////// 研究ノート //////

要素増大的な生産関数について

木　藤　正　典

1. はしがき

最近の十数年間に急速に発展した新古典派成長論は，均衡的成長の問題であり，成長の原動力は労働力の増大と技術進歩とである。技術進歩に関してはまず，ヒックス或はハロッドの提唱した中立的技術進歩の場合が取り上げられた。しかしながら，現実の経済が，その様に限られた形の技術進歩のみを行うとは考え難く，当然の事として，非中立的な技術進歩が新古典派モデルに登場するに至った。即ち，Kennedy （〔5〕）やその他の学者によつてinnovation possibility function が導入され，Drandakis-Phelps（〔2〕），Samuelson（〔6〕），天野（〔1〕） 等によつて中立でない技術進歩の場合での均衡的経済成長理論が展開された。その場合に基礎となる生産関数が要素増大的な生産関数（Factor Augumenting Production Function ， 以下ＦＡ生産関数と畧記する）である。

ＦＡ生産関数は技術進歩による生産関数のshift を資本と労働との生産力の増加を示すパラメーターで表わす生産関数である。ＦＡ生産関数は，その特殊な場合として，ヒックス或はハロッドの中立の場合を含んでいる事等よりして，技術進歩理論には極めて適切な生産関数である。しかしながら，innovation possibility function と結合され，更に技術進歩速度最大の条件のもとで定まる均衡成長においては，生産関数そのものは初期値を定めるには有用であつても，それ以上の意味は失なはれるのである。即ち理論の重点は生産関数からinnovation possibility function に移るのである。以下それらの事項に連関してＦＡ生産関数の性質およびその均衡的成長経路との関係について考えたい。

2　FA生産関数

資本量をK，労働量をLとし，それらから生産される1つの生産物の量をY，時間をtにて表わし，生産関数を

$$Y=F\ (K,\ L,\ t) \quad \cdots\cdots (2.1)$$

にて表わす。なほ以後関数はすべて必要な回数まで連続的微分可能であるとする。YはK，Lに関してm次同次関数（m＞o）であると仮定し，YのKまたはLに関する偏導関数をY_KまたはY_Lにて表わすこととする。以下においてK，L，Y，Y_K，Y_Lはすべて正であると仮定する。更に第2次偏導関数Y_{KK}は負であると仮定する。また$\dot{Y}$等は$\frac{dY}{dt}$等を，$\hat{Y}$等はYの増加率$\frac{1}{Y}\cdot\frac{dY}{dt}$等を示す。次に若干の量を定義する。

$$R=\frac{Yt}{Y} \quad \text{（技術進歩率）}$$
$$a=\frac{Y_K k}{Y} \quad \text{（資本生産弾力性）}$$
$$b=\frac{Y_L L}{Y} \quad \text{（労働生産弾力性）}$$
$$k=\frac{K}{L} \quad \text{（資本労働比率）}$$
$$\omega=\frac{Y_L}{Y_K} \quad \text{（限界生産力比率）}$$
$$\rho=\left(\frac{dk}{d\omega}\cdot\frac{\omega}{k}\right)_{t=\text{一定}} \quad \text{（要素代替弾力性）}$$

以上より

$$a+b=m \quad \cdots\cdots (2.2)$$
$$\frac{b}{a}=\frac{\omega}{k} \quad \cdots\cdots (2.3)$$
$$Y=R+a\hat{K}+b\hat{L} \quad \cdots\cdots (2.4)$$

等の関係式が成立する。

（2.1）はKとLのm次同次関数であるから

$F\ (k,\ 1,\ t)=f\ (k,\ t)$

とおけば

$$Y=L^m F\ (k,\ 1,\ t)=L^m f\ (k,\ t)$$

となり，容易に知れる様にa，b，ω，ρはk，tのみの関数となる。（〔4〕）逆にそれらの何れかがk，tのみの関数としてあたえられれば生産関数（2.1）が確定する。（〔4〕）

次に (2.1)がＦＡ生産関数であるときは

$$Y = F\ (AK,\ BL) \cdots\cdots\cdots\cdots (2.5)$$

で表わされる。ただしA，Bは何れも t の関数であつて正であるとする。
そのときは

$$R = a\widehat{A} + b\widehat{B} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.6)$$

なる関係が成立する。　また

$$h = \frac{AK}{BL}\quad (\text{実質資本労働比率})$$

とおき

$$F\ (h,\ 1) = g\ (h)$$

とおけばFの同次性より

$$Y = (BL)^{m} g\ (h)$$

となり，a ，b ，ρ は h のみの関数となる。（〔3〕）
逆にある t の関数 $C(t)$ に対して，a が $C(t)k$ のみの関数としてあたえられれば生産関数（2.5）が定まる。（〔3〕）　同様に ρ に関して次の定理が成立する。

〔定理1〕　ρ が a のみの関数であれば（ρ ＝一定の場合も含む）。a は $C(t)k$ のみの関数となる（ただし a ＝一定を含む）。ここに $C(t)$ はある t の関数である。従って ρ は $C(t)k$ のみの関数となり，それに対応する生産関数はＦＡ生産関数である。逆にＦＡ生産関数に対しては ρ は a のみの関数である。

〔証明〕 (イ)前半の証明

まず ρ ＝一定なら生産関数はＣＥＳ生産関数でありＦＡ生産関数である。故に a は $C(t)k$ のみの関数となる。（$\rho = 1$ ならCobb-Douglas 生産関数であり a ＝一定である。）　以下 $\rho \neq$ 一定とする。

さて

$$\frac{\omega}{k} = v$$

とおけば(2.3) より

$$v = \frac{m - a}{a}$$

従つて

$$a = \frac{m}{v + 1}$$

故に ρ は v のみの関数でもある。故に

$$\frac{1}{\rho} = H(v)$$

とおけばρ の定義式より

$$\frac{d\,\omega}{d\,k}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\omega}{k}=\mathrm{H}(v)\cdot v \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.7)$$

然るに$\omega=k\,v$ より

$$\frac{d\,\omega}{d\,k}=v+k\frac{d\,v}{d\,k}$$

故に (2.7) とより

$$k\,\frac{d\,v}{d\,k}=v\{\mathrm{H}(v)-1\}$$

然るにρ ≠ 一定より　H(v)－1 ≠ 0 であるからこれを解いて (C(t)は積分定数)

$$\log \mathrm{C}(t)\,k=\int\frac{d\,v}{v\;\{\mathrm{H}(v)-1\}}=\theta(v)\cdots\cdots \quad (2.8)$$

$\theta'(v)\neq 0$ だから

$$v=\theta^{-1}\{\log C(t)\,k\}$$

従つて　$a=a\{\mathrm{C}(t)\,k\}$

(ロ) 後半の証明

逆は明らかに成立する。何となればＦＡ生産関数ではρ はhのみの関数であるが, (2.5) に対しては

$$a=\frac{g'(h)}{g(h)}k \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.9)$$

となる。故に$\frac{d\,a}{d\,h}\neq 0$ であればhはaの関数として定まる。従ってPはa の関数となる。次に$\frac{d\,a}{d\,k}=0$ ならa＝一定だから (2.5) はCobb-Douglas 生産関数となりρ＝1 である。

〔定理２〕 あるt の関数C (t) に対して, ρ がC (t) k のみの関数であれば (ρ＝一定を含む) , それに対応する生産関数の中にはＦＡ生産関数が存在する。

〔証明〕 $\frac{1}{\rho}=\mathrm{J}\,(\mathrm{C}(t)\,k)$

とおく。従つて

$$\frac{d\,\omega}{\omega}=\frac{\mathrm{J}\,(\mathrm{C}(t)\,k)}{k}d\,k$$

故に

$$\omega=\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}(t)}\exp\left[\int\frac{\mathrm{J}\,(\mathrm{C}(t)\,k)}{k}d\,k\right]\cdots\cdots \quad (2.10)$$

ただし積分定数は$\mathrm{C}_1/\mathrm{C}(t)$の型にとるものとする。なほ$\mathrm{C}_1$は定数である。故に

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}(t)\,k}\exp\left[\int\frac{\mathrm{J}\,(\mathrm{C}(t)\,k)}{k}d\,k\right]$$

故にC (t) $k=h$ とおけば

$$v=\frac{C_1}{C(t)}\exp\left[\int\frac{J(h)}{h}\,dh\right]$$

故にvはC (t) kのみの関数となる。従つてaもC$(t)k$のみの関数となり生産関数はFA生産関数である。

以上よりa又はρがC$(t)k$のみの関数である事が，同次FA生産関数である事の必要十分条件である事が知られる。次に2，3の具体例を示す。

(1)　$a=\psi\{C(t)k\}$の場合（ただし$\frac{da}{dk}\neq 0$）

C$(t)k=h$とおけば(2.9)より

$$\frac{g'(h)}{g(h)}h=\psi(h)$$

故に

$$g(h)=C(t)\exp\left[\int\frac{\psi(h)}{h}dh\right]$$

であれば。例えば

$$\psi(t)=\frac{h+D}{Eh+H}\ （ただしEH\neq 0,\ H-DE\neq 0）\cdots\cdots\quad(2.11)$$

のときは

$$g(h)=C(t)\,h^{\frac{D}{H}}(Eh+H)^{\frac{1}{E}-\frac{D}{H}}$$

である。従つて

$$F=(AK)^{\frac{D}{H}}(BL)^{m-\frac{1}{E}}(EAK+HBL)^{\frac{1}{E}-\frac{D}{H}}\cdots\cdots\quad(2.12)$$

EH＝0のときは

$g(h)=G(t)\,h^{D}e^{h}$,（E＝0，H＝1）故に$F=(AK)^{D}$，$(BL)^{m-D}e^{\frac{AK}{BL}}$

或は　$g(h)=G(t)\,h^{\frac{1}{E}-\frac{D}{Eh}}e$，（H＝0）故に$F=(AK)^{\frac{1}{E}}(BL)^{m-\frac{1}{E}}e^{-\frac{DBL}{EAK}}$

となる。また

$$\psi(h)=\frac{D}{Eh+H}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2.13)$$

なら

$$g(h)=G(t)\left\{\frac{h}{Eh+H}\right\}^{\frac{D}{H}}$$

従つて

$$F=(AK)^{\frac{D}{H}}(BL)^{m-\frac{D}{H}}\left(E\frac{AK}{BL}+H\right)^{-\frac{D}{H}}\cdots\cdots\quad(2.14)$$

となる。

(2)　$\rho=\rho(a)$の場合（ただし$\rho\neq 1$）

$$v=\frac{m-a}{a},\ \frac{1}{\rho}H(v),\ C(t)k=h$$

とおけば(2.8)より

$$\log h=\int\frac{dv}{v\{H(v)-1\}}=\theta(v)$$

例えば

$$\rho = ca\ , \quad (c = \text{定数}) \cdots\cdots \quad (2.15)$$

であれば

$$H(v) = \frac{1}{ca} = \frac{v+1}{cm}$$

故に $\theta(v) = \int \frac{m\,d\,v}{v\,(v+1-cm)} = \ell og\left(\frac{v}{v+1-cm}\right)^{\frac{cm}{1-cm}}$

故に $\frac{v}{v+1-\frac{1}{\alpha}} = h^{\alpha-1}$

ただし $\alpha = \frac{1}{cm}$

(イ) $\alpha \neq 1$ の場合は

$$a = \frac{m}{v+1} = \frac{m\ (1-h^{\alpha-1})}{1-\frac{1}{\alpha}h^{\alpha-1}}$$

となり，(1)より

$$g(h) = G(t)\ \left(h - \frac{1}{\alpha}h^{\alpha}\right)^{m}$$

となり

$$B = G(t)^{\frac{1}{m}}\ ,\ A = B \cdot C(t)$$

とおけば

$$F\ (AK,\ BL) = (AK)^{m}\ \left\{1 - \frac{1}{\alpha}\ \left(\frac{BL}{AK}\right)^{1-\alpha}\right\}^{m} \cdots\cdots \quad (2.16)$$

となる。

(ロ) $\alpha = 1$ の場合は

$$\theta(v) = \int \frac{d\ v}{v^{2}} = \frac{-1}{v} = \log h$$

より $g(h) = G(t)h^{m}\ (\ell og h - 1)^{m}$

となり $F = (AK)^{m}\ \ \ell og\left\{\left(\frac{AK}{BL}\right) - 1\right\}^{m}$

となる。

(3) $\frac{1}{\rho} = J\{C(t)k\}$ の場合

(2.10) より $\omega = \frac{c_1}{c(t)}\exp\ \left[\int \frac{J(h)}{h}dh\ \right]$

例えば $\rho = \frac{h+D}{Eh+H} \cdots\cdots \quad (2.17)$

のときは $\omega = \frac{c_1}{c(t)h^{\frac{H}{D}}}\ (h+D)^{E-\frac{H}{D}}$

となる。 $\frac{H}{D} = U$，$E = V$ とおけば U，V の特別な値に対しては次の結果を得る。（〔4〕）

$U = 1$ ，$V = 0$ なら $F = PK^{\alpha}L^{\beta}\ \left(1 + Q\frac{K}{L}\right)^{\beta}$

$U = 1$ ，$V = 2$ なら $F = PK^{\alpha}L^{\beta}\ \left(1 + Q\frac{K}{L}\right)^{-\alpha}$

$U=0$, $V=1$ なら　$F=PK^{\alpha}L^{\beta}\left(1+Q\frac{L}{K}\right)^{\alpha}$

$U=2$, $V=1$ なら　$F=PK^{\alpha}L^{\beta}\left(1+Q\frac{L}{K}\right)^{-\beta}$

ただし，何れの場合もP，Qはtの関数であり，α，βは何れも定数であつて

$$0<\alpha<m\ ,\ 0<\beta<m\ ,\ \alpha+\beta=m$$

である。なほ(2.18)の場合は，何れもaはhの1次分数式となり(〔4〕)，(2.11)又は(2.13)　(U＝1，V＝2の場合のみ)にて表わされる。これ等の場合は何れもρもaもhの1次分数式であるが，(2)の(2.15)の場合は起り得ない。

3　均衡的成長径路

本節では，生産関数が(2.5)であたえられる場合の均衡的成長径路について考える。まず(2.5)より

$$\hat{a}=\frac{(m-a)(1-\rho)}{m\rho}(\hat{B}-\hat{A}-\hat{k})\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1)$$

なる関係が得られる。さて動学的均衡条件としてDrandakis - Phelps(〔2〕)に従つて次の仮定を設ける。なほλ，μ，ν，sはすべて非負の定数である。

〔仮定Ⅰ〕　$\dot{L}=\lambda L$

〔仮定Ⅱ〕　$\dot{K}=se^{-\nu t}Y-\mu K$,　$(0<s<1\ ,\ 0\leqq\mu<1)$

〔仮定Ⅲ〕　$m<1$のときは$\rho>0$ ①

〔仮定Ⅳ〕　$B=\varphi(\hat{A}),\ \varphi(0)>0\ ,\ \varphi'(\hat{A})<0,\ \varphi''(\hat{A})<0$

〔仮定Ⅴ〕　a＝一定のとき　$R=a\hat{A}+b\hat{B}$が最大となる様に$\hat{A}$．$\hat{B}$が変動する。

〔仮定Ⅰ〕，〔仮定Ⅱ〕はL，Kの時間的変化を示すものであり，$se^{-\nu t}$はtと

---

① (2.5)より

$$\rho=\frac{\{mg-g'h\}g'}{\{(m+1)g'-mgg''\}h}$$

を得る。然るにm≧1であれば

$$Y_K>0,\ Y_L>0,\ Y_{KK}<0$$

より右辺の分子分母は共に正となり，$\rho>0$となる。結局仮定Ⅲより常に$\rho>0$

0となる。

共に減少する貯蓄性向を示す。〔仮定Ⅲ〕は当然の事であり，〔仮定Ⅳ〕は innovation possibility function の仮定である。また〔仮定Ⅴ〕は技術進歩速度最大の仮定である。

以上の〔仮定Ⅰ〕－〔仮定Ⅴ〕のもとでは次の様な a ,$\hat{k}$ に関する連立微分方程式が得られる。(〔3〕参照)

$$\dot{a}=-\frac{a(m-a)(1-\rho)}{m\rho}\{G(a)-K\}$$

$$\dot{\hat{K}}=(\hat{K}+\mu)(1-a)\{H(a)-\hat{K}\}$$

ただし
$$\left.\begin{aligned}G(a)&=\hat{B}-\hat{A}+\lambda\\ H(a)&=\frac{a\hat{A}+(m-a)\hat{B}-\nu+(m-a)\lambda}{1-a}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.3)$$

である。なほ $\hat{A}$ と a との間には

$$\varphi(\hat{A})=-\frac{a}{m-a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.4)$$

なる関係があり，これより $\hat{A}$ は a の関数として定まる。従つて〔仮定Ⅳ〕より $\hat{B}$ も a の関数となる。従つて

$$G'(a)<0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.5)$$

$$H'(a)=\frac{H(a)-G(a)}{1-a}=\frac{\hat{A}+(m-1)(\hat{B}+\lambda)-\nu}{(1-a)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.6)$$

なる関係が成立する。$\dot{a}=0$,$\dot{\hat{K}}=0$ となる成長径路を均衡成長径路と呼ぶこととし，それに対する a ,$\hat{K}$ の値を a^* ,$\hat{K}^*$ とすれば (3.2) より

$$\hat{K}^*=G(a^*)=H(a^*)$$

である。(以下均衡値にはすべて * を付す。)

さて (3.4) より $\hat{A}$ は a の関数として定まるが,それは生産関数とは無関係である。従つて (3.3) より

$$K^*=G(a^*)=H(a^*)$$

として定まる a^* , K^* の値は (2.5) とは無関係である。従つて (2.4) より

$$\left.\begin{aligned}\hat{Y}^*&=\hat{K}^*+\nu\\ \hat{Y}_K^*&=a^*-\hat{K}^*+\hat{Y}^*=\nu\\ \hat{Y}^*&=\hat{b}^*-\lambda+\hat{Y}^*=\hat{K}^*+\nu-\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.7)$$

となり，均衡的成長径路は (2.5) に無関係となる[②] 均衡的成長径路を定める

② ただし，それらの初期値 (t＝t。に対する) は (2.5) を満足せねばならない。

ものは$\varphi(\widehat{A})$の関数型，労働力成長率λ，資本減耗率μ，貯蓄性向減少率νである。λ，μ，νは比較的に安定した小さい値であるから，成長径路に最も大きい影響をあたえるものは$\varphi(\widehat{A})$の関数型即ちinnovation possibility functionである。従つて技術進歩のあり方が最も影響力が大きいのである。しかしながら$\varphi(\widehat{A})$のみでなく，$G(a)$或は（3.4）の逆関数$\widehat{A}=\chi(a)$をあたえても均衡的成長径路は定まる。即ち$G(a)$，$\chi(a)$も技術進歩を規定するものである。次にそれらの具体例を示す。

(1)　$\varphi(A)=g-\widehat{A}^2$, $m=1$ の場合。（g は正の定数）この場合は（3.4）より

$$\widehat{A}=\frac{a}{2(1-a)}$$

故に　$$a=\frac{2\widehat{A}}{1+2\widehat{A}}$$

を得る。また$G(a^*)=H(a^*)$より

$$\widehat{A}^*=\nu$$

を得る。故に

$$\widehat{K}^*=g+\lambda-\nu-\nu^2$$

$$\widehat{Y}_k^*=\nu\quad(=\widehat{A}^*)\quad,\widehat{Y}_L^*=g-\nu^2(=\widehat{B}^*)$$

となり，$\widehat{A}^*$，$\widehat{B}^*$はそれぞれK，L の限界生産力の均衡増加率を示す。③

(2)　$G(a)=\frac{N}{a^2}$の場合（N は正の定数）

（3.6）より

$$H'(a)-\frac{H(a)}{1-a}=-\frac{(a)}{1-a}=-\frac{N}{(1-a)a^2}$$

この微分方程式を解けば

$$H(a)=\frac{N+Ca}{(1-a)a}\quad(\text{C は任意定数})$$

故に（3.3）とより

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{B}+\lambda-\widehat{A}=\frac{1}{a^2}\\&a\widehat{A}+(m-a)(\widehat{B}+\lambda)=\frac{N}{a}+C+\nu\end{aligned}\right\}$$

③　体系が安定なときは

$$\lim_{t\to\infty}A=\widehat{A}^*=\nu$$

でなければならない。なほm＝1であれば常に

$$Y_K^*=A^*,\quad \widehat{Y}_L^*=B^*$$

となる。

故に
$$\left.\begin{aligned}\widehat{A}&=\frac{1}{m}\left(\frac{2N}{a}+C+\nu\right)-\frac{N}{a^2}\\ \widehat{B}&=\frac{1}{m}\left(\frac{2N}{a}+C+\nu\right)-\lambda\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\quad(3.8)$$

故に　$\left(\widehat{B}+\lambda-\frac{C+\nu}{m}\right)^2=\frac{4}{m^2}\left(\widehat{B}+\lambda-\widehat{A}\right)$

これより
$$\widehat{B}=\frac{m(C+\nu)+2N+\sqrt{\{m(c+\nu)+2N\}^2-4m^2N\widehat{A}}}{m^2}-\lambda$$

を得る。[4] これがinnovation possibility functionである。特にm＝1の場合は
$$\widehat{B}=2N+2\sqrt{N^2-N\widehat{A}}-\lambda$$

となり，$G(a)=H(a)$より$A^*=\nu$となる。故に (3.4) とより$\nu\neq0$なら
$$a^*=\frac{N-\sqrt{N^2-N\nu}}{\nu}$$

故に　$\widehat{K}^*=\widehat{B}^*+\lambda-\widehat{A}=2N+2\sqrt{N^2-N\nu}-\nu$

なほ$\nu^*=0$なら$a^*=\frac{1}{2}$，$K^*=4N$となる。

(3) $\widehat{A}$をaの関数としてあたえる場合。(3.6)から$G(a)$を消去すると
$$H'-\frac{m-1}{(1-a)(m-a)}H=\frac{m\widehat{A}-\nu}{(1-a)(m-a)}$$

この微分方程式を解けば
$$H=\frac{m-a}{1-a}\left\{\int\frac{m\widehat{A}-\nu}{(m-a)}da+C_1\right\}$$

今　$\frac{m\widehat{A}-\nu}{(m-a)^2}=\frac{M+N\div m}{(m-a)}-\frac{N\div m}{a^2}$　(M，Nは定数)

とおけば
$$H=\frac{Ma+N}{(1-a)a}+C_1\frac{m-a}{1-a}$$

従つて (3.6) より
$$G=\frac{N}{a^2}+C_1$$

従つて(2)と同様にして
$$\left.\begin{aligned}\widehat{A}&=\frac{1}{m}\left(\frac{2N}{a}+M+\nu\right)-\frac{N}{a^2}\\ \widehat{B}&=\frac{1}{m}\left(\frac{2N}{a}+M+\nu\right)-\lambda+C_1\end{aligned}\right\}$$

となる。

さて (3.7) の各成長率は (2.5) と無関係であるが，(3.7) のうちの$\widehat{K}^*$の値以外の値は (2.5) および仮定Ⅲ，Ⅳ，Ⅴに無関係に定まる。即ち，$\frac{Y}{K}=U$

---

④ 根号の前の符号が—のものはA＞0のとき$\frac{d\widehat{B}}{b\widehat{A}}<0$を満足しない。

とおけば　$a = Y_k/U$ より

$$\dot{a} = a\ (\widehat{Y}_k - \widehat{U})$$

また仮定IIより

$$\dot{\widehat{K}} = (K+\mu)\ (\widehat{U} - \nu)$$

従って$\dot{a} = 0$，$K = 0$ であれば

$$\widehat{Y}^*_k = \widehat{U} = \nu$$

となる。さて$a^* = 0$ は明らかだが，K の値は以上からは定まらない。その値が定まれば

$$U^* = Y^* - K^* = \nu$$

よりY^*が定まり，b の定義式と仮定 I とより

$$Y^*_L = b^* + Y^* - L^* = K^* + \nu - \lambda$$

を得る。

従ってa^*，K^*の値のみが仮定IV V に依存して定まるのである。要するに，仮定 I，II のもとで一般の生産関数 (2.1) に$\dot{a} = 0$，$\dot{\widehat{K}} = 0$ なる均衡成長径路が存在すれば，必ず資本の限界生産力の増加率と平均生産力の増加率とは等しくて一定値ν である。特に生産関数 (2.5) においては，その場合の資本の生産弾力性の値と資本の成長率とは技術関係（仮定IV，V）から規定され，よって均衡的成長率が定まる。しかしその体系の初期値は生産関数 (2.5) を満足する様に定められねばならない。

4　均衡的成長径路の安定性

前節では均衡的成長径路の成立について考えたが，本節ではその安定性について考える。a^*，K^*等の値は生産関数には関係しないが，その成長径路が安定であるか否かは，(3.2) から明らかな様に$\rho \gtrless 1$ 或は$a \gtrless 1$ に依存する。またその体系が安定な場合の均衡径路への収束速度は微分方程式 (3.3) の解に依存し，従って生産関数が直接関係することとなる。

さて (3.2) については大域的には，$\rho < 1$，$a < 1$ なら安定，$\rho < 1$，$a > 1$

の場合および$\rho>1$（この場合は必ず$a<1$である）の場合は一般には不安定である。ただし後者の場合は，特殊な場合には均衡値に収束することもあり得る。（〔2〕又は〔3〕参照）次の後者の場合を局所的に考察する。

最初に（2.5）がCES生産関数（ただし$\rho \neq 1$）である場合を考える。従つて

$$\frac{1-\rho}{\rho}=\delta$$

とおけばδは定数で$\rho \gtrless 1$に従つて$\delta \lesseqgtr 0$である。さて

$$a-a^{*}=\bar{a}\quad,\hat{K}-\hat{k}^{*}=\bar{K}$$

とおいて（3.2）の1次近似式を作れば

$$\dot{\bar{a}}=\frac{a^{*}b^{*}\delta}{m}\{G'(a^{*})\bar{a}-\bar{K}\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.1)$$

$$\dot{\bar{K}}=-(\hat{K}^{*}+\mu)(1-a^{*})\bar{K}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.2)$$

となる。この連立微分方程式の特性根は

$$\xi_1=\frac{a^{*}b^{*}\delta G'(a^{*})}{m}\quad,\xi_2=-(\hat{K}^{*}+\mu)(1-a^{*})$$

である。ここに$\xi_1 \neq \xi_2$と仮定する。故に（4.1），（4.2）の解として

$$\bar{a}=Ce^{\xi_1 t}+\frac{C_2\xi_1}{(\xi_1-\xi_2)G'(a^{*})}e^{\xi_2 t}$$

$$\bar{K}=C_2e^{\xi_2 t}$$

を得る。従つて$\xi_2>0$即ち$a^{*}>1$のときは$\bar{K}$は必ず発散し，$\xi_2<0$，$\xi_1>0$のときは$C_1=0$のときのみ$\bar{a}$，$\bar{K}$は収束する。従つて（3.5）より，$\rho>1$（このときは必ず$a^{*}<1$である）の場合は初期条件如何によつては収束することがあるが，$\rho<1$，$a^{*}>1$の場合は絶対的に不安定である⑤。

次にCES生産関数でない場合は

$$\delta=\delta(a^{*})+\delta'(a)\bar{a}+R$$

であるから（Rはaの2次以上の無限小），（4.1）の右辺でδが$\delta(a)$になるだけの差異であるから，CES生産関数の場合と全く同じ結論が成立する。

終りに$\rho=1$の場合，即ちCobb - Douglas 生産関数の場合について大域的に考えて見たい。　生産関数を

⑤　この点に関して〔Ⅲ〕P.17の末尾の記述は間違っている。

$$Y = C(t)K^{\alpha}L^{\beta} \quad , \quad C(t) = A^{\alpha}B^{\beta}$$

とすれば

$$R = C(t) = \alpha\widehat{A} + \beta\widehat{B}$$

であつて仮定VによってRを最大にする$\widehat{A}$，$\widehat{B}$は定数となる。また(3.2)は後半の式のみが有効であつて，その式より

$$\frac{dK}{(K+\mu)\ (H(\alpha)-\widehat{K})} = \beta\, dt, \quad (H(\alpha)+\mu > 0 \text{ と仮定する})$$

これより

$$\widehat{K} = \frac{C_1H(\alpha)e^{\gamma t}-\mu}{1+C_1e^{\gamma t}} \quad \cdots\cdots (4.3)$$

を得る。ただし，C_1は積分定数であつて，$K_{t=0} \lessgtr H(\alpha)$に従つて$C_1 \gtrless 0$である。また$\gamma = H(\alpha)+\mu$である。故に

$$K = C_2(1+C_3e^{-\gamma t})e^{H\mu t} \quad , \quad (C_2 > 0\ ,\ C_3 = \frac{1}{C_1})$$

を得る。従つて

$$\lim_{t\to\infty} K = \begin{cases} \infty & , H(\alpha) > 0 \\ 0 & , H(\alpha) < 0 \end{cases} \quad , \quad \lim_{t\to\infty} \widehat{K} = H(\alpha) = \widehat{K}^*$$

である。

参考文献

〔1〕 天野明弘, "Induced Bias in Technological Progrss and Economic Growth", **理論経済学**, 17No. 3 (March, 1967), 1—17

〔2〕 Drandakis, E. M and Phelps, E. S., "A Model of Induced Innovation, Growth Distribution", *Economic Journal*, 76 (1966), 823—840.

〔3〕 木藤正典, "技術進歩と非一次同次生産" **山口経済学雑誌**, 18 (1968) 191—210.

〔4〕 ———, "コブ・ダグラス生産関数の拡張" **山口経済学雑誌**, 19 (1969), 275—291.

〔5〕 Kennedy, C., "Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution", *Economic Journal*, 74 (1964), 544—547.

〔6〕 Samuelson. P. A., "A Theory of Induced Innovation along Kennedy — Weisacker Lines," *Review of Economics and Statistics*, 47 (1965), 343—356.