非一次同次生産関数

木　藤　正　典

1 は し が き

カルドアとミードとによって唱えられた新古典派成長理論は，ソロー，スワンを経て新開，宇沢等による二部門成長理論となり，以後この数年間に多くの発展をなした ①。それらの二部門成長理論では

(1)　1 次同次生産関数

(2)　完全競争

(3)　限界生産力説による価格決定

が仮定されている。この 3 つの仮定の間には関係があり，生産関数が 1 次同次関数であるが故に，生産物価額は生産要素に残りなく分配され，しかもそれは生産費最小の条件を満足する。しかしながらダグラス型の生産関数が提唱されて以来，生産関数が 1 次同次関数であるか否かに関しては，Cobb-Douglass 生産関数について多くの統計的研究が行なわれたが，近代的な生産方式においては生産関数は 1 以上の同次性を持っているようである ②。従って二部門理論をより現実的ならしめるためには 1 次でない同次生産関数を仮定した理論を組立てることが必要であろう。

もし 1 次でない同次生産関数を仮定すれば，それは(2)，(3)の仮定と両立しないことは明らかである。（次節）また(1)，(2)，(3)のような仮定で規定される完全競争が現実的でないことも明らかである。故にわれわれは(2)の代りに，非 1 次同次生産関数と矛盾しないような仮定（次節（2．2）で規定する不完全競争の仮定）を取り入れることとする。この仮定は生産費最小の条件を満足する。

本稿は以上の様な仮定のもとで宇沢（〔7〕），Drandakis（〔9〕）の方法に従って二部門理論を展開するものである。

① 〔1〕Solow, R.M., "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 70 (1956), 65—94.

〔2〕Swan, T., "Economic Growth and Capital Accumulation", *Economic*

Recoɪd, 32 (1956), 334—361.

〔3〕Shinkai, Y., "On Equilibriun, Growth of Capital and Labour", *International Economic Review*, 1 (1960), 107—111.

〔4〕Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, 29 (1961), 40—47.

〔5〕Solow, R.M., "Note on Uzawa's Two-Sector Model of Economic Growth", Review of Economic Studies, 29 (1961), 48—50.

〔6〕Takayama, A., "On a Two-Sector Model of Economic Growth : A Comparative Static Analysis", *Review of Economic Studies*, 30 (1963), 95—104.

〔7〕Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth Ⅱ", *Review of Economic Studies*, 30 (1963), 105—118.

〔8〕Inada, K., "On a Two-Sector Model of Economic Growth; Comments and Generalization", *Review of Ecenomic Studies*, 30 (1963), 119—127.

〔9〕Drandakis, E.M.,"Factor Substitution in the Two-Sector Growth Model", *Reivew of Economic Studies*, 30 (1963), 217—228.

〔10〕Fukuoka, M.and Kawamata, K., "The Neo-classical Theorem and the Two-Sector Model of Economic Growth", **理論経済学**, 16 (1965), 69—73.

② 最近の研究としては次のものがある。

Walters, A., "A Note on Economics of Scale", *Review of Economics and Statistics*, 45 (1963), 425—427.

斉藤昌二, "生産関数の統計的分析と生産構造", **日本経済の計量的把握**, 第4章, 117—150.

2 仮　定

前節で述べた仮定の外に，貯蓄性向は利潤部分に対するものと，賃金部分に対するものとは必ずしも等しくなく，前者は後者より小さくはないものと仮定する。その他に関しては前記の諸論文と同様な仮定に従う。

二部門分割において第１部門は投資財部門を，第２部門は消費財部門を示すものとし，それぞれの量に１，２なる添文字を附する。（ただし，s_1，s_2のみは例外。）なおすべての量は非負であると仮定する。

記号：

$Y_i = i$ 部門生産量

$K_i = i$ 部門資本量
$L_i = i$ 部門労働量
K＝総資本量
L＝総労働量
$P_i = i$ 部門生産物価格
w＝賃金率
r＝資本利潤率（資本1単位に対する報酬）
s_1＝利潤部分に対する貯蓄率
s_2＝賃金部分に対する貯蓄率
λ＝労働人口増加率（＝一定）
μ＝資本減価率（＝一定）
$F_i(K_i,\ L_i) = i$ 部門生産関数

$$k_i = \frac{k_i}{L},\quad k = \frac{K}{L},\quad l_i = \frac{L_i}{L},\quad y_i = \frac{Y}{L}$$

$$p = \frac{p_1}{p_2},\quad \omega = \frac{w}{r}$$

$$f_i(k_i) = F(k_i,\ 1)$$

$$Y = p_1 Y_1 + p_2 Y_2,\quad y = \frac{Y}{L}$$

仮定：

（Ⅰ）$f_i(k_i)$ は $k_i \geqq 0$ に対して2回連続的微分可能であって

$$f_i(k) \geqq 0,\quad f_i'(k) > 0,\quad f_i''(k_i) < 0$$
$$f_i(0) = 0,\quad f_i(\infty) = \infty$$
$$f_i'(0) = \infty,\quad f_i'(\infty) = 0$$

とする。

（Ⅱ）生産関数

$$Y_i = F_i(K_i, L_i),\ (i = 1,\ 2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

はm次同次関数とする。ただし

$$m > \max_i(n_i)$$
$$n_i = \frac{f'^2(k)}{f_i'^2(k_i) - f_i(k) f_i''(k_i)}$$

なお $m > n_i$ は第 i 部門のK_i と L_i との代替の弾力性が正であることを意

味する。(2.11参照)。

(Ⅲ) s_iはパラメーターであって

$0 \leqq s_i \leqq 1$, $(i=1, 2)$, $s_1 \geqq s_2$

とする。

(Ⅳ) p_1, p_2, r, w の間には次の関係が成立するものとする。

$$\frac{\frac{\partial F_i}{\partial K_i}}{r}=\frac{\frac{\partial F_i}{\partial L_i}}{w}=\frac{1}{p(1-\eta)}, (i=1, 2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)$$

ただし ηはパラメーターであって

$0 \leqq s_i \leqq 1$, $0 < m(1-\eta) \leqq 1$

であるとする。

仮定(Ⅰ)より

$$\frac{\partial F_i}{\partial K_i}=L_i^{m-1} \quad f'>0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L_i}=L_i^{m-1}(mf_i-f'k_i)$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial K_i{}^2}=L_i^{m-2} \quad f_i''<0$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial L^2}=L_i^{m-2}\{(m-1)(mf_i-2f'k_i)+f_i''k_i^2\}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial k\,\partial L}=L_i^{m-2}\{(m-1)f_i'-f_i''k_i\}$$

であって

$$m \geqq 1 \text{ なら } \frac{\partial F_i}{\partial L_i}>0\text{①}, \quad \frac{\partial^2 F_i}{\partial k_i \partial L_i}>0$$

$$m=1 \text{ なら } \frac{\partial^2 F}{\partial L_i^2}<0$$

であるが，他の場合についてはこれらの符号は不明である。即ち労働に対しては必ずしも限界生産物は漸減しない。また仮定(Ⅰ)より $0<n_i<1$ であるからmは1でなくともよいが，1よりあまり小さくないものと考える②。仮定(Ⅳ)は生産費最小の条件は満足するが，利潤最大の条件は満足しない。(2.2)は p, wが完全競争仮定の場合($\eta=0$)より $\eta\times 100\%$ だけ低い値に決定されることを示すものである。なお仮定(Ⅳ)の最後の関係式は企業利潤が非負であるための条件式である。何となれば(2.2)と仮定(Ⅱ)とより

$$\frac{\dfrac{\partial F_i}{\partial K_i}K_i+\dfrac{\partial F}{\partial L}L}{rK_i+wL_i}=\frac{mY_i}{rK_i+wL_i}=\frac{1}{p_i(1-\eta)}$$

故に　$Y_i=\dfrac{rK_i+wL_i}{m(1-\eta)p_i}$

故に　$Y=\dfrac{rK+wL}{m(1-\eta)}$

従って仮定（Ⅳ）より

企業利潤$=Y-(Kr+wL)=Y\{1-m(1-\eta)\}\geqq 0$

である。従って$m\leqq 1$のときは $\eta=0$（完全競争）も可能であるが，$m>1$のときは，必然的に $\eta\geqq\dfrac{m-1}{m}$ でなければならない。

さて以上の関係式から

$$K_1+K_2=K \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.3)$$

$$L_1+L_2=L \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

$$p_1Y_1=s_1(Y-wL)+s_2wL \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.5)$$

$$\dot{K}=Y_1-\mu K \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.6)$$

$$\dot{L}=\lambda L \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.7)$$

を得る。(2.1) ～ (2.7) は12個の変数 Y_i, K_i, L_i, K, L, p, r, wに関する11個の関係式であるが，これらの変数を y_i, k_i, l_i, k, p, ω, L で表わせば，次の10個の関係式となる。

$$y_i=L^{m-1}l_i^{m}f_i\ ,\quad (i=1,\ 2) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.8)$$

$$l_1k_1+l_2k_2=k \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.9)$$

$$l_1+l_2=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.10)$$

$$\omega+k_i=m\frac{f_i}{f_i'}\ (i=1,\ 2) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.11)$$

$$p=\frac{f_2'}{f_1'}\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{m-1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.12)$$

$$y_1=\frac{1}{m}\{s_1(k+\omega)-(s_1-s_2)m(1-\eta)\omega\}f_1'l_1^{m-1}L^{m-1}\cdots \quad (2.13)$$

$$\frac{\dot{k}}{k}=\frac{y_1}{k}-(\lambda+\mu) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.14)$$

$$\dot{L}=\lambda L \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2.15)$$

(2.8) ～ (2.13) は静学的体系の均衡条件であり，その場合は k と L とが独立変数と考えられ，(2.14)，(2.15) の動学的均衡条件より k，L が定まるのである。

① ただし $\lim_{k_i \to 0} f_i k_i = 0$ とする。また $m<1$ でも仮定 (Ⅳ) が成立すれば後述の(2.11)

より

$$\frac{\partial F_i}{\partial L_i} = L_i^{m-1} \omega f' > 0$$

となる。

②

$$\lim_{ki \to 0} \frac{f_i f_i''}{f_i'^2} = 0, \qquad \lim_{ki \to \infty} \frac{f_i f_i''}{f_i'^2} = \infty$$

なら　$\lim n_i = 1$，$\lim n_i = 0$

である。また現実的には m は1よりあまり大きくなくてよい。例えば $m<3/2$ で充分であろう。（前節註②参照）

3　静学的均衡　I

本節では (2.8) ～ (2.13) の静学的均衡の存在について考察する。先づ

$$z_i = \omega + k_i, \quad z = \omega + k$$

とおけば (2.9)，(2.10) より

$$l_1 z_1 + l_2 z_2 = Z \quad \cdots\cdots (3.1)$$

であって (2.11) より

$$\frac{dz_i}{dk_i} = m \frac{f_i'^2 - f_i f_i''}{f'^2} = \frac{m}{n_i}$$

故に

$$\frac{dk_i}{d\omega} = \frac{m_i}{m - n_i} > 0, \quad (i = 1,\ 2) \quad \cdots\cdots (3.2)$$

$$\frac{dz_i}{d\omega} = \frac{m}{m - n_i} > 1 \quad \cdots\cdots (3.3)$$

従って k_i と z_i とは ω の単調増加関数であって，その逆関数もまた単調増加である。従って，賃金率の資本利潤に対する相対的上昇は，各部門で資本の労働に対する相対的上昇を生ぜしめる。またその逆も成立する。なお明らかに

$$\lim_{\omega \to 0} k_i = \lim_{\omega \to 0} z_i = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} k_i = \lim_{\omega \to \infty} z_i = \infty$$

である。

次に (2.8), (2.13) からy_1を消去すると

$$l_1=\frac{f_1'(s_1z-\theta\omega)}{mf_1}$$

ただし$\theta=(s_1-s_2)m(1-\eta)\leqq s_1$ ………………………… (3.4)

(2.11) から $$l_1=\frac{s_1z-\theta\omega}{z_1} \quad\cdots\cdots (3.5)$$

である。また (2.10), (3.1) から

$$\left.\begin{aligned}l_1&=\frac{z_2-z}{z_2-z_1}\\ l_2&=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots (3.6)$$

である。故に (3.5), (3.6) より

$$z=\frac{z_1z_2+\theta(z_2-z_1)\omega}{(1-s_1)z_1+s_1z_2}\quad\cdots\cdots (3.7)$$

従って (3.6) から

$$\left.\begin{aligned}l_1&=\frac{s_1z_2-\theta\omega}{A}\\ l_2&=\frac{(1-s_1)z_1+\theta\omega}{A}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots (3.8)$$

ただし $A=(1-s_1)z_1+s_1z_2$

となり，z，l_1，l_2はz_1，z_2従ってωの関数として表わされる。従ってまた(2.12) からpはωの関数として，(2.8) からy_iはLとωの関数として表わされる。なお (3.5), (3.7) から

$$l_2=\frac{(1-s_1)_2+\theta\omega}{z_2}\quad\cdots\cdots (3.9)$$

なる関係も得られる。以後 $\frac{dk_i}{d\omega}, \frac{dz_i}{d\omega}, \frac{dk}{d\omega}, \frac{dz}{d\omega}$ をそれぞれk_i', z_i', k', z'で表わせば (3.7), (3.5), (3.9) から

$$\begin{aligned}z'&=\frac{l_1z_2z_1'+l_2z_1z_2'+\theta(z_2-z_1)}{A}\\ &=\frac{(s_1z_2-\theta\omega)z_2z_1'+\{(1-s_1)z_1+\theta\omega\}z_1z_2'+\theta(z_2-z_1)A}{A^2}\end{aligned}$$

………… (3.10)

故に (3.3) から

$$z'-1>\frac{\{s_1z_2-\theta\omega\}z_2+\{(1-s_1)z_1+\theta\omega\}z_1+\theta(z_2-z_1)A}{A^2}-1$$
$$=\frac{s_1(1-s_1)(z_2-z_1)^2+\theta(z_2-z_1)\{k_1+s_1(z_2-z_1)\}}{A^2}$$

故に $z_2\geqq z_1$, 即ち $k_2\geqq k_1$[①] なら $z'\geqq 1$ ……… (3.11)

また (3.7) の両辺を k_1, k_2, k_2, k で表わせば

$$k=\frac{k_1k_2+\{(s_1-\theta)k_1+(1-s_1+\theta)k_2\}\omega}{A} \quad\cdots\cdots\cdots\ (3.12)$$

ただし $A=(1-s_1)k_1+s_2k_2+\omega$ ……………………………… (3.13)

となる。この右辺を ω で微分して整頓すれば

$$k'=\frac{1}{A^2}[(1-s_1)(k_2'+s_1-\theta)k_1^2+s_1(k_1'+1-s_1+\theta)k_2^2$$
$$+\{2\delta_1\omega k_2k_1'+2\delta_2\omega k_1k_2'-(1-s_1)(s_1-\theta)k_1k_2$$
$$-s_1(1-s_1+\theta)k_1k_2\}]$$

ただし $\delta_1=s_1-\dfrac{\theta}{2}$, $\delta_2=(1-s_1)+\dfrac{\theta}{2}$

であって

$$\delta_1+\delta_2=1,\ s_2\leqq\delta_1\leqq s_1,\ 1-s_1\leqq\delta_2\leqq 1-s_2$$

である。故に $\alpha_1\leqq\alpha_2$ なら

$$k'=\frac{1}{A^2}\Big[(1-s_1)(k_2'+s_1-\theta)k_1^2+s_1(k_1'+1-s_1+\theta)k_2^2$$
$$+2\{\delta_1(\rho_1+\rho_2-1)+(\delta_2-\delta_1)\rho_2+s_1(s_1-\theta)\}k_1k_2\Big]$$

となる。ただし

$$\rho_i=\frac{\omega}{k_i}\cdot\frac{dk_i}{d\omega},\ (i=1,\ 2)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3.14)$$

である。故に (3.3), (3.4) より $\alpha_1\leqq\alpha_2$, $\rho_1+\rho_2\geqq 1$ なら, $k'>0$ となる。従って (3.11) が成立する。全く同様にして $\alpha_1\geqq\alpha_2$ の場合も $\rho_1+\rho_2\geqq 1$ なら (3.11) が成立することが証明できる。故に

$k_2\geqq k_1$ ………………………… (3.15)

或は　$\rho_1+\rho_2\geqq 1$ …………………… (3.16)

であれば (3.11) より z, k は ω の単調増加関数である。また

$$\lim_{\omega\to 0}k=\lim_{\omega\to 0}z=0,\qquad \lim_{\omega\to\infty}k=\lim_{\omega\to\infty}z=\infty$$

である。故に経済全体としても，**賃金率の資本利潤率に対する相対的上昇は，資本の労働に対する相対的増加を生ぜしめる**。またその逆も成立する。

(3.15) 或は (3.16) が成立していれば，k_i, l_i, p, ω は k の関数として一意的に定まり，y_i はとLとの関数として一意的に定まり，何れも$k\geqq 0$ $L\geqq 0$に対して非負である。即ち **(3, 15), (3, 16) の何れかが成立すれば k, L の任意の値に対して唯一つの静学的均衡が存在する**。その場合 y_1, y_2 以外の変数は L の値に無関係である。なお y_1, y_2 の値が L の値に無関係なのは$m=1$ の場合のみであり，increasing return のときは L の増加（ただし k=const とする）は 1 人当りの生産量 y_1, y_2 を増加させ，decreasing return のときは y_1, y_2 を減少させる。

① 恒等的に$k_1=k_2$となることはないものと仮定する。

4　静学的均衡　II

本節では k 以外の 1 つ変数と Lとが独立変数と考えられる場合についての均衡を考察する。まず前節からして，ω, L (或はk_1, Lまたはk_2, L) の任意の値に対しても唯一つの均衡が存在する。

〔I〕相対価格

(3.1) の両辺をωで微分した式と (3.10) とより

$$\frac{dl_2}{d\omega}=\frac{l_1(1-s_1)z_1'-l_2s_1z_2'+\theta}{A} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.1)$$

を得る。また (2.11) より

$$f_i'=\frac{mf_i}{z_i}$$

故に

$$\frac{\log f_i}{d\omega}=\frac{f'_i}{f_i}k'_i-\frac{z_i'}{z_i}$$
$$=\frac{m}{z_i}(z'_i-1)-\frac{z_i'}{z_i}$$
$$=-\frac{m}{z_i}+(m-1)\frac{z_i'}{z_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.2)$$

故に (2.12) より

$$\frac{d\log p}{d\omega}=m\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right)+(m-1)\left(\frac{z_2'}{z_2}-\frac{z_1'}{z_1}\right)$$
$$+(m-1)\frac{1}{l_1l_2}\frac{dl_2}{d\omega}$$

(3.8) より $=m\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right)+\frac{(m-1)\theta(z_1z_2-l_1z_2z_1'\omega-l_2z_1z_2'\omega)}{Al_1l_2z_1z_2}$

(3.7), (3.10) より $=m\frac{k_2-k_1}{z_1z_2}+\frac{(m-1)\theta(z-\omega z')}{l_1l_2z_1z_2}$

故に $\frac{\omega}{z}\frac{dz}{d\omega}=\sigma$

とおけば

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{d\omega}=\frac{m(k_2-k_1)}{z_1z_2}+\frac{(m-1)\theta z(1-\sigma)}{l_1l_2z_1z_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.3)$$

故に

(イ) $m=1$ または $s_1=s_2$ のときは

$k_2\geqq k_1$ なら $\frac{dp}{d\omega}\geqq 0$

(ロ) $k_2\geqq k_1$ で $(m-1)(\sigma-1)\leqq 0$ のときは $\frac{dp}{d\omega}\geqq 0$

(ハ) $k_1\geqq k_2$ で $(m-1)(\sigma-1)\geqq 0$ のときは $\frac{dp}{d\omega}\leqq 0$

である。なお (3.10), (3.7) から

$$z'-\frac{z}{\omega}=\frac{1}{A}\left\{l_1z_2\left(z_1'-\frac{z_1}{\omega}\right)+l_2z_1\left(z_2'-\frac{z_2}{\omega}\right)\right\} \quad \cdots \quad (4.4)$$

であるから $\frac{w}{z_i}\cdot\frac{dz_i}{d\omega}=\sigma_i$ とおけば

$\sigma_i\gtreqless 1$, $(i=1,\ 2)$ に従って $\sigma\gtreqless 1$

である。以上より(イ), (ロ), (ハ)の何れかの場合には, P, L **の任意の値に対して唯一つの均衡が存在する。** また賃金率の資本利潤率に対する発対的上昇は, **(イ), (ロ)の場合は投資財に対する相対価格を上昇せしめ, (ハ)の場合は相対価格を下落せしめる。またそれらの逆も成立する。**

〔Ⅱ〕生産量

(2.8) から L をパラメーターと考えれば

$$\frac{d\log y_i}{d\omega}=\frac{m}{l_i}\frac{dl_i}{d\omega}+\frac{f'}{f_i}k_i'$$

$$=m\left(\frac{1}{l_i}\frac{dl_i}{d\omega}+\frac{z_i'-1}{z_i}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.6)$$

(3.5) から $\frac{dl_1}{d\omega}=\frac{s_1z'-\theta-l_1z_1'}{z_1}$

故に $\frac{d\log y_1}{d\omega}=m\frac{s_1z'-\theta-l_1}{l_1z_1}$ ………………………… (4.7)

もし $\sigma\geqq 1$ なら

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy}{d\omega}\geqq m\frac{s_1\frac{\omega}{z}-\theta-l_1}{l_1z_1}$$

$$=\frac{m(z_1-\omega)}{\omega z_1}=\frac{mk_1}{\omega z_1}>0$$

全く同様にして $\sigma\geqq 1$ なら

$$\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{d\omega}\geqq\frac{mk_2}{\omega z_2}>0 \quad \cdots\cdots\cdots (4.8)$$

となる。更に y_2 については (3.9) より

$$\frac{dl_2}{d\omega}=\frac{(1-s_1)z'+\theta-l_2z_2'}{z_2}$$

故にもし $k_2\geqq k_1$ であれば (3.11) より

$$\frac{dl_2}{d\omega}\geqq\frac{(1-s_1)+\theta-l_2z_2'}{z_2}$$

故に (4.6) より

$$\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{d\omega}\geqq\frac{(1-s_1)+\theta-l_2}{l_2z_2}$$

(3.9) より　$=\frac{(1-s_1)(z_2-z)+\theta k_2}{l_2z_2}$

(3.6) より　$=\frac{(1-s_1)l_1(k_2-k_1)+\theta k_2}{l_2z_2}\geqq 0$ ……… (4.9)

従って $\sigma\geqq 1$ なら y_1，L 或はy_2，L の任意の値に対して唯一つの均衡が存在する。また $k_2\geqq k_1$ のときは y_2，L について同様な命題が成立する。それらの場合，賃金率の資本利子率に対する相対的上昇は各部門の生産量を増大せしめる。

〔3〕実質国民所得

実質国民所得 y/p_2 について考えるに第2節より

$$\frac{1}{p_2}\frac{Y}{L}=\frac{\frac{K}{L}+\frac{\omega}{r}}{m(1-\eta)}\cdot\frac{r}{p_2}=\frac{k+\omega}{m}\frac{\partial F_2}{\partial K_2}$$

故に $\frac{y}{p_2}=\frac{z}{m}f_2'l_2^{m-1}L^{m-1}$ ………………………… (4.10)

故に L をパラメーターとして ω で微分すれば

$$\frac{d}{d\omega}\log\left(\frac{y}{p_2}\right)=\frac{z'}{z}+\frac{d\log f_2'}{d\omega}+(m-1)\frac{1}{l_2}\frac{dl_2}{d\omega}$$

(4.21) より　$$=\frac{z'}{z}-\frac{1}{z_2}+(m-1)\left(\frac{1}{l_2}\frac{dl_2}{d\omega}+\frac{z_2'-1}{z_2}\right) \cdots\cdots \quad (4.11)$$

故に $\sigma \geqq 1$ であれば (4.7), (4.8) と同様な計算により,

$$\frac{d}{d\omega}\log\left(\frac{y}{p_2}\right)\geqq\frac{1}{\omega}-\frac{1}{z_2}+(m-1)\frac{k_2}{\omega z_2}$$

$$=\frac{mk_2}{\omega z_2}>0$$

また $k_2 \geqq k_1$, $m \geqq 1$ であれば (4.9) と同様な計算により

$$\frac{d}{d\omega}\log\left(\frac{y}{p_2}\right)\geqq\frac{1}{z}-\frac{1}{z_2}+(m-1)\ \frac{(1-s_1)(z_2-z)+\theta k_2}{l_2 z_2{}^2}\geqq 0$$

故に (イ) $m \geqq 1$, $k_2 \geqq k_1$

(ロ) $\sigma \geqq 1$

の何れかであれば賃金率の資本利潤率に対する相対的上昇は実質国民所得を増大せしめる。

なお第1部門と第2部門との生産高の比 p_1y_1/p_2y_2 に関しては (4.6), (4.3) より

$$\frac{d}{d\omega}\log\left(\frac{p_1 y_1}{p_2 y_2}\right)=\frac{\theta z(\sigma-1)}{l_1 l_2 z_1 z_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.12)$$

を得る。さて $\frac{\omega}{k}\cdot\frac{dk}{d\omega}=\rho$ とおけば

$\rho \gtreqqless 1$ に従って $\lambda \gtreqqless 1$ ……………………… (4.13)

であるから[①], $s_1 \fallingdotseq s_2$ **のとき,** $\rho \gtreqqless 1$ **即ち資本と労働との代替の弾力性が1より大きい(等しい, 或は小さい)ときは,** ω **が増大すれば資本財生産額は消費財生産額に比して増大(不変, 或は減小)する。 また** $s_1=s_2$ **のときは両者の比は不変である。**

① $\sigma-1=\frac{\omega z'-z}{z}=\frac{\omega k'-k}{z}=\frac{k}{z}(\rho-1)$

5 比較静学的考案

第3, 4節で静学的均衡が存在することが明らかとなったが, m の変化がその均衡体系にどのような影響をあたえるかを比較静学的に考察したい。前節までの方法に従って ω が一定であるとき m が変化した場合の他の変数の変動を

考えることとする。まず (2.11) から

$$\frac{dk_i}{dm}=\frac{f_i}{f_i}+\frac{m}{n_i}\frac{dk_i}{dm}$$

(3.2) とより $\dfrac{dk_i}{dm}=-\dfrac{f_i}{f_i'}-\dfrac{n_i}{m-n_i}=-\dfrac{z_i}{m}k'_i<0$ ……… (5.1)

また明らかに

$$\frac{dz_i}{dm}=\frac{dk_i}{dm} \quad \text{……………………………………………} \quad (5.2)$$

次に (3.7), (3.5), (3.9) より

$$\frac{dz}{dm}=\frac{l_1z_2\dfrac{dz_1}{dm}+l_2z_1\dfrac{dz_2}{dm}}{A}=\frac{-z_1z_2(l_1k_1'+l_2k_2')}{mA}<0 \cdots (5.3)$$

(3.6), (5.3), (5.1) より

$$\frac{dl_2}{dm}=\frac{1}{mA}\Big[s_1(1-s_1)z(k_2'-k_1')+\theta''\{(1-s_1)k_1'+s_1k_2'\}\Big]$$

$$=\frac{1}{mA}\{s_1l_2z_2k_2'-(1-s_1)l_1z_1k_1'\} \quad \text{…………} \quad (5.4)$$

故に　$k_2'\geqq k_1'$ なら $\dfrac{dl_2}{dm}\geqq 0$ である。

(2.12), (2.11) から

$$p=\left(\frac{f_2}{z_2}\cdot\frac{z_1}{f_1}\right)\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{m-1}$$

また (5.1), (5.2) から

$$\frac{d}{dm}\log\left(\frac{f_i}{z_i}\right)=-\frac{m-1}{m}k'_i$$

(2.10) から　$\dfrac{d}{dm}\log\left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)=\dfrac{1}{l_1l_2}\dfrac{dl_2}{dm}$

故に (5.4) から

$$\frac{d\log p}{dm}=-\frac{m-1}{m}k'_i+(m-1)\frac{1}{l_1l_2}\frac{dl_2}{dm}+\log\left(\frac{l_2}{l_1}\right)$$

$$=\frac{(m-1)\theta^{(\omega)}}{mAl_1l_2}\Big\{l_1k_1'+l_2k_2'\Big\}+\log\left(\frac{l_2}{l_1}\right) \cdots\cdots \quad (5.5)$$

故に　(イ)　$m\geqq 1$,　$l_2\geqq l_1$ なら $\dfrac{dp}{dm}\geqq 0$

(ロ)　$m\leqq 1$,　$l_2\leqq l_1$ なら $\dfrac{dp}{dm}\geqq 0$

である。特に $m=1$ 或は $s_1=s_2$ なら $l_1 \gtreqless l_2$ に従って $\frac{dp}{dm} \gtreqless 0$ である。

終りに (2.8) から

$$\frac{d\log y_i}{dm}=-k_i'+\frac{m}{l_i}\frac{dl_i}{dm}+\log l_i L \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.6)$$

故に

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\log y_1}{dm}&=-\frac{s_1 z_2}{Al_1}(l_1k_1'+l_2k_2')+\log L_1\\ \frac{d\log y_2}{dm}&=-\frac{(1-s_1)z_1}{Al_2}(l_1k_1'+l_2k_2')+\log L_2{}^{①}\end{aligned}\right\}\cdots \quad (5.7)$$

また (4.10), (2.11) から

$$\frac{y}{p_2}=\frac{f_2}{z_2}l_2^{m-1}zL^{m-1}$$

故に

$$\frac{d}{dm}\log\left(\frac{y}{p_2}\right)=-\frac{m-1}{m}k_2'+\frac{m-1}{l_2}\frac{dk_2}{dm}+\frac{1}{z}\frac{dz}{dm}+\log L$$

$$=-\frac{z_1\{m(1-s_1)z+\theta\omega\}}{mAl_2z}(l_1k_1'+l_2k_2')+\log L^{②}\cdots \quad (5.8)$$

以上 (5.1) ～ (5.8) から次のような結論を得る。賃金率の資本利潤率に対する比率が一定であるとき，m**が増大すれば即ち両部門の同次生産関数が decreasing return から increasing return の方向へ移動すれば，**

(イ) 各部門の（従って全経済の）資本は労働に対して相対的に減少する。

(ロ) $k_2'>k_1'$ **即ち資本の** ω **に対する変動率が投資財部門に比して消費財部門の方が大であれば，消費財部門の労働量は資本財部門に比して相対的に増大する。**

(ハ) 変化前の経済が constant return　increasing return であって，消費財の方がより多くの労働量を吸収していれば，投資財の相対価格は上昇し，変化後の経済が constant return か decreasing return であって，投資財部門の方より多くの労働量を吸収していれば，投資財の相対価格は下落する。

以上はmの変化の影響であるが，s_1，s_2，η，或は s_1-s_2 についても同様に考察することができる。結論だけをのべれば，$\omega=$一定のとき，s_1，s_2，η の増大はz_1，z_2，z，l_2，y_2を減少せしめ，l_1，y_1を増大せしめる。また$m \gtreqless 1$に従ってpを減少，不変，増大せしめ，$mz \gtreqless z_1$に従ってy/p_2を減少，不変，増大せしめる。

① $\lim_{\omega\to\infty} n_i=0$, $\lim_{\omega\to\infty}\frac{z_1}{z_2}$＝有限$\neq 0$であれば $\omega\to\infty$ のとき (5.7) は $\log L_i$ に収束する。従ってωが大きければ，$dy/dm>0$である。

② $\lim_{\omega\to\infty} n_i=0$, $\lim_{\omega\to\infty}\frac{z_1}{z_2}$＝有限$\neq 0$であれば$\omega\to\infty$のとき (5.8) は$\log L$に収束する。

従ってωが大きければ$\frac{d}{dm}(yp_2)>0$である。

6 動学的均衡

本節では (2.14) の均衡径路について考える。(2.14), (2, 15), (2.8) より

$$\frac{\dot{k}}{k}=\phi(k)e^{\lambda(m-1)t}-(\lambda+\mu) \quad\cdots\cdots (6.1)$$

ただし $\phi(k)=\frac{l_1^m f_1}{k}L_0^{m-1}$ $\cdots\cdots$ (6.2)

である。L_0は$t=0'$におけるLの値を示す。なお以後$\lambda\neq 0$と仮定する。さて

$$\begin{aligned}\frac{d\log\phi(k)}{d\omega}&=\left(\frac{m_1}{l_1}\frac{dl_1}{d\omega}+\frac{f_1'}{f_1}k_1'\right)-\frac{1}{k}k'\\&=m\frac{s_1z'-\theta-l_1}{l_1z_1}-\frac{1}{k}k'\\&=m\left\{\frac{s_1z'-\theta-l_1}{l_1z_1}-\frac{1}{k}k'\right\}+(m-1)\frac{1}{k}k'\\&=-m\left\{\frac{(s_1-\theta)\omega k'}{l_1z_1k}+\frac{s_1(k-k_1)+\theta k_1}{l_1z_1{}^2}\right\}\\&\quad+(m-1)\frac{1}{k}k' \quad\cdots\cdots (6.3)\end{aligned}$$

となる。或は

$$\frac{1}{\phi(k)}\frac{d\phi(k)}{d\omega}=-m\left\{\frac{(s_1-\theta)(\rho-1)}{l_1z_1}+\frac{1}{z_1}\right\}+(m-1)\frac{\rho}{\omega}\cdots(6.4)$$

故に (6.3), (6.4), (4.13) より

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(イ)} & m\leqq 1,\ k_2\geqq k_1\\ \text{(ロ)} & m\leqq 1,\ \sigma\geqq 1\end{array}\right\}\cdots\cdots (6.5)$$

の何れかが成立すれば，$\frac{d\phi(k)}{d\omega}<0$ である。

次に$k_2\geqq k_1$なら (3.8) より

$$l_1 \geqq \frac{s_1 z_2 - \theta\omega}{(1-s_1)z_1 + s_1 z_2} \geqq s_1 - (s_1 - s_2)\frac{(1-\eta)\omega}{z_2}$$
$$\geqq s_1 - (s_1 - s_2) = s_2$$

故に (3.5), (2.11) より $k_2 \geqq k_1$ なら

$$\phi(k) = l_1{}^{m-1}\left(\frac{s_1 z - \theta\omega}{z_1}\right)\frac{f_1}{k}L_0^{m-1}$$
$$= l_1{}^{m-1}(s_1 z - \theta\omega)\frac{f_1'}{mk}L_0^{m-1}$$
$$\geqq s_2{}^{m-1}\left\{s_1 k + (s - \vartheta)\omega\right\}\frac{f'}{mk}L_0^{m-1}$$
$$\geqq \frac{s_2{}^{m-1} s_1 f_1'}{m}L_0^{m-1}$$

故に　$\lim_{k\to 0}\phi(k) = \lim_{\omega\to 0}\phi(k) = \infty$ ……………………………… (6.6)

また　$k_2 \geqq k_1$ なら (3.6) より $k \geqq k_1$ だから

$$\phi(k) \leqq L_0^m \frac{f_1}{k} \leqq L_0^m \frac{f_1}{k_1}$$

故に仮定(Ⅰ)から$f_1(k_1)$は凸関数だから

$$\lim_{k\to\infty}\phi(k) = 0 \quad \text{……………………………………} \quad (6.7)$$

次に

$$\Phi(t) = \phi(k)e^{\lambda(m-1)t}$$

とおけば (6.1) から

$$\frac{d}{dt}\log\Phi(t) = \frac{1}{\Phi(k)}\cdot\frac{d\phi}{d\omega}\cdot\frac{k}{k'}\{\Phi(t) - (\lambda+\mu)\} + \lambda(m-1) \cdots (6.8)$$

$m=1$の場合は (6.5) の条件が成立すれば $\lim_{t\to\infty} k$ は単調にある有限値に収束することは明らかである①。(宇沢〔7〕, Drandakis〕9〕) $m \fallingdotseq 1$ の場合は

(イ)　$\lim_{t\to\infty} k =$ 有限値 $\fallingdotseq 0$ ではあり得ない。何となれば

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda(m-1)} = \begin{cases} 0, & m<1 \\ \infty, & m>1 \end{cases}$$

であるから (6.1) から

$$\lim_{t\to\infty}\dot{k} = \begin{cases} -(\lambda+\mu), & m<1 \\ \infty, & m>1 \end{cases} \quad \text{……………………} \quad (6.9)$$

となるからである。

(ロ) $z_2 \geqq z_1$なら，$m<1$では$\lim_{t\to\infty} k=\infty$ではあり得ない。また$m>1$では$\lim_{t\to\infty} k=0$ではあり得ない。理由は (6.7), (6.6)から(6.9) が成立するからである。

(ハ) $\lim_{t\to\infty} k$は振動しない。何となれば (6.8) より $\dot{k}=0$のときは $m<1$ なら $\dot{\Phi}(t)<0$である。従って$\dot{k}$の符号はtと共に正より負に移り，kはその点で極大となり，決して極小となることがないからである，また$m>1$の場合も同様にして$\dot{k}=0$ のときは必ず極小であるからである。

以上より　$\lim_{t\to\infty} k=\begin{cases} 0, & m<1 \\ \infty, & m>1 \end{cases}$

である。従って，k**が有限値**（$\fallingdotseq 0$）**に収束するものは**$m=1$**または**$\lambda=0$**の場合に限る。** $m \fallingdotseq 1$，($\lambda \fallingdotseq 0$)**のときは** $k_2 \geqq k_1$ **であっても経済は累積的に縮少または拡大する。**

① $\lambda=0$のときも同様に $\lim_{k\leftarrow\infty} k$ は単調にある有限値（$\fallingdotseq 0$）に収束する。

補論　CES生産関数について

二部門分割モデルについての生産関数の拡大は以上の通りであるが，最後にCES生産関数について考えて見たい。ＣＥＳ生産関数は Arrow, Chenery, Minhas, Solow の４人によって提唱されたものであるが[①]，統計的な研究の結果として，y_iと$u=\partial F_i/\partial L_i$ との間に[②]

$$\log y_i=a_i+b_i\log u,\quad (a_i,\ b_i\text{はconst}.\ b_i>0) \cdots\cdots\cdots\cdots (7.1)$$

なる関係が成立するという仮定，即ちy_iのuに対する生産弾力性が一定であるという仮定と，生産関数が一次同次式であるという仮定とから CES 生産関数

$$y_i=(\beta_i k_i^{-\delta i}+\gamma_i)^{-\frac{1}{\delta i}} \cdots\cdots\cdots\cdots (7.2)$$

ただし　$\beta_i=\text{const},\ \gamma_i=\left(\frac{1}{a_i}\right)^{\frac{1}{\delta i}},\quad \delta_i=\frac{1}{b_i}-1$

が導かれている。そしてそれがconstant-elasticity—of—substitution である理由は，生産関数の１次同次性が仮定されているため，b_iが資本と労働との代替弾力性 $\rho_i=\frac{\omega}{b_i}\ \frac{dk_i}{d\omega}$ に等しくなるからである。しかしながら生産関数の非一次同次性を仮定すると $b_i=\rho_i$ は成立せず，y_iの生産弾力性一定という仮

定と，資本と労働との代替弾力性一定という仮定とは異なった意味を持つこととなる。以下それを示す。ただし i 部門だけの問題である故に，y_i，k_i，ρ_i，a_i，b_i 等はその添文字を落して y，k，ρ，a，b 等にて表わすおととする。

(イ) 生産弾力性を $\frac{u}{y}\frac{dy}{du}=\rho_y$ とこくとき，先づ $\rho_y=\rho$ であれば $m=1$ か，$f(k)=Ak$，($A=$const) かである。また逆も成立する。何となれば，

$$\rho=\frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{y}\frac{\frac{dy}{dk}}{\frac{d}{dk}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)}=\frac{f'(mf-kf')}{f\{(m-1)f'-kf''\}} \cdots\cdots\cdots\cdots (7.3)$$

また (3.2) から

$$\rho=\frac{\omega}{k}\frac{dk}{d\omega}=\frac{f'(mf-kf')}{k\{(m-1)f'^2-ff''\}} \cdots\cdots\cdots\cdots (7.4)$$

であるから $\rho_y=\rho$ であれば

$$(m-1)f'(f-kf')=0$$

$f'\fallingdotseq 0$ であるから，$m=1$ か，$f=Ak$，($A=$const) かとなる。逆が成立することは明らかである。

なお $f(k)=Ak$ は本論第２節の仮定〔Ⅰ〕を満足しないから，仮定〔Ⅰ〕のもとでは $\rho_y=\rho$ の必要十分な条件は $m=1$ である。

(ロ) $\rho_y=$const$=b$，($b>0$) の場合の非一次同次生産関数は $b\fallingdotseq 1$ なら

$$f(k)=(\beta k^{-m\delta}+\gamma)^{-\frac{1}{\delta}} \cdots\cdots\cdots\cdots (7.5)$$

ただし　β，γ は const であり $\delta=\frac{1}{b}-1$

であり，$b=1$ なら

$$f(k)=Ck^{m-D},\quad (C,\ D=\text{const.}) \cdots\cdots\cdots (7,6)$$

である。何となれば $\rho_y=b$ より

$$y=au^b,\quad (a=\text{const.})$$

(2.8) より故に ③

$$\overset{m-1}{L}f=a(mf-kf')^b L^{(m-1)b}$$

$$\text{故に}\quad D=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{b}}L^{\frac{(1-b)(m-1)}{b}}$$

とおき変形すれば

$$\frac{dk}{k}=\frac{df}{f(m-Df^\delta)} \cdots\cdots\cdots\cdots (7.7)$$

故に $\delta=\frac{1}{b}-1\neq 0$，即ち $b\neq 1$ なら (7.7) より

$$k^{m\delta}=\frac{Bf^{\delta}}{m-Df^{\delta}},\quad (B=\mathrm{const})$$

これより

$$f=(\beta k^{-m\delta}+\gamma)^{-\frac{1}{\delta}}$$

ただし　$\beta=\frac{B}{m},\ \gamma=\frac{D}{m}$

を得る。なお $b=1$ の場合は (7.7) から直ちに (7.6) を得る。

(ハ)　$\rho=\mathrm{const}=b$，（$b>0$）の場合の非一次同次生産関数は $b\neq 1$ なら

$$f(k)=(\beta k^{-\delta}+\gamma)^{-\frac{m}{\delta}} \quad\cdots\cdots (7.8)$$

ただし，β，γ はconstであり $\delta=\frac{1}{b}-1$

であり，$b=1$ なら，

$$f(k)=Ck^{\frac{m}{1+D}},\quad (C,\ D=\mathrm{const}) \quad\cdots\cdots (7.9)$$

である。何となれば $\rho=b$ より，

$k=a\omega^{b}$，　$(a=\mathrm{const})$

(2.11) より

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{b}}k^{\frac{1}{b}}=\omega=m\frac{f}{f'}-k$$

故に　$D=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$

とおけば

$$\frac{df}{mf}=\frac{dk}{k(1+Dk^{\delta})} \quad\cdots\cdots (7.10)$$

故に　$\delta=\frac{1}{b}-1\neq 0$ 即ち $b\neq 1$ なら

$$f^{\frac{1}{m}}=Bk(1+Dk^{\delta})^{-\frac{1}{\delta}},\quad (B=\mathrm{const})$$

故に　$B^{-\delta}=\beta,\ \beta^{-\delta}D=\gamma$ とおけば

$$f=(\beta k^{-\delta}+\gamma)^{-\frac{m}{\delta}}$$

また $b=1$ なら (7.10) から直ちに (7.9) を得る。

以上(イ)，(ロ)，(ハ)より $m\neq 1$ のときはCES生産関数を一意的に定義することはできない。文字通りのCES生産関数の拡張は（7.8）であるが，前記4人の論文の主旨にそっての拡張は（7.5）である④。なお（7.6)，(7.9）は Cobb-Douglas型の生産関数であり，$m\neq 1$ の場合も $b=1$ であれば拡張された関数は Cobb-Douglas 型の生産関数となる⑤。

① Arrow, K.J., Chenery, H.B., Minhas, B.S., and Solow, R.M., "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics*, 43 (1961), 225—250.

② 以下記号は前節までのものに合わしてあるから前掲論文の記号とは異る。

③ 今は i 部門のみを考えているから，i 部門での労働者数のみが問題である故 $l_i=1$ とおく。従って $y=L^{m-1}f(k)$ となる。

④ (7.5) のとさは生産関数は

$$Y=\frac{K^mL^m}{(\beta L^{m\delta}+rK^{m\delta})^{\frac{1}{\delta}}}$$

となり，(7.8) のときは

$$Y=\frac{K^mL^n}{(\beta L^{\delta}+rK^{\delta})^{\frac{m}{\delta}}}$$

となる。

⑤ $\rho_y=\rho$（≒0）の必要十分条件は $m=1$ か $\rho=1$ が成立することである。そのことは(イ)で $f(k)=Ak$ なら $\rho=1$ となることと，(ハ)で（7.9）が成立するとさは $m=1$ または $\rho=1$ となることより証明できる。