概念に関する包含関係の行列表示とその性質

橋　本　　寛

1．はじめに

自然言語で与えられた情報の処理においては，そこで出現する概念間の包含関係を考慮することがしばしば必要となる〔1〕。したがって，機械処理においては，この概念間の包含関係をどのような形で表現するかが問題となる。その表現の形式として種々のやり方が考えられるが，中でも有用と考えられるものは，行列で表示することである。その行列表示の1つとして，すでに表示行列〔2〕なるものを考えているが，この行列の構成における問題として，一意性，等価性，簡単化の問題がある。本論文では，これらを解決するための手がかりを得るために，考察をおこなっている。

議論の構成はつぎのとおりである。まず，包含関係を示すために通常用いられているベン図表について考察を加え，このベン図表のもつ情報が何であるかをあきらかにする。つぎに，そのベン図表の情報に関連して，記述行列なるものを定義する。この記述行列については，その性質が容易に調べられ，等価性の議論が簡単である。そのあとで表示行列を導入し，これと前の記述行列が等しくなることを示す。したがって，表示行列に関する性質を直接調べるかわりに，記述行列の性質を調べればよいことになる。この方が，表示行列について直接議論するよりも容易である。

2．記述行列

2．1　記法と演算の定義

概念は一種の集合であるとして取り扱い，集合算の記号を用いる。概念を $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$ で表わし，2つの概念 C_i と C_j の積集合を $C_i \cap C_j$ で，和集合を $C_i \cup C_j$ で，また C_i の補集合を $\bar{C}_i$ で表わす。以下において，便宜上 C_i を C_i^1, $\bar{C}_i$ を C_i^0 と示すこともある。空集合を ϕ で示し，$C_i \cap C_j = \phi$ のとき，$C_i \cap C_j$ は空であるといい，また互いに素であるという。

集合 $\{0,1\}$ の n 回の直積を $\{0,1\}^{(n)}$ で表わすとき，$(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}) \in \{0,1\}^{(n)}$ に対し

$$C_1^{x(1)} \cap C_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap C_n^{x(n)}$$

で与えられる式を基本積とよぶ。

さらに，$x, y \in \{0,1\}$ に対して

$$x \wedge y \equiv \min\{x, y\}$$

$$x \vee y \equiv \max\{x, y\}$$

$$\bar{x} \equiv 1-x$$

と定める。なお，$\bar{x}$ を x^0 と，x を x^1 と示すことがある。したがって，$0^0 = 1$, $0^1 = 0$, $1^0 = 0$, $1^1 = 1$ である。$\bar{C}_i$ と $\bar{x}$ とは同じ演算記号を用いるが，混乱はないであろう。

2．2　ベン図表の情報

すでに述べたように，概念に関する種々の処理においては，概念間の包含関係に関する情報が必要となる。通常概念間の包含関係を表示するためには，ベン図表が使用されるが，機械的処理においては，このベン図表はそのままの形では使用できない。したがって，ベン図表の持つ情報を明確にし，その情報を機械処理可能な形にする必要がある。

まず，ベン図表の持つ情報が何であるかを明らかにするために，つぎの図1に示す例を考えてみる。この例に示すベン図表は，C_0 の上における3個の

概念 C_1, C_2, C_3 の包含関係を示すものである。この図からわかることは，C_1 と C_2 は互いに交わっていて，C_1 であって C_2 でない部分に，C_3 が真に含まれていることなどを示している。

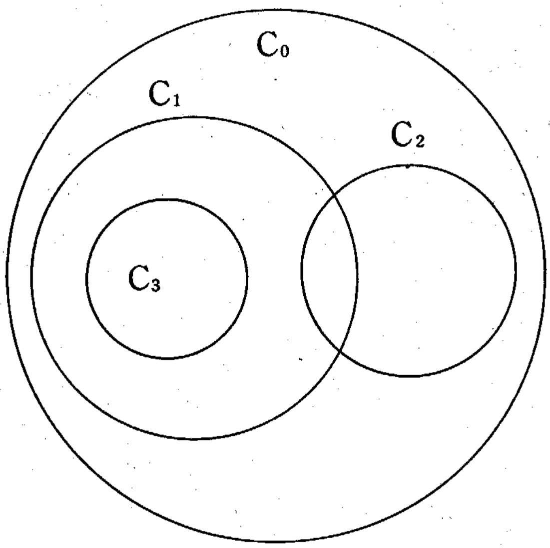

図1　包含関係

ベン図表のもつ情報を明確にするには，そのときの概念間の基本積に注目することである。すなわち，この場合であると，存在している基本積は C_1, C_2, C_3 の作る基本積8個のうち，つぎの5個である。

$$\left.\begin{array}{l}\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3 \neq \phi \\ C_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3 \neq \phi \\ C_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3 \neq \phi \\ C_1 \cap C_2 \cap \bar{C}_3 \neq \phi \\ \bar{C}_1 \cap C_2 \cap \bar{C}_3 \neq \phi\end{array}\right\} \quad (1)$$

残りの3個の基本積は存在していない。このように，ベン図表のもつ情報は，結局は，基本積の存在性に関する情報であるといえる。したがって，ベン図表は基本積の存在性の情報を表示する人間向きの1つの方法であるにすぎず，機械処理の場合は，図的な表示でなく，取り扱いの容易な形で，その存在性の情報を表示すればよいことになる。

条件系（1）を用いて，はじめのベン図表が復元できることは，ほとんど

明らかであるが，念のため，それを行ってみる。概念 C_0 の上における C_1，C_2，C_3 の3つの一般的関係は，つぎの図2で与えられる。

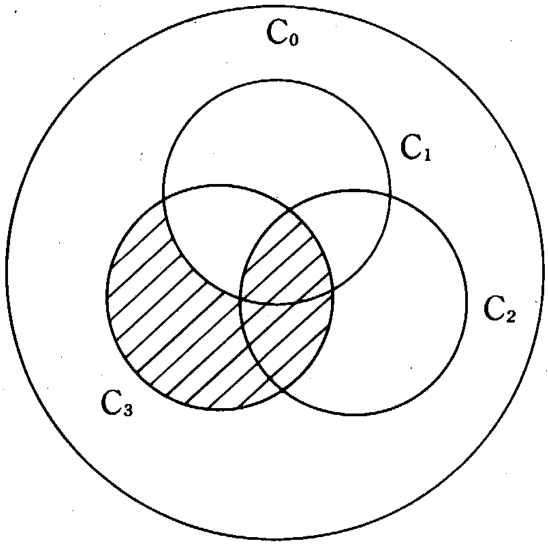

図2　ベン図表の復元

図2において，このとき生ずる8個の領域は，それぞれ各基本積に対応しており，条件系（1）によって，斜線部以外は存在する領域である。斜線部が空であることを考えれば，図1と図2のベン図表が位相的に等しいことは，あきらかである。こうして，条件系（1）からベン図表が復元できたことになる。

包含関係を表現する他の方法の1つは，樹枝状のデータ構造として，表現することである〔3，4〕。たとえば，図1の場合であれば，つぎの図3のような表現が考えられる。

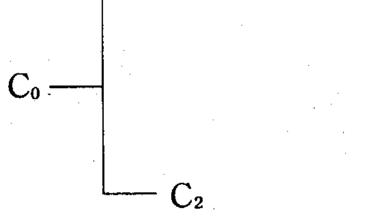

図3　木構造

しかし，この表現では，C_1 とC_2 が重なっているのか，排他的であるのかどうかは，はっきりせず，また$C_1 \cup C_2$が C_0 を完全におおっているのかどうかもわからない。したがって，樹枝の同じ系列のものについては，包含関係の判定ができるが，複合された概念間の判定が一般にはできない。

このように，樹枝状の体系では，ベン図表の情報を完全に表わすことができない。これに対して，以下に述べる基本積の存在性に注目する行列表示の方法では，ベン図表の情報を完全に表わすことができる。

2．3　基本積情報の行列表現

前節において，ベン図表のもつ情報は，基本積の存在性に関する情報に他ならないことが明らかになったので，ベン図表を機械内部において実現するには，その基本積情報を，処理の容易な形で表示すればよいわけである。そのための一方法として，行列表現をおこなうことが考えられる。

図１の例で得られている条件系（１）について，その行列による表示法を説明する。まず $\bar{C}_i$ を C_i^0 と，C_i を C_i^1 と表記して，条件系（１）をつぎのように書きあらためる。

$$\left.\begin{array}{ll} C_1^0 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \phi & (\mathrm{i}) \\ C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \phi & (\mathrm{ii}) \\ C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^1 \neq \phi & (\mathrm{iii}) \\ C_1^1 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi & (\mathrm{iv}) \\ C_1^0 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi & (\mathrm{v}) \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

この条件系(１．１)において，各基本積 $C_1^{x(1)} \cap C_2^{x(2)} \cap C_3^{x(3)}$ に含まれる C_1, C_2, C_3 の右肩の数字を並べて，ベクトル

$$[x_{(1)},\ x_{(2)},\ x_{(3)}]$$

をつくる。さらに，このベクトルを並べて，つぎのような行列を構成する。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.1)$$

この行列から，条件系（１．１）を復元することは容易である。したがって，条件系（１．１）の示す情報と行列（２．１）のもつ情報とは，等価であると考えることができる。この行列（２．１）を条件系（１．１）の記述行列と呼ぶことにする。

ここで，また条件系（１．１）について考えると，条件系（１．１）の中の条件式は，その出現の順序を入れかえても，その意味する内容は同じである。たとえば，条件系（１．１）の中で（ｉ）と（ii）を入れかえて，つぎの条件系（１．２）をつくっても，条件系（１．１）と条件系（１．２）は等価である。

$$\left.\begin{array}{ll} C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \phi & \text{(ii)} \\ C_1^0 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \phi & \text{(i)} \\ C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^1 \neq \phi & \text{(iii)} \\ C_1^1 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi & \text{(iv)} \\ C_1^0 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi & \text{(v)} \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

この条件系（１．２）に対する記述行列はつぎの行列（２．２）で与えられる。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.2)$$

この行列（2．2）は，行列（2．1）の第1行と第2行とを入れかえたものになっている。行列（2．2）は条件系（1．2）を表現するものであり，また条件系（1．2）は条件系（1．1）と等価であるから，行列（2．1）と行列（2．2）とは等価であると考えることができる。

以上のことをまとめると，つぎのようにいえる。

〔性質〕

ある記述行列と，その行列の行どうしを入れかえて得られる記述行列とは等価である。

さらに，与えられた条件系（1．1）は，C_1 と C_2 の位置を入れかえて，つぎのように表記しても，その意味する内容は不変である。

$$\left.\begin{array}{l} C_2^0 \cap C_1^0 \cap C_3^0 \neq \phi \\ C_2^0 \cap C_1^1 \cap C_3^0 \neq \phi \\ C_2^0 \cap C_1^1 \cap C_3^1 \neq \phi \\ C_2^1 \cap C_1^1 \cap C_3^0 \neq \phi \\ C_2^1 \cap C_1^0 \cap C_3^0 \neq \phi \end{array}\right\} \quad (1.3)$$

この条件系（1．3）に対する記述行列（2．3）は，つぎのように与えられる。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_2 & C_1 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (2.3)$$

この行列（2．3）は，行列（2．1）の第1列と第2列を入れかえたものになっている。行列（2．3）は条件系（1．3）を表示するものであり，条件系（1．3）は条件系（1．1）と等価であるから，行列（2．3）は行列（2．1）と等価である。したがって，つぎの結論がいえる。

〔性質〕

記述行列において，その列どうしを互換しても，その意味するものは不変である。

この性質は，概念の出現順序によって，最終的に構成される記述行列が，本質的には影響を受けないことをいっている。したがって，行列の逐次的構成においては，有用な性質であろう。

また，ここで条件系（1．1）の最後の条件（V）が2回重複して出現する条件系を考えてみよう。

$$\left.\begin{array}{ll} C_1^0 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \phi & (\mathrm{i}) \\ C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \phi & (\mathrm{ii}) \\ C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^1 \neq \phi & (\mathrm{iii}) \\ C_1^1 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi & (\mathrm{iv}) \\ C_1^0 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi & (\mathrm{v}) \\ C_1^0 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi & (\mathrm{v}) \end{array}\right\} \qquad (1.4)$$

この条件系（1．4）は冗長ではあるが，明らかに条件系（1．1）と等価である。条件系（1．4）に対する記述行列（2．4）はつぎのようになる。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.4)$$

行列（2．4）は条件系（1．4）を表示するものであり，条件系（1．4）は条件系（1．1）と等価であるから，行列（2．4）は，条件系（1．1）を表示する行列（2．1）と等価であるといえる。

このことよりつぎのことがいえる。

〔性質〕

記述行列において，同一の行ベクトルが複数個あるときは，1個を残して，他は削除できる。また逆に，記述行列に特定の行ベクトルと同一の行ベクトルを追加しても，その行列の意味するものは不変である。

この性質は，行列の簡単化と関係しており，実際の場合には有用である。

さらに，条件系（1．1）はつぎのようにも記述できる。

$$\left.\begin{array}{l} C_1^0 \cap C_1^0 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \phi \\ C_1^1 \cap C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \varphi \\ C_1^1 \cap C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^1 \neq \phi \\ C_1^1 \cap C_1^1 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi \\ C_1^0 \cap C_1^0 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi \end{array}\right\} \qquad (1.5)$$

この条件系（1．5）は，C_1 が重複して出現しているものであって，あきらかに条件系（1．1）と等価である。条件系（1．5）の記述行列はつぎのようになり，第1列と第2列が等しい。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.5)$$

行列（2．5）は条件系（1．5）の記述行列であって，条件系（1．5）は条件系（1．1）と等価であるので，行列（2．5）は行列（2．1）と等価である。このことより，つぎのことがいえる。

〔性質〕

記述行列において，同一の列ベクトルが複数個存在するときは，そのうちの1個を残して，他は削除できる。また逆に，記述行列に，特定の列と同一

の列ベクトルを追加しても，その行列の意味するものは不変である。ただし，列ベクトルには概念の番号を付加して議論する。

以上，記述行列の定義，原理的構成法およびいくつかの基本的性質を述べた。これらの基本的性質は，ことなった記述行列間の等価性や簡単化の問題を論ずるときに，役に立つ。

記述行列の性質が必要になる事情を，少し詳しく述べると，つぎのようになる。記述行列を構成するためには，すべての基本積について，それが存在するかどうかを判定し，存在するものをとり出して並べる必要がある。しかし，現実には，すべての基本積について，その存在性を判定することは，基本積の個数がぼう大であって，ほとんど不可能である。したがって，別の何らかの方法で，たとえば，２項関係の情報によって判定する方法〔２〕などで，間接的に判定し，記述行列を構成することになる。しかし，そのような方法で得られた記述行列は，採用した方法によって，また細部の手順の適用順序によって，ちがった結果になることがある。これらの結果を検討するさいに，記述行列の等価性や簡単化の問題に出会うことになり，記述行列の性質が必要になる。

なお，記述行列は，以下で述べる表示行列の構成を説明するために導入したものであって，現実の場合においては，概念間の包含関係を表示するために，その表示行列を使用する。

３．表示行列

容易にわかるように，基本積は互いに素であり，空でないすべての集合は，空でない基本積の和として表わされる。この事実をもとにして，前節の条件系（１．１）に対し，以下のような行列（３）を定義する。

$$\left.\begin{array}{l} C_1^0 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \phi \\ C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \neq \phi \\ C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^1 \neq \phi \\ C_1^1 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi \\ C_1^0 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \neq \phi \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{array}{l} C_1^0 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \\ C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \\ C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^1 \\ C_1^1 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \\ C_1^0 \cap C_2^1 \cap C_3^0 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3}$$

上記の行列は（３）は，C_1，C_2，C_3が各基本積を含むか含まないかで，１，０を割り当てて，構成したものである。例えば，最後の行について考えると，基本積 $C_1^0 \cap C_2^1 \cap C_3^0$ は C_2 には含まれているが，C_1, C_3 には含まれていない。したがって，〔０１０〕となっている。あきらかに，行列（３）の左側の基本積中の C_1, C_2, C_3 の右肩の数字は，右側の行ベクトルと一致している。したがって，基本積の部分は余分であり，なくてもよい。基本積の部分を除去したものを行列（３．１）とする。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.1}$$

このようにして得られる行列（３．１）を表示行列とよぶ。この表示行列（３．１）と前の記述行列（２．１）とはあきらかに一致している。記述行列は基本積中の概念の右肩の数字を並べたものとして，また表示行列は基本

積を含むか含まないかで構成した行列であったが，一般にこの両者が一致することは以下のようにしてわかる。

空でない基本積の1つを$E = C_1^{x(1)} \cap C_2^{x(2)} \cap \cdots \cap C_i^{x(i)} \cap \cdots \cap C_n^{x(n)} \neq \phi$で示す。ここに$x_{(i)} \in \{0,\ 1\}$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$である。

$x_{(i)} = 1$のとき

$$E \cap C_i = E \neq \phi \quad (\because\ C_i^1 \cap C_i = C_i^1)$$

したがってEはC_iに含まれる。

$x_{(i)} = 0$ のとき

$$E \cap C_i = \phi \ (\because\ C_i^0 \cap C_i = \phi)$$

$E \neq \phi$であるから，EはC_iに含まれない。

ここで，$y_{(i)} (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$をつぎのように定める。

EがC_iに含まれるとき $y_{(i)} = 1$

EがC_iに含まれないとき $y_{(i)} = 0$

とすれば，

$$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots,\ x_{(n)}) = (y_{(1)},\ y_{(2)},\ \cdots,\ y_{(n)})$$

となる。したがって，つぎの性質がいえる。

〔性質〕

記述行列と表示行列は一致する。

この事実によって，表示行列を構成するには，原理的に構成の容易な記述行列を作って，それを表示行列とすればよい。一方，表示行列は基本積の集合をベクトルで表現したものであり，集合間の演算は列ベクトル間の演算として実行できるので，機械処理を行う上で都合がよい。

表示行列を使用することにより，単一の概念はもちろん複合された概念間の包含関係でも容易に知ることができ，概念に関する推論や存在性の判定をおこなう上できわめて都合がよい。こうして，従来実行の不可能であった種々の処理や検索が可能となり，新しい着想の検索，たとえば検索結果の式による表現，概念間の類似性を測る新しい尺度の構成，情報の興味ある蓄積方式などを実現することが可能となる。

4．表現の双対性

これまでの議論では，空でない基本積すなわち存在する基本積をもとにして，包含関係を表示する行列を構成してきた。しかし，ここでは存在しない基本積に注目してみよう。図1の例では，空である基本積はつぎの3個である。

$$\left.\begin{array}{l}\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3 = \phi \\ \bar{C}_1 \cap C_2 \cap C_3 = \phi \\ C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \phi\end{array}\right\} \qquad (4)$$

したがって，これをもとにして，前と同様に行列を構成したとすると，

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

となる。あきらかに，この方が行列の大きさは小さくてすみ，その点では都合がよい。これ以外の基本積は存在すると考えればよい。

つぎに，上の行列を応用する場合の問題点について考えてみよう。たとえば，概念 C_1，C_2，C_3 と演算子 $\cap$，$\cup$，$^-$ によって構成される式 $F(C_1, C_2, C_3)$ に関して

$$F(C_1,\ C_2,\ C_3) = \phi$$

が成立するかどうかについて判定することを考えてみる。

まず，Fを基本積の和として，すなわち積和の標準形で表わす。

$$F = \bigcup_{(x_{(1)},\ x_{(2)},\ x_{(3)}) \in K} (C_1^{x(1)} \cap C_2^{x(2)} \cap C_3^{x(3)})$$

ただし K は　$\{0,\ 1\}^{(3)}$　の適当な部分集合である。このとき，基本積の中で空のものを消去していき，残りがあれば，それ以外の基本積は空ではないから，F は空ではないことになる。

たとえば，図1の例で

$$F = \bar{C}_1 \cap C_2$$

が空かどうかを調べてみよう。まず，積和の形にする。

$$F = (\bar{C}_1 \cap C_2 \cap \bar{C}_3) \cup (\bar{C}_1 \cap C_2 \cap C_3)$$

この右辺の項のうち，第2項の $\bar{C}_1 \cap C_2 \cap C_3$ は空であるからFは

$$F = \bar{C}_1 \cap C_2 \cap \bar{C}_3$$

となる。これは空の基本積の集合の中には含まれていないから，空ではないことになる。したがって，

$$F = \bar{C}_1 \cap C_2 \neq \phi$$

である。

上のことを一般的に述べると，つぎのようになる。まず存在性を判定すべき式を

$$F = F(C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)$$

とする。これを積和標準形で表わす。

$$F = \bigcup_{(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots,\ x_{(n)}) \in K} (C_1^{x(1)} \cap C_2^{x(2)} \cap \cdots \cap C_n^{x(n)})$$

ただしKは $\{0,\ 1\}^{(n)}$ の適当な部分集合である。一方，与えられた条件系を

$$C_1^{x(i,1)} \cap C_2^{x(i,2)} \cap \cdots \cap C_n^{x(i,n)} = \phi$$
$$(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

とする。さらに，この条件系を行列の形で表わす。

$$M_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{l} x_{(1,1)},\ x_{(1,2)},\ \cdots,\ x_{(1,n)} \\ x_{(2,1)},\ x_{(2,2)},\ \cdots,\ x_{(2,n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{(m,1)},\ x_{(m,2)},\ \cdots,\ x_{(m,n)} \end{array}\right] \end{array}$$

このとき，もし

$$d = \bigwedge_{(x_{(1)}, \cdots, x_{(n)})} \left(\bigvee_{i=1}^{m} (x^{x(1)}(i, 1) \wedge \cdots \wedge x^{x(n)}(i, n)) \right)$$

に関して，$d=1$であれば

$$F = \phi$$

であり，$d=0$であれば

$$F \neq \phi$$

である。

その理由は，つぎのとおりである。ある基本積を表わすベクトル〔$x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}$〕が，条件系を表わす行列 M_0 に含まれていれば，その基本積は空であり，特定の j について，

$$x^{x(1)}(j, 1) \wedge \cdots \wedge x^{x(n)}(j, n) = 1$$
$$(1 \leqq j \leqq m)$$

である。したがって

$$\bigvee_{i=1}^{m} \left(x^{x(1)}(i, 1) \wedge \cdots \wedge x^{x(n)}(i, n) \right) = 1$$

となり，Fのすべての基本積について

$$\bigvee_{i=1}^{m} \left(x^{x(1)}(i, 1) \wedge \cdots \wedge x^{x(n)}(i, n) \right)$$

が1であれば，それらの基本積は空であり，このとき

$$\bigwedge_{(x_{(1)}, \cdots, x_{(n)})} \left(\bigvee_{i=1}^{m} (x^{x(1)}(i, 1) \wedge \cdots \wedge x^{x(n)}(i, n)) \right) = 1$$

となる。したがって，$d=1$であれば，$F=\phi$である。$d=0$であるのは，Fの基本積の中に空でないものが入っているときであるから$F \neq \phi$である。

〔例〕

（1）図1の条件系（4）において $\bar{C}_2 \cap C_3$ が空かどうかを判定する。

$$F = \bar{C}_2 \cap C_3 = (\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3) \cup (C_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3)$$
$$= (C_1^0 \cap C_2^0 \cap C_3^1) \cup (C_1^1 \cap C_2^0 \cap C_3^1)$$

$$M_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} d &= \{(0^0 \wedge 0^0 \wedge 1^1) \vee (0^0 \wedge 1^0 \wedge 1^1) \vee (1^0 \wedge 1^0 \wedge 1^1)\} \\ &\quad \wedge \{(0^1 \wedge 0^0 \wedge 1^1) \vee (0^1 \wedge 1^0 \wedge 1^1) \vee (1^1 \wedge 1^0 \wedge 1^1)\} \\ &= (1 \vee 0 \vee 0) \wedge (0 \vee 0 \vee 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$d = 0$であるから，$F \neq \phi$ すなわち $\bar{C}_2 \cap C_3$ は空ではない。

（2）同じく図1の条件系（4）において，$(\bar{C}_1 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_3)$ が空かどうかを判定する。

$$\begin{aligned} F &= (\bar{C}_1 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_3) \\ &= (\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3) \cup (\bar{C}_1 \cap C_2 \cap C_3) \cup (\bar{C}_1 \cap C_2 \cap C_3) \cup \\ &\quad (C_1 \cap C_2 \cap C_3) \\ &= (C_1^0 \cap C_2^0 \cap C_3^1) \cup (C_1^0 \cap C_2^1 \cap C_3^1) \cup (C_1^1 \cap C_2^1 \cap C_3^1) \end{aligned}$$

$$M_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} d &= \{(0^0 \wedge 0^0 \wedge 1^1) \vee (0^0 \wedge 1^0 \wedge 1^1) \vee (1^0 \wedge 1^0 \wedge 1^1)\} \\ &\quad \wedge \{(0^0 \wedge 0^1 \wedge 1^1) \vee (0^0 \wedge 1^1 \wedge 1^1) \vee (1^0 \wedge 1^1 \wedge 1^1)\} \\ &\quad \wedge \{(0^1 \wedge 0^1 \wedge 1^1) \vee (0^1 \wedge 1^1 \wedge 1^1) \vee (1^1 \wedge 1^1 \wedge 1^1)\} \\ &= (1 \vee 0 \vee 0) \wedge (0 \vee 1 \vee 0) \wedge (0 \vee 0 \vee 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$d=1$であるから，$F=\phi$ すなわち$(\bar{C}_1 \cap C_3) \cup (C_2 \cap C_3)$は空である。

このようにして，存在しない基本積の集合が与えられた場合でも，複合された概念の存在性を判定することができる。しかし，上記のようなやり方で判定することは，積和標準形になおす必要があるため，わずらわしい。もっと機械的に処理できる方法を考える必要がある。なお，存在する基本積に注目して，記述行列または表示行列を構成した場合には，判定の過程において，与えられた式を積和標準形に変換する必要はなく，直接判定できる〔2〕。

5．まとめ

本論文においては，ベン図表の情報を明確にし，ベン図表の格納方法として記述行列を考え，その性質を明らかにした。また一方，概念間の包含関係を示すものとして表示行列を考え，この表示行列と上の記述行列が等価であることを示した。

ここで述べた行列の性質は，ほとんど自明のものばかりであるが，それらの性質は行列の等価性，簡単化の問題の議論において有用であるので，整理しておくことも必要であろう。

包含関係を行列で表示しようとするとき，現実の場合には不完全な情報のもとで，行列を構成しなければならない。たとえば，基本積の存在性の情報が部分的にしか与えられていない場合や，基本積でない単なる積の形また和の形で与えられる場合などがある。これらの問題については，表示行列を改良することにより，解決することができる。これについては別の機会に報告する。

なお，ここでは包含関係を行列表示しようとしているが，一般に他の代数的２項関係〔５〕に対しても，包含関係と同種の関係に対しては，行列表示の方法が採用できるのではないかと考えられる。もしそうであれば，表示行列の構成等に関して開発された手法は，そのような場合にも，応用できることになる。

文　献

〔1〕橋本：〝概念空間と情報検索〟，山口経済学雑誌第23巻5・6号，昭49。
〔2〕橋本，福村：〝二項関係による概念の分割〟，電子通信学会，オートマトンと言語研究会資料 AL72-135（1973-03）。
〔3〕Hayes, R.M.: "The Decomposition of Vocabulary Hierarchies", *Mechanized Information Storage, Retrieval and Dissemination,* North-Holland (1968).
〔4〕情報処理学会編：〝情報処理ハンドブック〟，3編3章，オーム社，昭47。
〔5〕岩村：〝束論〟，共立出版，昭46。