Homothetic Isoquant 生産関数について

木　藤　正　典

1．はしがき

生産関数の関数型については、多くの人々によって研究され，Cobb-Douglas 生産関数（以後 CD 生産関数と略記する），CES 生産関数，諸種の VES 生産関数を得るに至った。その発展過程は，先づ代替弾力性 $\sigma=1$ の CD 生産関数が求められ，それが $\sigma=$ 定数 $\neq 1$ の CES 生産関数に移り，VES 生産関数に至って $\sigma=$ 変数 となったのである。一方規模弾力性（以後 m にて表わす）も初期の CD 生産関数或は CES 生産関数では $m=1$ であり，研究の進むに従って $m=$ 定数 $\neq 1$ となったのである。ところが更に D. Soskice（1968,〔7〕）は $m=$ 変数である生産関数，従って生産要素の同次関数でない生産関数を提唱するに至り，また S. Clemhout（1968,〔2〕）はやはり同次関数でない homothetic isoquant 生産関数（以後 HI 生産関数と略記する）の利用について研究を行い，Z. Griliches and V. Ringstad（1971，〔4〕）は1963年のノールウエー製造工業のデータを用いて HI 生産関数のテストを行い，結論として non-homothetic な生産関数がより適当であると言っている。

以上の様に現実のデータの検討の結果，生産関数は次々に拡張され複雑化された。その 1 つの問題点としては同次生産関数の仮定の抛棄であるが，要素代替弾力性が資本労働比率のみの関数として定義出来る限度内での最大の生産関数の拡張は HI 生産関数までであるので（次節参照），これ以上の拡張

はあまり意味がない。従ってこの論文は，同次生産関数をHI生産関数まで拡張した場合，どの様な問題が起るかを吟味するものである。

以下では次の様な記号を用いる。

$Y=$ アウトプット，$K=$ 資本，$L=$ 労働

$t=$ 時間，$y=\dfrac{Y}{L}$，$k=\dfrac{K}{L}$，

$\omega=-\dfrac{dK}{dL}$（限界代替率），$\sigma=-\dfrac{dk}{d\omega}\cdot\dfrac{\omega}{k}$（代替弾力性）

$$a=\frac{\partial Y}{\partial L}\cdot\frac{L}{Y},\ b=\frac{\partial Y}{\partial K}\cdot\frac{K}{Y},\ m=a+b$$

2．HI生産関数

$f(K,\ L)$ を $K,\ L$ に関する n 次同次関数（2次偏導関数まで存在して連続）とする。ただし

$$K\geqq 0,\ L\geqq 0,\ f_K\equiv\frac{\partial f}{\partial K}>0,\ f_L\equiv\frac{\partial f}{\partial L}>0$$

とする。生産関数を

$$Y=F(K,\ L) \tag{2.1}$$

とし

$$F(K,\ L)=\varphi\{f(K,\ L)\} \tag{2.2}$$

なる場合を考える。ここで $\varphi(f)$ は2回連続的微分可能な関数であり

$$f\geqq 0\text{のとき}\quad \varphi'(f)>0 \tag{2.3}$$

$$\varphi(0)=0,\ \lim_{f\to\infty}\varphi(f)=\infty \tag{2.4}$$

であるとする。今 $f(K,\ L)$ を1つの生産関数と考えれば

$$f(K,\ L)=L^n f(k,\ 1)=L^n\psi(k) \tag{2.5}$$

であって等生産量曲線についての限界代替率 ω は

$$\omega = -\frac{dK}{dL} = \frac{f_L}{f_K} = n\frac{\psi(k)}{\psi'(k)} - k \tag{2.6}$$

である。即ち ω は資本労働比率 k のみの関数となり HI 生産関数である。更に $F(K,\ L)$ についても (2.2), (2.3) より

$$\omega = \frac{F_L}{F_K} = \frac{f_L}{f_K} = n\frac{\psi(k)}{\psi'(k)} - k \tag{2.7}$$

となり，$F(K,\ L)$ は HI 生産関数である。また，代替弾力性 σ は k のみの関数であるから，次の定理を得る。

〔定理1〕 $\psi'(f) \neq 0$ のときは (2.2) なる変換にあたり，限界代替率および代替弾力性は不変である。(Zellner, A. and N.S. Revankar〔8〕p. 242)

次に Zellner and Revanker による規模関数 (returns to scale function) を次の様に定義する。

$$m(Y) \equiv \frac{1}{Y}(Y_K K + Y_L L) \tag{2.8}$$

従って (2.2) に対しては

$$m(Y) = \frac{\varphi'}{Y}(f_K K + f_L L) = n\varphi'\frac{f}{Y} = n\frac{d\log Y}{d\log f} \tag{2.9}$$

である。また

$$m(Y) = \frac{Y_K}{Y}(K + \omega L) = a\left(1 + \frac{\omega}{k}\right) \tag{2.10}$$

なる関係式も成立する。特に $n = 1$ とおけば

$$m(Y) = \frac{d\log Y}{d\log f} = \frac{\varphi'}{\varphi}f \tag{2.11}$$

を得る。さて (2.2) の $F(K,\ L)$ は HI 生産関数であるが，次の定理が成立する。

〔定理2〕 2回連続的偏微分可能な生産関数 $F(K,\ L)$ が HI 生産関数であるための必要十分条件は $\varphi'(f) \neq 0$ で (2.2) が成立することである。

〔証明〕 十分なことは (2.7) より明らかである。以下必要条件を証明する。変数 $K,\ L$ を

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{K}{L} \\ H &= L \end{aligned}\right\} \quad \text{或は} \quad \left\{\begin{aligned} K &= kH \\ L &= H \end{aligned}\right.$$

に変換すれば

$$Y = F(K,\ L) = G(k,\ H) \tag{2.12}$$

となる。従って

$$Y_K = G_k\frac{\partial k}{\partial K} + G_H\frac{\partial H}{\partial K} = \frac{1}{L}G_k$$

$$Y_L = G_k\frac{\partial k}{\partial L} + G_H\frac{\partial H}{\partial L} = -\frac{K}{L^2}G_k + G_H$$

故に　$$\omega = \frac{Y_L}{Y_K} = -k + \frac{HG_H}{G_k}$$

故に　$$\frac{HG_H}{G_k} = \omega + k \tag{2.13}$$

となる。故に $F(K,\ L)$ がHI生産関数なら（2.13）の左辺も k のみの関数である。それを $\Gamma(k)$ で表わせば

$$\frac{HG_H}{G_k} = \Gamma(k) \tag{2.14}$$

である。この偏微分方程式を解けば

$$G = \Phi\left\{H\exp\left(\int\frac{dk}{\Gamma(k)}\right)\right\}$$

即ち　$$F = \Phi\left\{L\exp\left(\int\frac{dk}{\Gamma(k)}\right)\right\} \tag{2.15}$$

を得る。これは $K,\ L$ の1次同次関数の関数である。（証明終）

なお ω が k のみの関数として表わされることと σ が k のみの関数として表されることとは同等であるから次の関係が成立する。

〔系〕 代替弾力性が k のみの関数として定義可能なための必要十分条件は定理2の条件が成立することである。

また次の定理が得られる。

〔定理3〕 前定理の必要十分條件は次の関係式と同等である。

$$m(F_K) = m(F_L)$$

〔証明〕 (2.12) よりωは k, Hの関数として

$$\omega = \omega(K,\ L) = \lambda(k,\ H)$$

として表わされる。故に

$$\frac{\partial\lambda}{\partial H} = \frac{\partial\omega}{\partial K}\cdot\frac{\partial K}{\partial H} + \frac{\partial\omega}{\partial L}\cdot\frac{\partial L}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{F_L}{F_K}\right)k + \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{F_L}{F_K}\right)$$

$$= \frac{F_K(F_{LK}K + F_{LL}L) - F_L(F_{KK}K + F_{KL}L)}{F_K^2 L} = 0$$

故に $$\frac{F_{KK}K + F_{KL}L}{F_K} = \frac{F_{KK} + F_{LL}L}{F_L}$$

故に $$m(F_K) = m(F_L) \qquad \text{(証明終)}$$

HI 生産関数が m 次同次関数であるための条件としては次の定理が成立する。

〔定理 4 〕 HI 生産関数 (2.2), ($\varphi'(f) \neq 0$)がm次同次関数 ($m \neq 0$) であるための必要十分条件は

$$\varphi(f) = cf^m$$

である。ただしcは定数であり, f は 1 次同次関数である。

〔証明〕 十分条件は明らかである。必要条件は (2.15) より

$$F = \Phi(Lg(k)),\ g(k) \equiv \exp\left(\int\frac{dk}{\Gamma(k)}\right)$$

である。故に

$$F_K = \Phi' g',\ F_L = \Phi'\left(g - \frac{K}{L}g'\right)$$

さてFがm次同次関数なら

$$F_K K + F_L L = L\Phi' g = m\Phi$$

故に $$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{m}{\theta}d\theta,\ \theta = Lg(k)$$

故に $$\Phi = c\theta^m = c\{Lg(k)\}^m \qquad \text{(証明終)}$$

一般に代替弾力性 σ を k のみの関数として定義しているが，この定義を拡

張してσをKとLとの二変数関数と考えて

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{F_L}{F_K}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{F_L}{F_K}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}$$

と定義することとする。その場合に次の定理が成立する。

〔定理5〕　2回連続的偏微分可能な生産関数 $F(K,\ L)$ に対して代替弾力性が $dK:dL$ の値に無関係な値をもつための必要十分条件は定理2の条件が成立することである。

〔系〕　定理の条件は代替弾力性がk のみの関数であることである。

〔定理の証明〕

$$d\left(\frac{F_L}{F_K}\right) = \frac{F_{KL}F_K - F_L F_{KK}}{F_K^2} dK + \frac{F_{LL}F_K - F_L F_{KL}}{F_K^2} dL$$

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{LdK - KdL}{L^2}$$

故に

$$\sigma = \frac{F_K F_L (L\,dK - KdL)}{KL\{(F_{KL}F_K - F_L F_{KK})dK + (F_{LL}F_K - F_L F_{KL})dL\}} \qquad (2.16)$$

故にこの値が $dK:\ dL$ に拘らず $\Phi(K,\ L)$に等しいとすれば容易に知れる様に

$$\sigma = \Phi(K,\ L) = \frac{F_K F_L}{K(F_{KK}F_K - F_L F_{KK})} = -\frac{F_K F_L}{L(F_{LL}F_K - F_L F_{KL})}$$

である。従って

$$\frac{F_{KK}K + F_{KL}L}{F_K} = \frac{F_{LK}K + F_{LL}L}{F_L}$$

故に

$$m(F_K) = m(F_L)$$

故に定理3より定理5が成立する。

3．具体例

以下では HI 生産関数の具体例を示す。HI 生産関数としては（2.2），（2.3），（2.4）を満足する関数を考えていたのであるが，returns to scale は産出量と共に減少すると言われているので，（M. Nerlove〔6〕），更に次の仮定を加えることとする。

〔仮定 I〕 (イ) $\dfrac{dm(Y)}{dY} \leqq 0$ （3.1）

(ロ) $n=1$

従って（2.11），（2.4）より

$$m(Y)=\frac{dY}{df}\cdot\frac{f}{Y} \tag{3.2}$$

$$\frac{dm(Y)}{df} \leqq 0 \tag{3.3}$$

である。さて $m(Y)$ を Y 或は f の関数として与えれば（3.2）より関数 $Y=\varphi(f)$ が定まる。

Soskice（1968，〔7〕）は $m(Y)$ として $a_0+a_1Y+a_2Y$ を，Zellner and Revankar（1969，〔8〕）は $m\left(1-\dfrac{Y}{a}\right)$，$n\left(\nu+\dfrac{a}{f}\right)$，$n+b\dfrac{a-Y}{a+Y}$，$\dfrac{h}{1+\theta Y}$ をあたえて $\varphi(f)$ を求めている。しかしそれらは1つをのぞき（2.4）の条件を満足しない。$m(Y)$ として Y 又は f の1次式，1次分数式，2次式，或は $\log Y$ 又は $\log f$ の1次式および1次分数式のうちで（2.2），（2.3），（2.4），（3.1）を満足し最も適当と思われるものは f の1次分数式

$$m(Y)=\frac{rf+sq}{f+q},\ (q>0,\ 0<r<1<s) \tag{3.4}$$

である。この関数によれば

$$\frac{dm(Y)}{dY}=\frac{(r-s)q}{(f+q)^2\varphi'}<0$$

であり，（3.2）を解くことにより

$$F=c\frac{f^s}{(f+q)^{s-r}} \tag{3.5}$$

を得る。f として CD 生産関数を用いれば $\sigma=1$ の VRS 生産関数 (variable returns to scale production function の略記) が得られ，CES 生産関数を用いれば $\sigma=$ 定数の VRS 生産関数が得られる。また f として VES 生産関数を用いれば VES であって VRS なる HI 生産関数が得られる。

なお HI 生産関数としては (2.4) は本質的な条件ではないのでこの前半を満足しない例としては

$$m(Y)=\frac{r\log f+sa}{\log f+q},\ (q>0,\ 0<r<1<s)$$

がある。この場合は

$$F=f^{r}(\log f+q)^{q(S-r)}$$

である。

4．HI 生産関数による生産モデル

技術進歩をともなう生産モデルは多くの場合同次生産関数が仮定されているが，HI 生産関数を用いた場合は，どの様にモデルが変るであろうかを考察することとする。従って以後は生産関数は技術進歩を示す母数 t を含むものとし (2.1)，(2.3) は

$$Y=F(K,\ L,\ t) \tag{2.1$'$}$$

$$F(K,\ L,\ t)=\varphi\{f(K,\ L,\ t)\} \tag{2.2$'$}$$

となり，偏導関数 f_t は連続とする。以後は HI 生産関数は (2.2′)，(2.3)，(2.4)，(3.1) を満足するものとする。

同次生産関数の場合（木藤〔5〕）と同様にして次の関係式が成立する。なお以後は $m(Y)$ を m と略記し，添文字 f は関数 $f(K,\ L,\ t)$ に関する量であることを示す。なお≡は定義式を示す。例えば $a_f\equiv\dfrac{f_K}{f}K,\ M_{Kf}\equiv\dfrac{f_{Kt}}{f_K}$ 等である。

$$a = ma_f,\ \ b = mb_f \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} M_K &\equiv \frac{Y_{Kt}}{Y_K} = M_{Kf}+\frac{\varphi''}{\varphi'}f_t \\ M_L &\equiv \frac{Y_{LK}}{Y_L} = M_{Lf}+\frac{\varphi''}{\varphi'}f_t \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$D \equiv M_K - M_L = M_{Kf} - M_{Lf} = D_f \tag{4.3}$$

$$R \equiv \frac{Y_t}{Y} = mR_f \tag{4.4}$$

$$\hat{Y} \equiv \frac{1}{Y}\dot{Y} \equiv \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = mR_f \tag{4.5}$$

$$\hat{Y} = R + a\hat{K} + b\hat{L} \tag{4.6}$$

$$\Psi \equiv aM_K + bM_L = mR + \frac{\partial m}{\partial t} \tag{4.7}$$

$$\Psi_f = R_f \tag{4.8}$$

$$\Phi \equiv a\hat{Y}_K + b\hat{Y}_L = mR + (m-1)(a\hat{K}+b\hat{L}) + \frac{dm}{dt} \tag{4.9}$$

$$= a\left(\frac{Y}{K}\right)^{\wedge} + b\left(\frac{Y}{L}\right)^{\wedge} + \frac{dm}{dt} \tag{4.10}$$

$$\Phi_f = R_f \tag{4.11}$$

$$\left(\frac{a}{m}\right)^{\wedge} = \frac{b}{m}\left(D - \frac{1-\sigma}{\sigma}\hat{k}\right) \tag{4.12}$$

$$\hat{Y}_K - \hat{Y}_L = \hat{f}_K - \hat{f}_L = D - \frac{k}{\sigma} \tag{4.13}$$

$$\left(\frac{Y}{K}\right)^{\wedge} = R - (1-a)\hat{k} + (m-1)\hat{L} \tag{4.14}$$

$$= m\left(\frac{f}{K}\right)^{\wedge} + (m-1)\hat{K} \tag{4.15}$$

なお (4.15) より，$m = 1$ か $\hat{K} = 0$ でない限り，f については技術進歩に関するハロッド中立の条件が成立しても，F については成立しない。即ちハロッド中立性は生産関数の変換 (2.2) では不変でないが，ヒックス中立性は (4.3) から不変である。

(2.1′) が特に factor augumenting であるときは $f(K, L, t)$ は $f(A(t)K, B(t)L)$ となる。従って

$$f(AK, BL) = BLg(h),\ \ h \equiv \frac{AK}{BL},\ \ g(h) \equiv f(h, 1)$$

と書き表わせる。そのときは次の関係式が成立する。

$$Y_K = \varphi' A g',\ \ Y_L = \varphi' B(g - g' h)$$

$$\omega = \frac{B}{A}\left(\frac{g}{g'} - h\right) \tag{4.16}$$

$$R = a\hat{A} + b\hat{B} \tag{4.17}$$

$$D = \frac{\sigma - 1}{\sigma}(\hat{A} - \hat{B}) \tag{4.18}$$

$$\left(\frac{a}{m}\right)^{\wedge} = \frac{b(1-\sigma)}{m\sigma}(\hat{B} - \hat{A} - \hat{k}) \tag{4.19}$$

さてモデルを完成するため，資本増加と労働力の増加とについて次の仮定を設ける。

〔仮定II〕

$$\dot{K} = sY\ell^{-\eta t} - \mu K \tag{4.20}$$

$$\dot{L} = \lambda L \tag{4.21}$$

ただし s，η，μ，λ は定数で $0 < s < 1$，$\eta \geqq 0$，$0 \leqq \mu < 1$，$\lambda > 0$ とする。$s\ell^{-\eta t}$ は貯蓄性向を，μ は資本減価率を，λ は労働増加率を示す。

仮定IIと（4.6）とより

$$\dot{\hat{K}} = (\hat{K} + \mu)(1-\sigma)\left\{\frac{R - \eta + (m-a)\lambda}{1-a} - \hat{K}\right\} \tag{4.22}$$

或は
$$\dot{\hat{K}} = (\hat{K} + \mu)(1-ma_f)\left\{\frac{mR_f - \eta + m(1-a_f)}{1-ma_f} - \hat{K}\right\} \tag{4.23}$$

を得る。また（4.12），（4.19）はそれぞれ

$$\left(\frac{a}{m}\right)^{\wedge} = \frac{b}{m}\left\{D - \frac{1-\sigma}{\sigma}(\hat{K} - \lambda)\right\} \tag{4.24}$$

$$\left(\frac{a}{m}\right)^{\wedge} = \frac{b(1-\sigma)}{m\sigma}\{\hat{B} - \hat{A} + \lambda - \hat{K}\} \tag{4.25}$$

となる。

5．均衡の存在性

〔I〕 Factor augumenting の場合

(4.23), (4.25) の体系に技術進歩の条件として innovation possibility function (Drandakis and Phelps,〔3〕) を導入し，次の仮定をおく。

〔仮定III〕 $\hat{B}$ は $\hat{A}$ の関数であるとし

$$\hat{B} = \Pi(\hat{A}) \tag{5.1}$$

$$\Pi(0) > 0,\ \Pi'(\hat{A}) < 0,\ \Pi''(\hat{A}) < 0 \tag{5.2}$$

と仮定する。

〔仮定IV〕 (5.1) の$\hat{A}$, $\hat{B}$は次の条件を満足する。即ち $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$が一定のとき，$\hat{A}$, $\hat{B}$の加重平均

$$\frac{R}{m} = \frac{a}{m}\hat{A} + \frac{b}{m}\hat{B} \tag{5.3}$$

は最大である。

仮定III, IVより

$$\Pi'(\hat{A}) = -\frac{a}{b} = -\frac{a_f}{1-a_f} \tag{5.4}$$

従って $\hat{A}$, $\hat{B}$は a_fの関数となり

$$\frac{d\hat{A}}{da_f} = -\frac{1}{(1-a_f)^2\Pi''(\hat{A})} > 0\ ,\ \frac{d\hat{B}}{da_f} < 0 \tag{5.5}$$

である。また (4.23), (4.25) より

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{a}{m}\right)^{\wedge} &= \frac{b(1-\sigma)}{m\sigma}\{G(a_f) - \hat{K}\} \\ \dot{\hat{K}} &= (\hat{K}+\mu)(1-ma_f)\{H(a_f,\ m) - \hat{K}\} \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

ただし
$$G(a_f) \equiv \hat{B} - \hat{A} + \lambda \tag{5.7}$$

$$H(a_f,\ m) \equiv \frac{m\{a_f\hat{A} + (1-a_f)(\hat{B}+\lambda) - \eta}{1-ma_f} \tag{5.8}$$

である。従って

$$G(a_f) - H(a_f,\ m) = \frac{\eta - \{\hat{A} + (m-1)(\hat{B}+\lambda)\}}{1-ma_f} \tag{5.9}$$

となる。故に (5.6) が $a_f = \frac{a}{m} =$ 一定，$\hat{K} =$ 一定 の動学的均衡状態をた

もつためには，その a_f, $\widehat{K}$ の値に対して

$$\left.\begin{aligned} G(a_f)-H(a_f,\ m) &= 0 \\ G(a_f) &= \widehat{K} \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

が成立しなければならない。従って (5.7), (5.9) より

$$m=\frac{\eta-\widehat{A}}{\widehat{B}+\lambda}+1=\frac{\eta+G(a_f)}{\widehat{B}+\lambda}=\frac{\eta+\widehat{K}}{\widehat{B}+\lambda}$$

でなければならない。従って m は定数でなければならない。故に同次生産関数でない HI 生産関数では均衡状態は存在しない。従って factor augumenting な HI 生産関数と innovation possibility function とを両立さすことは無意味である。

〔II〕 一般の場合

Factor augumenting でない (4.22), (4.24) の体系については，$u=\widehat{Y}_K$, $v=\widehat{Y}_L$ とおき，次の仮定を設けることとする (天野〔3〕, 木藤〔5〕)。

〔仮定V〕 (2.1′) において v は u の関数であるとし

$$v=\Gamma(u) \tag{5.11}$$

$$\Gamma(0)>0,\ \Gamma'(u)<0,\ \Gamma''(u)<0$$

と仮定する。

〔仮定IV〕 (2.1′) は次の条件を満足する。即ち $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, が一定のとき u, v の加重平均

$$\frac{\Phi}{m}=\frac{a}{m}u+\frac{b}{m}v \tag{5.12}$$

は最大である。

〔I〕の場合と同様にして u, v は a_f の関数となり

$$\left.\begin{aligned} \Gamma'(u) &= -\frac{a_f}{1-a_f} \\ \frac{du}{da_f}>0,\ &\frac{dv}{da_f}<0 \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

となる。また (4.13) より (4.24) は

$$\left(\frac{a}{m}\right)^{\wedge} = \frac{b}{m}(u - \nu - \lambda + \hat{K}) = \frac{b}{m}\{\hat{K} - G(a_f)\} \tag{5.14}$$

ただし
$$G(a_f) \equiv \nu - u + \lambda \tag{5.15}$$

となり，(4.9)，(5.12) より (4.22) は

$$\dot{\hat{K}} = (\hat{K} + \mu)(1 - a_f)\{H(a_f, m) - \hat{K}\} \tag{5.16}$$

ただし
$$H(a_f, m) \equiv \frac{a_f u + (1 - a_f)\nu - \eta - \hat{m}}{1 - a_f} + \lambda \tag{5.17}$$

となる。従って

$$G(a_f) - H(a_f, m) = \frac{\eta - u + \hat{m}}{1 - a_f}$$

となる。故に (5.14)，(5.16) が $a_f = \dfrac{a}{m} =$ 一定，$\hat{K} =$ 一定の動学的均衡状態をもつためには

$$\left.\begin{aligned} \eta - u + \hat{m} &= 0 \\ G(a_f) &= \hat{K} \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

が成立しなければならない。従って $\hat{m} = u - \eta =$ 一定 でなければならない。故に $\hat{m} = \theta$ (＝一定) とおけば (2.11)，(4.5) より

$$\hat{m} = \left\{\frac{\varphi''}{\varphi'} f + 1 - \frac{\varphi'}{\varphi} f\right\}\hat{f} = \theta \tag{5.19}$$

然るに (2.2′)，(4.11) より

$$a_f u + b_f \nu = R_f + \frac{\varphi''}{\varphi'} f \hat{f}$$

また (4.6) と同様にして

$$\hat{f} = R_f + a_f \hat{K} + b_f \hat{L}$$

であるから，両式より R_f を消去すれば

$$\hat{f} = \frac{a_f(u + \hat{K}) + (1 - a_f)(\nu + \hat{L})}{1 + \dfrac{\varphi''}{\varphi'} f}$$

を得る。故に

$$a_f(u + \hat{K}) + (1 - a_f)(\nu + \hat{L}) = \delta$$

とおけば，(5.18) より定まる a_f, $\hat{K}$ の均衡値に対しては δ は一定であって

$$\hat{f}=\frac{\delta}{1+\frac{\varphi''}{\varphi'}f} \tag{5.20}$$

である。従って (5.19)，(5.20) より

$$\frac{\hat{m}}{\delta}=\frac{\frac{\varphi''}{\varphi'}f+1-\frac{\varphi'}{\varphi}f}{1+\frac{\varphi''}{\varphi'}f}=\frac{\theta}{\delta}=\nu \quad (=\text{一定}) \tag{5.21}$$

とおき，φ に関する微分方程式を解けば

$$\nu=0 \text{ なら } \quad \varphi=c_2f^{c_1}, \quad (c_1>0) \tag{5.22}$$

$$\nu\neq 0 \text{ なら } \quad \varphi=(c_1\log f+c_2)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \tag{5.23}$$

を得る。(5.23) については条件式 (2.3)，(3.3)，および (2.4) の後半を吟味することにより

$$c_1>0, \quad \nu<0 \tag{5.24}$$

でなければならない。

さて (5.22)，(5.23) の場合は (5.21) より

$$\hat{m}=\nu\{a_f(u+\hat{K})+(1-a_f)(v+\hat{L})\} \tag{5.25}$$

である。従って (5.25) を (5.18) に代入することにより，a_f, $\hat{K}$ の均衡解を求めることが可能となる。故に動学的均衡が存在するのは (5.22) か或は (5.24) を満足する (5.23) の場合に限ることとなる。(5.22) は同次生産関数の場合であり，(5.23) は (2.4) の前半を満足しないから適切とは言えない。その意味において一般の場合も，HI 生産関数と innovation possibility function とを両立させることは適当でない。

参　考　文　献

〔1〕Amano, A., "Induced Bias in Technological Progress and Economic Growth", **理論経済学**, 17(1967), 1–17.

〔2〕 Clemhout, S., "The Class of Homothetic Isaquant Production Functions", *Review of Economic Studies,* 35(1968), 91–104.

〔3〕 Drandakis, E. M. and Phelps, E.S., "A Model of Induced Innovation, Growth and Distribution", *Economic Journal,* 76(1966), 823–840.

〔4〕 Griliches, Z. and V.Ringstad, *Economies of Scale and the Form of the Production Function,* Amsterdam, 1971,

〔5〕 木藤正典, "技術進歩と非一次同次生産, " **山口経済学雑誌**, 18(1967), 1–20.

〔6〕 Nerlove, M., "Returns to Scale in Electricity Supply" in *Measurement in Economics,* Stanford, 1963.

〔7〕 Soskice, D., "A Modification on the CES Production Function to allow for Changing Returns to Scale over the Function," *Review of Economics and Statistics,* 50(1968), 446–8.

〔8〕 Zellner, A. and N. S. Revankar, "Generalized Production Functions," *Review of Economic Studies,* 36(1969), 241–250.