W24-2

The 32nd Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2009)
Yuda-Onsen, Yamaguchi, Japan, Dec. 1–4, 2009

一般化された skew information に関する不等式について
Some inequalities on generalized skew informations

柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi) *

Abstract— We give a trace inequality related to the uncertainty relation of Wigner-Yanase-Dyson skew information. This inequality corresponds to a generalization of the uncertainty relation derived by S.Luo [8] for the quantum uncertainty quantity excluding the classical mixture. Also we show a counter-example of the uncertainty relation related to Wigner-Yanase-Dyson skew information given in [6] recently.

Keywords— skew information, uncertainty relation, inequality

1　はじめに

Wigner-Yanase skew information は [10] で次のように定義された.

$$
\begin{aligned}
I_\rho(H) &= \frac{1}{2}Tr\left[\left(i\left[\rho^{1/2},H\right]\right)^2\right] \\
&= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^{1/2}H\rho^{1/2}H]
\end{aligned}
$$

この量はある量子状態 ρ とある観測量 H の間の非可換性をあらわすある種の degree として考えられている. ここで $[X,Y]=XY-YX$ は commutator をあらわす. またこれは Dyson によって次のように拡張され Wigner-Yanase-Dyson skew information と呼ばれている.

$$
\begin{aligned}
& I_{\rho,\alpha}(H) \\
=\ & \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha,H])(i[\rho^{1-\alpha},H])] \\
=\ & Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^\alpha H\rho^{1-\alpha}H], \alpha\in[0,1].
\end{aligned}
$$

ρ に関して $I_{\rho,\alpha}(H)$ は convex であることは E.H.Lieb in [7] によって証明されたことはよく知られている. 量子力学的には観測量 H は一般的には非有界作用素であるがこの論文では断らない限り Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素であると仮定する. この理由は数学的興味のためである. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 (self-adjoint operators) 全体を $\mathcal{L}_h(\mathcal{H})$, 統計作用素 (density operators) 全体を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ とそれぞれあらわすものとする. Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の関係は [9] で研究されている. さらに Wigner-Yanase-Dyson skew information と uncertainty relation との関係は [5, 11] で研究されている. 我々は [11] で一般化された skew information を新たに定義し, ある種の uncertainty relation を導いた. 第 2 章では Wigner-Yanase-Dyson skew information の様々な性質を議論する. 最後に第 3 章で主定理とその証明を与える.

2　Wigner-Yanase-Dyson skew information に関する不確定性関係

Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の間の関係を見ることにする. 量子力学の system においては量子状態 ρ における物理量 H を観測したときの期待値は $Tr[\rho H]$ であらわされる. また分散は次で定義される.

$$V_\rho(H) = Tr[\rho(H-Tr[\rho H]I)^2] = Tr[\rho H^2] - Tr[\rho H]^2.$$

ここで量子状態 ρ と 2 つの物理量 A, B に対して次の不等式が成り立つことが知られている.

$$V_\rho(A)V_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2 \tag{2.1}$$

さらにより強い結果として Schrödinger によって次のように与えられた.

$$V_\rho(A)V_\rho(B) - |Cov_\rho(A,B)|^2 \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2,$$

ただし covariance は次で定義される;

$$Cov_\rho(A,B) = Tr[\rho(A-Tr[\rho A]I)(B-Tr[\rho B]I)].$$

しかし Wigner-Yanase skew information に対する次のような uncertainty relation については成り立たないことが知られている. ([9, 5, 11] を見よ)

$$I_\rho(A)I_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2.$$

最近 S.Luo は classical mixture を排除した量子的不確定性をあらわす次のような量 $U_\rho(H)$ を導入した.

$$U_\rho(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H)-I_\rho(H))^2}, \tag{2.2}$$

このとき　S.Luo は [8] において $U_\rho(H)$ に関する次のような uncertainty relation を得た.

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2. \tag{2.3}$$

* 〒 755-8611 宇部市常盤台 2-16-1 山口大学 大学院 理工学研究科 応用数理科学分野 Division of Applied Mathematical Science, Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University, Ube, 755-8611 Japan. E-mail: yanagi@yamaguchi-u.ac.jp, This research was partially supported by the ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (B), 18300003 and (C), 20540175

ここで次の関係に注意する．

$$0 \le I_\rho(H) \le U_\rho(H) \le V_\rho(H). \tag{2.4}$$

不等式 (2.3) は (2.4) の意味で不等式 (2.1) の精密化である．この章では不等式 (2.3) に対する one-parameter 拡張を考える．

Definition 2.1 $0 \le \alpha \le 1$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して *Wigner-Yanase-Dyson skew information* を次のように定義する．

$$\begin{aligned} & I_{\rho,\alpha}(H) \\ = \;& \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] \\ = \;& Tr[\rho H_0^2] - Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] \end{aligned} \tag{2.5}$$

また関連して次の量も定義する．

$$\begin{aligned} & J_{\rho,\alpha}(H) \\ = \;& \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] \\ = \;& Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0], \end{aligned} \tag{2.6}$$

ただし $H_0 = H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X, Y\} = XY + YX$ は *anti-commutator* をあらわす．

次の関係が成り立つことは明らかである．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] \\ = \;& \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])] \end{aligned}$$

ところが次の関係に注意する．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] \\ \neq \;& \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H\}\{\rho^{1-\alpha}, H\}]. \end{aligned}$$

このとき次の関係が成り立つ．

$$I_{\rho,\alpha}(H) \le I_\rho(H) \le J_\rho(H) \le J_{\rho,\alpha}(H). \tag{2.7}$$

なぜなら

$$Tr[\rho^{1/2} H \rho^{1/2} H] \le Tr[\rho^\alpha H \rho^{1-\alpha} H]$$

が成り立つからである．(例えば [1, 2] を見よ)

(2.2) の直接の一般化として次を定義する．

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_{\rho,\alpha}(H))^2}, \tag{2.8}$$

このとき (2.7) の最初の不等式より次が成り立つ．

$$0 \le I_{\rho,\alpha}(H) \le U_{\rho,\alpha}(H) \le U_\rho(H). \tag{2.9}$$

また次を定義する．

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{I_{\rho,\alpha}(H) J_{\rho,\alpha}(H)}.$$

このとき不等式 (2.4),(2.8),(2.9) より次の関係が成り立つことがわかる．

$$0 \le I_{\rho,\alpha}(H) \le I_\rho(H) \le U_\rho(H)$$

かつ

$$0 \le I_{\rho,\alpha}(H) \le U_{\rho,\alpha}(H) \le U_\rho(H).$$

我々の関心は不等式 (2.3) の直接の一般化として $U_{\rho,\alpha}(H)$ に関する uncertainty relation

$$U_{\rho,\alpha}(A) U_{\rho,\alpha}(B) \ge \frac{1}{4}|Tr[\rho[A, B]]|^2 \tag{2.10}$$

である．一方我々は (2.3) の一般化であるが (2.5) で定義された Wigner-Yanase-Dyson skew information とは異なる generalized Wigner-Yanase skew information を導入してある結果を得た．

Theorem 2.1 ([3]) $0 \le \alpha \le 1$ と量子状態 ρ と物理量 H に対して *generalized Wigner-Yanase skew information* を次のように定義する．

$$\begin{aligned} & K_{\rho,\alpha}(H) \\ = \;& \frac{1}{2}Tr\left[\left(i\left[\frac{\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}}{2}, H_0\right]\right)^2\right] \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} & L_{\rho,\alpha}(H) \\ = \;& \frac{1}{2}Tr\left[\left(i\left\{\frac{\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}}{2}, H_0\right\}\right)^2\right], \end{aligned}$$

かつ

$$W_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{K_{\rho,\alpha}(H) L_{\rho,\alpha}(H)}$$

とする．このとき任意の量子状態 ρ と任意の物理量 A, B と任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して次の *uncertainty relation* が成り立つ．

$$\begin{aligned} & W_{\rho,\alpha}(A) W_{\rho,\alpha}(B) \\ \ge \;& \frac{1}{4}\left|Tr\left[\left(\frac{\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}}{2}\right)^2 [A, B]\right]\right|^2. \end{aligned}$$

ところが最近次の結果が得られた．

Theorem 2.2 ([6]) 任意の量子状態 ρ と任意の物理量 A, B と任意の $0 \le \alpha \le 1$ に対して次が成り立つ．

$$U_{\rho,\alpha}(A) U_{\rho,\alpha}(B) \ge \frac{1}{4}|Tr[(\rho - \rho^{|2\alpha-1|})[A, B]]|^2. \tag{2.11}$$

しかしながら我々は (2.11) に対する次のような反例を得た.

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{59}{64} \end{pmatrix},\ \alpha = \frac{3}{4},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B) = 0.00170898\cdots,$$

$$\frac{1}{4}|Tr[(\rho - \rho^{|2\alpha-1|})[A,B]]|^2 = 0.00610351\cdots.$$

3 Main result

(2.11) を修正する結果として次の主定理を得る.

Theorem 3.1 ([12]) 任意の量子状態 ρ と任意の物理量 A, B と任意の $0 \le \alpha \le 1$ に対して次が成り立つ.

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B) \ge \alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A,B]]|^2. \qquad (3.1)$$

Theorem 3.1 を証明するためにいくつかの Lemma を用いる. スペクトル分解より ρ の eigenvectors からなる orthonormal basis を $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ とする. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ を対応する eigenvalues とする. ただし $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i = 1$ で $\lambda_i \ge 0$ である. したがって ρ は次の表現をもつ.

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \qquad (3.2)$$

Lemma 3.1

$$I_{\rho,\alpha}(H) = \sum_{i<j}(\lambda_i+\lambda_j-\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}-\lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2.$$

Proof of Lemma 3.1. (3.2) より

$$\rho H_0^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|H_0^2.$$

このとき

$$Tr[\rho H_0^2] = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle\phi_i|H_0^2|\phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\|H_0|\phi_i\rangle\|^2. \qquad (3.3)$$

$$\rho^{\alpha}H_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}|\phi_i\rangle\langle\phi_i|H_0$$

と

$$\rho^{1-\alpha}H_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{1-\alpha}|\phi_i\rangle\langle\phi_i|H_0,$$

だから次が成り立つ.

$$\rho^{\alpha}H_0\rho^{1-\alpha}H_0 = \sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}|\phi_i\rangle\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle\langle\phi_j|H_0.$$

したがって

$$\begin{aligned} & Tr[\rho^{\alpha}H_0\rho^{1-\alpha}H_0] \\ = & \sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle\langle\phi_j|H_0|\phi_i\rangle \\ = & \sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2. \qquad (3.4) \end{aligned}$$

(2.5), (3.3), (3.4) より

$$\begin{aligned} & I_{\rho,\alpha}(H) \\ = & \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\|H_0|\phi_i\rangle\|^2 - \sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2 \\ = & \sum_{i,j=1}^{\infty}(\lambda_i - \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha})|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2 \\ = & \sum_{i<j}(\lambda_i + \lambda_j - \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha} - \lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2

$$J_{\rho,\alpha}(H) \ge \sum_{i<j}(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}+\lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2.$$

Proof of Lemma 3.2. (2.6), (3.3), (3.4) より次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & J_{\rho,\alpha}(H) \\ = & \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\|H_0|\phi_i\rangle\|^2 + \sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2 \\ = & \sum_{i,j=1}^{\infty}(\lambda_i + \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha})|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2 \\ = & 2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|\langle\phi_i|H_0|\phi_i\rangle|^2 \\ & +\sum_{i\ne j}(\lambda_i + \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha})|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2 \\ = & 2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|\langle\phi_i|H_0|\phi_i\rangle|^2 \\ & +\sum_{i<j}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha} + \lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2 \\ \ge & \sum_{i<j}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha} + \lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 任意の $t>0$ と任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して次の不等式が成り立つ;

$$(1-2\alpha)^2(t-1)^2-(t^{\alpha}-t^{1-\alpha})^2 \geq 0. \quad (3.5)$$

Proof of Lemma 3.3. $\alpha=0$ または $\frac{1}{2}$ または 1 のとき (3.5) が成り立つことは明らかである.

$$F(t)=(1-2\alpha)^2(t-1)^2-(t^{\alpha}-t^{1-\alpha})^2.$$

とおくと

$$F^{'}(t)=2(1-2\alpha)^2t-2\alpha t^{2\alpha-1}-2(1-\alpha)t^{1-2\alpha}+8\alpha(1-\alpha).$$

さらに

$$\begin{aligned} F^{''}(t) &= 2(1-2\alpha)^2-2\alpha(2\alpha-1)t^{2\alpha-2} \\ &\quad -2(1-\alpha)(1-2\alpha)t^{-2\alpha} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} & F^{'''}(t) \\ =\ & 4\alpha(1-2\alpha)(1-\alpha)t^{-2\alpha-1} \\ & -4\alpha(1-2\alpha)(1-\alpha)t^{2\alpha-3} \\ =\ & 4\alpha(1-2\alpha)(1-\alpha)\left(\frac{1}{t^{1+2\alpha}}-\frac{1}{t^{3-2\alpha}}\right). \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}<\alpha<1$ のとき $1+2\alpha>3-2\alpha$ だから次が成り立つ. $t<1$ のとき $F^{'''}(t)<0$ かつ $t>1$ のとき $F^{'''}(t)>0$. 一方 $0<\alpha<\frac{1}{2}$ のとき $1+2\alpha<3-2\alpha$ だから次が成り立つ. $t<1$ のとき $F^{'''}(t)<0$ かつ $t>1$ のとき $F^{'''}(t)>0$. $F^{''}(1)=0$ のとき $F^{''}(t)>0$ であることがわかる. また $F^{'}(1)=0$ だから次も成り立つ. $t<1$ のとき $F^{'}(t)<0$ かつ $t>1$ のとき $F^{'}(t)>0$. $F(1)=0$ だから結局次を得る. 任意の $t>0$ に対して $F(t)\geq 0$. ゆえに (3.5) を得る. □

Proof of Theorem 3.1. (3.5) において $t=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j}$ とおく. このとき次が成り立つ.

$$(1-2\alpha)^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}-1\right)^2-\left(\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{1-\alpha}\right)^2 \geq 0.$$

また次を得る.

$$(1-2\alpha)^2(\lambda_i-\lambda_j)^2-(\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}-\lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})^2 \geq 0$$

よって

$$(\lambda_i-\lambda_j)^2-(\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}-\lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})^2 \geq 4\alpha(1-\alpha)(\lambda_i-\lambda_j)^2$$

すなわち

$$\begin{aligned} & (\lambda_i+\lambda_j)^2-(\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}+\lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})^2 \\ \geq\ & 4\alpha(1-\alpha)(\lambda_i-\lambda_j)^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

したがって

$$\begin{aligned} & Tr[\rho[A,B]] \\ =\ & Tr[\rho[A_0,B_0]] \\ =\ & 2iImTr[\rho A_0B_0] \\ =\ & 2iIm\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)\langle\phi_i|A_0|\phi_j\rangle\langle\phi_j|B_0|\phi_i\rangle \\ =\ & 2i\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)Im\langle\phi_i|A_0|\phi_j\rangle\langle\phi_j|B_0|\phi_i\rangle \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} & |Tr[\rho[A,B]]| \\ =\ & 2|\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)Im\langle\phi_i|A_0|\phi_j\rangle\langle\phi_j|B_0|\phi_i\rangle| \\ \leq\ & 2\sum_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j||Im\langle\phi_i|A_0|\phi_j\rangle\langle\phi_j|B_0|\phi_i\rangle|. \end{aligned}$$

したがって $\langle\phi_i|A_0|\phi_j\rangle=A_{ij}, \langle\phi_j|_0|\phi_i\rangle=B_{ji}$ とおくと

$$|Tr[\rho[A,B]]|^2 \leq 4\{\sum_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j||ImA_{ij}B_{ji}|\}^2.$$

ここで $\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}+\lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha}=\Delta_{ij}$ とおくと (3.6) と Schwarz inequality より

$$\begin{aligned} & \alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A,B]]|^2 \\ \leq\ & 4\alpha(1-\alpha)\{\sum_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j||ImA_{ij}B_{ji}|\}^2 \\ =\ & \{\sum_{i<j}2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}|\lambda_i-\lambda_j||ImA_{ij}B_{ji}|\}^2 \\ \leq\ & \{\sum_{i<j}2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}|\lambda_i-\lambda_j||A_{ij}B_{ji}|\}^2 \\ \leq\ & \{\sum_{i<j}\{(\lambda_i+\lambda_j)^2-\Delta_{ij}^2\}^{1/2}|A_{ij}||B_{ji}|\}^2 \\ =\ & \{\sum_{i<j}(\lambda_i+\lambda_j-\Delta_{ij})^{1/2}(\lambda_i+\lambda_j+\Delta_{ij})^{1/2} \\ & \times|A_{ij}||B_{ji}|\}^2 \\ \leq\ & \sum_{i<j}(\lambda_i+\lambda_j-\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}-\lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})|A_{ij}|^2 \\ & \times\sum_{i<j}(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha}+\lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})|B_{ji}|^2. \end{aligned}$$

ゆえに

$$I_{\rho,\alpha}(A)J_{\rho,\alpha}(B) \geq \alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A,B]]|^2.$$

さらに

$$I_{\rho,\alpha}(B)J_{\rho,\alpha}(A) \geq \alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A,B]]|^2.$$

したがって最終的な結果 (3.1) を得る. □

Remark 3.1 *(3.1)* において $\alpha = 1/2$ とおくことにより *(2.3)* が得られる. したがって *Theorem 3.1* は *Luo [8]* の結果の一般化であることがわかる.

Remark 3.2 *[3]* における *Conjecture 2.3* は一般的には成り立たないことに注意する. *Conjecture* は *(2.10)* である. 反例は次で与えられる.

$$\rho = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \ \alpha = 1/3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき

$$I_{\rho,\alpha}(A)J_{\rho,\alpha}(B) = I_{\rho,\alpha}(B)I_{\rho,\alpha}(A) = 0.22457296\cdots$$

また $|Tr[\rho[A,B]]|^2 = 1$. これらにより

$$\begin{aligned} & U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B) = 0.22457296\cdots \\ < \ & \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2 = 0.25. \end{aligned}$$

が成り立つ. 一方

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B) > \alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A,B]]|^2 = 0.2222222\cdots.$$

さらに *[3]* において *Conjecture 2.10* に対する反例も与える. 不等式

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[(\frac{\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}}{2})^2[A,B]]|^2$$

は一般的には正しくない. なぜなら

$$LHS = 0.22457296\cdots, RHS = 0.23828105995\cdots$$

だからである.

参考文献

[1] J.C.Bourin, *Some inequalities for norms on matrices and operators*, Linear Algebra and its Applications, vol.292(1999), pp.139-154.

[2] J.I.Fujii, *A trace inequality arising from quantum information theory*, Linear Algebra and its Applications, vol.400(2005), pp.141-146.

[3] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, *Trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information*, J. Math. Anal. Appl., vol.356(2009), pp.179-185.

[4] W.Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhat der quantummechanischen Kinematik und Mechanik*, Zeitschrift für Physik, vol.43(1927), pp.172-198.

[5] H.Kosaki, *Matrix trace inequality related to uncertainty principle*, Internatonal Journal of Mathematics, vol.16(2005), pp.629-646.

[6] D.Li, X.Li, F.Wang, H.Huang, X.Li and L.C.Kwek, *Uncertainty relation of mixed states by means of Wigner-Yanase-Dyson information*, Physical Review A, vol.79(2009), pp.052106-1-4.

[7] E.H.Lieb, *Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture*, Adv. Math., vol.11(1973), pp.267-288.

[8] S.Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys. Rev. A, vol.72(2005), p.042110.

[9] S.Luo and Q.Zhang, *On skew information*, IEEE Trans. Information Theory, vol.50(2004), pp.1778-1782, and *Correction to "On skew information"*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), p.4432.

[10] E.P.Wigner and M.M.Yanase, *Information content of distribution*, Proc. Nat. Acad. Sci. U,S,A., vol.49(1963), pp.910-918.

[11] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, *A generalized skew information and uncertainty relation*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), pp.4401-4404.

[12] K.Yanagi, *Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information*, arXiv:0907.1576v1[quant-ph] 9 Jul 2009.