$r^{(\ell)}_{jk} = 1$から，ある$k(1) \neq j$に対し$r_{jk(1)} \wedge r^{(\ell-1)}_{k(1)k} = 1$となる。$r_{jk(1)} = 1$によって$r_{k(1)j} = 0$となり，$r^{(\ell)}_{jk(1)} = 1$。したがって$r^{(\ell)}_{jk(1)} \wedge r^{(\ell-1)}_{k(1)k} \wedge r^{(\ell-1)}_{ki} = 1$だから$r^{(3\ell-2)}_{ji} = r^{(3(\ell-1)+1)}_{ji} = 1$となる。また$r^{(\ell)}_{jk(1)} = 1$から，ある$k(2) \neq j$に対し$r_{jk(2)} \wedge r^{(\ell-1)}_{k(2)k(1)} = 1$となる。$r_{jk(2)} = 1$によって$r_{k(2)j} = 0$となり，$r^{(\ell)}_{jk(2)} = 1$。したがって$r^{(\ell)}_{jk(2)} \wedge r^{(\ell-1)}_{k(2)k(1)} \wedge r^{(\ell-1)}_{k(1)k}$

$\wedge r_{ki}^{(\ell-1)}=1$ だから $r_{ji}^{(4\ell-3)}=r_{ji}^{(4(\ell-1)+1)}=1$。こうして以下同様に繰り返せばある $m(m\geqq n)$ に対して $r_{ji}^{(m)}=1$ となる。しかし，これは性質42(4)による $R^n=O$ と矛盾する。したがって，この場合はありえない。

(2)　$r_{ij}=1$ のとき

性質42(3)によって $r_{ji}=0$ となるので(1)と同様にして，この場合もありえない。　　(証明終)

〔性質44〕

$n\geqq 2$ のとき $R^3\leqq \bar{R}'$ かつ $\bar{R}'\vee I=R^2\vee I$ となる R は存在しない。

(証明)　性質43による。　　(証明終)

〔性質45〕

$n\geqq 2$ のとき

$$R^3\leqq \bar{R}' \Longrightarrow \bar{R}'\vee I\neq R^2\vee I$$

(証明)　性質44による。　　(証明終)

〔性質46〕

すべての $k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して

$$R^k\vee I\leqq \bar{R}' \Longleftrightarrow R^k\leqq \bar{R}'$$

(証明)　(1)　$R^k\vee I\leqq \bar{R}'$ のとき

$$R^k\leqq R^k\vee I\leqq \bar{R}'$$

(2)　$R^k\leqq \bar{R}'$ のとき

性質25によって $R\wedge I=O$。したがって

$$R^k\vee I\leqq \bar{R}'\vee I=\bar{R}'$$　　(証明終)

〔性質47〕

ある $\ell\ (\ell=1,2,\cdots)$ に対して $R^{\ell+1}\vee I\leqq \bar{R}'$ かつ $\bar{R}'\vee I=R^{\ell}\vee I$ なるとき

(1)　$R^2\leqq R$

(2)　$R\wedge I=O$

(3)　$\nabla R=O$

(4)　$R^n=O$

(5)　$R\vee R'\vee I=E$

（証明）　性質46によって

$$R^{\ell+1} \vee I \leqq \bar{R}' \iff R^{\ell+1} \leqq \bar{R}'$$

したがって性質42によって(1)－(5)が成立する。　（証明終）

〔性質48〕

$n \geqq 2$ かつ $\ell \geqq 2$ のとき，$R^{\ell+1} \vee I \leqq \bar{R}'$ かつ $\bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I$ となる R は存在しない。

（証明）　性質46によって

$$R^{\ell+1} \vee I \leqq \bar{R}' \iff R^{\ell+1} \leqq \bar{R}'$$

したがって性質43により与えられた条件を満たす R は存在しない。

（証明終）

〔性質49〕

$n \geqq 2$ のとき $R^3 \vee I \leqq \bar{R}'$ かつ $\bar{R}' \vee I = R^2 \vee I$ となる R は存在しない。

（証明）　性質48による。　（証明終）

〔性質50〕

$n \geqq 2$ のとき

$$R^3 \vee I \leqq \bar{R}' \Longrightarrow \bar{R}' \vee I \neq R^2 \vee I$$

（証明）　性質49による。　（証明終）

〔性質51〕

(1)　すべての k，m(k，m＝1，2，…)に対して

$$R^k \leqq \bar{R}',\ \bar{R}' \vee I = R^m \vee I \iff R^k \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' = R^m \vee I$$

(2)　すべての k，m(k，m＝1，2，…)に対して

$$R^k \vee I \leqq \bar{R}',\ \bar{R}' \vee I = R^m \vee I \iff R^k \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' = R^m \vee I$$

(3)　すべての ℓ (ℓ＝1，2，…)に対して

$$R^{\ell+1} \leqq \bar{R}',\ \bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I \iff R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' = R^{\ell} \vee I$$

(4)　すべての ℓ (ℓ＝1，2，…)に対して

$$R^{\ell+1} \vee I \leqq \bar{R}',\ \bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I \iff R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' = R^{\ell} \vee I$$

（証明）　(1)　(a)　$R^k \leqq \bar{R}'$，$\bar{R}' \vee I = R^m \vee I$ のとき

$$R^k \leqq \bar{R}' \leqq \bar{R}' \vee I$$

また性質25によって $R \wedge I = O$ だから

$$\bar{R}' = \bar{R}' \vee I = R^m \vee I$$

(b) $R^k \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' = R^m \vee I$ のとき

$\bar{R}' = R^m \vee I$ によって $I \leqq \bar{R}'$, すなわち $\bar{R}' \vee I = \bar{R}'$ となるので

$$R^k \leqq \bar{R}' \vee I = \bar{R}'$$

$$\bar{R}' \vee I = \bar{R}' = R^m \vee I$$

(2) 性質46によって

$$R^k \vee I \leqq \bar{R}' \iff R^k \leqq \bar{R}'$$

したがって(1)によって

$$R^k \vee I \leqq \bar{R}',\ \bar{R}' \vee I = R^m \vee I \iff R^k \leqq \bar{R}' \vee I,\ \bar{R}' = R^m \vee I$$

(3) (1)による。

(4) (2)による。 (証明終)

〔性質52〕

ある ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$)に対して $R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$ かつ $\bar{R}' = R^{\ell} \vee I$ のとき

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $R \wedge I = O$

(3) $\nabla R = O$

(4) $R^n = O$

(5) $R \vee R' \vee I = E$

(証明) 性質42および性質51(3)による。 (証明終)

なお, 次の性質53で示すように, $n \geqq 2$ かつ $\ell \geqq 2$ のとき, $R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$ かつ $\bar{R}' = R^{\ell} \vee I$ を満たすような R は存在しない。

〔性質53〕

$n \geqq 2$ かつ $\ell \geqq 2$ のとき, $R^{\ell+1} \leqq \bar{R}' \vee I$ かつ $\bar{R}' = R^{\ell} \vee I$ となる R は存在しない。

(証明) 性質43および性質51(3)による。 (証明終)

〔性質54〕

$n \geqq 2$のとき$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I$かつ$\bar{R}' = R^2 \vee I$となるRは存在しない。

(証明)　性質53による。 (証明終)

〔性質55〕

$n \geqq 2$のとき

$$R^3 \leqq \bar{R}' \vee I \Longrightarrow \bar{R}' \neq R^2 \vee I$$

(証明)　性質54による。 (証明終)

4. まとめ

連結的な反対称的推移関係に関するいくつかの初等的な性質を示した。とくに，与えられた2項関係が連結的で反対称的なべき等的関係およびさらに反射的な関係となるための必要十分条件を示した。これらの性質の一部は文献(3)で示した性質の精密化となっている。

連結的でかつ反対称的な反射的推移関係，すなわち，いわゆる全順序を表現する行列の基本的性質は従来からよく知られており[(4)]，また本論文においても若干の性質を示したが，この関係行列はまださらに2，3の興味ある性質を有しているようにおもわれる。これらの性質について考察することは今後の課題としたい。

文　献

(1) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質"，山口経済学雑誌，第34巻，第3・4号，pp. 387-405 (昭和60年6月)。
(2) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質II"，山口経済学雑誌，第35巻，第3・4号，pp. 281-293 (昭和61年1月)。
(3) 橋本　寛："関係の連結性に関するある種の十分条件について"，山口経済学雑誌，第38巻，第5・6号，pp. 783-797 (平成元年11月)。
(4) 橋本　寛："反射的で反対称的な連結的推移関係"，山口経済学雑誌，第39巻，第5・6号，pp. 621-637 (平成3年7月)。
(5) Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).
(6) Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models, with applications to

social, biological, and environmental problems," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersy (1976).