連結性のもとでの関係行列の性質

橋　本　　　寛

1．はじめに

連結的関係行列の基本的性質について考察をおこなっている。とくに連結的関係を表現するブール行列[12]の初等的な性質や，連結性のもとでの推移関係に関する性質，また非推移的関係[15][16]やべき零行列の性質についても考察をおこなっている。

連結的関係は選好関係やトーナメントと密接な関連をもっており，応用上きわめて重要であって，従来から多くの研究がおこなわれている[1][2][4][5]。とくに，よく知られているように，連結性のもとでは，推移関係やべき零行列，また negatively transitive 関係[5][10][13]などに関して多数の興味ある性質が成立する。

本論文では，これまでほとんど知られていないと思われる連結的関係行列の性質，とくに推移性や非推移性に関する性質について述べている。

2．準　　備

以下で取り扱うブール行列は0，1の要素をもつ n 次ブール行列であるとし，このブール行列に関する演算や記法は文献[11]に従うものとする。

その定義のもとで，推移関係を表現するブール行列 R は $R^2 \leqq R$ となり，非推移関係[15][16]を表現する行列 R は $R^2 \leqq \overline{R}$ となる。また negatively transitive関係[5][10][13]を表現する行列Rは$(\overline{R})^2 \leq \overline{R}$となる。なお，連結的関係を表現する行列$R$は$R \vee R' \vee I = E$となり，$R \vee R' = E$なる行列$R$は反射的な連結的関係を表現する行列である。ここに$E$は全要素が1の行列，$I$は単位行列，$R'$は$R$の転置行列である。

3．連結的関係行列の性質

まず，連結的関係行列のほとんど自明な性質を述べ，次に非推移性や推移性に関する性質，そして最後にべき零行列に関する性質を述べる。主要な結果は連結性のもとでの非推移的関係や推移関係に関する性質である。

〔性質1〕 次の条件は同値である。

(1) $R \vee R' = E$

(2) $R \vee (\triangle R)' = E$

(3) $\triangle R \vee (\triangle R)' \vee \bigtriangledown R = E$

（証明） (1) $\Longrightarrow$ (2) $R \vee R' = E$のとき

$$R \vee R' \wedge (R \vee \overline{R}) = E$$

$$R \vee R' \wedge R \vee R' \wedge \overline{R} = E$$

$$R \vee R' \wedge \overline{R} = E$$

$$R \vee (\triangle R)' = E$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) $R \vee (\triangle R)' = E$のとき

一般に$R = \triangle R \vee \bigtriangledown R$であるから

$$\triangle R \vee (\triangle R)' \vee \bigtriangledown R = E$$

(3) $\Longrightarrow$ (1)

$$\begin{aligned} E &= \triangle R \vee (\triangle R)' \vee \bigtriangledown R \\ &= R \wedge \overline{R'} \vee R' \wedge \overline{R} \vee R \wedge R' \\ &= R \vee R' \wedge \overline{R} \\ &= (R \vee R') \wedge (R \vee \overline{R}) \\ &= R \vee R' \end{aligned}$$

（証明終）

上記の性質中の$\triangle R$および$\bigtriangledown R$はそれぞれ次のように定義されている。

$$\triangle R = R \wedge \overline{R'},\quad \triangledown R = R \wedge R'$$

なお，$R \vee R' = E$ と同値な条件については，このほかにも文献[7]において示されている。

〔性質 2〕[(1)(4)(6)]　$R \vee R' = E$，$R^2 \leqq R$ のとき

$$\triangledown R \times \triangle R = \triangle R \times \triangledown R = \triangle R$$

（証明）　$I \leqq \triangledown R$ であるから $\triangledown R \times \triangle R \geqq \triangle R$。

また $r_{ik}=1$，$r_{kj}=1$，$r_{jk}=0$ のとき，$r_{ij}=1$，$r_{ji}=0$。したがって $R \times \triangle R \leqq \triangle R$。よって

$$\triangledown R \times \triangle R \leqq R \times \triangle R \leqq \triangle R$$

こうして $\triangledown R \times \triangle R = \triangle R$。

また，同様にして $\triangle R \times \triangledown R = \triangle R$。　（証明終）

$\triangle R$ および $\triangledown R$ の興味深い性質については文献[6]でも述べられている。

〔性質 3〕　$n \geqq 4$ のとき

$$R^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R \vee R' \vee I \neq E$$

（証明）　$R \vee R' \vee I = E$ と仮定する。$n \geqq 4$ であるから適当な相異なる i，j，k に対して $r_{ji} = r_{ki} = 1$ または $r_{ij} = r_{ik} = 1$ となる。

(1)　$r_{ji} = r_{ki} = 1$ のとき

もし $r_{jk}=1$ とすれば $R^2 \leqq \overline{R}$ によって $r_{ji}=0$ となり，$r_{ji}=1$ と矛盾する。また $r_{kj}=1$ とすれば $r_{ki}=0$ となり，$r_{ki}=1$ と矛盾する。

(2)　$r_{ij} = r_{ik} = 1$ のとき

もし $r_{jk}=1$ とすれば $R^2 \leqq \overline{R}$ によって $r_{ik}=0$ となり，$r_{ik}=1$ と矛盾する。また $r_{kj}=1$ とすれば $r_{ij}=0$ となり，$r_{ij}=1$ と矛盾する。ゆえに

$R \vee R' \vee I \neq E$ である。　（証明終）

〔注意 1〕　上記の性質中の n は行列の次数であり，$R^2 \leqq \overline{R}$ なるブール行列Rで表現される関係は非推移的（intransitive）であるといわれる[(15)(16)]。また，この性質 3 からわかるように，$n \geqq 4$ のとき $R \vee R' \vee I = E$ かつ $R^2 \leqq \overline{R}$ となるRは存在しない。すなわち，4 次以上の連結的な非推移的関係行列は存在しない。

〔性質4〕 $n \geqq 4$ のとき

$$R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow R \wedge R^2 \neq O$$

(証明) 明らかに

$$R^2 \leqq \overline{R} \Longleftrightarrow R \wedge R^2 = O$$

であるから，性質3によって

$$R \wedge R^2 = O \Longrightarrow R \vee R' \vee I \neq E$$

したがって

$$R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow R \wedge R^2 \neq O$$

(証明終)

〔性質5〕 $n \geqq 4$ のとき

$$(\overline{R})^2 \leqq R \Longrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \wedge I \neq O$$

(証明) 性質3においてRを$\overline{R}$とおけば

$$(\overline{R})^2 \leqq R \Longrightarrow \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I \neq E$$

ところで

$$\begin{aligned} \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I \neq E &\Longleftrightarrow R \wedge R' \wedge \overline{I} \neq O \\ &\Longleftrightarrow \nabla R \wedge \overline{I} \neq O \\ &\Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \wedge I \neq O \end{aligned}$$

こうして

$$(\overline{R})^2 \leqq R \Longrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \wedge I \neq O$$

(証明終)

なお，一般に

$\nabla R \wedge \overline{I} = O \Longleftrightarrow \nabla R \leqq I \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ が成立する[9]。

〔性質6〕 $n=3$ のとき

$$(\overline{R})^2 \leqq R,\ (R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow R \vee R' = E$$

(証明) $(\overline{R})^2 \leqq R$ によって明らかに $r_{ii}=1$ であるから，$i \neq j \neq k \neq i$ とし，$r_{ij} \vee r_{ji}=0$ とする。

(1) $r_{ik}=0$ のとき

$(\overline{R})^2 \leqq R$ から $r_{jk}=1$。したがって$(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ から $r_{kj}=0$ となるが，このとき $r_{ij}=1$ となって矛盾する。

(2) $r_{ik}=1$ のとき

$(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ から $r_{ki}=0$。したがって $(\overline{R})^2 \leqq R$ から $r_{kj}=1$ となり，また $r_{jk}=0$ となる。このとき $(\overline{R})^2 \leqq R$ から $r_{ji}=1$。しかしこれは $r_{ji}=0$ と矛盾する。

ゆえに $r_{ij} \vee r_{ji}=1$。 (証明終)

〔注意 2〕 上の性質 6 は $n=2$ に対しては成立しない。このことは R として 2 次の単位行列をとってみれば明らかである。また $n \geqq 4$ に対しては，性質 5 からわかるように，$(\overline{R})^2 \leqq R$ および $(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ を満足する R は存在しない。すなわち，$n \geqq 3$ なる行列 R で $(\overline{R})^2 \leqq R$ および $(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ を満足する行列 R は $n=3$ の行列のみであって，上記の性質で示されるように $R \vee R' = E$ となる。

〔注意 3〕 $(\overline{R})^2 \leqq R$ かつ $R^2 \leqq R$ であっても $R \vee R' = E$ となるとは限らない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば，R は推移的であって

$$(\overline{R})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R$$

となるが，$R \vee R' = E$ とはなっていない。

〔性質 7〕 $R \vee R' \vee I = E$ のとき

$\triangledown R \leqq I$，ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(証明) $r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき，$r_{ij}=1$ となることを示す。

(1) $i=k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 1$

(2) $k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=1$

(3)　$i=j$ のとき

$r_{ik}=r_{ki}=1$

ところで $\nabla R \leqq I$ から $i=k$。したがって $r_{ij}=r_{ii}=r_{ik}=1$。

(4)　$i \neq k$, $k \neq j$, $i \neq j$ のとき

もし $r_{ij}=0$ とすれば $r_{ji}=1$ となり，このとき

$$r_{ii}^{(3)} \geqq r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge r_{ji}=1$$

$$r_{ij}^{(2+3l)} \geqq r_{ii}^{(3l)} \wedge r_{ij}^{(2)}=1$$

したがって $\overline{r_{ji}}=1$ すなわち $r_{ji}=0$。しかしこれは $r_{ji}=1$ と矛盾する。よって $r_{ij}=1$ でなければならない。　(証明終)

〔性質8〕　$R \vee R' \vee I=E$ のとき

$\nabla R \leqq I$, $R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(証明)　性質7による。　(証明終)

〔注意4〕　上記の性質8において，条件 $R \vee R' \vee I=E$ をはずすことはできない。すなわち，一般に

$\nabla R \leqq I$, $R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

とはいえない。いま

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$\overline{R'}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であって,. $\nabla R \leqq I$, $R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$ となるが，$R^2 \leqq R$ とはなっていない。

〔性質9〕　$R \vee R' \vee I=E$ のとき

$\nabla R \leqq I,\ R^5 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(証明)　性質7による。　(証明終)

〔性質10〕　$\nabla R \leqq I$，ある $l\,(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$ $\Longrightarrow (R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$

(証明)　いま $r_{ij} \wedge r_{jk} \wedge r_{ki} = 1,\ i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ とすれば，$r_{ik}^{(2)} = 1$，$r_{ii}^{(3)} = 1$。このとき $r_{ik}^{(2+3l)} = 1$ だから，$r_{ik} \vee \overline{r_{ki}} = 1$ となり，$r_{ik} = 1$ が得られる。しかし，これは $\nabla R \leqq I$ と矛盾する。よって $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$。

(証明終)

〔注意5〕　ある $l\,(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$ であっても $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$ とはいえない。これは，たとえば

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおいてみれば明らかである。

〔性質11〕　ある $l\,(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow (R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$

(証明)　いま $r_{ij} \wedge r_{jk} \wedge r_{ki} = 1,\ i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ とすれば，$r_{ik}^{(2)} = 1$，$r_{ii}^{(3)} = 1$。このとき $r_{ik}^{(2+3l)} = 1$ だから $r_{ki} = 0$。しかし，これは $r_{ki} = 1$ と矛盾する。よって $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$。　(証明終)

〔性質12〕　$R \vee R' \vee I = E$ のとき

ある $l\,(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R \vee I$

(証明)　$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ のとき，$r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$i = j$ のときは明らかであるから $i \neq j$ とする。いま $r_{ij} = 0$ とすれば $r_{ji} = 1$。このとき $r_{ij}^{(2+3l)} = 1$ だから $r_{ij} \vee \overline{r_{ji}} = 1$ となり，$r_{ji} = 0$ が得られる。しかし，これは $r_{ji} = 1$ と矛盾する。したがって $R^2 \leqq R \vee I$。　(証明終)

〔性質13〕　$R \vee R' = E$ のとき

ある $l(l=0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2=R$

(証明)　$r_{ik} \wedge r_{kj}=1$ とおき，$r_{ij}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i \neq j$ とする。いま $r_{ij}=0$ とすれば，$r_{ji}=1$。このとき $r_{ij}^{(2+3l)}=1$ だから $r_{ij} \vee \overline{r_{ji}}=1$ となり $r_{ji}=0$ となる。しかし，これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。よって $r_{ij}=1$ であって，$R^2 \leqq R$ となる。ところで $I \leqq R$ であるから $R^2=R$ となる。　(証明終)

〔性質14〕　$R \vee R'=E$ のとき

$R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2=R$

(証明)　性質13による。　(証明終)

すでに，性質8で示しているように，$R \vee R' \vee I=E$ のとき，$\bigtriangledown R \leqq I$ でかつ $R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$ ならば $R^2 \leqq R$ となる。これに対して $R \vee R'=E$ のときは，上の性質14で示したように，条件 $\bigtriangledown R \leqq I$ が不要になる。

〔性質15〕　$R \vee R'=E$ のとき

$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I=O \Longrightarrow R^2=R$

(証明)　$r_{ik}=1$，$r_{kj}=1$ とおき，$r_{ij}=1$ となることを示す。

(1)　$i=k$ のとき

$r_{ij}=r_{kj}=1$

(2)　$k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=1$

(3)　$i=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ii}=1$

(4)　$i \neq k$，$k \neq j$，$i \neq j$ のとき

$r_{ik}=1$，$r_{kj}=1$ だから $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I=0$ によって $r_{ji}=0$。したがって $r_{ij}=1$。

こうして $R^2 \leqq R$ となるが，$I \leqq R$ であるので $R^2=R$ となる。　(証明終)

なお，よく知られているように，$R \vee R'=E$ かつ $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I=O$ のとき $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ となる[10]。

〔性質16〕　$R \vee R' \vee I=E$ のとき

$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O \Longrightarrow R^2 \leqq R \vee I$

（証明）　$S = R \vee I$ とおけば

$S \vee S' = R \vee R' \vee I = E$

$(S \wedge \overline{I})^3 \wedge I = ((R \vee I) \wedge \overline{I})^3 \wedge I$

$= (R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$

よって性質15から $S^2 = S$ となる。したがって

$(R \vee I)^2 = R \vee I$

$R^2 \vee R \vee I = R \vee I$

$R^2 \leqq R \vee I$　（証明終）

〔性質17〕[8]　$R \vee R' = E$ のとき

$(R \wedge \overline{I})^n = O \Longrightarrow R^2 = R$

（証明）　性質15による。　（証明終）

〔性質18〕　$R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I) \Longrightarrow \triangledown R \leqq I$, $(\triangle R)^3 \wedge I = O$

（証明）　$r_{ij} \wedge r_{ji} = 1$ とする。このとき，$R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$ によって $r_{ii} = 1$ だから $r_{ij}^{(2)} = 1$。しかし $\triangle R$ の (i, j) 要素は 0 なので $i = j$ でなければならない。また $R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I) \leqq R$ であるから $(\triangle R)^2 \leqq \triangle R$, $\triangle R \wedge I = O$。よって $(\triangle R)^3 \wedge I = O$。　（証明終）

すでに文献[11]で示されているように，次の性質が成立する。

$R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I) \Longleftrightarrow R^2 \leqq R, \ \triangledown R \leqq I$

〔性質19〕　$R \vee R' \vee I = E$ のとき

$\triangledown R \leqq I$, $(\triangle R)^3 \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

（証明）　(1)　$\triangledown R \leqq I$, $(\triangle R)^3 \wedge I = O$ のとき

$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ とおき，$(r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}) \vee (r_{ij} \wedge \delta_{ij}) = 1$ となることを示す。

(a)　$i = j$ のとき

$r_{ik} \wedge r_{ki} = 1$。このとき $\triangledown R \leqq I$ から $i = k$。よって $r_{ii} = r_{ik} = 1$。ゆえに $r_{ij} \wedge \delta_{ij} = r_{ii} \wedge \delta_{ii} = 1$。

(b)　$i \neq j$, $i = k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 1$。このとき $\triangledown R \leqq I$ から $r_{ji} = 0$。

ゆえに $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。

(c)　$i\neq j$, $k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=1$。このとき $\nabla R\leqq I$ から $r_{ji}=0$。

ゆえに $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。

(d)　$i\neq j$, $i\neq k$, $k\neq j$ のとき

このとき $\nabla R\leqq I$ から $r_{ki}=0$, $r_{jk}=0$。もし $r_{ji}=1$ とすれば, $r_{ij}=0$ だから

$$(r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}})\wedge(r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}})\wedge(r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}})=1$$

となって $(\triangle R)^3\wedge I=O$ と矛盾する。したがって $r_{ji}=0$ となり,

$R\vee R'\vee I=E$ から $r_{ij}=1$。ゆえに $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。

(2)　$R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$ のとき

性質18によって $\nabla R\leqq I$, $(\triangle R)^3\wedge I=O$。　(証明終)

〔注意6〕 なお, $\nabla R\leqq I$ かつ $(\triangle R)^3\wedge I=O$ のとき $R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$ となるとは限らない。いま

$$R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば, $\nabla R\leqq I$ で $(\triangle R)^3\wedge I=O$ となるが, $R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$ とはなっていない。

〔性質20〕 $R\vee R'\vee I=E$, $R^2\leqq\overline{R}$ のとき

(1)　$R^2\leqq R'\vee I$

(2)　すべての $l\,(l=0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^2\leqq R^{2+3l}\vee I$

(3)　すべての $l\,(l=0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^2\leqq R^{2+6l}$

(証明)　(1)　$r_{ij}^{(2)}=1$ とおき, $r_{ji}\vee\delta_{ij}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i\neq j$ とする。$R^2\leqq\overline{R}$ によって $r_{ij}=0$。となり, したがって $R\vee R'\vee I=E$ から $r_{ji}=1$。

(2)　$r_{ij}^{(2)}=1$ とおき, $r_{ij}^{(2+3l)}\vee\delta_{ij}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明ら

かであるから $i \neq j$ とする。$R^2 \leqq \overline{R}$ によって $r_{ij}=0$ だから $r_{ji}=1$。したがって $r_{ii}^{(3)}=1$ となり，$r_{ij}^{(2+3l)}=1$ となる。

(3) $r_{ij}^{(2)}=1$ とおけば，$R^2 \leqq \overline{R}$ によって $r_{ij}=0$。

(a) $i \neq j$ のとき

$r_{ji}=1$ となるから $r_{ii}^{(3)}=1$。したがって $r_{ij}^{(2+3k)}=1$ となり，$k=2l$ とおけば $r_{ij}^{(2+6l)}=1$ となる。

(b) $i=j$ のとき

$r_{ii}^{(2)}=1$ となるから $r_{ii}^{(2)}=r_{ii}^{(4)}=\cdots=r_{ii}^{(2+6l)}=1$。 (証明終)

ただし，注意1で述べたように，$n \geqq 4$ のとき $R \vee R' \vee I=E$ かつ $R^2 \leqq \overline{R}$ なる行列 R は存在しない。したがって，実質的には上記の性質20は $n \leqq 3$ なる行列 R に関する性質である。

〔性質21〕 $R \vee R' \vee I=E$ のとき

$$R^2 \leqq \overline{R'} \Longrightarrow R^2 \leqq R \vee I$$

(証明) $r_{ij}^{(2)}=1$ とおき，$r_{ij} \vee \delta_{ij}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから，$i \neq j$ とする。このとき $R^2 \leqq \overline{R'}$ から $r_{ji}=0$。したがって $r_{ij}=1$。 (証明終)

上の性質21は性質16から導くこともできる。すなわち

$$R^2 \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^3 \wedge I=O$$

であるから[8]，$R^2 \leqq \overline{R'}$ のとき

$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I=O$ となるので，性質16によって $R^2 \leqq R \vee I$。

〔注意7〕 $R \vee R' \vee I=E$ かつ $R^2 \leqq \overline{R'}$ のとき $R^2 \leqq R' \vee I$ となるとは限らない。いま

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$R' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \overline{R'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であって，明らかに $R \vee R' \vee I = E$ かつ $R^2 \leqq \overline{R'}$ となるが，$R^2 \leqq R' \vee I$ とはなっていない。

〔注意8〕 $R \vee R' \vee I = E$ かつ $R^2 \leqq \overline{R'}$ のとき，すべての l($l=0$，1，2，…)に対して $R^2 \leqq R^{2+6l}$ となるとは限らない。

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ l = 1$$

とおけば，$R \vee R' \vee I = E$ で $R^2 \leqq \overline{R'}$ となるが，$R^{2+6l} = O$ であって $R^2 \leqq R^{2+6l}$ とはならない。

〔性質22〕 $R \vee R' = E$ のとき

$$R^2 \leqq \overline{R} \vee I \iff R = [1]$$

(証明) (1) $R^2 \leqq \overline{R} \vee I$ のとき

$I \leqq R$ であるから $R \leqq R^2$。よって $R \leqq \overline{R} \vee I$ となり，このとき $R = \overline{R} \wedge R \vee I \wedge R \leqq I$。しかし $R \vee R' = E$ であるから，$R = [1]$ となる。

(2) $R = [1]$ のとき

明らかに $R^2 \leqq \overline{R} \vee I$。 (証明終)

この性質22からわかるように，$R \vee R' = E$ かつ $R^2 \leqq \overline{R} \vee I$ なる行列 R としては，$R = [1]$ なる1次の単位行列だけしかない。

〔性質23〕 $R \vee R' \vee I = E$ のとき，次の条件は同値である。

(1) $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O$

(2) $R^n = O$

(3) $R^6 \wedge I = O$

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2) $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O$ とすれば，このとき

$$R^2 \wedge I = O,\quad R^3 \wedge I = O$$

ところで，$R^2 \wedge I = O$ は $\triangledown R = O$ と同値であるので[8]，文献[7]の性質19によって $R^n = O$。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　自明

(3) $\Longrightarrow$ (1)　$R^6 \wedge I = O$ であれば，明らかに $R^2 \wedge I = O$，$R^3 \wedge I = O$。よって $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O$。　(証明終)

$R \vee R' \vee I = E$ のとき $R^n = O$ と同値な条件については文献[7]でも述べられている。

4．むすび

連結的関係について考察をおこない，推移性や非推移性に関していくつかの結果を得た。これらは従来ほとんど知られていないものであって，連結性の興味深い一面を示すものであり，有用であろうと考えられる。

連結的関係行列に関しては，これまでに述べた性質以外にもべき乗や順序に関する数多くの性質がある[2][3][14]。これらについてブール行列を用いて考察を行うことは今後の課題である。

文　献

〔1〕 Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

〔2〕 Behzad, M., G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster: "Graphs & Digraphs," Wadsworth, California (1979).

〔3〕 Bondy, J. A. and U. S. R. Murty: "Graph Theory with Applications," The Macmillan, London (1976).

〔4〕 Fararo, T. J.: "Mathematical Sociology," Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).

〔5〕 Fishburn, P. C.: "The Theory of Social Choice," Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1973).

〔6〕 橋本　寛：“推移関係を表わすブール行列の対称核とべき零部分，”電子通信学会研究会資料 AL80-24（1980年9月）。

〔7〕 橋本　寛：“連結的推移関係行列の性質，”山口経済学雑誌，第34巻3・4号，pp. 387-405（昭和60年6月）。

〔8〕 橋本　寛：“連結的推移関係行列の性質Ⅱ，”山口経済学雑誌，第35巻3・4号，pp. 281-293(昭和61年1月)。

〔9〕 橋本　寛：“推移関係行列に関するいくつかの十分条件，”山口経済学雑誌，第35巻5・6号，pp. 425-436（昭和61年5月）。

〔10〕 橋本　寛：“Negatively Transitive 関係の性質，”山口経済学雑誌，第36巻1・2号，pp. 41-58（昭和61年9月）。

〔11〕 橋本　寛：“連結的関係に関する若干の性質，”山口経済学雑誌，第36巻5・6号，pp. 245-261（昭和62年5月）。

〔12〕 Kim, K. H.: “Boolean Matrix Theory and Applications,” Marcel Dekker, New York (1982).

〔13〕 Roberts, F. S.: “Discrete Mathematical Models,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

〔14〕 Szpilrajn, E.: “Sur l'extension de l'ordre partiel,” Fundamenta Mathematicae, 16, pp. 386-389 (1930).

〔15〕 Tarski, A.: “Introduction to Logic,” Oxford University Press, New York (1965).

〔16〕 Tou, J. T. (ed.): “Applied Automata Theory,” Academic Press, New York (1968).
（足立訳：“オートマタ理論——その応用，”東京図書，1971年12月）