連結的関係に関する若干の性質

橋　本　　寛

1．はじめに

連結的関係を表現するブール行列[12]について考察をおこない，そのいくつかの基本的性質を明らかにしている。連結的関係[2][15]についてはすでに多くの性質が知られているが，ここではこれまでに余り知られていないと思われる性質や，これまでに報告している性質[7]−[10]の一般化などを示している。関係の連結性は，換言すれば比較可能性であり，選好[2]やトーナメント[3]と密接な関連があり，心理学，社会学，経済学など種々の分野において重要であって，これまでにも多くの興味ある性質が調べられている。[2]−[5][13]

ここでは，とくに連結性のもとで成立する同値条件を中心に，推移性のもとでの同値条件，negatively transitive 関係[5][13]の性質，一般化されたべき零行列の性質，また推移閉包に関する二，三の性質などを示している。

2．準備

本論文で扱うブール行列は0，1の要素をもつn次行列であるとする。まずx，yを0，1の値をとるものとするとき，演算$x \vee y$，$x \wedge y$，$\overline{x}$をそれぞれmax(x, y)，min(x, y)，$1-x$で定める。次に，行列間の演算および関係を，行列$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$に対して，次のように定める。

$R \vee S = [r_{ij} \vee s_{ij}]$

$R \wedge S = [r_{ij} \wedge s_{ij}]$

$\overline{R} = [\overline{r_{ij}}]$

$R' = [r_{ji}]$ (転置)

$\triangle R = R \wedge \overline{R'}$

$\triangledown R = R \wedge R'$

$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$

$R^1 = R$

$R^k = [r_{ij}^{(k)}] = R^{k-1} \times R \ (k = 2,\ 3,\ \cdots)$

$R^+ = R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^n$ (推移閉包)

$R \leqq S \Longleftrightarrow r_{ij} \leqq s_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$

次に，以下においては，単位行列を $I = [\delta_{ij}]$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ)で，全要素が0の行列すなわち零行列をO，全要素が1の行列をEで示す。連結的関係[(2)(15)]を表現するブール行列 R は $R \vee R' \vee I = E$ を満足し，推移関係を表現する行列 R は$R^2 \leqq R$ を満足する。また，$R \wedge I = O$ なる行列 R は非反射的関係を，$\triangledown R \leqq I$ なる行列 R は反対称的関係を表現する行列である。$R^n = O$ なる行列 R はべき零行列であり，$(R \wedge \overline{I})^n = O$ なる行列 R は一般化されたべき零行列であると考えることができる。$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ なる行列 R は negatively transitive 関係[(5)(13)]を表現する行列である。

なお，以下の議論においては，括弧を省略するために演算子 $\wedge$ は $\vee$ より結合が強いとし，例えば$(x \wedge y) \vee z$ を $x \wedge y \vee z$ と書くことがある。

3．連結性の性質

連結性に関する基本的性質および連結性のもとでの同値条件について述べる。また反対称性に関する性質や，推移性のもとで成立する同値条件，さらにはべき零行列に関する一般化された性質についても考察をおこなう。

ここでの主要な結果は連結性のもとでの同値条件であって，これらはこれまで知られている結果の一般化となっており，トーナメントなどの議論において有用であると考えられる。また以下で述べる性質のいくつかはnegatively transitive 関係行列の性質となっている。

次の性質はほとんど明らかであるが，以下の議論において必要であるので証明を与える。

〔性質1〕 $R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$

(証明) (1) $R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$ のとき

$S = R \wedge \overline{I}$ とおき，$s_{ik} = s_{kj} = 1$ とするとき，$s_{ij} = 1$ となることを示す。$s_{ik} = r_{ik} \wedge \overline{\delta_{ik}} = 1$ から $r_{ik} = 1$, $i \neq k$。また $s_{kj} = r_{kj} \wedge \overline{\delta_{kj}} = 1$ から $r_{kj} = 1$, $k \neq j$。このとき $R^2 \leqq R$によって $r_{ij} = 1$。もし $i = j$ ならば，$\nabla R \leqq I$ によって $k = i$ となり，矛盾が生じるから，$i \neq j$。こうして $s_{ij} = r_{ij} \wedge \overline{\delta_{ij}} = 1$。

(2) $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$ のとき

Dを対角行列とするとき，一般に，$S^2 \leqq S$ ならば$(S \vee D)^2 \leqq S \vee D$。したがって $S = R \wedge \overline{I}$, $D = R \wedge I$ とおけば，

$$(R \wedge \overline{I} \vee R \wedge I)^2 \leqq R \wedge \overline{I} \vee R \wedge I$$

よって $R^2 \leqq R$。また $r_{ij} \wedge r_{ji} = 1$ とすれば，

$$(r_{ij} \wedge \overline{\delta_{ij}}) \wedge (r_{ji} \wedge \overline{\delta_{ji}}) \leqq r_{ii} \wedge \overline{\delta_{ii}} = 0$$

によって，$\overline{\delta_{ij}} \wedge \overline{\delta_{ji}} = 0$。ゆえに $i = j$ すなわち $\nabla R \leqq I$。　(証明終)

〔性質2〕 $R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I \Longrightarrow (R \wedge \overline{I})^n = O$

(証明) 性質1によって，$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$ のとき $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$。また $(R \wedge \overline{I}) \wedge I = O$ であるから，$(R \wedge \overline{I})^n = O$。　(証明終)

なお，上記の証明においては，よく知られている，$S^2 \leqq S$, $S \wedge I = O$ のとき $S^n = O$ となること[7]を使っている。

〔性質3〕 $R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow (R \wedge \overline{I})^{n-1} \neq O$

(証明) (1) $n = 2$ のとき

$r_{ij} \vee r_{ji} = 1 (i \neq j)$ によって $R \wedge \overline{I} \neq O$ すなわち $(R \wedge \overline{I})^{n-1} \neq O$。

(2)　$n \geqq 3$のとき

$(R \wedge \overline{I})^{n-1} = O$と仮定する。このとき$n \geqq 3$および$R \vee R' \vee I = E$によってある$l(2 \leqq l \leqq n-1)$に対して$(R \wedge \overline{I})^{l-1} \neq O$，$(R \wedge \overline{I})^{l} = O$。したがって適当な$i$，$k(1)$，$k(2)$，…，$k(l-2)$，$j$に対して，

$$r_{ik(1)} \wedge \overline{\delta_{ik(1)}} \wedge r_{k(1)k(2)} \wedge \overline{\delta_{k(1)k(2)}} \wedge \cdots \wedge r_{k(l-2)j} \wedge \overline{\delta_{k(l-2)j}} = 1$$

となる。$(R \wedge \overline{I})^{n} = O$だから，$i$，$k(1)$，$k(2)$，…，$k(l-2)$，$j$は互に相異なっている。また$l \leqq n-1$であるから，$\{i, k(1), k(2), \cdots, k(l-2), j\}$に属さない添字$m$が存在する。このとき$(R \wedge \overline{I})^{l} = O$によって$r_{mi} = 0$であり，また$m \neq i$であるから，$r_{im} = 1$。さらに$(R \wedge \overline{I})^{l} = O$によって$r_{mk(1)} = 0$であり，$m \neq k(1)$であるから，$r_{k(1)m} = 1$となる。同様にして，

$$r_{mk(2)} = 0,\quad r_{k(2)m} = 1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{mj} = 0,\quad r_{jm} = 1$$

が得られる。このとき，

$$r_{ik(1)} \wedge \overline{\delta_{ik(1)}} \wedge \cdots \wedge r_{k(l-2)j} \wedge \overline{\delta_{k(l-2)j}} \wedge r_{jm} \wedge \overline{\delta_{jm}} = 1$$

となり，$(R \wedge \overline{I})^{l} = O$と矛盾する。したがって$(R \wedge \overline{I})^{n-1} \neq O$。

（証明終）

〔性質4〕　$R^2 \leqq R$，$\nabla R \leqq I$，$(R \wedge \overline{I})^{n-1} \neq O \Longrightarrow R \vee R' \vee I = E$

（証明）　$S = R \wedge \overline{I}$とおけば，$S \wedge I = O$，$S^{n-1} \neq O$。また性質1によって$S^2 \leqq S$。このとき文献[7]の性質7によって$S \vee S' \vee I = E$。

したがって，

$$R \wedge \overline{I} \vee (R \wedge \overline{I})' \vee I = E$$

$$(R \vee I) \wedge (\overline{I} \vee I) \vee (R' \vee I) \wedge (\overline{I} \vee I) = E$$

$$R \vee R' \vee I = E$$

（証明終）

〔注意1〕　上の性質4においては$\nabla R \leqq I$は必要である。すなわち，$R^2 \leqq R$かつ$(R \wedge \overline{I})^{n-1} \neq O$のとき$R \vee R' \vee I = E$とはいえない。いま

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$R^2 \leqq R$，$(R \wedge \overline{I})^{n-1} \neq O$ であるけれども，$R \vee R' \vee I = E$ とはならない。

〔性質5〕 $R^2 \leqq R$，$\nabla R \leqq I$ のとき

$$R \vee R' \vee I = E \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^{n-1} \neq O$$

（証明） 性質3および性質4による。（証明終）

〔性質6〕 $(R \wedge \overline{I})^n = O \Longrightarrow \nabla R \leqq I$

（証明） $(R \wedge \overline{I})^n = O$ によって $(R \wedge \overline{I}) \wedge (R \wedge \overline{I})' = O$。したがって $R \wedge R' \wedge \overline{I} = O$，すなわち $R \wedge R' \leqq I$。（証明終）

〔性質7〕 $(R \wedge \overline{I})^n = O \Longrightarrow (R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$

（証明） $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I \neq O$ とすれば $(R \wedge \overline{I})^{3n} \wedge I \neq O$。しかしこれは $(R \wedge \overline{I})^n = O$ と矛盾する。よって $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$。（証明終）

〔性質8〕[10] $R \vee R' \vee I = E$，$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O \Longrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

（証明） $r_{ik} = r_{kj} = 0$ とおき，$r_{ij} = 0$ となることを示す。

(1) $i = k$ のとき

$$r_{ij} = r_{kj} = 0$$

(2) $k = j$ のとき

$$r_{ij} = r_{ik} = 0$$

(3) $i \neq k$，$k \neq j$ のとき

$R \vee R' \vee I = E$ により $r_{ki} = r_{jk} = 1$ となるから $i \neq j$。したがって $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$ によって $r_{ij} = 0$。（証明終）

〔性質9〕[10] $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$，$\nabla R \leqq I \Longrightarrow R^2 \leqq R$

（証明） $r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき，$r_{ij} = 1$ となることを示す。

(1) $i = k$ のとき

$$r_{ij} = r_{kj} = 1$$

(2)　$k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=1$

(3)　$i \neq k$, $k \neq j$ のとき

$\nabla R \leqq I$ によって $r_{ki}=r_{jk}=0$。もし $r_{ij}=0$ であれば $r_{ki}=0$ によって $r_{kj}=0$ となるが，これは $r_{kj}=1$ と矛盾する。よって $r_{ij}=1$。　(証明終)

すでに文献[7]で示されているように，$R \vee R' \vee I=E$, $\nabla R \leqq I$ のとき

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$$

となる。

次の性質は反対称性に関する同値条件であるが，その条件の一部はすでによく知られているものである。[8][9]

〔性質10〕　次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R \leqq I$

(2)　$\nabla(R \wedge \overline{I})=O$

(3)　$(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I=O$

(4)　$\triangle R=R \wedge \overline{I}$

(5)　$R \vee I \leqq \overline{R'} \vee I$

(6)　$R \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1)$\Longleftrightarrow$(2)

$$\begin{aligned}\nabla R \leqq I &\Longleftrightarrow \nabla R \wedge \overline{I}=O\\ &\Longleftrightarrow R \wedge R' \wedge \overline{I}=O\\ &\Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I}) \wedge (R \wedge \overline{I})'=O\\ &\Longleftrightarrow \nabla(R \wedge \overline{I})=O\end{aligned}$$

(2)$\Longleftrightarrow$(3)　$S=R \wedge \overline{I}$ とおく。$S \wedge S'=O$ とすれば，$s_{ij} \wedge s_{ji}=0$ だから

$$s_{ii}^{(2)}=\bigvee_{j=1}^{n}(s_{ij} \wedge s_{ji})=0$$

したがって

$$(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I=S^2 \wedge I=O$$

また，逆に $S^2 \wedge I=O$ であれば

$$s_{ii}^{(2)} = \bigvee_{j=1}^{n} (s_{ij} \wedge s_{ji}) = 0$$

したがって $s_{ij} \wedge s_{ji} = 0$, すなわち $S \wedge S' = O$。

(1) $\Longrightarrow$ (4)　一般に $\triangle R \vee \triangledown R = R$ であるから

$$(\triangle R \wedge \overline{I}) \vee (\triangledown R \wedge \overline{I}) = R \wedge \overline{I}$$

$$\triangle R = R \wedge \overline{I}$$

(4) $\Longrightarrow$ (5)　$R \wedge \overline{R'} = R \wedge \overline{I}$

$$(R \wedge \overline{R'}) \vee I = (R \wedge \overline{I}) \vee I$$

$$(R \vee I) \wedge (\overline{R'} \vee I) = (R \vee I) \wedge (\overline{I} \vee I)$$

$$(R \vee I) \wedge (\overline{R'} \vee I) = R \vee I$$

$$R \vee I \leqq \overline{R'} \vee I$$

(5) $\Longrightarrow$ (6)　$R \vee I \leqq \overline{R'} \vee I$

$$R \leqq R \vee I \leqq \overline{R'} \vee I$$

(6) $\Longrightarrow$ (1)　$R \leqq \overline{R'} \vee I$

$$R \wedge R' \leqq \overline{R'} \wedge R' \vee I \wedge R'$$

$$\triangledown R \leqq I \wedge R' \leqq I$$

(証明終)

〔性質11〕[8]　$R^2 \leqq R$, $\triangledown R \leqq I \Longrightarrow$ すべての k ($k=1, 2, \cdots$) に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　性質10から $\triangledown R \leqq I$ のとき $R \leqq \overline{R'} \vee I$。また $R^2 \leqq R$ から $R^k \leqq R$ であるから $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$。　(証明終)

〔注意 2〕　$\triangledown R \leqq I$ であっても，すべての k ($k=1, 2, \cdots$) に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$ となるとは限らない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad k = 3$$

とおけば,

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{R'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R'} \vee I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R^3$$

このとき $\triangledown R \leqq I$ であるが，$R^3 \leqq \overline{R'} \vee I$ とはなっていない。

〔性質12〕[8] ある $k(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2k+1} \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \triangledown R \leqq I$。

(証明)　$r_{ij} = r_{ji} = 1$ とおく。このとき $r_{ii}^{(2)} = 1$ だから，$r_{ij}^{(2k+1)} = 1$。したがって $r_{ji} = 0$ または $i = j$。仮定により $r_{ji} = 1$ だから $i = j$。

(証明終)

なお，注意2からも明らかなように，$\triangledown R \leqq I$ であっても，すべての k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{2k+1} \leqq \overline{R'} \vee I$ となるとは限らない[8]。

〔注意3〕　ある $k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$ であっても，$\triangledown R \leqq I$ となるとは限らない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2$$

とおけば，$R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$であるけれども，$\triangledown R \leqq I$ とはなっていない。

〔性質13〕　$R \vee R' \vee I = E$，ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{5+6l} \leqq$

$\overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I$。

（証明） まず性質12によって $\nabla R \leqq I$ である。次に $r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき，$r_{ij} = 1$ となることを示す。

(1) $i = k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 1$

(2) $k = j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 1$

(3) $i \neq k,\ k \neq j$ のとき

もし $i = j$ とすれば，$r_{ik} \wedge r_{ki} = 1$ だから $\nabla R \leqq I$ によって $i = k$ となるが，これは $i \neq k$ と矛盾する。したがって $i \neq j$。また，$r_{ij} = 0$ とすれば $R \vee R' \vee I = E$ によって $r_{ji} = 1$ となり，このとき $r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge r_{ji} = 1$ だから $r_{ij}^{(5+3m)} = 1$，したがって $r_{ij}^{(5+6l)} = 1$ となる。よって $r_{ji} = 0$ となり $r_{ji} = 1$ と矛盾する。ゆえに $r_{ij} = 1$。

（証明終）

〔注意4〕 すべての $k\ (k = 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$ であっても $R^2 \leqq R$ となるとは限らない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$\overline{R'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であって，すべての k に対して $R^k \leqq \overline{R'} \leqq \overline{R'} \vee I$。しかし $R^2 \leqq R$ とはなっていない。なお，性質17で示すように，すべての $k\ (k = 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$ であれば，$(R \wedge \overline{I})^n = O$ となる。

〔性質14〕 $R \vee R' \vee I = E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$

(2)　$(R \wedge \overline{I})^n = O$

(3)　$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$, $\nabla R \leqq I$

(4)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$, $\nabla R \leqq I$

(5)　すべての $k(k=1, 2, \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$

(6)　$R^5 \leqq \overline{R'} \vee I$

(7)　ある $k(k=0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{5+6k} \leqq \overline{R'} \vee I$

（証明）　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質2による。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　性質6および性質7による。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　性質8による。

(4) $\Longrightarrow$ (1)　性質9による。

(1) $\Longrightarrow$ (5)　性質11による。

(5) $\Longrightarrow$ (6)　自明

(6) $\Longrightarrow$ (7)　自明

(7) $\Longrightarrow$ (1)　性質13による。　（証明終）

〔性質15〕 $R \vee R' \vee I = E$, $\triangle R \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　$(R \wedge \overline{I})^n = O$

(3)　$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$

(4)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(5)　$R^5 \leqq \overline{R'} \vee I$

（証明）　性質14による。　（証明終）

次に，連結性すなわち $R \vee R' \vee I = E$ に関する同値条件について述べる。次の性質16によって $R \vee R' \vee I = E$ を種々の同値条件で置き換えることができる。とくに $\nabla(\overline{R}) \leqq I$ が $R \vee R' \vee I = E$ と同値であることは興味深い。なお，すでに述べているように，$\nabla R \leqq I$ であれば R は反対称であるといわれる。この反対称性に関する条件については，すでに性質10で

述べている。その性質10において R を $\overline{R}$ で置き換えれば，次の性質16で示しているもの以外の同値条件を得ることができる。また，逆に性質16の R を $\overline{R}$ で置き換えれば性質10で示しているもの以外の $\triangledown R \leqq I$ に関する同値条件を得ることができる。

〔性質16〕 次の条件は同値である。

(1) $R \vee R' \vee I = E$

(2) $\overline{R'} = \triangle R \vee (\overline{R} \wedge I)$

(3) $\overline{R'} \vee I = \triangle R \vee I$

(4) $\overline{R'} \vee I \leqq R \vee I$

(5) $\triangledown(\overline{R}) \leqq I$

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2) $R \vee R' \vee I = E$

$$\begin{aligned}\overline{R'} &= \overline{R'} \wedge (R \vee R' \vee I)\\ &= \overline{R'} \wedge R \vee \overline{R'} \wedge I\\ &= \overline{R'} \wedge R \vee \overline{R} \wedge I\\ &= \triangle R \vee (\overline{R} \wedge I)\end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\overline{R'} = \triangle R \vee (\overline{R} \wedge I)$

$$\overline{R'} \vee I = \triangle R \vee (\overline{R} \wedge I) \vee I = \triangle R \vee I$$

(3) $\Longrightarrow$ (4) $\overline{R'} \vee I = \triangle R \vee I \leqq R \vee I$

(4) $\Longrightarrow$ (5) $(\overline{R'} \vee I) \wedge \overline{R} \leqq (R \vee I) \wedge \overline{R}$

$$\triangledown(\overline{R}) \vee (I \wedge \overline{R}) \leqq I \wedge \overline{R}$$

$$\triangledown(\overline{R}) \leqq \triangledown(\overline{R}) \vee (I \wedge \overline{R}) \leqq I \wedge \overline{R} \leqq I$$

(5) $\Longrightarrow$ (1) $\triangledown(\overline{R}) \leqq I$

$$\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq I$$

$$R \vee R' \geqq \overline{I}$$

$$R \vee R' \vee I \geqq \overline{I} \vee I = E$$

$$R \vee R' \vee I = E$$

(証明終)

これまでの連結性に関する議論においては，明らかに推移性と反対称性が重要な役割を果している。それゆえ，以下においては推移性のもとでの反対

称性すなわち $\nabla R \leqq I$ に関する同値条件を調べる。まず，この同値条件に関係するいくつかの基本的性質を明らかにし，最後に同値条件としてまとめることにする。この同値条件は性質25で述べる。

〔性質17〕 $(R \wedge \overline{I})^n = O \Longleftrightarrow$ すべての $l(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^l \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1)　$(R \wedge \overline{I})^n = O$ のとき

$r_{ij}^{(l)} = 1(i \neq j)$ とおけば，適当な $k(1),\ k(2),\ \cdots,\ k(l-1)$ に対して

$$r_{ik(1)} \wedge r_{k(1)k(2)} \wedge \cdots \wedge r_{k(l-1)j} = 1$$

ここで $k(a) = k(a+1)$ $(0 \leqq a \leqq l-1,\ k(0) = i,\ k(l) = j)$ となる $r_{k(a)k(a+1)}$ をとり除けば

$$r_{ip(1)} \wedge r_{p(1)p(2)} \wedge \cdots \wedge r_{p(m-1)j} = 1,$$

$$m \leqq l,\ p(t) \neq p(t+1),\ t = 0,\ 1,\ \cdots,\ m-1,$$

ただし $p(0) = i,\ p(m) = j$。

したがって，$(R \wedge \overline{I})^n = O$ から $r_{ji} = 0$。

(2)　すべての $l(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^l \leqq \overline{R'} \vee I$ のとき

$(R \wedge \overline{I})^n \neq O$ とすれば，適当な $i,\ k(1),\ \cdots,\ k(m-1)$ に対して

$$r_{ik(1)} \wedge r_{k(1)k(2)} \wedge \cdots \wedge r_{k(m-1)i} = 1,\ k(m-1) \neq i(m \geqq 2)。$$

したがって $r_{ik(m-1)}^{(m-1)} = 1$，$r_{ii}^{(m)} = 1$。よって $r_{ik(m-1)}^{(2m-1)} = 1$ となり，$R^{2m-1} \leqq \overline{R'} \vee I$ から $r_{k(m-1)i} = 0$。しかしこれは矛盾する。ゆえに $(R \wedge \overline{I})^n = O$ でなければならない。　(証明終)

〔性質18〕 $R^2 \leqq R$，ある $k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow$ すべての $l(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^l \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　$r_{ij}^{(l)} = 1$ とおき，$\overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$R^2 \leqq R$ によって $r_{ij} = 1$。$i = j$ のときは明らかであるから $i \neq j$ とする。いま $r_{ji} = 1$ とすれば，$r_{ii}^{(l+1)} = 1$，$r_{ii} = 1$。このとき $r_{ij}^{(k)} = 1$，したがって $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$ から $r_{ji} = 0$。これは $r_{ji} = 1$ と矛盾する。よって $r_{ji} = 0$。　(証明終)

〔性質19〕 $R^2 \leqq R$，ある $k(k \geqq 1)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　性質18による。　(証明終)

〔注意 5〕　上の性質19で $R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$ を $R^2 \leqq \overline{R'}$ で置き換えることはできない。すなわち $R^2 \leqq R$ のとき，ある $k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$ であっても $R^2 \leqq \overline{R'}$ となるとは限らない。いま

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad k=2$$

とおく。このとき

$$R=R^2=R^k=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \overline{R'}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

こうして $R^2 \leqq R$ かつ $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$ であるけれども，$R^2 \leqq \overline{R'}$ とはなっていない。

〔性質20〕　$R^2 \leqq R$，ある $k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

(証明)　性質19によって $R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$。また $R^2 \leqq R$ であるから $R^2 \leqq (R \wedge \overline{R'}) \vee (R \wedge I)$。　(証明終)

上の性質20における $R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$ なる行列 R は，次の性質で示すように，反対称的推移関係を表現する行列であって，興味ある性質を有している。[9]

〔性質21〕　$R^2 \leqq R,\ \triangledown R \leqq I \Longleftrightarrow R^2 \leqq \triangle R \vee R \wedge I)$

(証明)　(1)　$R^2 \leqq R,\ \triangledown R \leqq I$ のとき

性質10によって $\triangledown R \leqq I$ のとき $R \leqq \overline{R'} \vee I$。

したがって

$$R^2 \leqq R = \triangle R \vee (R \wedge I)$$

(2)　$R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$ のとき

明らかに

$$R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I) \leqq R$$

次に$\nabla R \leqq I$となることを示す。$r_{ij} = r_{ji} = 1$とすれば，$\triangle R$の$(i,\ j)$要素は0。また$r_{ii}^{(2)} = 1$から$r_{ii} = 1$。したがって$r_{ij}^{(2)} = 1$となるが，$\triangle R$の$(i,\ j)$要素は0なので，$i = j$となる。　(証明終)

〔性質22〕　$R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I) \Longrightarrow$ すべての$k(k=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^k \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　性質21から，$R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$のとき，$R^2 \leqq R$かつ$\nabla R \leqq I$。したがって性質11によって$R^k \leqq \overline{R'} \vee I$。　(証明終)

〔性質23〕　$R^2 \leqq R,\ R^2 \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow R \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　性質18による。　(証明終)

〔性質24〕　$R^2 \leqq R,\ R^2 \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \nabla R \leqq I$

(証明)　性質23と性質10による。　(証明終)

上記の性質24は文献[(8)]で示している次の性質の特別な場合としても得られる。

$$R^2 \leqq R,\ \text{ある}\ l(1,\ 2,\ \cdots)\text{に対して}\ R^l \leqq \overline{R'} \vee I \Longrightarrow \nabla R \leqq I$$

〔性質25〕　$R^2 \leqq R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R \leqq I$

(2)　$(R \wedge \overline{I})^n = O$

(3)　すべての$k(k=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^k \leqq \overline{R'} \vee I$

(4)　ある$k(k=1,\ 2,\ \cdots)$に対して$R^k \leqq \overline{R'} \vee I$

(5)　$R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質2による。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　性質17による

(3) $\Longrightarrow$ (4)　自明

(4) $\Longrightarrow$ (5)　性質19による。

(5) $\Longrightarrow$ (1)　性質24による。　(証明終)

推移性を仮定しない場合の$\nabla R \leqq I$と同値な条件については，すでに性質10において考察をおこなっている。

最後に，これまでしばしばでてきた$(R \wedge \overline{I})^n = O$と同値な条件につい

て考える。$(R \wedge \overline{I})^n = O$ なる行列 R は，グラフでいえば自己ループをもつアサイクリックグラフ[(1)]であって，一般化されたべき零行列と考えることができる。

〔性質26〕 次の条件は同値である。

(1) $(R \wedge \overline{I})^n = O$

(2) $\bigtriangledown(R^+) \leqq I$

(3) $(R^+ \wedge \overline{I})^n = O$

(4) $(R \wedge \overline{I})^+ \wedge I = O$

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2) $S = R^+$, $T = [t_{ij}] = R \wedge \overline{I}$ とおく。$s_{ij} \wedge s_{ji} = 1 (i \neq j)$ と仮定し，矛盾の生じることを示す。このとき，適当な k，$l (k, l = 1, 2, \cdots, n)$ に対して $r_{ij}^{(k)} = r_{ji}^{(l)} = 1$。

したがって

$$r_{ip(1)} \wedge r_{p(1)p(2)} \wedge \cdots \wedge r_{p(k-1)j} = 1$$

$$r_{jq(1)} \wedge r_{q(1)q(2)} \wedge \cdots \wedge r_{q(l-1)i} = 1$$

$p(t) = p(t+1)$ $(0 \leqq t \leqq k-1,\ p(0) = i,\ p(k) = j)$ なる $r_{p(t)p(t+1)}$ をとり除くことにより

$$r_{iu(1)} \wedge \cdots \wedge r_{u(g-1)j} = 1,\ g \leqq k,$$

$$u(t) \neq u(t+1),\ t = 0, 1, \cdots, g-1,$$

ただし $u(0) = i$, $u(g) = j$

同様にして

$$r_{jv(1)} \wedge \cdots \wedge r_{v(h-1)i} = 1,\ h \leqq l,$$

$$v(t) \neq v(t+1),\ t = 0, 1, \cdots, h-1,$$

ただし $v(0) = j$, $v(h) = i$

こうして $r_{ii}^{(g+h)} = 1$，すなわち $t_{ii}^{(g+h)} = 1$。これは $(R \wedge \overline{I})^n = O$ と矛盾する。

(2) $\Longrightarrow$ (3) $S = R^+$ とおけば，$S^2 \leqq S$, $S \wedge S' \leqq I$。性質1によって，$T = S \wedge \overline{I}$ とおくとき，$T^2 \leqq T$, $T \wedge I = O$。したがって $T^n = O$，すなわち $(R^+ \wedge \overline{I})^n = O$。

(3) $\Longrightarrow$ (1)　$R \leqq R^+$ だから $R \wedge \overline{I} \leqq R^+ \wedge \overline{I}$。

したがって

$$(R \wedge \overline{I})^n \leqq (R^+ \wedge \overline{I})^n = O$$

(1) $\Longrightarrow$ (4)　$S = R \wedge \overline{I}$ とおく。もし $(R \wedge \overline{I})^+ \wedge I \neq O$ ならば，適当な $k(k=1, 2, \cdots, n)$ に対して $s_{ii}^{(k)} \neq 0$。したがって $S^{nk} \neq O$。しかしこれは $S^n = O$ と矛盾する。よって $S^+ \wedge I = O$。

(4) $\Longrightarrow$ (1)　$S = R \wedge \overline{I}$ とおき，$S^n \neq O$ とすれば，適当な i，$k(1)$，$\cdots$，$k(n-1)$，j に対して

$$s_{ik(1)} \wedge \cdots \wedge s_{k(n-1)j} = 1$$

ここで $k(0) = i$，$k(n) = j$ とおけば，適当な a，$b(0 \leqq a < b \leqq n)$ に対して $k(a) = k(b)$。したがって $s_{k(a)k(a)}^{(b-a)} = 1$ となる。しかし，これは $S^+ \wedge I = O$ と矛盾する。よって $S^n = O$。　(証明終)

なお，すでに性質17で示しているように，$(R \wedge \overline{I})^n = O$ と同値な条件としては次のものもある。

すべての $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^l \leqq \overline{R'} \vee I$

4. まとめ

ブール行列を用いて連結的関係について考察をおこない，これまでに報告している性質[(7)—(10)]の一般化などをおこなった。本論文で述べたいくつかの同値条件には，これまでほとんど知られていないものも含まれており，これらは連結的関係の議論において有用であろうと考えられる。

今後の課題としては，さらに連結性について考察をおこない，これまで知られている性質の一般化を試みることがある。例えば，連結的関係を表現する行列のべき乗に関する性質[(11)]やスピルラインの定理[(6)(14)]との関係で連結性について調べてみることなどである。

文　献

〔1〕 Aho, A. V., Garey, M.R., and Ullman, J.D.: "The transitive reduction of a directed graph,"SIAM J. Comput. 1, pp. 131-137 (1972).

〔2〕 Arrow, K.J.: "Social Choice and Individual Values," 2 nd ed.,Yale University Press,New Haven (1963).

〔3〕 Behzad, M., Chartrand, G., and Lesniak-Foster, L.: "Graphs & Digraphs," Wadsworth, California (1979).

〔4〕 Fararo, T.J.: "Mathematical Sociology," Robert E.Krieger Publishing Co., New York (1978).

〔5〕 Fishburn P.C.: "The Theory of Social Choice," Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1973).

〔6〕 Hashimoto, H.: "Szpilrajn's theorem on fuzzy orderings," Fuzzy Sets and Systems 10, pp. 101-108 (1983).

〔7〕 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質"，山口経済学雑誌，第34巻第3・4号，pp. 387—405（昭和60年6月）。

〔8〕 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質Ⅱ"，山口経済学雑誌，第35巻第3・4号，pp. 281—293（昭和61年1月）。

〔9〕 橋本　寛："推移関係行列に関するいくつかの十分条件"，山口経済学雑誌，第35巻第5・6号，pp. 425—436（昭和61年5月）。

〔10〕 橋本　寛："Negatively Transitive 関係の性質"，山口経済学雑誌，第36巻第3・4号，pp. 41-58（昭和61年9月）。

〔11〕 Kemeny, J. G., Snell, J.L., and Thompson, G.L.: "Introduction to Finite Mathematics," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1957)（矢野訳："新しい数学—その方法と応用，"共立出版，昭和49年3月）。

〔12〕 Kim, K.H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).

〔13〕 Roberts, F.S.: "Discrete Mathematical Models," Prentice—Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

〔14〕 Szpilrajn, E.: "Sur l'extension de l'ordre partiel," Fundamenta Mathematicae,16, pp. 386—389 (1930).

〔15〕 Tarski, A.: "Introduction to Logic," Oxford University Press,New York (1965).