Negatively Transitive 関係の性質

橋　本　　　寛

1. はじめに

本論文では，negatively transitive 関係[4][5][9]を表現するブール行列の性質について考察をおこなっている。negatively transitive 関係は，その否定が推移的となる二項関係であり，応用上しばしば現れ，興味深い性質を有している。negatively transitive 関係の基本的な性質については，これまでにもいくつか知られているが，ここではこれまで知られている性質を一般化したものや，これまで余り知られていないと思われる性質などを示している。negatively transitive 関係は，以下で明らかとなるように選好関係[1][3][8]やトーナメント[2][9]と密接な関連をもっており，ここで述べる結果はそれらに関する議論においても有用であろうと考えられる。

2. 定義

0，1の要素からなる n 次のブール行列 $R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$ に対して，$R \vee S=[r_{ij} \vee s_{ij}]$，$R \wedge S=[r_{ij} \wedge s_{ij}]$ と定める。ここに $r_{ij} \vee s_{ij}=\max(r_{ij},\ s_{ij})$，$r_{ij} \wedge s_{ij}=\min(r_{ij},\ s_{ij})$ とする。また $\overline{R}=[\overline{r_{ij}}]$，$\overline{r_{ij}}=1-r_{ij}$ と定める。行列積 $R \times S$ は次のように定める。

$$R \times S=[(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$$

行列のべき乗はこの行列積を用いて $R^{k+1}=R^k\times R$, $R^1=R$ と定める。一般に R^k の $(i,\ j)$ 要素を $r_{ij}^{(k)}$ で示す。また行列の転置を R' で示し, $\triangle R=R\wedge\overline{R'}$, $\nabla R=R\wedge R'$ と定める。特殊な行列として, 単位行列を $I=[\delta_{ij}]$, 全要素が1の行列を E, 零行列を O で示す。

以上の定義を用いれば, negatively transitive 関係を表現するブール行列 R は $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ となる。また $R^2\leqq R$ であれば R は推移的, $R^n=O$ であればべき零, $\nabla R\leqq I$ であれば反対称的, $\nabla R=O$ のときは非対称的であるといわれる。トーナメントを表現する行列 R は $R\vee R'\vee I=E$, $\nabla R=O$ となる。

3. negatively transitive 関係となるための条件

どのようなときに与えられたブール行列 R が, negatively transitive 関係を表現する行列となるかを, 連結性 $R\vee R'\vee I=E$ または $R\vee R'=E$ のもとで調べている。

〔性質1〕　$R\vee R'\vee I=E$, $(\triangle R)^2\leqq\overline{R'}\vee I\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(証明)　$r_{ik}=r_{kj}=0$ とおいて $r_{ij}=0$ となることを示す。

(1)　$i=k$ のとき

$$r_{ij}=r_{kj}=0$$

(2)　$k=j$ のとき

$$r_{ij}=r_{ik}=0$$

(3)　$i=j$ のとき

$r_{ik}=0$, $r_{ki}=r_{kj}=0$ および $R\vee R'\vee I=E$ から $i=k$。よって

$$r_{ij}=r_{kj}=0$$

(4) $i \neq k$, $k \neq j$, $i \neq j$ のとき

$$r_{ki} = 1, \quad r_{jk} = 1$$

よって

$$r_{jk} \wedge \overline{r_{kj}} \wedge r_{ki} \wedge \overline{r_{ik}} = 1$$

したがって $r_{ij} = 0$ となる。 (証明終)

〔性質 2〕 $R \vee R' \vee I = E$, $(\Delta R)^2 \leqq \overline{R'} \Longrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質 1 による。 (証明終)

〔性質 3〕 $R \vee R' \vee I = E$, $R^2 \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) $(\Delta R)^2 \leqq R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$ だから性質 1 によって $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$。

(証明終)

〔注意 1〕 一般には

$$R \vee R' \vee I = E, \ (\Delta R)^2 \leqq R \Longrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$$

とはならない。例えば，いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\Delta R)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{R})^2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

であって，$R\vee R'\vee I=E$，$(\Delta R)^2\leqq R$ とはなるが，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ とはなっていない。

〔性質4〕　$R\vee R'\vee I=E$，$(\Delta R)^2\leqq\Delta R\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(証明)　性質2による。　(証明終)

〔注意2〕　$R\vee R'\vee I=E$ でなければ，一般には

$$(\Delta R)^2\leqq\Delta R\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$$

とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

とおけば，$\Delta R=O$,

$$\overline{R}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

となって，$(\Delta R)^2\leqq\Delta R$ であるが，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ とはなっていない。

〔性質5〕　$R\vee R'\vee I=E$ のとき

(1)　$(\Delta R)^2=O\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(2)　$R^2\leqq\overline{R'}\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(3)　$R^2\leqq\Delta R\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(証明)　性質2による。　(証明終)

〔性質6〕　$R\vee R'=E$，$(\Delta R)^2\leqq\overline{R'}\vee I\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\Delta(\overline{R})$

(証明)　$r_{ik}=0$，$r_{kj}=0$ とおく。このとき

$$r_{ki}=1,\ \ r_{jk}=1,\ \ i\neq j$$

したがって

$$r_{jk}\wedge\overline{r_{kj}}\wedge r_{ki}\wedge\overline{r_{ik}}=1$$

よって

$$\overline{r_{ij}}\vee\delta_{ji}=1$$

$i\neq j$ だから $r_{ij}=0$。よって $r_{ji}=1$ となり，

$$\overline{r_{ij}}\wedge r_{ji}=1$$ (証明終)

この性質 6 から

$$R\vee R'=E,\ (\triangle R)^2\leqq\overline{R'}\vee I\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$$

が得られるが，これは性質 1 の特別な場合となっている。

〔性質 7〕　$R\vee R'=E,\ (\triangle R)^2\leqq\overline{R'}\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\triangle(\overline{R})$

(証明)　性質 6 による。 (証明終)

〔注意 3〕　上の性質 7 の $R\vee R'=E$ を $R\vee R'\vee I=E$ で置き換えることはできない。すなわち，一般には

$$R\vee R'\vee I=E,\ (\triangle R)^2\leqq\overline{R'}\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\triangle(\overline{R})$$

とはならない。例えば，いま

$$R=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$\triangle R=R$，$(\triangle R)^2=O$，

$$\overline{R}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix},\quad \Delta(\overline{R})=\overline{R}\wedge R'=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

であって，$R\vee R'\vee I=E$，$(\Delta R)^2\leqq\overline{R'}$ とはなるが，$(\overline{R})^2\leqq\Delta(\overline{R})$ とはなっていない。

〔性質8〕　$R\vee R'\vee I=E$ のとき

(1)[4)(10)]　$R^2\leqq R\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(2)　$R^n=O\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(3)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(4)　$R^5\leqq\overline{R'}\Longrightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

（証明）　(1)　$R^2\leqq R$ のとき $(\Delta R)^2\leqq\Delta R\leqq\overline{R'}$ であるから性質2によって $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$。

(2)　$R\vee R'\vee I=E$，$R^n=O$ のとき $R^2\leqq R$ となることを示す。$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおく。このとき $R^n=O$ から $i\neq j$。いま $r_{ij}=0$とすれば，$i\neq j$ だから $R\vee R'\vee I=E$ によって $r_{ji}=1$。このとき $r_{ii}^{(3)}=1$ となって $R^n=O$ と矛盾する。ゆえに $r_{ij}=1$。こうして $R^2\leqq R$ となるから，(1)によって $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$。

(3)　$r_{ik}=r_{kj}=0$ とおき，$r_{ij}=0$ となることを示す。

(a)　$i=k$ のとき

$$r_{ij}=r_{kj}=0$$

(b)　$k=j$ のとき

$$r_{ij}=r_{ik}=0$$

(c)　$i\neq k$，$k\neq j$ のとき

$r_{ki}=r_{jk}=1$。したがって，$i\neq j$。いま $r_{ij}=1$ とすれば

$$r_{jk}\wedge\overline{\delta_{jk}}\wedge r_{ki}\wedge\overline{\delta_{ki}}\wedge r_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$$

となり，これは$(R\wedge\bar{I})^3\wedge I=O$と矛盾する。よって$r_{ij}=0$。

(4)　まず$R^2\leqq R$となることを示す。[6] $r_{ij}=r_{ji}=1$とすると，$r_{ij}^{(5)}=1$となるから$r_{ji}=0$。しかしこれは$r_{ji}=1$と矛盾するから$R\wedge R'=O$。次に$r_{ik}=r_{kj}=1$，$r_{ij}=0$とおく。$R\wedge R'=O$によって$i\neq j$。また$R\vee R'\vee I=E$によって$r_{ji}=1$。したがって

$$r_{ik}\wedge r_{kj}\wedge r_{ji}\wedge r_{ik}\wedge r_{kj}=1,$$

すなわち$r_{ij}^{(5)}=1$となり，$r_{ji}=0$が得られる。しかしこれは$r_{ji}=1$と矛盾している。よって$r_{ij}=1$。こうして$R^2\leqq R$となるので(1)から$(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$。

(証明終)

上の性質8(3)から，$R\vee R'\vee I=E$のとき

$$R^3\wedge I=O\Longrightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$$

となるが，$R\vee R'\vee I=E$のとき

$$R^3\wedge I=O\Longrightarrow R^2\leqq R$$

とはならない。これは，例えば

$$R=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

と置いてみればよい。しかし以下の性質26で示すように$R\vee R'\vee I=E$かつ$\nabla R=O$のとき

$$R^3\wedge I=O\Longleftrightarrow R^2\leqq R$$

となる。

〔性質9〕[6]　(1)　$R\vee R'=E$，$R^2\leqq R\Longrightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(2)　$\nabla(\bar{R})=O$，$R^2\leqq R\Longrightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(3)　$(\bar{R})^n=O$，$R^2\leqq R\Longrightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

（証明）　性質8(1)による。　（証明終）

〔性質10〕　$l=1$，2に対して $R^l=\overline{R'}\vee I \Longrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

（証明）　$l=1$ のとき $R=\overline{R'}\vee I$。よって

$$R\vee R'=\overline{R'}\vee R'\vee I=E$$

$l=2$ のとき $R^2=\overline{R'}\vee I$。したがって性質3から $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$。　（証明終）

〔注意4〕　なお，一般には

$$R^2=\overline{R'}\vee I \Longrightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$$

とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

とおけば，

$$\overline{R'}\vee I=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$R^2=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$(\overline{R})^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

であって $R^2=\overline{R'}\vee I$ となるが，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ とはなっていない。

4．negatively transitive 関係のもつ性質

以下で示すように，ブール行列 R が negatively transitive 関係を表現する行列であるとき，ΔR は推移的となる。ここでは，この推移性を中心に，これに関連する性質を述べる。

〔性質11〕　$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ のとき

(1)　$\overline{R'}\times\Delta R\leqq\Delta R$

(2)　$\Delta R\times\overline{R'}\leqq\Delta R$

（証明）　(1)　$\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}=1$ とおく。このとき $r_{ki}=0$，$r_{jk}=0$ だから $r_{ji}=0$。いま $r_{ij}=0$ とすれば，$r_{ki}=0$ によって $r_{kj}=0$ となるが，これは $r_{kj}=1$ と矛盾する。よって $r_{ij}=1$。ゆえに

$$r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$$

(2)　省略。　（証明終）

〔注意5〕　一般には

$$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}\Longrightarrow\overline{R'}\times\overline{R'}\leqq\Delta R$$

とはいえない。なぜなら，いま

$$R=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば,

$$\overline{R'}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \triangle R=O$$

であって，明らかに $(\overline{R'})^2\leqq\triangle R$ とはならないからである。

〔性質12〕　$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ のとき

(1)　$\overline{R'}\times\triangle R\leqq\overline{R'}$

(2)　$\triangle R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}$

(証明)　性質11による。　(証明終)

〔性質13〕　$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ のとき

(1)　$\overline{R'}\times\triangle R\leqq R$

(2)　$\triangle R\times\overline{R'}\leqq R$

(3)　$R\times\triangle R\leqq R$

(4)　$\triangle R\times R\leqq R$

(証明)　(1)—(2)　性質11による。

(3)　$r_{ik}\wedge r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}=1$ とおく。このとき $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ によって，$r_{jk}=0$, $r_{ik}=1$ から $r_{ij}=1$ となる。

(4)　省略　(証明終)

〔性質14〕　$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}\Longrightarrow(\triangle R)^2\leqq\triangle R$

(証明)　性質11による。　(証明終)

上の性質14は次のようにして示すこともできる。

$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ から $(\triangle(\overline{R}))^2\leqq\triangle(\overline{R})$。ところで

$$\triangle(\overline{R}) = \overline{R} \wedge R' = (\dot{\triangle} R)'$$

であるから $((\triangle R)')^2 \leqq (\triangle R)'$。したがって $(\triangle R)^2 \leqq \triangle R$。

〔注意 6〕　なお，一般には

$$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R \times \triangle R \leqq \triangle R$$

とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \triangle R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{R})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R \times \triangle R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であって，$R \times \triangle R \leqq \triangle R$ とはなっていない。

〔性質15〕　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ のとき

(1)　$(\triangle R)^2 \leqq R$

(2)　$(\triangle R)^2 \leqq \overline{R'}$

(証明)　性質14による。 (証明終)

〔性質16〕　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ のとき

(1)　$(\triangle R)^2 \leqq R \vee R' \vee I$

(2)　$(\triangle R)^3 \wedge I = O$

(3)　$(\triangle R)^n = O$

(証明)　(1)　性質15(1)による。

(2)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ のとき性質14によって

$$(\triangle R^2) \leqq \triangle R$$

したがって

$$(\triangle R)^3 \leqq (\triangle R)^2 \leqq \triangle R$$

また $(\triangle R) \wedge I = O$ だから $(\triangle R)^3 \wedge I = O$。

(3)　性質14によって $(\triangle R)^2 \leqq \triangle R$。また $(\triangle R) \wedge I = O$ であるから $(\triangle R)^n = O$。 (証明終)

〔性質17〕　$\nabla R \leqq I$, $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

(証明)　$r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき，$(r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}) \vee (r_{ij} \wedge \delta_{ij}) = 1$ となることを示す。

(1)　$i = j$ のとき

$r_{ik} \wedge r_{ki} = 1$ だから $\nabla R \leqq I$ によって $i = k$。したがって

$$r_{ij} \wedge \delta_{ij} = r_{kj} \wedge \delta_{ii} = 1$$

(2)　$i \neq j$ のとき

(a)　$i = k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 1$。よって $\nabla R \leqq I$ から $r_{ji} = 0$。ゆえに $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。

(b)　$k = j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 1$。よって $\nabla R \leqq I$ から $r_{ji} = 0$。ゆえに $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。

(c)　$i \neq k$, $k \neq j$ のとき

$\nabla R \leqq I$ から $r_{ki}=0$, $r_{jk}=0$。したがって $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ から $r_{ji}=0$。ところで，いま $r_{ij}=0$ とすれば，$r_{ki}=0$ および $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ から $r_{kj}=0$ となる。しかし，これは $r_{kj}=1$ と矛盾する。よって $r_{ij}=1$。こうして $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。 (証明終)

〔性質18〕 $\nabla R \leqq I$, $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ のとき

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$

(3) $(R \wedge \overline{I})^n = O$

(4) すべての $k\,(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明) (1) 性質17による。

(2) (1)によって $R^2 \leqq R$。したがって $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$, $(\Delta R) \wedge I = O$。また $\nabla R \leqq I$ だから $\Delta R = R \wedge \overline{I}$。よって

$$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = (\Delta R)^3 \wedge I \leqq \Delta R \wedge I = O$$

(3) (1)によって $R^2 \leqq R$。したがって $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$, $(\Delta R) \wedge I = O$。よって $(\Delta R)^n = O$。また $\nabla R \leqq I$ だから $\Delta R = R \wedge \overline{I}$。したがって

$$(R \wedge \overline{I})^n = (\Delta R)^n = O$$

(4) $r_{ij}^{(k)}=1$ とおき，$\overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i \neq j$ とする。$r_{ij}^{(k)}=1$ から

$$r_{il_1} \wedge r_{l_1 l_2} \wedge \cdots\cdots \wedge r_{l_{k-1} j} = 1$$

これから $l_a = l_{a+1}$ となる $r_{l_a l_{a+1}} (0 \leqq a \leqq k-1,\ l_0 = i,\ l_k = j)$ を除けば

$$r_{im_1} \wedge r_{m_1 m_2} \wedge \cdots \wedge r_{m_{p-1} j} = 1, \quad m_a \neq m_{a+1}\,(0 \leqq a \leqq p-1, m_0 = i, m_p = j),\ 1 \leqq p \leqq k$$

となる。よって $\nabla R \leqq I$ から

$$r_{m_1 i} = r_{m_2 m_1} = \cdots = r_{j m_{p-1}} = 0$$

したがって，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ を用いて $r_{ji} = 0$。（証明終）

この性質18の(1)は，性質 8 (1)においてRを$\overline{R}$で置き換えることによっても得られる。すなわち性質 8 (1)のRを$\overline{R}$で置き換えれば

$$\overline{R} \vee \overline{R'} \vee I = E,\ (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R^2 \leqq R$$

ところで

$$\overline{R} \vee \overline{R'} \vee I = E \Longleftrightarrow R \wedge R' \wedge \overline{I} = O$$
$$\Longleftrightarrow \nabla R \leqq I$$

であるから，こうして性質18(1)が得られる。

〔性質19〕 (1)[4] $\nabla R = O,\ (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R^n = O,\ (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R^2 \leqq R$

（証明） (1) 性質18(1)による。

(2) $R^n = O$ のとき $\nabla R = O$ だから(1)によって $R^2 \leqq R$。（証明終）

上の性質19は性質 9 (2)(3)においてRを$\overline{R}$で置き換えることによっても得られる。また $\nabla R = O$ のとき $\triangle R = R$ であるから，性質14によっても $R^2 \leqq R$ が得られる。

なお，$\nabla R = O,\ (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ なるRで表現される関係は asymmetric かつ negatively transitive であって strict weak order[9] または weak order[4] とよばれることがある。

〔性質20〕 $\nabla R = O,\ (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ のとき

(1) $R^3 \wedge I = O$

(2) $R^n = O$

(3) すべての $k\,(k = 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'}$

(4) $R^5 \leqq \overline{R'}$

（証明） (1) 性質19(1)によって $R^2 \leqq R$。また $\nabla R = O$ から $R \wedge I = O$。したがって $R^3 \wedge I = O$。

(2) $R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$ だから $R^n = O$。

(3)　$r_{il_1} \wedge r_{l_1 l_2} \wedge \cdots \wedge r_{l_{k-1} j} = 1$ とおく。$\nabla R = O$ によって

$$r_{l_1 i} = r_{l_2 l_1} = \cdots = r_{j l_{k-1}} = 0$$

したがって $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ から $r_{ji} = 0$。

(4)　(3)による。　(証明終)

5. negatively transitive 関係に関する同値条件

主として，連結性のもとでの negatively transitive 関係に関する同値条件について考察をおこなう。

〔性質21〕　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Longleftrightarrow \overline{R'} \times R \leqq R$

(証明)　(1)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ のとき

$\overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$ とおく。このとき $r_{ki} = 0$, $r_{kj} = 1$。いま $r_{ij} = 0$ とすれば $r_{kj} = 0$。しかしこれは $r_{kj} = 1$ と矛盾する。よって $r_{ij} = 1$。

(2)　$\overline{R'} \times R \leqq R$ のとき

$r_{ik} = r_{kj} = 0$ のとき $r_{ij} = 1$ であるとする。このとき $r_{ik} = 0$, $r_{ij} = 1$ から $r_{kj} = 1$ となり，これは $r_{kj} = 0$ と矛盾する。よって $r_{ij} = 0$。　(証明終)

〔性質22〕　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Longleftrightarrow R \times \overline{R'} \leqq R$

(証明)　(1)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ のとき

$r_{ik} \wedge \overline{r_{jk}} = 1$ とおく。このとき $r_{ik} = 1$, $r_{jk} = 0$。もし $r_{ij} = 0$ ならば，$r_{jk} = 0$ から $r_{ik} = 0$。しかしこれは $r_{ik} = 1$ と矛盾する。よって $r_{ij} = 1$。

(2)　$R \times \overline{R'} \leqq R$ のとき

$r_{ik} = r_{kj} = 0$ のとき $r_{ij} = 1$ であるとする。このとき $r_{ij} = 1$, $r_{kj} = 0$ から $r_{ik} = 1$。しかし，これは $r_{ik} = 0$ と矛盾する。よって $r_{ij} = 0$。(証明終)

〔性質23〕　$R \vee R' \vee I = E$ のとき，次の条件は同値である。

(1)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(2)　$(\triangle R)^2 \leqq \triangle R$

(3)　$(\triangle R)^2 \leqq \overline{R'}$

(4)　$(\triangle R)^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1) ⇒ (2)　性質14による。

(2) ⇒ (3)　$(\triangle R)^2 \leqq \triangle R \leqq \overline{R'}$

(3) ⇒ (4)　$(\triangle R)^2 \leqq \overline{R'} \leqq \overline{R'} \vee I$

(4) ⇒ (1)　性質1による。　(証明終)

〔性質24〕(6)　$R \vee R' \vee I = E$, $\nabla R \leqq I$ のとき

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$$

(証明)　性質8および性質18による。　(証明終)

〔性質25〕(6)　$R \vee R' \vee I = E$ のとき，次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R = O$, $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(2)　$R \wedge I = O$, $R^2 \leqq R$

(3)　$\nabla R = O$, $R^3 \wedge I = O$

(4)　$R^n = O$

(5)　すべての $k\,(k = 1, 2, \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'}$

(6)　ある $k\,(k = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{5+6k} \leqq \overline{R'}$

〔性質26〕(2)(6)(9)　$R \vee R' \vee I = E$, $\nabla R = O$ のとき，次の条件は同値である。

(1)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(2)　$R^2 \leqq R$

(3)　$R^3 \wedge I = O$

(4)　$R^n = O$

(5)　$R^5 \leqq \overline{R'}$

〔性質27〕　$R \vee R' = E$ のとき，次の条件は同値である。

(1)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(2)　$(\triangle R)^2 \leqq \triangle R$

(3)　$(\triangle R)^2 \leqq \overline{R'}$

(4) $(\triangle R)^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(5) $(\overline{R})^2 \leqq \triangle(\overline{R})$

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2) 性質14による。

(2) $\Longrightarrow$ (3) $(\triangle R)^2 \leqq \triangle R \leqq \overline{R'}$

(3) $\Longrightarrow$ (4) $(\triangle R)^2 \leqq \overline{R'} \leqq \overline{R'} \vee I$

(4) $\Longrightarrow$ (5) 性質6による。

(5) $\Longrightarrow$ (1) $(\overline{R})^2 \leqq \triangle(\overline{R}) \leqq \overline{R}$ (証明終)

〔性質28〕[7] $R \vee R' = E$ のとき，次の条件は同値である。

(1) $\nabla R \leqq I$, $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(2) $\nabla R \leqq I$, $R^2 \leqq R$

(3) $\nabla R \leqq I$, $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$

(4) $(R \wedge \overline{I})^n = O$

(5) すべての $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^l = \overline{R'} \vee I$

(6) すべての $l\,(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^l \leqq \overline{R'} \vee I$

(7) $R^2 = \overline{R'} \vee I$

(8) $R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(9) ある $l\,(l=2,\ 3,\ \cdots)$ に対して $R^l = \overline{R'} \vee I$

(10) ある $l\,(l=2,\ 3,\ \cdots)$ に対して $R^l \leqq \overline{R'} \vee I$

6．むすび

negatively transitive 関係の基本的性質について考察をおこない，いくつかの応用上有用とおもわれる性質を明らかにすることができた。しかし，negatively transitive 関係と密接な関連をもつトーナメントやべき零ブール行列は，これまでに知られている性質以外にも興味ある性質を有しており，これらに関してはさらに考察をおこなう必要があると感じられる。

文　献

[1] Arrow, K. J. :"Social Choice and Individual Values," 2nd ed.,Yale University Press, New Haven (1963).

[2] Behzad, M., Chartrand, G., and Lesniak-Foster, L., "Graphs & Digraphs, " Wadsworth, California (1979) .

[3] Fararo, T. J. :"Mathematical Sociology, " Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).

[4] Fishburn, P. C. :"The Theory of Social Choice, " Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1973).

[5] Golumbic, M. C. :"Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs," Academic Press, New York (1980).

[6] 橋本寛："連結的推移関係行列の性質,"山口経済学雑誌，第34巻第3・4号（昭和60年6月)。

[7] 橋本寛："連結的推移関係行列の性質Ⅱ,"山口経済学雑誌，第35巻第3・4号（昭和61年1月)。

[8] Kim, K. H. :"Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).

[9] Roberts, F. S. :"Discrete Mathematical Models," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

[10] Tarski, A. :"Introduction to Logic," Oxford University Press, New York (1965).