関係の連結性に関するある種の十分条件について

橋　本　　　寛

1. はじめに

ブール行列を用いて，与えられた二項関係が連結的となるための条件およびそれに関する性質とくに推移性や反射性について考察をおこなっている。よく知られているように，二項関係はブール行列によって表現でき，両者の性質や演算は互いに対応している。したがってブール行列の性質を調べることにより二項関係の性質を知ることができる。従来，連結性のもとでの関係行列の性質については推移性やべき零性等に関して種々の研究が行なわれている[(1)—(8)(11)(12)]。しかし，ここでは逆に関係行列が連結的となるための条件，すなわち二項関係の定義されている有限集合の要素間において比較可能性が成立するための条件を明らかにしている。

連結的関係は基本的な二項関係であって，二項関係に関する実際の議論では，トーナメントや選好関係における議論のように[(1)(2)(3)(15)]，その二項関係が連結的かどうかは最初に与えられることが多いと考えられる。これに対して本論文の以下の結果は，ある種の条件を満たす二項関係が必ず連結的となってしまうことを示している。本論文で述べるような形での連結的関係の条件はこれまでほとんど議論されていないように思われ，ここでの結果は連結性の興味深い一つの側面を示しているものと考えられる。

2．定　義

本論文では0，1の要素からなる正方のブール行列[13]を考える。すでに述べたように，二項関係はこのブール行列によって表現できる。ブール行列に関する演算の定義は文献(6)に従うものとするが，主要なものについては次のとおりである。ブール行列 R，S に対して行列の和を $R \vee S$，論理積を $R \wedge S$，行列積を $R \times S$ で表わす。R^2 は $R \times R$ を意味し，一般に行列のべき乗を $R^{l+1} = R^l \times R$ で定義する。R^l の (i, j) 要素を $r_{ij}^{(l)}$ で示す。R' は R の転置，$\overline{R}$ は R の否定を示す。

特殊なブール行列として単位行列を I で，零行列を O で，全要素が1の行列を E で示す。$I \leqq R$ であるとき関係行列 R は反射的，$R^2 \leqq R$ となるとき R は推移的，$R \wedge R' \leqq I$ となるとき R は反対称的であるといわれる[13]。また $R \vee R' \vee I = E$ となるとき関係行列 R は連結的といわれ，とくに $R \vee R' = E$ となるとき R は反射的な連結的関係を表現する。なお，トーナメントを表現するブール行列 R は一般に $R \vee R' \vee I = E$ かつ $R \wedge R' = O$ となる[3]。

3．結　果

ブール行列 R を用いて二項関係が連結的となるための条件を調べる。まず，一般の連結性の条件すなわち $R \vee R' \vee I = E$ となるための条件について考察し，次に反射的な連結性の条件すなわち $R \vee R' = E$ となる条件について考える。

3.1　$R \vee R' \vee I = E$ となる条件

与えられた関係行列 R が連結的となるための条件について考察をおこなう。まず比較的一般的な性質を示し，次にこの性質から多くの条件を導く。また推移性に関する性質を示し，これを用いて連結性の条件を導く。さらに

関連する性質としてある種の条件を満たす関係行列の存在しないことを示す。なお，$R \vee R' \vee I = E$ と同値であるほとんど自明な条件が文献(8)(10)(12)で示されている。

〔性質1〕

ある h, l (h, $l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2hl-1} \leqq \overline{R'} \vee I$, $\overline{R'} \leqq R^l \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(証明) (1) $l=1$ のとき

$\overline{R'} \leqq R \vee I$ から $\overline{R'} \vee R' \leqq R \vee R' \vee I$。よって

$$R \vee R' \vee I = E$$

(2) $l \geqq 2$ のとき

いま $r_{ij}=0$, $r_{ji}=0$, $i \neq j$ とすれば $r_{ji}^{(l)}=1$, $r_{ij}^{(l)}=1$。したがって $r_{ii}^{(2l)}=1$。また $r_{ij}=0$, $r_{ij}^{(l)}=1$ だからある m ($l-1>m \geqq 0$) およびある k ($i \neq k \neq j$) に対して

$$r_{ii}^{(m)} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj}^{(l-m-1)} = 1$$

ただし $r_{ii}^{(0)}=1$ とする。ところで $r_{ji}^{(l)}=1$ であるから

$$r_{kj}^{(l-m-1)} \wedge r_{ji}^{(l)} \wedge r_{ii}^{(2(h-1)l)} \wedge r_{ii}^{(m)} = 1$$

すなわち $r_{ki}^{(2hl-1)}=1$。よって $r_{ik}=0$ となるが，これは矛盾する。ゆえに $R \vee R' \vee I = E$。 (証明終)

〔性質2〕

(1) ある h, l (h, $l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2hl-1} \vee I \leqq \overline{R'} \vee I$, $\overline{R'} \leqq R^l \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(2) ある h, l (h, $l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2hl-1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^l \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(3) ある h, l (h, $l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2hl-1} \vee I \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^l \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(4) ある h, l (h, $l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2hl-1} \vee I = \overline{R'} \vee I = R^l \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(5) ある h, l (h, $l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2hl-1} = \overline{R'} \vee I = R^l \vee I \Longrightarrow R \vee$

$R'\vee I=E$

（証明）　性質1による。　（証明終）

なお，一般に

$$S\leqq P\vee T \Longleftrightarrow P\vee S\leqq P\vee T$$

であるから $R^{2hl-1}\leqq\overline{R'}\vee I$ と $R^{2hl-1}\vee I\leqq\overline{R'}\vee I$ は同値である。

〔性質3〕

(1)　ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2l-1}\leqq\overline{R'}\vee I,\ \overline{R'}\leqq R^{l}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(2)　ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{4l-1}\leqq\overline{R'}\vee I,\ \overline{R'}\leqq R^{l}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(3)　ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{6l-1}\leqq\overline{R'}\vee I,\ \overline{R'}\leqq R^{l}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

（証明）　性質1による。　（証明終）

〔性質4〕

(1)　ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2l-1}\vee I\leqq\overline{R'}\vee I,\ \overline{R'}\leqq R^{l}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(2)　ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2l-1}\leqq\overline{R'}\vee I\leqq R^{l}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(3)　ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2l-1}\vee I\leqq\overline{R'}\vee I\leqq R^{l}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(4)　ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2l-1}\vee I=\overline{R'}\vee I=R^{l}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(5)　ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2l-1}=\overline{R'}\vee I=R^{l}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

（証明）　性質3(1)による　（証明終）

〔性質5〕

(1)　$R^{3}\leqq\overline{R'}\vee I,\ \overline{R'}\leqq R^{2}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(2)　$R^{3}\vee I\leqq\overline{R'}\vee I,\ \overline{R'}\leqq R^{2}\vee I\Longrightarrow R\vee R'\vee I=E$

(3)　$R^3 \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^2 \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(4)　$R^3 \vee I \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^2 \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(5)　$R^3 \vee I = \overline{R'} \vee I = R^2 \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(証明)　(1)　性質3(1)による。

(2)—(5)　(1)による。　(証明終)

なお，3・2節の性質27(7)で示すように

$$R^3 = \overline{R'} \vee I = R^2 \vee I \Longrightarrow R \vee R' = E$$

が成立する。

〔性質6〕

あるl($l=1, 2, \cdots$)に対し$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I = R^l \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(証明)　$r_{ik} = r_{kj} = 1$とおき$r_{ij} = 1$となることを示す。

(1)　$i=k$のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 1$

(2)　$k=j$のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 1$

(3)　$i \neq k$, $k \neq j$, $i=j$のとき

$r_{ik} = r_{ki} = 1$。よってすべてのm($m=0, 1, 2, \cdots$)に対して$r_{ik}^{(2m+1)} = 1$。

(a)　lが奇数のとき

$\overline{R'} \vee I = R^l \vee I$と$r_{ki} = 1$から$r_{ik}^{(l)} = 0$。これは$r_{ik}^{(2m+1)} = 1$($m=0, 1, 2, \cdots$)と矛盾する。

(b)　lが偶数のとき

$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I$と$r_{ki} = 1$から$r_{ik}^{(l+1)} = 0$。これは$r_{ik}^{(2m+1)} = 1$($m=0, 1, 2, \cdots$)と矛盾する。

こうしてこの(3)の場合はありえない。

(4)　$i \neq k$, $k \neq j$, $i \neq j$のとき

もし$r_{ij} = 0$とすれば$r_{ji}^{(l)} = 1$。ところで$r_{ik} = 1$だから$r_{jk}^{(l+1)} = 1$。また一方$r_{kj} = 1$と$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I$より$r_{jk}^{(l+1)} = 0$。これは矛盾する。ゆえに$r_{ij} = 1$。

(証明終)

〔性質7〕

(1)　ある$l(l=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^{l+1}\leqq\overline{R}'\vee I=R^l \Longrightarrow R^2\leqq R$

(2)　ある$l(l=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^{l+1}=\overline{R}'\vee I=R^l\vee I \Longrightarrow R^2\leqq R$

(3)　ある$l(l=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^{l+1}=\overline{R}'\vee I=R^l \Longrightarrow R^2\leqq R$

(4)　ある$l(l=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^{l+1}\vee I\leqq\overline{R}'\vee I=R^l\vee I \Longrightarrow R^2\leqq R$

(5)　ある$l(l=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^{l+1}\vee I\leqq\overline{R}'\vee I=R^l \Longrightarrow R^2\leqq R$

(6)　ある$l(l=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^{l+1}\vee I=\overline{R}'\vee I=R^l\vee I \Longrightarrow R^2\leqq R$

(7)　ある$l(l=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^{l+1}\vee I=\overline{R}'\vee I=R^l \Longrightarrow R^2\leqq R$

(証明)　(1)　$\overline{R}'\vee I=R^l$のとき$\overline{R}'\vee I=R^l\vee I$。したがって性質6から$R^2\leqq R$。

(2)—(7)　性質6による。　(証明終)

〔性質8〕

(1)　$R^2\leqq\overline{R}'\vee I=R\vee I \Longrightarrow R^2\leqq R$

(2)　$R^2\leqq\overline{R}'\vee I,\ \overline{R}'=R\vee I \Longrightarrow R^2\leqq R$

(3)　$R^2\leqq\overline{R}',\ \overline{R}'\vee I=R\vee I \Longrightarrow R^2\leqq R$

(4)　$R^2\leqq\overline{R}'=R\vee I \Longrightarrow R^2\leqq R$

(証明)　性質6による。　(証明終)

〔性質9〕

$R^2\leqq\overline{R}'\vee I=R\vee I \Longrightarrow [(R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3]\wedge I=O$

(証明)　(1)　$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$となること

$\overline{R}'\vee I=R\vee I$から$R\leqq\overline{R}'\vee I$。ところで

$$R\leqq\overline{R}'\vee I \Longleftrightarrow R\wedge R'\leqq I \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$$

であるから[8]，これによって$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$。

(2)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$となること

一般に

$$R^2\leqq\overline{R}' \Longleftrightarrow R^3\wedge I=O$$

が成立する[9]。したがって

$$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{(R\wedge\overline{I})'}=\overline{R}'\vee I \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$$

ここで $R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$ によって $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \overline{R'} \vee I$ であるから $(R \wedge \bar{I})^3 \wedge I = O$。

(証明終)

なお，一般に

$$R^2 \leqq R,\ R^2 \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R \wedge R' \leqq I$$

となることが知られている(8)。いま性質 8 (1)によれば $R^2 \leqq \overline{R'} \vee I = R \vee I$ のとき $R^2 \leqq R$ となるから，これによって $R \wedge R' \leqq I$ すなわち $(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O$ を得ることもできる。

また，上の性質9に関連して，$R \vee R' \vee I = E$ のとき

$$[(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \Longrightarrow R^2 \leqq R$$

となることも知られている(6)。

〔性質10〕

ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I = R^l \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(証明)　$\overline{R'} \leqq R^l \vee I$ によって

$$E = \overline{R'} \vee R' \leqq R^l \vee R' \vee I$$

ところで性質 6 によって $R^2 \leqq R$ だから $R^l \leqq R$ となる。よって

$$E = R^l \vee R' \vee I \leqq R \vee R' \vee I$$

すなわち

$$R \vee R' \vee I = E$$

(証明終)

〔性質11〕

ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{l+1} \vee I = \overline{R'} \vee I = R^l \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

(証明)　性質10による。　(証明終)

〔性質12〕

ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \vee I,\ \overline{R'} \leqq R^{2l} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(証明)　$r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき $r_{ij} = 1$ となることを示す。

(1)　$i = k$ のとき

$$r_{ij} = r_{kj} = 1$$

(2)　$k = j$ のとき

$$r_{ij} = r_{ik} = 1$$

(3)　$i \neq k$, $k \neq j$, $i = j$ のとき

$r_{ik} = r_{ki} = 1$。よって $r_{ii}^{(2)} = 1$ となり $r_{ik}^{(2l+1)} = 1$。ところで $R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \vee I$ と $r_{ki} = 1$ から $r_{ik}^{(2l+1)} = 0$。これは矛盾するのでこの場合はありえない。

(4)　$i \neq k$, $k \neq j$, $i \neq j$ のとき

もし $r_{ij} = 0$ とすれば $r_{ji}^{(2l)} = 1$。ところで $r_{ik} = 1$ だから $r_{jk}^{(2l+1)} = 1$。また一方 $r_{kj} = 1$ と $R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \vee I$ より $r_{jk}^{(2l+1)} = 0$。これは矛盾する。ゆえに $r_{ij} = 1$。

(証明終)

〔性質13〕

(1)　ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{2l} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(2)　ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2l+1} \vee I = \overline{R'} \vee I = R^{2l} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(3)　ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2l+1} = \overline{R'} \vee I = R^{2l} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(4)　ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \vee I$, $\overline{R'} \leqq R^{2l} \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(5)　ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2l+1} \vee I \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{2l} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(証明)　性質12による。　(証明終)

すでに示した性質12を形式的に適用すれば

$$\text{ある } l(l=1, 2, \cdots) \text{ に対して } R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \leqq R^{2l} \Longrightarrow R^2 \leqq R$$

が成立するが，次の性質14で示すように，実際には $R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \leqq R^{2l}$ なる R は存在しない。

〔性質14〕

(1)　すべての $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して，$R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \leqq R^{2l}$ なる R は存在しない。

(2)　$R^3 \leqq \overline{R'} \leqq R^2$ なる R は存在しない。

(証明)　(1)　$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$ によって $r_{ii} = 0$。したがって $\overline{R'} \leqq R^{2l}$ から $r_{ii}^{(2l)} = 1$。一方性質12によれば $R^2 \leqq R$ であるから $r_{ii} = 1$。しかしこれは $r_{ii} = 0$ と矛盾する。

(2)　(1)による。　(証明終)

〔性質15〕

$$R^3 \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^4 \wedge I = O$$

(証明) (1) $R^3 \leqq \overline{R'}$のとき

$r_{ii}^{(4)}=1$ とすれば，ある k に対して $r_{ik}^{(3)} \wedge r_{ki}=1$。この$r_{ik}^{(3)}=1$ と $R^3 \leqq \overline{R'}$によって $r_{ki}=0$。しかしこれは $r_{ki}=1$ と矛盾する。

ゆえに $R^4 \wedge I=O$。

(2) $R^4 \wedge I=O$ のとき

$r_{ij}^{(3)}=1$，$\overline{r_{ji}}=0$ とすれば $r_{ji}=1$ だから $r_{ii}^{(4)}=1$と なり $R^4 \wedge I=O$ と矛盾する。したがって $r_{ij}^{(3)} \leqq \overline{r_{ji}}$，すなわち $R^3 \leqq \overline{R'}$。 (証明終)

上の性質15は文献(5)における性質25の特別な場合となっている。この性質15と性質14(2)を用いれば次の性質が得られる。

〔性質16〕

(1) $\overline{R'} \leqq R^2 \Longrightarrow R^3 \wedge R' \neq O$

(2) $\overline{R'} \leqq R^2 \Longrightarrow R^4 \wedge I \neq O$

(3) $R^3 \leqq \overline{R'} \Longrightarrow R^2 \vee R' \neq E$

(4) $R^4 \wedge I=O \Longrightarrow R^2 \vee R' \neq E$

(証明) 性質14(2)および性質15による。 (証明終)

〔性質17〕

すべての $l\,(l=1, 2, \cdots)$ に対して，$R^{2l-1} \leqq \overline{R'} \leqq R^l$ なる R は存在しない。

(証明) (1) $l=1$ のとき

$R \leqq \overline{R'} \leqq R$。$R \leqq \overline{R'}$ によって $r_{ii}=0$。しかしこれは $\overline{R'} \leqq R$ と矛盾する。

(2) $l \geqq 2$ のとき

$R^{2l-1} \leqq \overline{R'}$ によって $r_{ii}=0$。また $\overline{R'} \leqq R^l$ によって $r_{ii}^{(l)}=1$。したがって $r_{ii}^{(l)}=1$ で $r_{ii}=0$ であるから，ある $k\,(k \neq i)$ に対して $r_{ik} \wedge r_{ki}^{(l-1)}=1$。この $r_{ik}=1$ によって $r_{ki}^{(2l-1)}=0$。ところで $r_{ki}^{(l-1)} \wedge r_{ii}^{(l)}=1$ だから $r_{ki}^{(2l-1)}=1$ となるが，これは矛盾している。 (証明終)

なお，すでに示した性質14(2)は上の性質17の特別な場合として得ることもできる。

〔性質18〕

ある $l\,(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \vee I$，$\overline{R'} \leqq R^{2l} \vee I \Longrightarrow R \vee R' \vee I$

$=E$

（証明）$\overline{R'} \leqq R^{2l} \vee I$によって

$$E=\overline{R'} \vee R' \leqq R^{2l} \vee R' \vee I$$

ところで性質12によって$R^2 \leqq R$だから$R^{2l} \leqq R$となる。よって

$$E=R^{2l} \vee R' \vee I \leqq R \vee R' \vee I$$

すなわち

$$R \vee R' \vee I=E$$

（証明終）

3.2 $R \vee R'=E$となる条件

ここでは与えられた関係行列Rが反射的でかつ連結的となる条件について考察する。前節3.1の場合と同様の比較的一般的な結果を示し，次にこれの系として反射的な連結性のいくつかの条件を導いている。また，さらに反射性や推移性に関する性質を示し，これらを用いて$R \vee R'=E$となるいくつかの条件を示している。なお，$R \vee R'=E$と同値になるほとんど自明な条件が文献(4)(9)(12)で示されている。

〔性質19〕

あるh, l(h, $l=1, 2, \cdots$)に対して$R^{2hl-1} \leqq \overline{R'} \vee I$, $\overline{R'} \leqq R^l \Longrightarrow R \vee R'=E$

（証明）(1)　$l=1$のとき

$\overline{R'} \leqq R$だから$E=\overline{R'} \vee R' \leqq R \vee R'$すなわち$R \vee R'=E$。

(2)　$l \geqq 2$のとき

$r_{ij}=0$, $r_{ji}=0$とする。したがって$r_{ji}^{(l)}=1$, $r_{ij}^{(l)}=1$となり$r_{ii}^{(2l)}=1$。いま$r_{ij}=0$, $r_{ij}^{(l)}=1$だからあるm($l-1>m \geqq 0$)およびあるk($i \neq k \neq j$)に対して

$$r_{ii}^{(m)} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj}^{(l-m-1)}=1$$

ただし$r_{ii}^{(0)}=1$とする。ところで$r_{ji}^{(l)}=1$だから

$$r_{kj}^{(l-m-1)} \wedge r_{ji}^{(l)} \wedge r_{ii}^{(2(h-1)l)} \wedge r_{ii}^{(m)}=1$$

すなわち$r_{ki}^{(2hl-1)}=1$。したがって$r_{ik}=0$となるが，これは矛盾する。ゆえに

$R \vee R' = E$。　(証明終)

〔性質20〕

(1)　ある h, l (h, $l=1$, 2, …) に対して $R^{2hl-1} \vee I \leqq \overline{R'} \vee I$, $\overline{R'} \leqq R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(2)　ある h, l (h, $l=1$, 2, …) に対して $R^{2hl-1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(3)　ある h, l (h, $l=1$, 2, …) に対して $R^{2hl-1} \vee I \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(4)　ある h, l (h, $l=1$, 2, …) に対して $R^{2hl-1} \vee I = \overline{R'} \vee I = R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(5)　ある h, l (h, $l=1$, 2, …) に対して $R^{2hl-1} = \overline{R'} \vee I = R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(証明)　性質19による。　(証明終)

〔性質21〕

(1)　ある l ($l=1$, 2, …) に対して $R^{2l-1} \leqq \overline{R'} \vee I$, $\overline{R'} \leqq R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(2)　ある l ($l=1$, 2, …) に対して $R^{4l-1} \leqq \overline{R'} \vee I$, $\overline{R'} \leqq R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(3)　ある l ($l=1$, 2, …) に対して $R^{6l-1} \leqq \overline{R'} \vee I$, $\overline{R'} \leqq R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(証明)　性質19による。　(証明終)

〔性質22〕

(1)　ある l ($l=1$, 2, …) に対して $R^{2l-1} \vee I \leqq \overline{R'} \vee I$, $\overline{R'} \leqq R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(2)　ある l ($l=1$, 2, …) に対して $R^{2l-1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(3)　ある l ($l=1$, 2, …) に対して $R^{2l-1} \vee I \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(4)　ある l ($l=1$, 2, …) に対して $R^{2l-1} \vee I = \overline{R'} \vee I = R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

(5)　ある l ($l=1$, 2, …) に対して $R^{2l-1} = \overline{R'} \vee I = R^{l} \Longrightarrow R \vee R' = E$

（証明）　性質21(1)による。　（証明終）

〔性質23〕

ある l($l=1, 2, \cdots$) に対して $R^{l+1}=\overline{R}'\vee I=R^{l} \Longrightarrow R\vee R'=E$

（証明）　性質22(5)による。　（証明終）

〔性質24〕

ある l($l=1, 2, \cdots$) に対して $R^{l+1}\vee I=\overline{R}'\vee I=R^{l} \Longrightarrow R\vee R'=E$

（証明）　$R^{l+1}\vee I=R^{l}$ によって

$$R^{l+1}\leqq R^{l}$$

$$R^{l+2}\leqq R^{l+1}\leqq R^{l}$$

$$R^{l+3}\leqq R^{l+2}\leqq R^{l+1}\leqq R^{l}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

こうして

$$R^{2l-1}\lneqq R^{l}=\overline{R}'\vee I$$

よって性質21(1)から $R\vee R'=E$。　（証明終）

〔性質25〕

(1)　ある l($l=1, 2, \cdots$) に対して $I\leqq R^{l+1}$, $R^{l}\leqq\overline{R}'\vee I \Longrightarrow I\leqq R$

(2)　ある l($l=1, 2, \cdots$) に対して $R^{l+1}=\overline{R}'\vee I=R^{l}\vee I \Longrightarrow I\leqq R$

（証明）　(1)　$r_{ii}=0$ と仮定する。いま $r_{ii}^{(l+1)}=1$ であるから，ある k($k\neq i$) に対し $r_{ik}\wedge r_{ki}^{(l)}=1$ 。ところで $r_{ik}=1$ によって $R^{l}\leqq\overline{R}'\vee I$ から $r_{ki}^{(l)}=0$ 。しかしこれは $r_{ik}\wedge r_{ki}^{(l)}=1$ と矛盾する。ゆえに $I\leqq R$。

(2)　(1)による。　（証明終）

〔性質26〕

ある l($l=1, 2, \cdots$) に対して $R^{l+1}=\overline{R}'\vee I=R^{l}\vee I \Longrightarrow R\vee R'=E$

（証明）　$R^{l+1}=R^{l}\vee I$ から $R^{l+1}\vee I=R^{l}\vee I$ となるので性質11によって $R\vee R'\vee I=E$。また性質25(2)によって $I\leqq R$。したがって $R\vee R'=E$。

（証明終）

〔性質27〕

(1)　$R^{3}\leqq\overline{R}'\vee I$, $\overline{R}'\leqq R^{2} \Longrightarrow R\vee R'=E$

(2)　$R^3 \vee I \leqq \overline{R'} \vee I,\ \overline{R'} \leqq R^2 \Longrightarrow R \vee R' = E$

(3)　$R^3 \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^2 \Longrightarrow R \vee R' = E$

(4)　$R^3 \vee I \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^2 \Longrightarrow R \vee R' = E$

(5)　$R^3 \vee I = \overline{R'} \vee I = R^2 \Longrightarrow R \vee R' = E$

(6)　$R^3 = \overline{R'} \vee I = R^2 \Longrightarrow R \vee R' = E$

(7)　$R^3 = \overline{R'} \vee I = R^2 \vee I \Longrightarrow R \vee R' = E$

(証明)　(1)　性質21による。

(2)—(6)　(1)による。

(7)　性質26による。　(証明終)

なお，上の性質27(1)より

$$R^3 \leqq \overline{R'} \leqq R^2 \Longrightarrow R \vee R' = E$$

が形式的には成立するが，すでに性質14(2)で示したように $R^3 \leqq \overline{R'} \leqq R^2$ なる R は存在しない。

〔性質28〕

(1)　ある $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{12l-7} = \overline{R'} \vee I = R^{6l-3} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(2)　$R^5 = \overline{R'} \vee I = R^3 \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(証明)　(1)　$r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき $r_{ij} = 1$ となることを示す。

(a)　$i=k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 1$

(b)　$k=j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 1$

(c)　$i \neq k,\ k \neq j,\ i=j$ のとき

$r_{ik} = r_{ki} = 1$。これから $r_{ii}^{(2)} = 1$ となるから $r_{ik}^{(12l-7)} = r_{ik}^{(2(6l-4)+1)} = 1$。ところで $r_{ki} = 1$ によって $r_{ik}^{(12l-7)} = 0$。これは矛盾する。ゆえにこの場合はありえない。

(d)　$i \neq k,\ k \neq j,\ i \neq j$ のとき

もし $r_{ij} = 0$ とすれば，$12l-7 = 2(6l-3)-1$ であるから性質 4 (5)によって $r_{ji} = 1$。したがって $r_{ik} = r_{kj} = r_{ji} = 1$ となり，$r_{ij}^{(12l-7)} = r_{ij}^{(3(4l-3)+2)} = 1$。これか

ら $r_{ji}=0$ となるが，これは矛盾する。ゆえに $r_{ij}=1$。

(2) (1)による。　(証明終)

〔性質29〕

(1) ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{12l-7}=\overline{R'}\vee I=R^{6l-3}\vee I \Longrightarrow I\leqq R$

(2) $R^5=\overline{R'}\vee I=R^3\vee I \Longrightarrow I\leqq R$

(証明) (1) $I\leqq R^{12l-7}$ であり，また性質28によって $R^2\leqq R$ となるから $I\leqq R^{12l-7}\leqq R$。

(2) (1)による。　(証明終)

〔性質30〕

(1) ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{12l-7}=\overline{R'}\vee I=R^{6l-3}\vee I \Longrightarrow R\vee R'=E$

(2) $R^5=\overline{R'}\vee I=R^3\vee I \Longrightarrow R\vee R'=E$

(証明) (1) $12l-7=2(6l-3)-1$ だから性質4(5)によって

$$R\vee R'\vee I=E$$

また性質29によって $I\leqq R$。したがって $R\vee R'=E$。

(2) (1)による。　(証明終)

4. まとめ

与えられた二項関係を表現するブール行列が連結的となるための多数の条件を得ることができた。これらの条件の一部は比較的一般的な結果であって，これまでほとんど考察されていないように思われ，連結性の議論において有用であろうと考えられる。関係の連結性は，すでに述べたように順序や選好関係，トーナメントにおける基本的な概念であって，これらの理論において重要な役割を演じるものである。

ここでの結果の多くは全順序 (total order)[14] すなわち反射的，反対称的，推移的かつ連結的関係と密接に関連している。本論文では主として連結性に

ついて考察をおこなったが，さらに他の性質についても調べてみる必要があるであろう。また，ここで示した連結性や推移性に関する結果を一般化し，必ずしも全順序を表現する関係行列ではない行列に関しても成立するようにすることも今後の課題である。

文　献

(1) Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

(2) Behzad, M., G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster: "Graphs & Digraphs," Wadsworth, California (1979).

(3) Harary, F. and L. Moser: "The theory of round robin tournaments," American Math. Monthly, Vol. 73, pp. 231-246 (1966).

(4) 橋本　寛：〝連結的推移関係行列の性質〟，山口経済学雑誌，第34巻第３・４号，pp. 387-405（昭和60年６月）。

(5) 橋本　寛：〝連結的推移関係行列の性質Ⅱ〟，山口経済学雑誌，第35巻第３・４号，pp. 281-293（昭和61年１月）。

(6) 橋本　寛：〝推移関係行列に関するいくつかの十分条件〟，山口経済学雑誌，第35巻第５・６号，pp. 425-436（昭和61年５月）。

(7) 橋本　寛：〝Negatively Transitive 関係の性質〟，山口経済学雑誌，第36巻１・２号，pp. 41-58（昭和61年９月）。

(8) 橋本　寛：〝連結的関係に関する若干の性質〟，山口経済学雑誌，第36巻５・６号，pp. 245-261（昭和62年５月）。

(9) 橋本　寛：〝連結性のもとでの関係行列の性質〟，山口経済学雑誌，第37巻第１・２号，pp. 75-88（昭和62年９月）。

(10) 橋本　寛：〝非推移的関係〟，山口経済学雑誌，第37巻第５・６号，pp. 683-696（昭和63年９月）。

(11) 橋本　寛：〝Vacuously Transitive 関係の一般化〟，山口経済学雑誌，第38巻第１・２号，pp. 19-37（平成元年１月）。

(12) 橋本　寛：〝連結的関係行列の初等的性質〟，山口経済学雑誌，第38巻第３・４号，pp. 557-576（平成元年７月）

(13) Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).

(14) 日本数学会：〝岩波数学辞典第３版〟，岩波書店（1985年12月）。

(15) Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models, with applications to social, biological, and environmental problems," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).