技術進歩と非一次同次生産

木　藤　正　典

1 はしがき

新古典派成長理論における技術進歩の理論はヒックス，ハロッドの理論（〔10〕，〔9〕）の発展として種々の理論が発表されている①。それらの多くが一次同次生産関数を前提としているのであるが，私は生産において非一次同次生産関数を仮定する場合，それらの理論がどこまで拡張できるかについて吟味してみたい。最近は2部門モデルによる技術進歩が研究されているが（〔4〕，〔7〕，〔2〕），以下のべるものは1部門理論である。

先ず第3節ではヒックスおよびハロッドの中立性を非一次同次生産の場合について吟味する。次に第4節で技術進歩をともなう非一次同次生産の1つのモデルを作り，第5節ではFactor Augumentingの場合（以下FAの場合と略記する）のモデルの安定性を考察し，終りに第6節では一般の場合についてモデルの安定性を考察する。第3節は Uzawa〔16〕の拡張であり，第4，5，6節は Drandakis-Phelps〔8〕，天野〔3〕等の理論の拡張にあたるものである。

①〔1〕 Amano, A., "Biased Technological Progress and a Neoclassical Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 78(1964), 129—138.

〔2〕 ——— "技術進歩と均衡成長", **理論経済学**, 14, No. 2 (Feb.1964), 23—80.

〔3〕 ———"Indnced Bias in Technological Progress and Economic Growth", **理論経済学**, 17 No.3 (March, 1967), 1—17.

〔4〕 ——— "二部門成長モデルにおける技術進歩の性格について", **国民経済学雑誌**, 111 (1967), 66—87.

〔5〕 Asimakopulos, A., "The Definition or Neutral Inventions", *Economic Journal*, 73 (1963) 675—680.

〔6〕 David, P.A. and Klundert, T. vande, "Biased Efficiency Growth and Capital-Labor Substitution in the U.S., 1899—1960", *American Economic Review*, 55(1965), 357—394.

〔7〕 Diamond, P.A., "Disembodied Technical Change in a Two-Sector Model", *Reivew of Economic Studies*, 32(1965), 161—168.

〔8〕 Drandakis, E.M.and Phelps, E.S., "A Model of Induced Invention, Growth and Distribution", *Economic Journal*, 76(1966), 823—840.

〔9〕 Harrod, R.F., *Tcwards a Dynamic Economics*, London, 1948.

〔10〕 Hicks, J.R., *The Theory of Wages*, London, 1932.

〔11〕 Kennedy,C., "Technical progress and Investiment", *Eeonomic Journal*, 71 (1961), 292—299.

〔12〕 ———"Harrod on Neutrality," *Economic Journal*, 72 (1962), 249—250.

〔13〕 ——— "The Character of Improvements of Technical Progress," *Economic Journal*, 72(1962), 899—911.

〔14〕 ———"Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution", *Economic Journal*, 74 (1964), 541—547.

〔15〕 Samuelson, P. A., "A Theory of Induced Innovation along Kennedy-Weisäcker Lines" *Reveiv of Eocnomics and Statistics*, 47 (1965), 343—356.

〔16〕 Uzawa, H., "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium," *Review of Economic Studies*, 28(1961), 117—124.

〔17〕 Uzawa, H. and Watanabe, T., "A Note on the Classification of Technical Innovations," **理論経済学**, 12 No.1 (Sept.1961), 1961.

2 定　　義

1生産物，2生産要素（資本と労働）の経済体系を考え，資本量をK，労働量をL，生産物の数量をY，時間を t にて表わし，生産関数を

$$Y=F(K, L, t) \quad \cdots\cdots (2, 1)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K}>0, \quad \frac{\partial Y}{\partial L}>0$$

にて表わす。なほ以下において関数はすべて必要な回数まで微分可能であり，微分の結果は連続であるものと仮定する。特に（2. 1）がFAの場合はA，Bは t のみの関数であるとして

$$Y = F(AK, BL) \quad \cdots\cdots (2.2)$$

であるものとする①。生産関数に関する諸量を次の様に定義する。なお Y_t 等はYのtに関する偏導関数を，$\dot{Y}$ 等はYのtに関する導関数 $\frac{dY}{dt}$ 等を，$\hat{Y}$ はYの増加率 $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ 等を示す。

$$R = \frac{Y_t}{Y} \quad \text{（技術進歩率）}$$

$$M_K = \frac{Y_{Kt}}{Y_K} = \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial t} \Big/ \frac{\partial Y}{\partial K} \quad \text{（資本限界生産力の技術進歩率）}$$

$$M_L = \frac{Y_{Lt}}{Y_L} \quad \text{（労働限界生産力の技術進歩率）}$$

$$D = M_K - M_L = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Y_K}{Y_L}\right) \Big/ \left(\frac{Y_K}{Y_L}\right) \quad \cdots\cdots (2.3)$$

（資本と労働との限界力の比率の増加率）

$$k = \frac{K}{L} \quad \text{（資本労働比率）}$$

$$h = \frac{AB}{BL} \quad \text{（FAの場合の実質資本労働比率）}$$

$$\rho = -\frac{dk}{d(Y_K/Y_L)} \frac{(Y_K/Y_L)}{k} = -\frac{Y_K Y_L}{K(Y_{KK}Y_L - Y_{KL}Y_K)}$$

（資本労働代替弾力性）

$$a = \frac{Y_K K}{Y} \quad \text{（資本分配率）}$$

$$b = \frac{Y_L L}{Y} \quad \text{（労働分配率）}$$

なお次の関係式が成立する。

$$\hat{Y} = R + a\hat{K} + b\hat{L} \quad \cdots\cdots (2.4)$$

$$\hat{Y}_K = M_K + \frac{Y_{KK}\dot{K} + Y_{KL}\dot{L}}{Y_K} \quad \cdots\cdots (2.5)$$

$$\hat{Y}_L = M_L + \frac{Y_{KL}\dot{K} + Y_{LL}\dot{L}}{Y} \quad \cdots\cdots (2.6)$$

① Y，K，L，A，Bはすべて正とする。

3　技術進歩の中立性

I　一般の場合

先づ（2.1）がハロッドの意味で技術進歩が中立的であるための条件を求めることとする。ハロッドの中立性を，資本係数 $X = K/Y$ が一定のときのみ資

本の限界生産力 Y_K が一定であると考えることとする。従って $X=K/Y$ より K は X, L, t の関数と考えられ（以下すべての場合逆関数の存在を仮定する），従って（2. 1）より Y は X, L, t の関数となる。故に

$$Y=\varphi(X, L, t)$$

とおけば　K＝XY より [1]

$$Y_K=\frac{1}{X+\dfrac{\varphi}{\varphi_X}}$$

然るに仮定より Y_K は X のみの関数と考えられるから

$$\frac{1}{X+\dfrac{\varphi}{\varphi_X}}=C(X)$$

故に　$$\frac{\varphi}{\varphi_X}=\frac{1}{C(X)-X}$$

この微分方程式を解けば

$$Y=\varphi=A(L, t)\,\Psi(X)$$

故に　$$X=\Psi^{-1}\left(\frac{Y}{A}\right)$$

故に　$$\frac{K}{A}=\frac{Y}{A}X=\frac{Y}{A}\Psi^{-1}\left(\frac{Y}{A}\right)$$

これを $\frac{Y}{A}$ について解けば，$\frac{Y}{A}$ は $\frac{K}{A}$ のみの関数となる。即ち問題の解答として

$$Y=A\cdot G\left(\frac{K}{A}\right)$$

を得る [2]。ただし A は L，t の関数である。従って次の定理を得る。

〔定理 1〕　（2. 1）がハロッドの意味で中立的であるための必要十分条件は（2. 1）が

$$Y=A(L, t)\,G\left(\frac{K}{A(L, t)}\right) \quad \cdots\cdots (3.\ 1)$$

なる形で表わされることである。

次にヒックスの意味で技術進歩が中立的であるとは K/L が一定のとき Y_K/Y が一定であることであるから，以下ではヒックスの中立性を D＝0 と同等であると考えることとする [3]。さて次にハロッドの意味で中立的であると同時にヒックスの意味でも中立的である条件は [4]（3. 1）と D＝0 とが同時に成立することである。そのときは $\frac{K}{A}=Z$ とおけば（3. 1）から

$$Y_K=G'(Z)$$

$$Y_L=\frac{A_L}{A}(G-ZG')$$

$$\left.\begin{aligned} M_K &= -\frac{A_t}{A}\cdot\frac{ZG''}{G'} \\ M_L &= \frac{A_{Lt}}{A_L}+\frac{A_t}{A}\cdot\frac{Z^2G}{G-ZG'} \end{aligned}\right\} \quad \text{⑤} \cdots\cdots (3.\ 2)$$

故に　$D=M_K-M_L=0$ より

$$\frac{G''}{\dfrac{G'^2}{G}-\dfrac{G'}{Z}}=\frac{A\cdot A_{Lt}}{A_L\cdot A_t} \cdots\cdots (3.\ 3)$$

を得る。然るに左辺はZのみの関数であり，右辺はL，t のみの関数である。故に（3．3）が成立するためには両辺の値は定数でなければならない。その定数を ε とおく。

(イ)　$\varepsilon=0$ の場合

先ず $G''=0$ より　$G=CZ+D$，（C，Dは定数）であるから（3.1）より

$$Y=CK+DA$$

また $A\neq 0$ であるから（3.3）より $A_{Lt}=0$ となる。故に

$$A=P(L)+Q(t)$$

従って結局

$$Y=CK+P(L)+Q(t) \cdots\cdots (3.\ 4)$$

となる。なお $P(L)$，$Q(t)$ は任意の関数である。

(ロ)　$\varepsilon=1$ の場合

先づ（3．3）から

$$\frac{G''}{G'}=\frac{G'}{G}-\frac{1}{Z}$$

故に　$\log G'=\log G-\log Z+\log\beta$，（$\beta$は定数）

故に　$G=C_1Z^{\beta}$，（C_1は定数）

故に　$Y=C_1A^{1-\beta}K^{\beta}$

また（3．3）より

$$\frac{A_{Lt}}{A_L}=\frac{A_t}{A}$$

故に　$\log A_L=\log A+\log C_2(L)$，（$C_2(L)$は任意関数）

故に　$A=P(L)Q(t)$ $\cdots\cdots$ (3．5)

故に結局

$$Y=C(t)P(L)^{1-\beta}K^{\beta} \cdots\cdots (3.\ 6)$$

となる。なほ $C(t)$ は任意関数であり $Y_K>0$，$Y_L>0$ より $\beta>0$，$\beta\neq 1$ である。特に（3．6）がK，Lのm次同次のとき即ち

$$P(L)=L^{\frac{m-\beta}{1-\beta}}$$

のときは

$$Y=C(t)L^{m-\beta}K^{\beta},\ (\beta\neq 1) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.7)$$

となり，Cobb-Douglas型のm次同次生産関数となる。

(ハ)　$\varepsilon\neq 0,\ 1$の場合

先づ（3．3）より

$$\frac{G''}{G'}=\varepsilon\left(\frac{G'}{G}-\frac{1}{Z}\right)$$

故れ　$\log G=\varepsilon(\log G-\log Z)+\log C_1$

故に　$G'=C_1\left(\frac{G}{Z}\right)^{\varepsilon}$

故に　$G=C_1(Z^{1-\varepsilon}+C_2)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$

故に　$1-\varepsilon=\delta$とおけば　$(\delta\neq 0,\ 1)$

$$Y=G_1A\{(\frac{K}{A})^{\delta}+C_2\}^{\frac{1}{\delta}}$$

或は　$Y=(CK^{\delta}+DA^{\delta})^{\frac{1}{\delta}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.8)$

またAに関しては（3．3）から

$$\frac{A_{Lt}}{A_L}=\varepsilon\frac{A_t}{A}$$

故に　$A_L=C_1(L)A^{\varepsilon}$

故に　$A=\{P(L)+Q(t)\}^{\frac{1}{\delta}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.9)$

故に（3．8）より

$$Y=\{CK^{\delta}+P(L)+Q(t)\}^{\frac{1}{\delta}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.10)$$

となる。なお(イ)の（3．4）は（3.10）において$\delta=1$とおいたものである。

〔定理2〕　（2．1）がハロッドの意味でもヒックスの意味でも中立的であるときは（2．1）は

$$Y=\{CK^{\delta}+P(L)+Q(t)\}^{\frac{1}{\delta}}$$

或は　$Y=C(t)P(L)^{1-\beta}K^{\beta},\ (\beta>0,\ \beta\neq 1)$

の形でなければならない。

II　m次同次の場合

先づ（2．1）がK，Lのm次同次関数であってハロッドの意味で中立的である場合を考える。（2．1）がm次同次であればオイラーの定理から

$$Y_KK+Y_LL=mY$$

故に (3. 1) (3. 2) より

$$G'K+\frac{A_L}{A}(G-ZG')L=mAG$$

これより

$$\left(1-\frac{A_L}{A}L\right)\frac{ZG'}{G}=\left(m-\frac{A_L}{A}L\right) \cdots\cdots (3.11)$$

(イ) $\frac{A_L}{A}L=1$ の場合

この場合は $m=1=\frac{A_L}{A}L$ となり，Gは任意の関数でよい。また $\frac{A_L}{A}L=1$ より $A=C(t)L$ であるから

$$Y=C(t)L\cdot G\left(\frac{K}{C'(t)L}\right)$$

即ち　$Y=F(K,\ C(t)L)$，(Fは1次同次) $\cdots\cdots$ (3.12)

となる。ただしFは任意の関数である。

(ロ) $\frac{A_L}{A}L=m\neq 1$ の場合

この場合は $G'=0$ であって $Y=CA(L,\ t)$ となり，$Y_K>0$ の仮定に反する。

(ハ) $\frac{A_L}{A}L\neq 1$，m の場合

(3.11) より

$$\frac{ZG'}{G}=\frac{m-\frac{A_L}{A}L}{1-\frac{A_L}{A}L}=\beta \cdots\cdots (3.13)$$

とおけば左辺はZのみの関数，第二項はL，Aのみの関数であるから β は定数である。故に

$$\frac{G'}{G}=\frac{\beta}{Z}$$

より　$Y=CA^{1-\beta}K^{\beta}$

次に (3.13) より

$$\frac{A_L}{A}L(1-\beta)=m-\beta$$

もし $\beta=1$ なら　$m=\beta=1$ となり，$Y=CK$ となって $Y_L>0$ の仮定に反する。故に $\beta\neq 1$ とすれば $A_L\neq 0$ より $\beta\neq m$ であって

$$\frac{A_L}{A}L=\frac{m-\beta}{1-\beta}$$

故に　$A=C_1(A)L^{\frac{m-\beta}{1-\beta}}$

故に　　$Y=C(t)L^{m-\beta}K^{\beta}$，$(\beta\neq 1,\ m,\ \beta>0)$ ……………… (3.14)

以上より次の定理を得る。

〔定理3〕　(2. 1) がK，Lのm次同次関数であって，その技術進歩がハロッドの意味で中立的となるための必要十分な条件は，

$$Y=C(t)L^{m-\beta}K^{\beta},\quad (\beta>0,\ \beta\neq 1,\ m)$$

であるかまたは$m=1$であって

$$Y=F(K,\ C(A)L),\quad (F\text{は一次同次関数})$$

となることである。

〔系〕　ハロッドの意味で中立的であって，Cobb-Douglas型でない同次生産関数が存在するのは一次同次生産の場合に限る。

次に (2. 1) がm次同次関数であってヒックスの意味で中立的である場合を考える。(2. 1) がK，Lのm次同次関数であれば

$$Y=F(K,\ L,\ t)=L^{m}f(k,\ t) \quad \cdots\cdots (3.15)$$

ただし　$f(k,\ t)=F(k,\ 1,\ t)$

である。従って

$$\left.\begin{aligned} Y_K&=L^{m-1}f_k \\ Y_L&=L^{m-1}(mf-f_k k)^{⑥} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3.16)$$

故に　　$Y_K/Y_L=\dfrac{mf}{f_k}-k$

Y_K/Y_L がhとtとの関数であるから，(3.15) がヒックの意味で中立的であるための必要十分条件は Y_K/Y_L がkのみの関数であることである。

従って　$\dfrac{mf}{f_k}-k=\varphi(k)$

故に　　$\dfrac{f_k}{f}=\dfrac{m}{k+\varphi(k)}$

故に　　$f=\exp\left\{\displaystyle\int\frac{m}{h+\varphi(k)}dk+C(t)\right\}=A(t)\Psi(k)$

故に　　$Y=L^{m}A(t)\Psi\left(\dfrac{K}{L}\right)$

故に　　$Y=A(t)G(K,\ L)$，$(G\text{は}m\text{次同次})$ ……………………… (3.17)

となる。

〔定理4〕　(2. 1) がK，Lのm次同次関数であってヒックスの意味で技術進歩が中立的であるための必要十分条件は (2. 1) が

$$Y=A(t)G(K,\ L),\quad (G\text{は}m\text{次同次})$$

なる形で表わされることである。

終りに (2. 1) がm次同次であって，ハロッドの意味でもヒックスの意味でも中立的である場合を考察する。〔定理2〕より考えるに

$$Y=\{Ck^{\delta}+P(L)+Q(t)\}^{\frac{1}{\delta}},\quad (\delta\neq 0)$$

は$Q(t)\neq 0$であるから，K，Lに関してYはm次同次ではあり得ない。次に

$$Y=C(t)P(L)^{1-\beta}K^{\beta},\quad (\beta>0,\ \beta\neq 1)$$

と　$Y_K K+Y_L L=mY$

とより　$\beta P(L)+P'(L)(1-\beta)=mP(L)$

を得る。故に

$$\frac{P'}{P}=\frac{m-\beta}{(1-\beta)L}$$

故に　$P=CL^{\frac{m-\beta}{1-\beta}}$

故に　$Y=C(t)L^{m-\beta}K^{\beta},\quad (\beta>0,\ \beta\neq 1)$ ……………………(3.18)

を得る。

〔定理5〕　(2. 1) がK，Lのm次同次関数であってその技術進歩がハロッドの意味でもヒックスの意味でも中立的であるための必要十分条件は (2. 1) が

$$Y=C(t)L^{m-\beta}K^{\beta},\ (\beta>0,\ \beta\neq 1)$$

であることであることである。

なお〔定理3〕と〔定理5〕とより次の系を得る。

〔系〕　非一次同次生産関数がハロッドの意味で中立的ならそれはまたヒックスの意味でも中立的である。

〔Ⅲ〕　Factor Augumenting の場合

〔Ⅰ〕，〔Ⅱ〕でのべた種々の場合についてそれがFAであるか否かを吟味する。先づ〔定理1〕では $A(L,\ t)=A\{\beta(t)L\}$ の場合のみ FA である。〔定理2〕では

$$Y=C(t)P(L)^{1-\beta}K^{\beta}=P(L)^{1-\beta}\{C(t)^{\frac{1}{\beta}}K\}^{\beta}$$

は常にFAである。故に次の定理を得る。

〔定理6〕　(2. 1) がハロッドの意味で中立的であってFAであるのは

$$Y=A\{\beta(t)L\}G\left(\frac{K}{A\{\beta(t)L\}}\right)$$

なる場合のである。また更にそれがヒックスの意味でも中立的であるのは

$$Y=C(t)P(L)^{1-\beta}K^{\beta},\quad (\beta>0,\ \beta\neq 1)$$

なる場合のみである。

〔系〕　(2. 1) がFAであってハロッドの意味でもヒックスの意味でも中立的であるとき，それがm次同次関数であるのは

$$Y=C(f)L^{m-\beta}K^{\beta},\ (\beta>0,\ \beta\neq 1)$$

の場合に限る。

またm次同次関数の場合は〔定理３〕，〔定理４〕より次の定理を得る ⑦。

〔定理７〕　(2. 1) がK，Lのm次同次関数であるとき，ハロッドの意味で中立的か或はヒックスの意味で中立的であれば，(2. 1) はFAである。

終りに (2. 1) がFAであるための条件について２つの定理をあげておく。

〔定理８〕　(2. 1) がFAであるための必要十分条件はtの関数$A(t)$，$B(t)$に対して

$$R=a\hat{A}+b\hat{B} \cdots\cdots (3.20)$$

が成立することである。

〔証明〕 (イ) 必要条件

(2. 2) より

$$R=\frac{Y_A}{Y}=\frac{F_K K}{Y}\dot{A}+\frac{F_L L}{Y}\dot{B}$$

$$=\frac{F_K AK}{Y}\cdot\frac{\dot{A}}{A}+\frac{F_L BL}{Y}\cdot\frac{\dot{B}}{B}=a\hat{A}+b\hat{B}$$

(ロ) 十分条件

$$AK=P,\ BL=Q$$

とおき (2. 1) の独立変数をP，Q，tに変換すれば

$$Y=F\left(\frac{P}{A},\ \frac{Q}{B},\ t\right)=G(P,\ Q,\ t)$$

故に　$$G_t=F_K\cdot\left(-\frac{P}{A_2}\dot{A}\right)+F_L\cdot\left(-\frac{Q}{B_2}\dot{B}\right)+F_t$$

$$=(-a\hat{A}-b\hat{B}+R)=0$$

故に　$$Y=G(AK,\ BL)$$

〔定理９〕　(2. 1) がK，Lのm次同次関数であるとき，それがFAであるための必要十分条件は，あるtの関数$C(t)$に対して資本分配率が$C(t)k$のみの関数であることである。即ち

$$a=\Psi\{C(t)k\} \cdots\cdots (3.21)$$

が成立することである。

〔証明〕 (イ) 必要条件

(2. 2) より

$$Y=(BL)^m F\left(\frac{AK}{BL},\ 1\right)$$

さて　$F\left(\frac{AK}{BL}, 1\right)=g(h)$

とおけば　$Y=(BL)^m g(h)$

故に　$a=\frac{g'(h)}{g(h)}h,\quad h=\frac{A(t)}{B(t)}k=C(t)k$

(ロ) 十分条件

(2. 1) の独立変数を $h=C(t)k$，L，t に変換すれば

$$Y=F(K,\ L,\ t)=(G,\ L,\ t)$$

さて　$a=\frac{\partial Y}{\partial K}\Big/\frac{Y}{K}=\frac{\partial Y}{\partial h}\Big/\frac{Y}{h}$

故に (3.21) より

$$\frac{dY}{Y}=\frac{dh}{h}\Psi(h)$$

故に　$Y=D(L,\ t)\psi(h)=D(L,\ t)\phi\left(C(t)\frac{K}{L}\right)$

この関数はK，Lのm次同次であるから

$$D(L,\ t)=E(t)L^m$$

故に　$\{E(t)\}^{\frac{1}{m}}=B(t),\quad C(t)\{E(t)\}^{\frac{1}{m}}=A(t)$

とおけば

$$Y=(BL)^m\phi\left(\frac{AK}{BL}\right)=\Phi(AK,\ BL)$$

① 宇沢〔16〕の方法による。

② 逆の証明は容易である。即ち(3. 2) から $Y_L=G'\left(\frac{K}{A}\right)$，　$X=\frac{Y}{K}=\frac{A}{K}G\left(\frac{A}{K}\right)$ を得る。これより$\frac{K}{A}$を消去すれば $Y_K=\Phi(X)$ となる。

③ Y_K/Y_L がkとtとのみの関数の場合（例えば次節でのべる様に (2. 1) がK，Lについてm次同次の場合）にはD＝0がヒックスの中立性の必要十分条件である。

④ (2. 1) がK，Lのm次同次関数の場合は必要十分条件である。

⑤ $G-ZG'\fallingdotseq 0$ である。何となればもし $G-ZG'=0$ なら $G=CZ$，$Y=CK$，となり $Y_L>0$ の仮定に反する。

⑥ (2. 1) の仮定と (3.16) とより $f_k>0$，$\frac{f_k}{f}k<m$でなければならない。

⑦ YがK，Lのm次同次関係なら，

$$Y=A(t)G(K,\ L)=\{\beta(t)L\}^m G\left\{\frac{\alpha(t)K}{\beta(t)L},\ 1\right\}$$

$$\alpha(t)=\beta(t)=A(t)^{\frac{1}{m}}$$

はFAである。

4　m次同次生産モデル

本節以後は（2. 1）を生蔵関数とするm次同次生産モデルについて考察する。従って（3.15），（3.16）が成立し，次の様な関係式が成立する。

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{f_k}{f}k \\ b &= \frac{mf - f_k k}{f} \\ a + b &= m \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (4.\ 1)$$

$$\left.\begin{aligned} M_K &= \frac{f_{kt}}{f_k} \\ M_L &= \frac{mf_t - f_{kt}k}{mf - f_k k} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (4.\ 2)$$

$$R = \frac{f_t}{f} = \frac{1}{m}\{aM_k + (m-a)M_L\} \quad \cdots\cdots \quad (4.\ 3)$$

$$\rho = \frac{(mf - f_k k)f_k}{\{(m-1)f_k^2 - mff_{kk}\}k} \quad \cdots\cdots \quad (4.\ 4)$$

$$ab = \frac{\{(m-1)f_k^2 - mff_{kk}\}k^2}{f^2}\rho \quad \cdots\cdots \quad (4.\ 5)$$

$$D = \frac{m(ff_{kt} - f_k f_t)}{(mf - f_k k)f_k} = \frac{m(M_k - R)}{m-a} \quad \cdots\cdots \quad (4.\ 6)$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{Y}_K &= (m-1)\hat{L} + \frac{f_{kt}}{f_k} + \frac{f_{kk}}{f_k}k\hat{k} \\ &= M_K - \left(\frac{m-a}{m\rho} - \frac{m-1}{m}a\right)\hat{k} + (m-1)\hat{L} \\ \hat{Y}_L &= M_L + \left(\frac{a}{m\rho} + \frac{m-1}{m}a\right)\hat{k} + (m-1)\hat{L} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (4.\ 7)$$

$$\begin{aligned} a\hat{Y}_K + (m-a)\hat{Y} &= mR + (m-1)\{a\hat{k} + (m-a)\hat{L}\} \\ &= R + (m-1)\hat{Y} \quad \cdots\cdots \quad (4.\ 8) \end{aligned}$$

$$\hat{a} = \frac{m-a}{m}\left(D - \frac{1-\rho}{\rho}\hat{k}\right) \quad \cdots\cdots \quad (4.\ 9)$$

$$\widehat{(Y/K)} = R - (1-\hat{a})k + (m-1)\hat{L} \quad \cdots\cdots \quad (4.10)$$

$$\{(YK)\hat{\ }\}_{\hat{Y}_K = 0} = \frac{1-\rho}{m}\{R + (m-1)\hat{Y}\} - \frac{m-a}{m}\rho D \quad (4.11)$$

（2. 1）の仮定と（4. 8）とより$R + (m-1)\hat{Y} > 0$であるから（4.11）より$\rho = 1$のときのみハロッドの意味での技術進歩の中立性とヒックスの意味での

中立性とが一致することが知られる。$\rho=1$のときのみ (3.18) が成立するから再び〔定理3〕が導かれる。

さて特に (2. 1) がFAであるときは (2. 2) より

$$Y=F(AK,\ BL)=(BL)^m F\left(\frac{AK}{BL},\ 1\right)$$

故に　$g(h)=F(h,\ 1)$

とおけば

$$Y=(BL)^m g(h) \quad \cdots\cdots (4.12)$$

$$\left.\begin{aligned} Y_K&=(BL)^{m-1}Ag' \\ Y_L&=B(BL)^{m-1}(mg-g'h) \text{ ①} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4.13)$$

故に (4. 1) − (4. 9) の諸式は次の様になる。

$$a=\frac{g'h}{g},\quad b=m-a=\frac{mg-g'h}{g} \quad \cdots\cdots (4.1')$$

$$\left.\begin{aligned} M_K&=\hat{A}+(m-1)\hat{B}+\frac{g''}{g'}(\hat{A}-\hat{B})h \\ M_L&=m\hat{B}+\frac{(m-1)g'-g''h}{mg-g'h}(\hat{A}-\hat{B})h \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4.2')$$

$$R=\frac{1}{m}\{aM_K+(m-a)M_L\}=a\hat{A}+(m-a)\hat{B} \quad \cdots\cdots (4.3')$$

$$\rho=\frac{(mg-g'h)g'}{\{(m-1)g'^2-mgg''\}h} \quad \cdots\cdots (4.4')$$

$$ab=\frac{\{(m-1)g'^2-mgg''\}h^2}{g^2}\rho \quad \cdots\cdots (4.5')$$

$$D=\frac{\rho-1}{\rho}(\hat{A}-\hat{B}) \quad \cdots\cdots (4.6')$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{Y}_K&=M_K+\frac{g'h}{g'}\hat{k}+(m-1)\hat{L} \\ \hat{Y}_L&=M_L+\frac{(m-1)g'-g''h}{mg-g'h}h\hat{k}+(m-1)\hat{L} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4.7')$$

$$a\hat{Y}+(m-a)\hat{Y}_L=R+(m-1)\hat{Y} \quad \cdots\cdots (4.8')$$

$$\hat{a}=\frac{(m-a)(1-\rho)}{m\rho}(\hat{B}-\hat{A}-\hat{k}) \quad \cdots\cdots (4.9')$$

さて労働力の増加率と資本蓄積に関する条件として，Drandakis〔8〕に従って次の仮定を設ける。

〔仮定I〕

$$\dot{L}=\lambda L \quad \cdots\cdots (4.14)$$

$$\dot{K} = sYe^{-\delta t} - \mu K \cdots\cdots (4.15)$$

ただし λ, s, η, μ は定数で $\lambda \gtreqless 0$, $\mu \gtreqless 0$, $0 < s < 1$, $0 < \mu < 1$ とする。

従って (2. 4) とより

$$\dot{\hat{K}}(K+\eta)\{R-\mu+(m-a)\lambda-(1-a)\hat{K}\} \cdots\cdots (4.16)$$

また (4.9), (4.9′) はそれぞれ

$$\dot{a} = a\frac{(m-a)}{m}\{D-\frac{1-\rho}{\rho}(\hat{K}-\lambda)\} \cdots\cdots (4.17)$$

$$\dot{a} = a\frac{(m-a)(1-\rho)}{m\rho}\{\hat{B}-\hat{A}+\lambda-\hat{K}\} \cdots\cdots (4.17)$$

となる。以後は k, L, t のかわりに独立変数として a, K を用いることとし②, (4.16) (4.17) の右辺を0ならしめる a, $\hat{k}$ の値（動学的均衡値）を a^*, $\hat{K}^*$ で表わせば

$$\left.\begin{array}{l} D-\frac{1-\rho}{\rho}(\hat{K}^*-\lambda)=0 \\ R-\mu+(m-a^*)\lambda-(1-a^*)\hat{K}^*=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (4.18)$$

であり，その値に対しては a とKとは t に対して不変である。従って経済体系は，資本と労働との増加率が一定であって分配率も一定である動学的均衡にある。そのときは

$$\left.\begin{array}{l} Y=\frac{\hat{K}^*+\mu}{s}K_0 e^{(\hat{K}^*+\eta)t} \\ Y_K=\frac{\hat{K}^*+\mu}{s}a^* e^{\eta t} \\ Y_L=\frac{\hat{K}^*+\mu}{s}b^*\frac{K_0}{L_0}e^{(\hat{K}^*+\eta-\lambda)t} \end{array}\right\} \cdots\cdots (4.19)$$

となる。ただし K_0, L_0 は $t=0$ における値を示す。また

$$\left.\begin{array}{l} \hat{Y}=\hat{K}^*+\mu, \quad \hat{Y}_K=\mu, \quad \hat{Y}_L=\hat{K}^*+\mu-\lambda \\ R=\mu+(1-a^*)\hat{K}^*-(m-a^*)\lambda \end{array}\right\} \cdots\cdots (4.20)$$

となり，$\hat{Y}$, $\hat{Y}_K$, $\hat{Y}_L$ の増加率が異り，goldenage ではない。なお $\eta=0$ なら Y/K＝一定, Y_K＝一定 となり，ハロッドの意味で技術進歩が中立的である。また $\eta=0$ のときは，消費をCで表わせば

$$C=Y-(1+\mu)\dot{K}=Y-\hat{K}^*K$$

であるから

$$\hat{C}=\hat{Y}=\hat{K}=\hat{K}^*$$

となる。従って goldenage である。

① (2.1) の仮定と (4.13) とより $g'>0$, $\frac{g'h}{g}<m$でなければならない。

② $L=L_0e^{\lambda t}$ であるからLはaとKとの関数となる。従って独立変数はaとKとなる。

5 経済体系の安定性：FA の場合

前節でのべたモデルの動学的安定性を吟味することとする。先づ本節でFAの場合を考察し，次節で一般の場合を考察することとする。なお本節および次節では Innovation Possibility Functionを導入することとする。

〔仮定Ⅱ〕

$$Y=F(AK,\ BL) \cdots\cdots (5.1)$$

において

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\varphi(\hat{A})\\ \varphi(o)>0,\ \varphi'(\hat{A})<0,\ \varphi''(\hat{A})<0\end{array}\right\} \cdots\cdots (5.2)$$

と仮定する。さらに技術進歩に対する仮定として，経済体系は資本分配率aが一定のとき技術進歩率Rが最大となる様に変動するものとする。従って（4．3）より

〔仮定Ⅲ〕

仮定Ⅱのもとで　a＝一定のとき

$$R=a\hat{A}+(m-a)\hat{B}$$

が最大となる様に$\hat{A}$，$\hat{B}$が変化するものとする。

さて仮定Ⅲより

$$\varphi'(\hat{A})=-\frac{a}{m-a} \cdots\cdots (5.3)$$

$$\hat{B}=-\frac{a}{m-a}\hat{A}+C(a) \cdots\cdots (5.4)$$

となり，$\hat{A}$，$\hat{B}$はaの関数となる。また（5．3）と仮定Ⅱとより

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\hat{A}}{da}=-\dfrac{m}{(m-a)^2\varphi''(\hat{A})}>0\\[2ex] \dfrac{d\hat{B}}{da}=\dfrac{d\hat{B}}{d\hat{A}}\cdot\dfrac{d\hat{A}}{da}<0\end{array}\right\} \cdots\cdots (5.5)$$

となる。従って (4.16) より $a \neq 1$ とすれば

$$\dot{\widehat{\mathrm{K}}}=(\widehat{\mathrm{K}}+\mu)(1-a)\left\{\frac{a\widehat{\mathrm{A}}+(m-a)\widehat{\mathrm{B}}-\eta+(m-a)\lambda}{1-a}-\widehat{\mathrm{K}}\right\} \quad \cdots\cdots (5.6)$$

いま

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{G}(a)&=\widehat{\mathrm{B}}-\widehat{\mathrm{A}}+\lambda \\ \mathrm{H}(a)&=\frac{a\widehat{\mathrm{A}}+(m-a)\widehat{\mathrm{B}}-\eta+(m-a)\lambda}{1-a} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (5.7)$$

とけば (4.17′)，(4.19) は

$$\dot{a}=a\frac{m-a(1-\rho)}{m\rho}\{\mathrm{G}(a)-\widehat{\mathrm{K}}\} \quad \cdots\cdots (5.8)$$

$$\dot{\widehat{\mathrm{K}}}=(\widehat{\mathrm{K}}+\eta)(1-a)\{\mathrm{H}(a)-\widehat{\mathrm{K}}\} \quad \cdots\cdots (5.9)$$

となる。なお (4.15) より $\widehat{\mathrm{K}}^{*}+\mu=s\,e^{-\delta t}\mathrm{Y}/\mathrm{K}>0$ である。さて (5.5) より

$$\mathrm{G}'(a)<0 \quad \cdots\cdots (5.10)$$

$$\mathrm{H}'(a)=\frac{\mathrm{J}(a)-\eta}{(1-a)^{2}} \quad \cdots\cdots (5.11)$$

$$\mathrm{G}(a)-\mathrm{H}(a)=\frac{\eta-\mathrm{J}(a)}{1-a} \quad \cdots\cdots (5.12)$$

ただし　$\mathrm{J}(a)=\widehat{\mathrm{A}}+(m-1)\widehat{\mathrm{B}}+(m-1)\lambda$ ……… (5.13)

となる。然るに (4.18) より $\mathrm{G}(a^{*})=\mathrm{H}(a^{*})=\widehat{\mathrm{K}}^{*}$ であるから

$$\mathrm{J}(a^{*})=\eta \quad \cdots\cdots (5.14)$$

であって ① (5. 5) より

$$\mathrm{J}'(a)=\frac{m(1-a)}{m-a}\cdot\frac{d\widehat{\mathrm{A}}}{da} \quad \cdots\cdots (5.15)$$

であるが，この式の符号を定めるため次の２つの仮定をおく。

〔仮定Ⅳ〕

$$g''(h)<0$$

〔仮定Ⅴ〕

$$\rho>0$$

仮定Ⅴと (4. 4) より

$$(m-1)g'^{2}-mgg''=m(g'^{2}-gg'')-g'^{2}>0$$

故に　$n=\dfrac{g'^{2}}{g'^{2}-gg''}$

とおけば仮定Ⅳより

$$n<1 \qquad\cdots\cdots (5.16)$$

であって仮定Ⅴは

$$m>n \qquad\cdots\cdots (5.17)$$

と同等である。また (4.4′) より

$$\rho=\frac{m(n-a)}{(m-n)a} \qquad\cdots\cdots (5.18)$$

$$\frac{\rho-1}{\sigma}=\frac{m(n-a)}{n(m-a)} \qquad\cdots\cdots (5.19)$$

となる。

（Ⅰ）　$\rho>1$ の場合

(5.16)，(5.19) より $a<n<1$ である。従って(5.15)より $J'(a)>0$ である。故に (5.14)，(5.11)，(5.12) より

$$a \lesseqgtr {}^{*}a \text{ に従って } \left.\begin{array}{l} H'(a)\lesseqgtr 0 \\ G(a)\gtreqless H(a) \end{array}\right\} \qquad\cdots\cdots (5.20)$$

故に (5.8)，(5.9) より $\dot{a}$，$\dot{\hat{K}}$ の符号は第1図に示された通りであり，a，$\hat{K}$ は特別な場合（図において点線LPM上を動く場合）の外は発散する。

（Ⅱ）　$\rho<1$，$a<1$ の場合

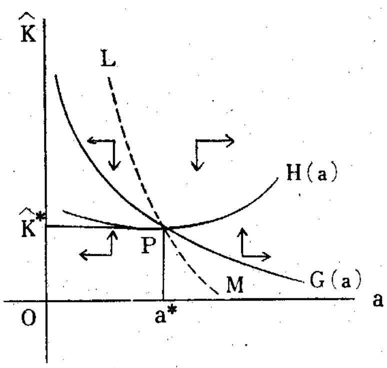
(5.15) より $J'(a)>0$ であるから (5.20) が成立する。この場合は第2図に示す様に均衡値 a^*，$\hat{K}^*$ に収束する。

（Ⅲ）　$\rho<1$，$a>1$ の場合 ②

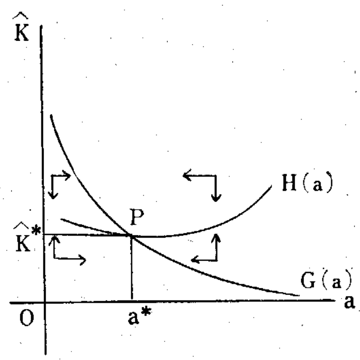
(5.15) より $J'(a)<0$ である。従って (5.8)，(5.9) より

$$a \lesseqgtr a^{*} \text{ に従って } \left.\begin{array}{l} H'(a)\gtreqless 0 \\ G(a)\gtreqless H(a) \end{array}\right\} \qquad\cdots\cdots (5.21)$$

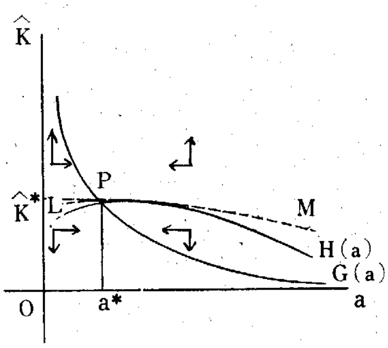
である。従って第3図に示す様に特別な場合（図において点線LPM上を動く場合）の外は a，$\hat{K}$ は発散する ③。



第1図（$\rho>1$）



第2図（$\rho<1$，$a<1$）



第3図（$\rho<1$，$a>1$）

① $J(a^*)=\eta$ なる a^* の存在を仮定する。なお以下にのべる範囲では $J(a)$ は単調関数であるから，均衡値は唯一つ存在することとなる。$m=1$，$\eta=0$ のときは $\widehat{A}(a^*)=0$ となり，動学的均衡解はハロッドの意味での中立的技術進歩をなす。

② $m\leqq 1$ なら $a<m\leqq 1$ であるから $\rho<1$，$a>1$ となるのは $m>1$ の場合に限る。なお常に $\rho=1$ であれば (5.18) から $a=n<1$ であって，生産関数はCobb-Doglas型である。従って $a=\text{const}=\overline{a}$ であり，その値に対して $\widehat{K}=H(\overline{a})$ とおけば $(\overline{a},\ \widehat{K})$ は $\widehat{K}$ に対して安定な均衡値である。

③ $a=1$ の場合は $\sigma<1$，$m>1$ であるから $\widehat{K}=G(1)=\text{const}$ である。そのときは (5.9) より体系は均衡である。しかし (ii)，(iii) から明らかな様にその均衡値は一般には不安安定である。特に $H(1)=G(1)$ なら $a^*=1$ であるが，それは半安定である。

6　経済体系の安定性：一般の場合

ＦＡの場合は技術進歩に関する仮定をA，Bに設けたのであるが，一般の場合は他に仮定を設けることとする。（天野〔3〕）。即ち $u=\widehat{Y}_K$，$v=\widehat{Y}_L$ に次の仮定をおくこととする。

〔仮定Ⅵ〕

$$\left.\begin{array}{l} v=\Psi(u) \\ \Psi(0)>0,\ \Psi'(u)<0,\ \Psi''(u)>0 \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (6.\ 1)$$

〔仮定Ⅶ〕

仮定Ⅵのもとで $a=$一定のとき

$$S=\frac{au+(m-a)v}{m}=\frac{R+(m-1)\widehat{Y}}{m} \cdots\cdots \quad (6.\ 2)$$

が最大となる様に u，v が変化するものとする ①。

さて (4. 7) より

$$u-v=D-\frac{\widehat{k}}{\rho}$$

従って (4.17) より

$$\dot{a}=\frac{a(m-a)}{m}\{u-v-\lambda+\widehat{K}\} \cdots\cdots \quad (6.\ 3)$$

また仮定Ⅶより

$$\Psi'(u)=-\frac{a}{m-a} \cdots\cdots \quad (6.\ 4)$$

故に　$v=-\dfrac{a}{m-a}u+C(a)$

となりu，vはaの関数となる。また仮定Ⅵより

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{da}&=-\frac{m}{(m-a)^2\Psi''(u)}>0\\ \frac{dv}{da}&=\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{da}<0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6.\ 5)$$

となる。さて (4. 8) より

$$R=\frac{au+(m-a)v}{m}-\frac{m-1}{m}\{a\hat{k}+(m-a)\lambda\}$$

これを (4.16) に代入すれば

$$\dot{\hat{K}}=(\hat{K}+\mu)\frac{m-a}{m}\left\{\frac{au+(m-a)v-m\eta}{m-a}+\lambda-\hat{K}\right\}\cdots\cdots\quad(6.\ 6)$$

となる。

$$\left.\begin{aligned}H(a)&=v-u+\lambda\\ H(a)&=\frac{au+(m-a)v-m\eta}{m-a}+\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6.\ 7)$$

とおけば (6. 3)，(6. 4) は

$$\dot{a}=\frac{a(m-a)}{m}\{\hat{K}-G(a)\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6.\ 8)$$

$$\dot{\hat{K}}=(\hat{K}+\mu)\frac{(m-a)}{m}\{H(a)-\hat{K}\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6.\ 9)$$

となる。ところで (6. 5) から

$$G'(a)<0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

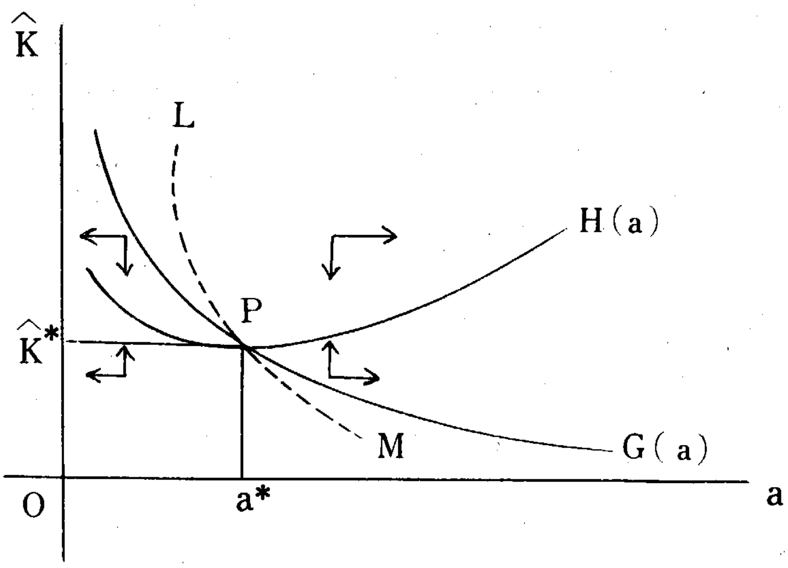
$$H'(a)=\frac{m(u-\eta)}{(m-a)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6.11)$$

$$G(a)-H(a)=\frac{m(\eta-u)}{m-a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6.12)$$

故に (4.18) より　$U(a^*)=\eta$，$G(a^*)=H(a^*)=\hat{K}^*$ である[2]。故に (6. 5) より

$$a\gtreqqless a^*\text{に従って}\quad\left.\begin{aligned}H'(a)&\gtreqqless 0\\ G(a)&\gtreqqless H(a)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6.13)$$

である。故に (6. 8)，(6. 9) より$\dot{a}$，$\dot{\hat{K}}$の符号は第4図の様であり，特別な場合の外はa，$\hat{K}$は発散する[3]。



第4図

① Sは資本限界生産力の増加率と労働限界生産力との加重平均（ウェイトは資本分配率と労働分配率）である。なお仮定Ⅲは$\hat{A}$と$\hat{B}$との加重平均（ウェイトはSと同じ）を最大ならしめるものである。

② $U(a^*)=\eta$なるa^*の存在を仮定する。(6.5) よりa^*は唯一つ存在する。

③ 本誌第17巻第5，6号1—20頁に〝非一次同次生産関数〟なる論文を発表したが，その18頁の1部を次のように訂正する。

行	誤	正
5, 11	Ak, $(A=\text{const})$	Ak^B, $(A,\ B=\text{const})$
6	$\rho=$	$\rho_y=$
8	$\dfrac{f'(mf-kf')}{k\{(m-1)f'^2-ff''\}}$	$\dfrac{f'(mf-kf')}{k\{(m-1)f'^2-mff''\}}$
10	$(m-1)f'(f-kf')$	$(m-1)\{f'(f-kf')+kff''\}$
13, 14	全文	削除