連結的推移関係行列の性質

橋　本　　寛

1．まえがき

連結的推移関係を表現するブール行列の基本的性質について考察をおこない，このブール行列に関して従来知られている性質の一般化，およびこれまでほとんど知られていないと思われる若干の性質などを示している。一部の性質は2項関係または有向グラフの性質としてよく知られているものであるが，行列演算を用いて表現することにより，興味ある形でブール行列としての性質が得られることを示している。連結的推移関係は連結性と推移性をもつ2項関係であって選好関係[1]やトーナメント[2)5]において基本的な関係である。

ブール行列は通常0と1の要素からなる行列であるが，種々の興味ある性質を有しており，その基本的性質は従来からよく調べられている。[15)17] ブール行列は関係の論理学[6]やグラフ理論などと表裏の関係にあり，それらの性質は互に変換することが可能である。ブール行列は応用上きわめて重要であって，数理心理学，[14] 数理社会学，[8)16)30] スイッチング理論，[10] 計算機プログラミング，[19] データ構造[4]など幅広い分野に応用されている。またブール行列は非負行列[3)29]や確率行列[24]などとも密接な関連があり，分解可能性や原始性 (primitivity) について類似の結果が知られている。[3)29]

本論文ではまず以下の議論において必要となるブール行列の演算および記法と若干の特殊なブール行列を定義している。次に連結的な推移関係を表現するブール行列の性質について考察をおこない，いくつかの興味ある性質を

示している。連結性と推移性をもつブール行列はブール行列の理論および応用において重要な位置を占めており，とくに推移性をもつ行列は順序や，情報検索モデルの簡約[12)13)]およびブール行列の分解問題[11)]において重要な役割を演じている。ここではとくに連結性の下で成立するブール行列に関する必要十分条件について調べている。

2．定義

ブール行列は一般にはブール代数上の行列であるが,[15)] ここでは0，1の要素からなる行列と考え，以下のように演算を定める。まず0，1の値をとる変数x，y に対して，$x \vee y$，$x \wedge y$，$\overline{x}$をそれぞれ $\max(x, y)$，$\min(x, y)$，$1-x$ で定める。また n 次のブール行列 $R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$に対しては

$R \vee S=[r_{ij} \vee s_{ij}]$　(和)，

$R \wedge S=[r_{ij} \wedge s_{ij}]$　(論理積)，

$R \times S=[(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$　(行列積)，

$R^1=R$，

$R^{k+1}=R^k \times R$　$(k=1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots)$，

$R^+=R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^n$　(推移閉包)，

$R'=[r_{ji}]$　(転置)，

$\overline{R}=[\overline{r}_{ij}]$　(否定)，

$\Delta R=R \wedge \overline{R}'$

$\nabla R=R \wedge R'$　(対称核)，

$R \leqq S \Longleftrightarrow r_{ij} \leqq s_{ij}$　$(i, j=1, 2, \cdots, n)$

と定める。本論文においては，特に指定しないかぎり，行列はすべて0，1の要素をもつ n 次のブール行列であるとする。

次にいくつかの特殊なブール行列とその記法を定める。まずIで単位行列

すなわち対角要素がすべて1で他の要素は0である行列を示す。また O で零行列すなわち全要素が0の行列を示し，Eで全要素が1の行列を示す。ブール行列 R が $R^2 \leqq R$ なる条件を満たせば，このとき R は推移的であるといわれ，$I \leqq R$ なる行列Rは反射的，$R \wedge I = O$ なる行列 R は非反射的といわれる。また $R \vee R' \vee I = E$ なるRで表現される関係は連結的 (connected) または完全 (complete) であるといわれる。[8)28)] なお，一般に行列 R，R^k の (i, j) 要素をそれぞれ r_{ij}，$r_{ij}^{(k)}$ で表わすことにする。

3．結果

連結的関係とくに連結的推移関係を表現するブール行列の基本的性質について述べる。すでに述べたように，それらの性質の中には関係論理学や有向グラフの理論において本質的にはよく知られているものも含まれているが，ブール行列の性質として表現し直し証明を与えている。また従来知られている結果を一般化した性質も含まれている。さらに，これまで余り知られていないと思われるいくつかの性質も示している。

連結的な行列 R すなわち $R \vee R' \vee I = E$ なる R は反射性によって大きく次の3種類に分類することができる。

(1) $R \wedge I = I$ すなわち $I \leqq R$ なる R

(2) $R \wedge I = O$ なる R

(3) $R \wedge I \neq I$，$R \wedge I \neq O$ なる R

第1のものは反射的であり，第2のものは非反射的であり，第3のものはそのいずれでもない。明らかに第1の条件を満たす連結的行列は $R \vee R' = E$ なる R と同じものである。各々は反対称性すなわち $\nabla R \leqq I$ となるかどうかによってさらに2つに分けることができる。

まず(1)については

(1a) $\nabla R = I$ なる R

(1b)　$\nabla R \neq I$ なる R

の2つに分けることができる、また(2)については

(2a)　$\nabla R = O$ なる R

(2b)　$\nabla R \neq O$ なる R

と分けることができ，(3)については

(3a)　$\nabla R \wedge \bar{I} = O$ すなわち $\nabla R \leqq I$ なる R

(3b)　$\nabla R \wedge \bar{I} \neq O$ なる R

と分けることができる。明らかに（1ａ）であれば(1)となり，（2ａ）であれば(2)となり，（1ａ）または（2ａ）であれば（3ａ）となる。このように連結的行列は6種類に分類され，これらの連結的行列の性質は以下の議論において明らかにされる。

〔性質1〕　$R \vee R' \vee I = E$，$R^n = O \Rightarrow R^2 \leqq R.$

(証明)　$r_{ik} = r_{kj} = 1$ とする。このとき $i = j$ ならば $r_{ik} \wedge r_{ki} = 1$ となって $R^n \neq O$ となるから $i \neq j$。よって，もし $r_{ij} = 0$ ならば $i \neq j$ だから $r_{ji} = 1$。したがって

$$r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge r_{ji} = 1$$

となり，$R^n \neq O$ が得られるが，これは矛盾している。こうして $r_{ij} = 1$。ゆえに $R^2 \leqq R$。　(証明終)

この性質の中の $R^n = O$ なる行列 R はべき零行列といわれ，アサイクリック・グラフを表現する行列である。次の性質はよく知られている。

〔性質2〕　$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O \Rightarrow R^n = O$。

(証明)　$R^n \neq O$ と仮定すれば，ある $k(0)$，$k(1)$，…，$k(n)$ に対して

$$r_{k(0)k(1)} \wedge r_{k(1)k(2)} \wedge \cdots \wedge r_{k(n-1)k(n)} = 1。$$

よって，ある $a < b$ に対して $k(a) = k(b)$ となり

$$r_{k(a)k(a+1)} \wedge \cdots \wedge r_{k(b-1)k(b)} = 1 \text{。}$$

したがって，R の推移性により

$$r_{k(a)k(b)} = r_{k(a)k(a)} = 1 \text{。}$$

これは R が非反射的であることと矛盾する。
よって $R^n = O$ 。　(証明終)

〔性質 3〕 $R \vee R' \vee I = E$ のとき

$$R^2 \leqq R, \ R \wedge I = O \Longleftrightarrow R^n = O$$

(証明)　性質 2 によって，$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$ のとき $R^n = O$ であるから性質 1 によって明らかである。　(証明終)

非反射的でかつ連結的な推移関係は強順序と呼ばれることがある[1]。なお，この性質は次のように表現することもできる。

〔性質 4〕 $R \vee R' \vee I = E$，$R \wedge I = O$ のとき

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow R^n = O \text{。}$$

(証明)　性質 3 による。　(証明終)

この性質 4 から次のよく知られている性質が直接的に得られる。

〔性質 5〕[2] $R \vee R' \vee I = E$，$\nabla R = O$ のとき

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow R^n = O$$

(証明)　性質 4 による。　(証明終)

一般に $R \vee R' \vee I = E$ かつ $\nabla R = O$ なる行列 R はトーナメントを表現する行列である。したがって，この性質はトーナメントが推移的であるための必要十分条件を示しており，この結果はよく知られている。トーナメントは有向グラフの特別な場合であって，ランキングの問題と関連して，数理心理学，数理社会学において重要なものであり，その基本的性質はよく調べら

れている[5]。

〔性質6〕 $R \vee R' \vee I = E$ のとき

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Longrightarrow R^{n-1} \neq O,\ R^n = O.$$

ただし $n \geqq 2$ とする。

（証明） 行列 R が $R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$ のとき $R^n = O$ となることは性質2によって明らかである。

まず $n = 2$ の場合について考える。$n = 2$ なる行列 R で $R \vee R' \vee I = E$, $R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$ を満足するものは2つである。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

これらの行列については確かに $R^{n-1} \neq O$ が成立している。

次に $n \geqq 3$ の場合を考える。いま $R^{n-1} = O$ と仮定する。このとき $n \geqq 3$ および $R \vee R' \vee I = E$ によってある $l (2 \leqq l \leqq n-1)$ に対して $R^{l-1} \neq O$, $R^l = O$ となる。したがって適当な $i, k(1), k(2), \cdots, k(l-2), j$ に対して

$$r_{ik(1)} \wedge r_{k(1)k(2)} \wedge \cdots \wedge r_{k(l-2)j} = 1$$

となる。$R^n = O$ だから，$i, k(1), k(2), \cdots, k(l-2), j$ は互に相異なっている。また $l \leqq n-1$ であるから，$\{i, k(1), k(2), \cdots, k(l-2), j\}$ に属さない添字 m が存在する。このとき $R^l = O$ であるから，$r_{mi} = 0$ であり，また $m \neq i$ であるから $r_{im} = 1$。さらに $R^l = O$ によって $r_{mk(1)} = 0$ であり，$m \neq k(1)$ であるから，$r_{k(1)m} = 1$ となる。同様にして

$$r_{mk(2)} = 0,\quad r_{k(2)m} = 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{mj} = 0,\quad r_{jm} = 1$$

が得られる。このとき，$r_{im}^{(l)} = 1$ となり，$R^l = O$ と矛盾する。したがって

$R^{n-1} \neq O$でなければならない。 (証明終)

この性質は推移的トーナメントにおけるハミルトン・パスの存在性に関する結果に対応するものである[2]。また次の性質に示すように、非反射的で推移的な行列Rが$R^{n-1} \neq O$を満足すればこれは連結的となる。

〔性質7〕 $R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$, $R^{n-1} \neq O \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$。

(証明) $R^{n-1} \neq O$によって適当な$k(0), k(1), \cdots, k(n-2), k(n-1)$に対して

$$r_{k(0)k(1)} \wedge r_{k(1)k(2)} \wedge \cdots \wedge r_{k(n-2)k(n-1)} = 1\text{。}$$

$\{k(0), k(1), \cdots, k(n-2), k(n-1)\}$はすべて相異なっているから，任意の$i$, j ($i \neq j$) はこれに含まれる。よって$i = k(a)$, $j = k(b)$とおけばRの推移性によって$a < b$のときは$r_{k(a)k(b)} = 1$となり，$a > b$のときは$r_{k(b)k(a)} = 1$となるから，$r_{ij} \vee r_{ji} = 1$が得られる。 (証明終)

〔性質8〕 $R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$のとき

$$R \vee R' \vee I = E \Longleftrightarrow R^{n-1} \neq O$$

(証明) 性質6および性質7によって成立する。 (証明終)

次の性質は関係における推移閉包の基本的性質としてよく知られているものである。

〔性質9〕[25)26)] (1) $R^k \leqq R^+$, $k = 1, 2, \cdots$。
(2) $(R^+)^2 \leqq R^+$

(証明) (1) $1 \leqq k \leqq n$に対しては明らかに

$$R^k \leqq R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^n = R^+$$

$k > n$なるあるkに対して$r_{ij}^{(k)} = 1$と仮定すれば，適当な$l(1), l(2), \cdots, l(k-1)$が存在して

$$r_{il(1)} \wedge r_{l(1)l(2)} \wedge \cdots \wedge r_{l(k-1)j} = 1\text{。}$$

ここで，$l(0)=i$，$l(k)=j$とおき適当なa，bを選べば，$k+1 \geqq n+2$によって

$$l(a)=l(b) \quad (a<b),$$
$$a \neq 0 \text{ または } b \neq k$$

となり，さらに

$$r_{il(1)} \wedge \cdots \wedge r_{l(a-1)l(a)} \wedge r_{l(b)l(b+1)} \wedge \cdots \wedge r_{l(k-1)j}=1$$

となる。いまi，$l(1), \cdots, l(a), l(b+1), \cdots, l(k-1), j$の個数が$n+2$以上ならば，ある$c$，$d$に対して

$$l(c)=l(d) \quad (c<d),$$
$$c \neq 0 \text{ または } d \neq k$$

となる。したがって，同様の議論を繰り返していけば，$1 \leqq m \leqq n$なるmに対して$r_{ij}^{(m)}=1$となる。ゆえに，

$$R^k \leqq R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^n = R^+ 。$$

(2)　R^+の定義および(1)によって

$$(R^+)^2 = R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^{2n} \leqq R^+ 。$$

（証明終）

次のべき零行列に関する必要十分条件はよく知られているが，べき零行列は本論文において重要な役割を演じているのでその証明を示しておこう。

〔性質10〕[7]次の条件は同値である。

(1)　$R^n=O$

(2)　$(R^+) \wedge I = O$

(3)　$(R^+)^n = O$

（証明）　(1)⇒(2)　$R^n=O$であるので

$$R^+ \wedge I = (R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^{n-1}) \wedge I$$

もしある $k>0$ に対して $R^k \wedge I \neq O$ ならば，$R^{kn} \neq O$ となり，これは $R^n = O$ と矛盾する。

よって $R^+ \wedge I = O$

(2)⇒(3)　性質９によって $(R^+)^2 \leqq R^+$。したがって性質２から $(R^+)^n = O$。

(3)⇒(1)　$R^n \leqq (R^+)^n = O$ だから $R^n = O$　(証明終)

〔性質11〕　$S \leqq R$，$\nabla R = O \Rightarrow S \leqq \overline{R'}$。

(証明)　$s_{ij}=1$ とする。このとき $r_{ij}=1$。したがって $r_{ji}=0$，$\overline{r_{ji}}=1$。　(証明終)

〔性質12〕　任意の $k\,(k=1,2,\cdots)$ に対して，

$$R^k \leqq R,\ \nabla R = O \Longrightarrow R^k \leqq \overline{R'}。$$

(証明)　性質11による。　(証明終)

次の性質の一部は有向グラフの理論においてよく知られているものである。[22]

〔性質13〕　$R^2 \leqq R$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R = O$

(2)　$R \wedge I = O$

(3)　$R^n = O$

(4)　すべての $k\,(k=1,2,\cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'}$

(5)　ある $k\,(k=1,2,\cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'}$

(6)　$R^2 \leqq \overline{R'}$

(証明) (1)⇒(2)　$\nabla R = O$ のとき明らかに $R \wedge I = O$

(2)⇒(3)　性質２によって $R^n = O$

(3)⇒(4)　いまある k に対して $r_{ij}^{(k)}=1$，$r_{ji}=1$ と仮定すれば $r_{ij}^{(k)} \wedge r_{ji}=1$。したがって $r_{ii}^{(k+1)}=1$ すなわち $r_{ii}=1$ となって $R^n = O$ と矛盾する。ゆえにすべての k に対して $R^k \leqq \overline{R'}$。

(4)⇒(5)　明らかである。

(5)⇒(6)　$r_{ij}^{(2)}=1$，$r_{ji}=1$ と仮定する。このとき $r_{ii}^{(3)}=1$。したがって

$r_{ii}=1$。よってすべてのkに対して $r_{ii}^{(k)}=1$, $\overline{r}_{ii}=0$ となって(5)と矛盾する。ゆえに $R^2 \leqq \overline{R'}$ でなければならない。

(6)⇒(1)　$r_{ij}=1$, $r_{ji}=1$ とすれば $r_{ii}^{(2)}=1$, $r_{ii}=1$。これは $R^2 \leqq \overline{R'}$ と矛盾する。よって $\nabla R=O$。　(証明終)

〔性質14〕　$R \vee R' \vee I=E$ のとき

$$R^2 \leqq R,\ \ R \wedge I=O \Longleftrightarrow R^5 \leqq \overline{R'}$$

(証明) (1)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I=O$ のとき

性質13によって $R^5 \leqq \overline{R'}$。

(2)　$R^5 \leqq \overline{R'}$ のとき

$r_{ij}=1$, $r_{ji}=1$ とする。このとき

$$r_{ij} \wedge r_{ji} \wedge r_{ij} \wedge r_{ji} \wedge r_{ij}=1$$

となり, $r_{ij}^{(5)}=1$。よって $r_{ji}=0$。しかしこれは $r_{ji}=1$ と矛盾する。よって $R \wedge R'=O$。したがって $R \wedge I=O$。次に $r_{il}=1$, $r_{lj}=1$, $r_{ij}=0$ とする。$R \wedge R'=O$ によって $i \neq j$。また $R \vee R' \vee I=E$ によって $r_{ji}=1$。したがって

$$r_{il} \wedge r_{lj} \wedge r_{ji} \wedge r_{il} \wedge r_{lj}=1,$$

すなわち $r_{ij}^{(5)}=1$ となり, $r_{ji}=0$ が得られる。

しかしこれは $r_{ji}=1$ と矛盾する。よって $r_{ij}=1$　(証明終)

この性質から直接的に得られる次の性質は本質的には関係の論理学において知られているものであるが, そこでは全く別の形で述べられている。

〔性質15〕[28] $R \vee R' \vee I=E$ のとき

$$R^2 \leqq R,\ \ \nabla R=O \Longleftrightarrow R^5 \leqq \overline{R'}$$

(証明)　性質14による。　(証明終)

必ずしも連結的でない行列Rに対しては次の性質が成立する。

〔性質16〕　$R^2 \leqq R$，$\nabla R = O \Longrightarrow R^5 \leqq \overline{R'}$。

（証明）　性質13による。　（証明終）

$R^2 \leqq R$ かつ $\nabla R = O$ となる行列 R で表現される関係は strict order と呼ばれることがある[8]。この性質の逆の成立しないことは次の行列を考えれば明らかである。

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

〔性質17〕　$R \vee R' = E$ のとき，

ある $k\,(k = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2+3k} \leqq \overline{R'}$ ならば $R^2 \leqq R$。

（証明）　$r_{ij}^{(2)} = 1$，$r_{ij} = 0$ と仮定する。$R \vee R' = E$ によって $r_{ji} = 1$ であるので $r_{ij}^{(2)} \wedge r_{ji} = 1$。したがって $r_{ii}^{(3)} = 1$ となり

$$r_{ij}^{(2)} = 1,\quad r_{ij}^{(5)} = 1, \cdots,\ r_{ij}^{(2+3k)} = 1$$

となる。よって $R^{2+3k} \leqq \overline{R'}$ から $r_{ji} = 0$ となるがこれはすでに得られている $r_{ji} = 1$ と矛盾している。ゆえに $R^2 \leqq R$。　（証明終）

〔注意１〕　$R \vee R' \vee I = E$ のとき，

ある $k\,(k = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2+3k} \leqq \overline{R'}$ であっても，一般には $R^2 \leqq R$ とはならない。

例えば

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad k = 2$$

とおけば，$R \vee R' \vee I = E$ であって

$$R^{2+3k} = R^8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \overline{R'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり $R^{2+3k} \leqq \overline{R'}$ となるが，$R^2 \leqq R$ とはなっていない。したがって性質17の $R \vee R' = E$ を $R \vee R' \vee I = E$ で置き換えることはできない。しかし次の性質は成立する。

〔性質18〕　$R \vee R' \vee I = E$ のとき

すべての $k\,(k = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2+3k} \leqq \overline{R'}$ ならば $R^2 \leqq R$。

（証明）　このとき $k = 1$ とおけば性質15から $R^2 \leqq R$。　（証明終）

〔性質19〕[2)23)28)] $R \vee R' \vee I = E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R \wedge I = O$，$R^2 \leqq R$

(2)　$R^n = O$

(3)　$R^3 \wedge I = O$，$\nabla R = O$

(4)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$，$\nabla R = O$

(5)　すべての $k\,(k = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'}$

(6)　ある $k\,(k = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{5+6k} \leqq \overline{R'}$

（証明）(1)$\Longleftrightarrow$(2)性質3による。

(1)$\Rightarrow$(3)自明である。

(3)$\Rightarrow$(1)　$r_{ik} = r_{kj} = 1$ とする。$\nabla R = O$ だから $i \neq j$ である。もし $r_{ij} = 0$ ならば仮定によって $r_{ji} = 1$ である。よって

$$r_{ji} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$$

となり，$R^3 \wedge I = O$ と矛盾する。したがって $r_{ij} = 1$。一方 $\nabla R = O$ から明らかに $R \wedge I = O$ となる。

(1)$\Rightarrow$(4)　$r_{ik} = r_{kj} = 0$ とする。$i = k$ のときは明らかに $r_{ij} = 0$ であるので，$i \neq k$ とする。仮定によって $r_{ki} = 1$。したがって、$r_{ki} = 1$，$r_{kj} = 0$ によって $r_{ij} = 0$。一方性質13によって $\nabla R = O$。

(4)$\Rightarrow$(1)　$r_{ik} = r_{kj} = 1$ とすれば $\nabla R = O$ によって $i \neq j$ であり，また $r_{ki} = r_{jk} = 0$ となる。したがって $r_{ji} = 0$ となり，$i \neq j$ であるので，$r_{ij} = 1$ となる。また $R \wedge I = O$ となることは明らかである。

(1)$\Rightarrow$(5)　$r_{ij}^{(k)} = 1$ とする。R の推移性によって $r_{ij} = 1$。このとき $R \wedge I$

$= O$によって $r_{ji}=0$。

(5)⇒(6)　明らかである。

(6)⇒(1)　$r_{ij}=r_{ji}=1$とする。このとき $r_{ii}^{(2)}=1$であるので

$$r_{ij}^{(1)}=r_{ij}^{(3)}=\cdots=r_{ij}^{(1+2l)}=\cdots=1,\quad l=0,1,2,\cdots。$$

ここで $l=3k+2$とおけば $r_{ij}^{(5+6k)}=1$。よって $r_{ji}=0$。これは $r_{ji}=1$と矛盾する。したがって $\nabla R=O$が得られ，$R\wedge I=O$となる。

次に $r_{il}=r_{lj}=1$のとき $r_{ij}=0$であると仮定する。すでに得た $\nabla R=O$によって $i \neq j$だから，Rの連結性によって $r_{ji}=1$。このとき $r_{il}\wedge r_{lj}\wedge r_{ji}=1$すなわち $r_{ii}^{(3)}=1$となるので，

$$r_{ij}^{(2)}=r_{ij}^{(5)}=r_{ij}^{(8)}=\cdots=r_{ij}^{(2+3m)}=\cdots=1,\quad m=0,1,2,\cdots。$$

ここで $m=2k+1$とおけば $r_{ij}^{(5+6k)}=1$。したがって $r_{ji}=0$となるが，これは $r_{ji}=1$と矛盾する。ゆえに $r_{ij}=1$でなければならない。

(証明終)

この性質の(4)の $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$を満たす行列 Rは negatively transitive であるといわれる[23]。この(4)の $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$は $\nabla R=O$であるので明らかに $(\overline{R})^2=\overline{R}$で置き換えてもよい。しかし次の注意で示すように $\nabla R=O$を $R\wedge I=O$で置き換えることはできない。

〔注意2〕　$R\vee R'\vee I=E$のとき，

$R\wedge I=O$，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$であっても一般には $R^2\leqq R$とならない。

例えば

$$R=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

とおくとき，$R\vee R'\vee I=E$，$R\wedge I=O$であり，

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\overline{R})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{R}$$

となるが，

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であって，$R^2 \leqq R$とはなっていない。しかし，もし$R \wedge I = O$を$\nabla R = O$で置き換えれば，性質19で示したように$R^2 \leqq R$となる。

〔性質20〕　次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R = O$

(2)　$\Delta R = R$

(3)　$R \leqq \overline{R'}$

（証明）　(1)⇒(2)　$\Delta R = \Delta R \vee O = \Delta R \vee \nabla R = R$。

(2)⇒(3)　$\Delta R = R$を書き換えて，$R \wedge \overline{R'} = R$，よって$R \leqq \overline{R'}$。

(3)⇒(1)　$R \leqq \overline{R'}$から$R \wedge \overline{R'} = R$。よって

$$\nabla R = R \wedge R' = R \wedge \overline{R'} \wedge R' = O$$　（証明終）

この性質を使って性質19の$\nabla R = O$を同値な条件で置き換えることができる。

〔性質21〕[28]　$R \vee R' \vee I = E$のとき

$$R^2 \leqq R \Longrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$$

（証明）　$r_{ik}=r_{kj}=0$とする。

(1)　$i=k$のとき

明らかに$r_{ij}=0$。

(2)　$i\neq k$のとき

$R\vee R'\vee I=E$から$r_{ki}=1$。また$r_{ki}=1$，$r_{kj}=0$によって$r_{ij}=0$。ゆえに$\overline{r}_{ik}=\overline{r}_{kj}=1$のとき$\overline{r}_{ij}=1$。　（証明終）

すでに注意2で述べたように$R\vee R'\vee I=E$のとき$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$であっても一般には$R^2\leqq R$とならない。

〔性質22〕[1)9)] (1)　$R^2\leqq R$，$R\vee R'=E \Longrightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$。

(2)　$R^2\leqq R$，$\nabla(\overline{R})=O \Longrightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$。

(3)　$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$，$\nabla R=O \Longrightarrow R^2\leqq R$。

（証明）　(1)　$R\vee R'=E$のとき$R\vee R'\vee I=E$。よって性質21によって$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$。

(2)　$\nabla(\overline{R})=O$から$\overline{R}\wedge(\overline{R})'=O$すなわち$R\vee R'=E$。したがって(1)によって$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$。

(3)　上の(2)においてRを$\overline{R}$で置き換えればよい。　（証明終）

なお，$R\vee R'=E$なる行列Rで表現される関係はstrongly completeであるといわれるが[8)]，これによって完全性または連結性を定義する文献もある[9)]。また$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$，$\nabla R=O$なる行列$R$で表現される関係をFishburn[9)]はweak orderと呼んでいる。しかし通常のweak orderは$R^2\leqq R$，$R\vee R'=E$なる行列Rで表現される[16)]。このように順序に関する用語は若干混乱している。

〔性質23〕　次の条件同値である。

(1)　$R\vee R'=E$

(2)　$\Delta R=\overline{R'}$

(3)　$\overline{R'}\leqq R$

(4)　$\nabla(\overline{R})=O$

（証明）　(1)⇒(2)　$R\vee R'=E$から

$$\Delta R=(R\wedge\overline{R'})\vee(R'\wedge\overline{R'})=E\wedge\overline{R'}$$

よって　$\Delta R=\overline{R'}$。

(2)⇒(3)　$\Delta R=\overline{R'}$を書き換えて$R\wedge\overline{R'}=\overline{R'}$。よって　$\overline{R'}\leqq R$。

(3)⇒(4)　$\overline{R'}\leqq R$から$\overline{R'}\wedge\overline{R}\leqq R\wedge\overline{R}=O$。よって$\nabla(\overline{R})=O$。

(4)⇒(1)　$\nabla(\overline{R})=O$を書き換えて$\overline{R}\wedge\overline{R'}=O$。よって$R\vee R'=E$。

(証明終)

この性質によって性質22の$R\vee R'=E$を同値な条件で置き換えることができる。

〔性質24〕　(1)　$R^2\leqq R$，　$S^2\leqq S$，　$R\leqq S\Longrightarrow(R\wedge\overline{S'})^2\leqq R\wedge\overline{S'}$。

(2)　$R^2\leqq R\Longrightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$。

(証明)　(1)　$r_{ik}\wedge\overline{s}_{ki}=r_{kj}\wedge\overline{s}_{jk}=1$とする。

このとき$r_{ik}=r_{kj}=1$であるからRの推移性によって$r_{ij}=1$。また$R\leqq S$によって$s_{ik}=s_{ij}=1$である。一方$s_{jk}=0$であるのでSの推移性によって$s_{ji}=0$。よって$r_{ij}\wedge\overline{s}_{ji}=1$。

(2)　上の(1)において$S=R$とおけばよい。　(証明終)

この性質24からすでに示している性質22を導くこともできる。すなわち$R\vee R'=E$であれば

$$\overline{R'}=\overline{R'}\wedge(R\vee R')=\overline{R'}\wedge R=\Delta R$$

となるから(2)によって$(\overline{R'})^2\leqq\overline{R'}$となる。ゆえに転置して$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$が得られる。なおこの性質24の(2)は本質的にはよく知られているようである。[20)21)]

〔性質25〕　$R\vee R'\vee I=E$，　$\nabla R\leqq I$のとき，

$$R^2\leqq R\Longleftrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$$

(証明)　(1)　$R^2\leqq R$のとき

性質21によって　$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$。

(2)　$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$のとき

$r_{ik}=r_{kj}=1$とする。

(a) $i=k$のとき　$r_{ij}=1$

(b) $k=j$のとき　$r_{ij}=1$

(c) $i=j$のとき

$r_{ik}=r_{ki}=1$。$\nabla R \leqq I$だから$i=k$，よって$r_{ij}=1$。

(d) $i\neq k$，$k\neq j$，$i\neq j$のとき

$r_{ki}=r_{jk}=0$。よって$r_{ji}=0$，$r_{ij}=1$。　(証明終)

なお，すでに述べたように$\nabla R \leqq I$なる行列Rは反対称であると呼ばれる。$\nabla R \leqq I$を$\nabla R = O$で置き換えれば次の性質が得られる。

〔性質26〕　$R \vee R' \vee I = E$，$\nabla R = O$のとき

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$$

(証明) 性質25による。　(証明終)

この性質は容易にわかるように性質19からもいえる。注意2で述べたように，$\nabla R = O$を$R \wedge I = O$で置き換えることはできない。なお，$R^2 \leqq R$と同値な条件に関しては次の性質も成立する。

〔性質27〕　$R \vee R' \vee I = E$，$\nabla R = O$のとき次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $R^n = O$

(3) $R^3 \wedge I = O$

(4) $R^5 \leqq \overline{R'}$

(証明)　性質19によって明らかである。　(証明終)

4．むすび

応用上重要なブール行列の一つである連結的推移関係行列について考察をおこない，いくつかの基本的性質を得ることができた。ここで扱った連結性

や推移性は順序やトーナメントの理論において必須のものであるから，ここで得られた性質はそれらの分野における議論において有用であろうと考えられる。また，ここで述べた性質の一部は関係論理学やグラフ理論において本質的には知られているものであるが，ブール行列の性質として表現することにより，興味深い形の性質が得られ，それらの性質の行列論的意義を明らかにすることができた。

連結的推移関係は順序に関する基本的な定理であるスピルラインの定理[1)27)]と密接な関連があり，これについてブール行列を用いて議論することは興味あることである。また本論文における議論からも明らかなように，ブール行列の理論においては，べき零ブール行列もきわめて重要であり，[12)18)] この行列の性質を調べることは興味ある今後の課題である。

参考文献

〔1〕 Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values", 2 nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

〔2〕 Behzad, M., Chartrand, G., and Lesniak-Foster, L.: "Graphs & Digraphs", Wadsworth, California (1979).

〔3〕 Berman, A. and Plemmons, R. J.: "Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences", Academic Press, New York (1979).

〔4〕 Berztiss, A. T.: "Data Structures: Theory and Practice", 2 nd ed., Academic Press, New York (1975).

〔5〕 Bondy, J. A. and U. S. R. Murty: "Graph Theory with Applications", The Macmillan, London (1976).

〔6〕 Copilowish, I. M.: "Matrix development of the calculus of relations", J. Symbolic Logic, 13, pp. 193—203 (1948).

〔7〕 Deo, N.: "Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

〔8〕 Fararo T. J.: "Mathematical Sociology", Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).

〔9〕 Fishburn, P. C.: "The Theory of Social Choice", Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1973).

〔10〕 Harrison, M. A.: "Introduction to Switching and Automata Theory", Mc Graw-Hill, New York (1965).
〔11〕 Hashimoto, H.: "Decomposition of Boolean matrices and its applications", The Transactions of the IECE of Japan, E 66, 1, pp. 39—46 (1983).
〔12〕 Hashimoto, H.: "Transitive reduction of a nilpotent boolean matrix", Discrete Applied Mathematics, 8, pp. 51—61 (1984).
〔13〕 Hashimoto, H.: "Transitive reduction of a rectangular boolean matrix", Discrete Applied Mathematics, 8, pp. 153—161 (1984).
〔14〕 印東太郎：〝数理心理学〟，東京大学出版会（1969）。
〔15〕 Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications", Marcel Dekker, New York (1982).
〔16〕 Kim, K. H. and Roush, F. W.: Mathematics for Social Scientists", Elsevier, New York (1980).
〔17〕 Luce, R. D.: "A note on Boolean matrix theory", Proc. Amer. Math. Soc., 3, pp. 382—388 (1952).
〔18〕 Marimont, R. B.: "A new method of checking the consistency of prcedence matrices", JACM, 6, pp. 164—171 (1959).
〔19〕 Marimont, R. B.: "Applications of graphs and boolean matrices to computer programming", SIAM Review, 2, 4, pp. 259—268 (Oct. 1960).
〔20〕 Orlovsky, S. A.: "Decision-making with a fuzzy preference relation", Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 155—167 (1978).
〔21〕 Ovchinnikov, S. V.:"Structure of fuzzy binary relations" Fuzzy Sets and Systems, 6, pp. 169—195 (1981).
〔22〕 尾崎，白川：〝グラフとネットワークの理論〟，コロナ社（1973）。
〔23〕 Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
〔24〕 Rosenblatt, D.: "On the graphs and asymptotic forms of finite Boolean relation matrices and stochastic matrices", Naval Res. Logistics Quart., 4, 2, pp. 151—167 (1957).
〔25〕 Schwarz, S.: On the semigroup of binary relations on a finite set", Czech. Math. Jour., 20, pp. 632—679 (1970).
〔26〕 Stanat, D. F. and McAllister, D. F.: "Discrete Mathematics in Computer Science" Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1977).
〔27〕 Szpilrajn, E.: "Sur l'extension de l'ordre partiel", Fundamenta Mathematicae, 16, pp. 386—389 (1930).
〔28〕 Tarski, A.: "Introduction to Logic", Oxford University Press, New York (1965).
〔29〕 Varga, R. S.（渋谷，棚町，金子，野田訳）：〝計算機による大型行列の反復解法〟，サイエンス社（1972）。
〔30〕 安田三郎：〝数理社会学〟，東京大学出版会（1973）。