連結的関係行列の初等的性質

橋　本　　　寛

1．はじめに

連結的関係を表現するブール行列の初等的性質について考察をおこなっている。連結的関係は関係の理論において基本的な二項関係であるばかりでなく，応用上も選好関係[1][3][4]やトーナメント[2][19]の理論において重要な二項関係である。関係の連結性は比較可能性[17]または完全性[14]とも呼ばれ，この連結的関係の基本的な性質についてはこれまでにも多くの興味ある性質が明らかにされている[1][2][4][13][19]。

本論文では文献(9)の性質の一般化および補足を中心にして，連結性のもとでの多くの同値条件を示している。とくに反対称的な連結的関係および推移的な連結的関係についてその性質を明らかにしている。すなわち，連結性のもとでの同値条件に関しては反対称性と推移性が重要な役割を演じている。これらの性質は関係論理学[20]においてはもちろん有向グラフとくにトーナメントの議論においても有用であろうと考えられる。

2．定　　義

一般にブール代数上の行列はブール行列と呼ばれるが[13]，本論文では最も基本的な0，1の要素からなる n 次ブール行列について考察をおこなっ

ている。ブール行列に関する演算や記法は文献(7)等に従うものとする。例えば，ブール行列R，Sに対し，行列の和は$R\vee S$で，論理積は$R\wedge S$で，また行列積は$R\times S$で示される。R^2は$R\times R$を意味するものとし，R^2の(i, j)要素を$r_{ij}^{(2)}$で示す。とくに

$$\triangle R=R\wedge\overline{R'}$$

$$\triangledown R=R\wedge R'$$

と定められる。ここにR'はRの転置，$\overline{R}$はRの否定である。

単位行列をI，全要素が1の行列をEで表わすとき，$R\vee R'\vee I=E$を満足する行列Rは連結的関係を表現する行列となる。したがって$R\vee R'\vee I=E$なるRを連結的行列と呼ぶことにする。$R\wedge I=O$なるRは非反射的，$I\leqq R$なるRは反射的，$\triangledown R\leqq I$なるRは反対称的，$\triangledown R=O$なるRは非対称的と呼ばれる。また$R^2\leqq R$なるRは推移的，$R^2\leqq\overline{R}$なるRは非推移的と呼ばれる(15)(16)。

3．結　　果

まず，連結的関係に関連する基本的な性質を示し，それを用いて連結性のもとで成立する若干の性質について述べている。また非推移的関係に関する一つの性質を示している。次に連結性のもとでの同値条件とくに$R^2\leqq R\vee I$と同値になる条件について述べている。さらに連結性のほかに反対称性を仮定したときの推移性すなわち$R^2\leqq R$と同値になる多数の条件を示している。最後に反射的な連結性のもとでの同値条件について考察をおこなっている。

〔性質1〕　$S\leqq R\vee R'\vee I$のとき

$$S\leqq\overline{R'}\Longrightarrow S\leqq\triangle R\vee I$$

(証明)

$$S\leqq\overline{R'}\wedge(R\vee R'\vee I)=\overline{R'}\wedge R\vee\overline{R'}\wedge I\leqq\triangle R\vee I$$ (証明終)

〔性質2〕　$R\vee R'\vee I=E$のとき

$$S \leqq \overline{R'} \Longrightarrow S \leqq \triangle R \vee I$$

（証明）　性質１による。　（証明終）

〔性質３〕　$R \vee R' \vee I = E$ のとき

$$R^2 \leqq \overline{R'} \Longrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee I$$

（証明）　性質２による。　（証明終）

なお，$R^2 \leqq \overline{R'}$ については一般に次の関係が成立する[9]。

$$R^2 \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^3 \wedge I = O$$

〔注意１〕　$R \vee R' \vee I = E$ のとき

$$R^2 \leqq \overline{R'} \Longrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee R \wedge I$$

とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$R^2 = I = \overline{R'}$$

$$\triangle R = O$$

$$R \wedge I = O$$

となり，$R \vee R' \vee I = E$ でかつ $R^2 \leqq \overline{R'}$ であるけれども，

$$R^2 \leqq \triangle R \vee R \wedge I$$

とはなっていない。

〔性質４〕　$R \vee R' \vee I = E$，$R \wedge I = O$ のとき

$$R^2 \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee I$$

（証明）　(1)　$R^2 \leqq \overline{R'}$ のとき

性質３によって $R^2 \leqq \triangle R \vee I$。

(2)　$R^2 \leqq \triangle R \vee I$ のとき

(a)　$i \neq j$ のとき

$$r_{ij}^{(2)} \leqq r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \leqq \overline{r_{ji}}$$

(b) $i=j$ のとき

$r_{ii}=0$ だから $r_{ii}^{(2)} \leqq 1=\overline{r_{ii}}$ (証明終)

〔性質5〕[9] $R \vee R' \vee I=E$ のとき

$$R^2 \leqq \overline{R'} \Longrightarrow R^2 \leqq R \vee I$$

(証明) 性質3による。 (証明終)

〔注意2〕 $R \vee R' \vee I=E$ のとき

$$R^2 \leqq \overline{R'} \Longrightarrow R^2 \leqq R$$

とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R \vee R' \vee I=E$ であって，$R^2=I=\overline{R'}$ となるが，$R^2 \leqq R$ とはならない。

〔性質6〕 $R \vee R' \vee I=E \Longleftrightarrow \overline{R'} \leqq \triangle R \vee I$

(証明) (1) $R \vee R' \vee I=E$ のとき

$$\begin{aligned}\overline{R'}&=\overline{R'} \wedge E\\ &=\overline{R'} \wedge (R \vee R' \vee I)\\ &=\overline{R'} \wedge R \vee \overline{R'} \wedge I \leqq \triangle R \vee I\end{aligned}$$

(2) $\overline{R'} \leqq \triangle R \vee I$ のとき

$$\begin{aligned}\overline{R'} \vee R' &\leqq R \wedge \overline{R'} \vee I \vee R'\\ &=(R \vee R') \wedge (\overline{R'} \vee R') \vee I\\ &=R \vee R' \vee I\end{aligned}$$

$\overline{R'} \vee R'=E$ であるから

$$R \vee R' \vee I=E$$ (証明終)

なお，このほかの $R \vee R' \vee I=E$ と同値な条件については文献(8)，(10)でも示されている。とくに，次の関係が知られている。

$$R \vee R' \vee I=E \Longleftrightarrow \overline{R'}=\triangle R \vee (\overline{R} \wedge I)$$

〔性質7〕 $R \vee R' \vee I=E$ のとき

(1)　$R\wedge I=O \Longleftrightarrow \overline{R'}=\triangle R\vee I$

(2)　$R^2\leqq \overline{R'} \Longrightarrow \overline{R'}=\triangle R\vee I$

(証明)　(1)　(a)　$R\wedge I=O$ のとき

$\overline{R'}=\overline{R'}\wedge(R\vee R'\vee I)=\triangle R\vee(\overline{R'}\wedge I)$

$R\wedge I=O$ だから $\overline{R'}\wedge I=I$。よって $\overline{R'}=\triangle R\vee I$。

(b)　$\overline{R'}=\triangle R\vee I$ のとき

$\overline{R'}\geqq I$ だから $r_{ii}=0$。すなわち $R\wedge I=O$

(2)　$R^2\leqq \overline{R'}$ によって $r_{ii}=0$ となる。なぜなら，もし $r_{ii}=1$ とすれば，$r_{ii}^{(2)}=1$ となり，$\overline{r_{ii}}=1$ となって $r_{ii}=1$ と矛盾するからである。こうして $R\wedge I=O$ となり，(1)によって $\overline{R'}=\triangle R\vee I$。　(証明終)

明らかに，すでに示している性質3の $R^2\leqq\triangle R\vee I$ は上の(2)からも得られる。

次に，これまでの $R^2\leqq \overline{R'}$ のかわりに $R^2\leqq \overline{R}$ を考えてみよう。この $R^2\leqq \overline{R}$ なるブール行列 R で表現される二項関係は非推移的であるといわれる[10][15][16][18]。

〔性質8〕　$n\geqq 3$ かつ $R\vee R'\vee I=E$ のとき

$$R^2\leqq \overline{R} \Longrightarrow R^2=R'$$

(証明)　(1)　$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき $r_{ji}=1$ となることを示す。$R^2\leqq \overline{R}$ によって $R\wedge I=O$ であるから $i\neq k$，$k\neq j$。

(a)　$i\neq j$ のとき

$r_{ij}^{(2)}=1$ だから $r_{ij}=0$。したがって $R\vee R'\vee I=E$ から $r_{ji}=1$。

(b)　$i=j$ のとき

$r_{ik}=r_{ki}=1$，$i\neq k$。

この場合はありえないことを示す。

(i)　ある l に対して $r_{li}=1$，$l\neq i$，$l\neq k$ のとき

$r_{lk}^{(2)}=1$。よって $r_{lk}=0$，$r_{kl}=1$。また $r_{ki}^{(2)}=1$ となり，$r_{ki}=0$。しかし，これは $r_{ki}=1$ と矛盾する。

(ii)　ある l に対して $r_{il}=1$，$l\neq i$，$l\neq k$ のとき

$r_{kl}^{(2)}=1$。よって $r_{kl}=0$，$r_{lk}=1$。また $r_{ik}^{(2)}=1$ となり，$r_{ik}=0$。しかし，これは $r_{ik}=1$ と矛盾する。

こうして $R^2 \leqq R'$。

(2)　$r_{ji}=1$ とおく。このとき $i \neq j$。いま $k \neq i$，$k \neq j$ とする。

(a)　$r_{ik}=1$ のとき

$r_{jk}^{(2)}=1$ となり，$r_{jk}=0$，$r_{kj}=1$。したがって $r_{ij}^{(2)}=1$。

(b)　$r_{ki}=1$ のとき

この場合はありえないことを示す。

(i)　$r_{kj}=1$ のとき

$r_{ki}^{(2)}=1$ となり，$r_{ki}=0$。しかし，これは $r_{ki}=1$ と矛盾する。

(ii)　$r_{jk}=1$ のとき

$r_{ji}^{(2)}=1$ となり，$r_{ji}=0$。しかし，これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。

こうして $R' \leqq R^2$。　(証明終)

上の性質8は $n=2$ では成立しない。これは

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおいてみれば，明らかである。すなわち $R^2=\overline{R}=I$ であるけれども，$R^2=R'$ とはならない。

すでに報告しているように，$n \geqq 4$ のとき $R \vee R' \vee I=E$ かつ $R^2 \leqq \overline{R}$ なる Rは存在しない(9)。したがって，ここでの性質8は実質上 $n=3$ に関する性質となる。また，$n \geqq 3$ のとき，$R \vee R' \vee I=E$ かつ $R^2=O$ なる R も存在しない(11)。

なお，次の関係の成立することも知られている(9)。

$$R \vee R' \vee I=E,\ R^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R^2 \leqq R' \vee I$$

〔性質9〕　$R^2 \leqq R \vee I \Longrightarrow$ すべての k ($k=1, 2, \cdots$) に対して $R^k \leqq R \vee I$

(証明)　(1)　$k=1$ のとき

明らかに　$R \leqq R \vee I$。

(2)　$k \geqq 2$ のとき

$R^2 \leqq R \vee I$

$R^3 \leqq R^2 \vee R \leqq R \vee I$

$R^4 \leqq R^3 \vee R^2 \leqq R^2 \vee R \leqq R \vee I$

$R^5 \leqq R^4 \vee R^3 \leqq R^3 \vee R^2 \leqq R^2 \vee R \leqq R \vee I$

以下同様にして

$R^k \leqq R \vee I$　(証明終)

〔性質10〕　$R^5 \leqq R \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(証明)　いま $r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ とするとき $r_{ij} \vee \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 0$ であるとする。このとき $r_{ij}=0$，$r_{ji}=1$，$i \neq j$ である。したがって

$r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge r_{ji} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$

となり，$r_{ij}^{(5)}=1$，$r_{ij}=1$ となる。しかし，これは $r_{ij}=0$ と矛盾する。よって $R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$ となる。　(証明終)

〔注意 3〕　$R^5 \leqq R \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R \vee I$

とはいえない。たとえば，

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^5 = O$$

$$R \vee I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であって，$R^5 \leqq R \vee I$ であるけれども，$R^2 \leqq R \vee I$ とはなっていない。

〔性質11〕 $R \vee R' \vee I = E$ のとき

ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I \Longrightarrow$ $R^2 \leqq R \vee I$

（証明） $r_{ik} = r_{kj} \doteqdot 1$ とおき，$r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$S = R \wedge \overline{I}$ とする。

(1) $i=k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 1$

(2) $k=j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 1$

(3) $i=j$ のとき

$r_{ij} \vee \delta_{ij} = r_{ii} \vee \delta_{ii} = 1$

(4) $i \neq k$，$k \neq j$，$i \neq j$ のとき

もし $r_{ij}=0$ とすれば $r_{ji}=1$。したがって

$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$

$r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge r_{ji} = 1$

$s_{ij}^{(2+3l)} = 1$

よって $r_{ij} \vee \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$ となり，$\overline{r_{ji}} = 1$ となるが，これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。

ゆえに $r_{ij}=1$ （証明終）

〔注意4〕 $R \vee R' \vee I = E$ のとき

ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$ とはいえない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad l=2$$

とおけば

$$(R \wedge \overline{I})^{2+3l} = (R \wedge \overline{I})^8 = I$$

となり，

$$(R \wedge \overline{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$$

であるけれども，$R^2 \leqq R$ とはならない。

〔性質12〕 $R \vee R' \vee I = E$ のとき次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R \vee I$

(2) $R^5 \leqq R \vee I$

(3) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee I$

(4) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee I$

(5) $R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(6) $R^5 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(7) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して
$R^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(8) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(9) $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \vee I$

(10) $(R \wedge \overline{I})^5 \leqq R \vee I$

(11) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{2+3l} \leqq R \vee I$

(12) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{2+3l} \leqq R \vee I$

(13) $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(14) $(R \wedge \overline{I})^5 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(15) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(16) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(証明) 次の場合を示せば十分である。

(1) $\Longrightarrow$ (3) 性質9による。

(3) $\Longrightarrow$ (16) 明らかである。

(16) $\Longrightarrow$ (1) 性質11による。 (証明終)

なお，上記の性質中の $R \vee \overline{R'} \vee I$ は次の性質によって $R \vee \overline{R'}$ で置き換えることができる。

〔性質13〕 $R \vee \overline{R'} \vee I = R \vee \overline{R'}$

(証明) $R \vee \overline{R'} \geqq I$ だから

$$R \vee \overline{R'} \vee I = R \vee \overline{R'}$$

(証明終)

〔性質14〕 $\triangledown R \leqq I$ のとき

$$R^2 \leqq R \iff R^2 \leqq R \vee I$$

（証明） (1) $R^2 \leqq R$ のとき

$$R^2 \leqq R \leqq R \vee I$$

(2) $R^2 \leqq R \vee I$ のとき

$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ とおき，$r_{ij} = 1$ となることを示す。まず，このとき $r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$。

(a) $i \neq j$ のとき

$$r_{ij} = 1$$

(b) $i = j$ のとき

$r_{ik} \wedge r_{ki} = 1$ および $\triangledown R \leqq I$ によって $i = k$。したがって $r_{ij} = r_{kj} = 1$。

（証明終）

すでに知られているように，$\triangledown R \leqq I$ のとき次の関係も成立する[6]。

$$R^2 \leqq R \iff (R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$$

次に $R \vee R' \vee I = E$ で，さらに $\triangledown R \leqq I$ であるとき，$R^2 \leqq R$と同値になる条件について考察を行う。このときは上の性質14によって $R^2 \leqq R$ と $R^2 \leqq R \vee I$ は同値であるから，性質12の各条件はすべて $R^2 \leqq R$ と同値であることがわかる。次の性質はその条件の一部を示している。

〔性質15〕 $R \vee R' \vee I = E$，$\triangledown R \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) すべての $l(l=0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee I$

(3) ある $l(l=0, 1, 2, \cdots)$ に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

（証明） 性質12および性質14による。　（証明終）

〔性質16〕 $R \vee R' \vee I = E$，$\triangledown R \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $R^2 \leqq R \vee I$

(3) $R^5 \leqq R \vee I$

(4) $R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(5)　$R^5 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(6)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee I$

(7)　$(R \wedge \bar{I})^5 \leqq R \vee I$

(8)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(9)　$(R \wedge \bar{I})^5 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(証明)　性質12および性質14による。　(証明終)

〔性質17〕　$R \vee R' \vee I = E$，$\nabla R \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　$R^2 \leqq R \vee \overline{R'}$

(3)　$R^5 \leqq R \vee \overline{R'}$

(4)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee \overline{R'}$

(5)　$(R \wedge \bar{I})^5 \leqq R \vee \overline{R'}$

(証明)　性質13および性質16による。　(証明終)

〔性質18〕　$R \vee R' \vee I = E$，$\nabla R \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R$

(3)　ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　$R^{2+3l} \leqq R^2 \leqq R$

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (1)　$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ とおき，$r_{ij} = 1$ となることを示す。

(a)　$i \neq j$ のとき

もし $r_{ji} = 1$ ならば $r_{ii}^{(3)} = 1$ だから $r_{ij}^{(2+3l)} = 1$ となり，$r_{ij} = 1$。もし $r_{ji} = 0$ ならば $R \vee R' \vee I = E$ によって $r_{ij} = 1$。

(b)　$i = j$ のとき

$r_{ik} \wedge r_{ki} = 1$ および $\nabla R \leqq I$ によって $i = k$。したがって

$$r_{ij} = r_{kj} = 1$$

(証明終)

〔性質19〕　$R \vee R' \vee I = E$，$\nabla R \leqq I$ のとき

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow R^5 \leqq R$$

(証明)　性質18による。　(証明終)

〔性質20〕 $R \vee R' \vee I = E$, $\nabla R \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq R$

(3)　ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq R$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　$(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq R^{2+3l} \leqq R^2 \leqq R$

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (1)　性質12および性質14による。　(証明終)

〔性質21〕 $R \vee R' \vee I = E$, $\nabla R \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq \overline{R'} \vee I$

(3)　ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　$R^{2+3l} \leqq R^2 \leqq R$

ここで $R \leqq \overline{R'} \vee I$, すなわち $r_{ij}=1$ のとき $\bar{r}_{ji} \vee \delta_{ij}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i \neq j$ とする。$\nabla R \leqq I$ によって $r_{ji}=0$。したがって $\bar{r}_{ji}=1$ となり, $R^{2+3l} \leqq R \leqq \overline{R'} \vee I$ となる。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (1)　$r_{ik} \wedge r_{kj}=1$ とおき, $r_{ij}=1$ となることを示す。

(a)　$i \neq j$ のとき

もし $r_{ij}=0$ であれば $r_{ji}=1$ となり, $r_{ii}^{(3)}=1$。よって $r_{ij}^{(2+3l)}=1$ となり, $\overline{r_{ji}}=1$ となる。

しかし, これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。したがって $r_{ij}=1$。

(b)　$i=j$ のとき

$r_{ik} \wedge r_{ki}=1$ だから $\nabla R \leqq I$ によって $i=k$。

したがって

$$r_{ij}=r_{kj}=1$$

(証明終)

〔性質22〕 $R \vee R' \vee I = E$, $\nabla R \leqq I$ のとき

次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して
$(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq \overline{R'} \vee I$

(3) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2) 性質21による。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (1) 性質12および性質14による。 (証明終)

〔性質23〕(7) $(\triangle R)^2 \leqq R \vee R' \vee I$ のとき

$\nabla R \leqq I,\ (\triangle R)^3 \wedge I = O \Longrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

〔性質24〕(9) $R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I) \Longrightarrow \nabla R \leqq I,\ (\triangle R)^3 \wedge I = O$

〔性質25〕(12) $(\triangle R)^2 \leqq R \vee R' \vee I$ のとき

$\nabla R \leqq I,\ (\triangle R)^3 \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

(証明) 性質23および性質24による。 (証明終)

〔性質26〕(9) $R \vee R' \vee I = E$ のとき

$\nabla R \leqq I,\ (\triangle R)^3 \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

(証明) 性質25による。 (証明終)

〔性質27〕(8) $R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longleftrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

〔性質28〕 $\nabla R \leqq I$ のとき

$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

(証明) 性質27による。 (証明終)

〔性質29〕 $R \vee R' \vee I = E,\ \nabla R \leqq I$ のとき
次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

(3) $(\triangle R)^3 \wedge I = O$

(証明) 性質26および性質28による。 (証明終)

〔性質30〕 $\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow R = \triangle R \vee (R \wedge I)$

(証明) (1) $\nabla R \leqq I$ のとき

$$R \wedge I = \triangledown R \wedge I = \triangledown R$$

よって

$$R = \triangle R \vee \triangledown R = \triangle R \vee (R \wedge I)$$

(2)　$R = \triangle R \vee (R \wedge I)$のとき

$$\begin{aligned} \triangledown R &= R \wedge R' \\ &= (\triangle R \vee R \wedge I) \wedge R' \\ &= R \wedge I \wedge R' = \triangledown R \wedge I \end{aligned}$$

したがって$\triangledown R \leqq I$となる。　(証明終)

なお，$\triangledown R \leqq I$と同値な条件として

$$R \leqq \overline{R'} \vee I$$

が知られているが[6]，これから$R = \triangle R \vee (R \wedge I)$を導くこともできる。すなわち

$$R \leqq \overline{R'} \vee I \iff R = (\overline{R'} \vee I) \wedge R = \triangle R \vee (R \wedge I)$$

〔性質31〕[8]　$\triangledown R \leqq I \iff \triangle R = R \wedge \overline{I}$

〔性質32〕　$R \vee R' \vee I = E$，$\triangledown R \leqq I$のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　すべての$l (l=0, 1, 2, \cdots)$に対して$R^{2+3l} \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

(3)　ある$l (l=0, 1, 2, \cdots)$に対して$(\triangle R)^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質30によって

$$R^{2+3l} \leqq R^2 \leqq R = \triangle R \vee (R \wedge I)$$

(2) $\Longrightarrow$ (3)　$(\triangle R)^{2+3l} \leqq R^{2+3l} \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

$$\leqq R \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$$

(3) $\Longrightarrow$ (1)　性質31によって

$$(R \wedge \overline{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$$

性質15によって$R^2 \leqq R$。　(証明終)

さらに同値な条件として次の性質も知られている。

〔性質33〕[8]　$R \vee R' \vee I = E$，$\triangledown R \leqq I$のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　$(R\wedge\bar{I})^n=O$

(3)　$(R\wedge\bar{I})^3\wedge I=O$

(4)　$(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(5)　$R^5\leqq\overline{R'}\vee I$

〔性質34〕　$R\vee R'=E$ のとき

ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R\wedge\bar{I})^{2+3l}\leqq R\vee\overline{R'}\ \Longrightarrow\ R^2=R$

（証明）　性質11および性質13によって $R^2\leqq R\vee I$。ところで $I\leqq R$ であるから $R^2\leqq R$。すなわち $R^2=R$ となる。　（証明終）

〔性質35〕　$R\vee R'=E\iff R\vee\overline{R'}=R$

（証明）　(1)　$R\vee R'=E$ のとき

$$
\begin{aligned}
R\vee\overline{R'}&=R\vee\overline{R'}\wedge E\\
&=R\vee\overline{R'}\wedge(R\vee R')\\
&=R\vee\overline{R'}\wedge R=R
\end{aligned}
$$

(2)　$R\vee\overline{R'}=R$ のとき

$$R\vee\overline{R'}\vee R'=R\vee R'$$

$$R\vee R'=E$$

（証明終）

$R\vee R'=E$ と同値な条件については文献(5), (9)においても述べられている。

〔性質36〕　$R\vee R'=E$ のとき

$R^2\leqq R\Longrightarrow$ すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l}=R\vee\overline{R'}$

（証明）　$R^2\leqq R$ のとき $I\leqq R$ によって

$R^2=R$ となるから $R^{2+3l}=R$。一方性質35によって $R\vee\overline{R'}=R$ であるから $R^{2+3l}=R\vee\overline{R'}$。　（証明終）

性質12の条件 $R\vee R'\vee I=E$ を $R\vee R'=E$ にすると次の性質が得られる。

〔性質37〕　$R\vee R'=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$

(2)　$R^5\leqq R$

(3)　すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l}\leqq R$

(4) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R$

(5) $R^2 \leqq R \vee \overline{R'}$

(6) $R^5 \leqq R \vee \overline{R'}$

(7) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'}$

(8) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'}$

(9) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R$

(10) $(R \wedge \bar{I})^5 \leqq R$

(11) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq R$

(12) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq R$

(13) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee \overline{R'}$

(14) $(R \wedge \bar{I})^5 \leqq R \vee \overline{R'}$

(15) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'}$

(16) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \bar{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'}$

(17) $R^2 = R$

(18) $R^5 = R$

(19) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} = R$

(20) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} = R$

(21) $R^2 = R \vee \overline{R'}$

(22) $R^5 = R \vee \overline{R'}$

(23) すべての $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} = R \vee \overline{R'}$

(24) ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} = R \vee \overline{R'}$

(証明) (1)—(16)は，$R \vee R' = E$ のとき $R \vee I = R$ だから性質12によって同値となる。次に(17)—(24)については以下の場合を示せば十分である。

(1) $\Longrightarrow$ (17) $I \leqq R$ だから $R^2 \leqq R$ のとき $R^2 = R$ となる。

(17) $\Longrightarrow$ (19) 明らかである。

(19) $\Longrightarrow$ (20) 明らかである。

(19) $\Longrightarrow$ (23) $R \vee R' = E$ のとき性質35によって $R \vee \overline{R'} = R$ だから

$R^{2+3l} = R = R \vee \overline{R'}$。

(20) $\Longrightarrow$ (24)　性質35による。

(23) $\Longrightarrow$ (24)　明らかである。

(24) $\Longrightarrow$ (1)　性質34による。　(証明終)

〔性質38〕[5]　$R\vee R'=E \Longleftrightarrow \triangle R=\overline{R'}$

〔性質39〕　$R^3\wedge I=O \Longleftrightarrow (R')^3\wedge I=O$

(証明)　$S=R'$ とおく。

(1)　$R^3\wedge I=O$ のとき

もし　$s_{ik}\wedge s_{kl}\wedge s_{li}=1$ とすれば，$r_{ki}\wedge r_{lk}\wedge r_{il}=1$,
すなわち $r_{il}\wedge r_{lk}\wedge r_{ki}=1$。しかし，これは $R^3\wedge I=O$ と矛盾する。
よって $(R')^3\wedge I=O$。

(2)　$(R')^3\wedge I=O$ のとき

$S^3\wedge I=O$ だから(1)によって $(S')^3\wedge I=O$。
ところで $S=R'$ であるから $R^3\wedge I=O$。　(証明終)

〔性質40〕　$R\vee R'=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R\leqq I$,　$(\triangle R)^3\wedge I=O$

(2)　$\nabla R\leqq I$,　$(\overline{R'})^3\wedge I=O$

(3)　$\nabla R\leqq I$,　$(\overline{R})^3\wedge I=O$

(4)　$R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$

(5)　$R^2=\triangle R\vee(R\wedge I)$

(6)　$R^2\leqq\triangle R\vee I$

(7)　$R^2=\triangle R\vee I$

(8)　$R^2\leqq\overline{R'}\vee(R\wedge I)$

(9)　$R^2=\overline{R'}\vee(R\wedge I)$

(10)　$R^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(証明)　(1) $\Longleftrightarrow$ (2)　性質38による。

(2) $\Longleftrightarrow$ (3)　性質39による。

(1) $\Longleftrightarrow$ (4)　性質26による。

(4) $\Longleftrightarrow$ (5)　(a)　$R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$のとき

$$R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I) \leqq R$$

$R \vee R' = E$ から $I \leqq R$ であるので $R \leqq R^2$。よって $R^2 = \triangle R \vee (R \wedge I)$。

(b)　$R^2 = \triangle R \vee (R \wedge I)$ のとき

明らかに $R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$。

(4) $\Longleftrightarrow$ (6)　$R \wedge I = I$ による。

(4) $\Longleftrightarrow$ (8)　性質38による。

(5) $\Longleftrightarrow$ (7)　$R \wedge I = I$ による。

(5) $\Longleftrightarrow$ (9)　性質38による。

(8) $\Longleftrightarrow$ (10)　$R \wedge I = I$ による。　(証明終)

なお，$R \vee R' = E$ のもとでの性質40の条件と同値なものとして次の性質も知られている。

〔性質41〕[6]　$R \vee R' = E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(2)　$R^2 = \overline{R'} \vee I$

(3)　すべての $l\,(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^l \leqq \overline{R'} \vee I$

(4)　ある $l\,(l=2, 3, \cdots)$ に対して $R^l \leqq \overline{R'} \vee I$

(5)　すべての $l\,(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^l = \overline{R'} \vee I$

(6)　ある $l\,(l=2, 3, \cdots)$ に対して $R^l = \overline{R'} \vee I$

(7)　$\nabla R \leqq I$，$R^2 \leqq R$

(8)　$\nabla R \leqq I$，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(9)　$\nabla R \leqq I$，$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$

(10)　$(R \wedge \overline{I})^n = O$

すでに述べたように，$R \vee R' = E$ のもとでは $\triangle R = \overline{R'}$ となる。また $I \leqq R$ であるから

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow R^2 = R$$

$$\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow \nabla R = I$$

も成立する。したがって，これらの関係を使って性質41の条件を置き換える

ことができる。

4. まとめ

連結的関係についてブール行列を用いて考察をおこない，連結性のもとで成立する数多くの同値条件を明らかにすることができた。これらの同値条件はこれまでほとんど注目されていない条件またはこれまで知られている条件の一般化となっており，選好関係やトーナメントにおける連結性の議論において有用であろうと考えられる。また本文中で示したように，連結的関係のもとでの同値条件に関しては反対称性と推移性が重要な役割を果している。

残っている今後の問題としては，連結性のもとで推移性と密接な関連をもつべき零性についてさらに考察をおこなうこと，また連結性を仮定しない場合のべき零行列の性質について考察をおこなうことなどがある。また本論文で示した連結的推移関係や反射的な連結的関係の性質についてさらに考察をおこなうことやこれらの関係に関する性質の統一を試みることなども今後の課題である。

文　献

(1) Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).
(2) Behzad, M., G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster: "Graphs & Digraphs," Wadsworth, California (1979).
(3) Fararo, T. J.: "Mathematical Sociology", Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).
(4) Fishburn, P. C.: "The Theory of Social Choice," Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1973).
(5) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質"，山口経済学雑誌，第34巻第3・4号，pp. 387-405（昭和60年6月）。

(6) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質Ⅱ"，山口経済学雑誌，第35巻第3・4号，pp. 281-293（昭和61年1月）。
(7) 橋本　寛："推移関係行列に関するいくつかの十分条件"，山口経済学雑誌，第35巻第5・6号，pp. 425-436　（昭和61年5月）。
(8) 橋本　寛："連結的関係に関する若干の性質"，山口経済学雑誌，第36巻第5・6号，pp. 245-261（昭和62年5月）。
(9) 橋本　寛："連結性のもとでの関係行列の性質"，山口経済学雑誌，第37巻第1・2号，pp. 75-88（昭和62年9月）。
(10) 橋本　寛："非推移的関係"，山口経済学雑誌，第37巻第5・6号，pp. 683-696（昭和63年9月）。
(11) 橋本　寛："Vacuously Transitive 関係の一般化"，山口経済学雑誌，第38巻第1・2号，pp. 19-37（平成元年1月）。
(12) Hashimoto, H.: "Transitivity of fuzzy matrices under generalized connectedness," Fuzzy Sets and Systems, Vol. 29, pp. 229-234 (1989).
(13) Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).
(14) Kim, K. H. and F. W. Roush: "Introduction to Mathematical Consensus Theory," Marcel Dekker, New York (1980).
(15) 近藤・好並："論理学概論"，岩波書店（1964年4月）。
(16) Lemmon, E. J.: "Beginning Logic," Thomas Nelson and Sons Ltd. (1965).（竹尾・浅野訳："論理学初歩"，世界思想社，1977年4月）。
(17) 野崎昭弘："離散系の数学"，近代科学社（昭和55年8月）。
(18) 尾崎・藤原："論理数学の基礎"，オーム社（昭和55年10月）。
(19) Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models, wilth applications to social, biological, and environmental problems," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
(20) 末木剛博："論理学概論"，東大出版会（1974年5月）。