多項分数式計算の問題解決プロセスと
バグに関する研究

鷹岡　亮*・片山　泰彰*・星野　朋啓**

A Study on Problem Solving Process and Bug Rules for Multiple Fraction Calculation

TAKAOKA Ryo・KATAYAMA Yasuaki・HOSHINO Tomohiro
(Received June 18, 2003)

キーワード：多項分数式、問題解決プロセス、バグ、解法戦略、解法戦術、
知的学習支援システム

1．はじめに

小学校の算数において、分数計算はその習得が困難な単元の一つである。そのため、通常授業では、分数の基礎概念及び２項の分数計算に対する計算技能習得に重点がおかれ、３項以上の分数（多項分数式）計算に関しては発展学習と位置付けられることが多い。２項分数式と多項分数式の本質的な差異は、多項分数式では「どのような状況で、どの部分にどの操作を適用するか」といった、解法戦略・戦術的知識が必要となることである。

現在の分数計算習得における内容構成から学ぶ学習者は、結果的に、「計算式は前から計算する」、「全体通分で計算する」という思考パターンを形成しがちであり、解法戦略・戦術的知識を習得するのは難しいと思われる。これらの有無は、解法プロセスの効率性を左右する。一般に、問題解決においてはその効率性が求められることが多く、小学生の発達段階において、多項分数式は問題解決の効率性を学ぶ効果的な訓練事例になると思われる。このように多項分数式は有意義な学習を提供すると思われるが、上述したように授業では発展学習と位置付けられているのが現状である。このような現状の中で、多項分数式における解法戦略や解法戦術を学習するための知的学習支援システムを開発し、発展学習用ツールとして提供することは有意義であると思われる。

そこで本研究では、多項分数式の知的学習支援システムを開発するために、多項分数式計算の問題解決モデルを探求し、提案することを目的とする。

2．研究の目的

本研究の目的は、多項分数式計算の問題解決モデルを探求し、提案することである。本研究の目的を遂行するために、以下のような副目標を設定する。

(1)　多項分数式における学習者の解法プロセスを検討するために実験を行い、実験結果から次の項目を定義・抽出する。

＊山口大学教育学部附属教育実践総合センター、＊＊山口大学教育学部附属光小学校

　[1]　多項分数式の問題空間を定義する
　[2]　多項分数式における学習者のバグ（誤った操作・スキル）を抽出する

(2)　多項分数式の問題解決モデルを提案する

3．多項分数式の問題空間

3.1　多項分数式における解法の分類

問題解決における問題空間は、「状態」と「状態を遷移する規則」によって定義される。規則は知識や技能であり、規則の選択に関してメタレベルの知識やコントロールの存在も指摘されている [1]。

学習者が問題から解答を導く間には「どのようにして解いたのか」という解法過程が存在する。その解法過程において各状態に遷移するのが規則（知識）であり、渡辺らをはじめとする２項分数式に関する研究では、その知識は次のように分類されている [2,3]。

解法戦略：学習者が問題を解く上での全般的な見通し（方針）を表し、問題を解く上での解法戦術がリスト化されている。

解法戦術：分数式の計算における具体的な式変形操作を表現している知識である。項に関する操作（約分など）と式に関する操作（全体通分など）に分類される。

個別技術：解法戦術を支える数学的操作技術である。具体的に言えば、分子同士の足し算や、通分操作など。本研究では、少なくとも２項分数式の計算ができる学習者を対象とするため、個別技術については言及しないものとする。

表１：多項分数式における解法戦術

項操作	約分	分子と分母が公約数をもつ場合、その公約数で分子・分母をそれぞれ割る操作
	整数化	分子が分母の倍数（自然数の倍数）となるとき、整数に直す操作
	仮分数化	帯分数を仮分数に直す操作
	帯分数化	仮分数（帯分数の分数部分が仮分数の場合も含む）を帯分数に直す操作
特殊な操作	借り	帯分数から真分数（仮分数）を引く場合、帯分数を必要最小限の仮分数化をする操作。また、仮分数から真分数（帯分数）を引くときに仮分数を帯分数化する場合で、その帯分数の分数部分を真分数（帯分数）の引き算ができる分だけ残しておく操作も、借りに該当するものとする。
式操作	整数部分計算	帯分数同士の加減算において、２項以上の整数部分のみの演算
	同分母計算	分母が共通の場合において、２項以上の分子部分のみの演算
	部分通分	分数式を小さい数で通分可能な項を選んで、その最小公倍数に揃える操作
	全体通分	全ての項の分母を最小公倍数に揃える操作
	前２項通分	第１・２項から、２項ずつ順番に計算をしていく操作
	項順序交換	項の順序を交換する操作。(　) で２つ以上の項をくくることも含む

２項分数式における解法戦術の分類を利用し、多項分数式における解法戦術を**表１**のように分類した。

表１において、太字で書かれている「全体通分」「部分通分」「項順序交換」は特に3項以上の多項分数式で活用される解法戦術である。2項分数式で「通分」と言われる解法戦術は、多項分数式においては「部分通分」「全体通分」「前２項通分」に分類する。

「同分母計算」「整数部分計算」「部分通分」は、「全体通分」「前２項通分」などのように「どの部分に適用するか」という観点からは分類していない。２項分数式においては、これらの解法戦術は「２項間の計算」、つまり１通りの組み合わせでしか利用されない。しかし、多項分数式においては、解法戦術を利用できる項の組み合わせが増加する。条件を満たす項数や利用する組み合わせの増加により、多項分数式の問題空間が２項分数式に比べて広がることが伺える。

3.2　実験１：学習者の解法分析とバグの抽出から問題空間の検討

多項分数式では「どの部分にどの知識を適用するか」といった戦略的な観点が重要である。したがって、学習者が与えられた多項分数式をどのような構成要素で捉えているか、そして問題解決全体をどのようにコントロールしているかを明らかにする必要がある。そこで、多項分数式における問題空間を定義するための実験を行った。

[実験の目的]

多項分数式の問題空間を定義することを目的とする。ここでは、多項分数式において学習者が捉えている構成要素を抽出し、学習者が行う解法戦術を**表１**の分類と比較する。

[方法]

多項分数式問題15題を作成し、被験者110人（国公立小学校６年生）に回答してもらう、解法過程の分析とバグの抽出を行う。

[手順]

表１における解法戦術の分類を利用し、各解法戦術を利用できる多項分数式問題を15題作成した。実験対象とするのは、２項分数計算（通分含む）の学習を終えている国公立小学校６年生110人とした。問題時間は60分と設定し、解法分析を目的とすることから被験者には詳しく解法過程を記述するよう促した。

解法の分析は、以下の２点に注目した。

(1)　被験者がどの状況でどの解法戦術を利用しているのか。

(2)　被験者のバグはどのような状況で起こっているのか、また、誤り原因となった技能はどのようなものであるのか。

[結果]

被験者の解法を分析すると、**表１**の解法戦術で利用されていないものはなかったのだが、ほとんどの被験者は「全体通分」「前２項通分」を行っていた。被験者ごとに、「どのような状況でどの解法戦術が行われているか」を調査したところ、**表２**のような状況での解法戦術の利用があげられた。

表2は被験者が解法戦術を利用する際によく見られた状況である。「前２項通分」「全体通分」の利用状況は被験者によって多種多様であり、例えば「全体通分で分母の数が３桁以上となるなら前２項通分を行う」というような通分を行ったときの分母の値などにより、解法戦術を使い分けている被験者もいた。

被験者のバグの抽出には、「計算ミス」、「２項分数式でも発生するバグ」、「３項以上の多項分数式でないと発生しないバグ」に分類し、その状況や誤った知識・技術などを推測した。それらを**表３**、**表４**、**表５**にあげる。

表２：解法戦術を利用する状況

約分	・分子と分母の数に公約数が存在する (ただし、同分母計算ができる場合はしない)
整数化	・分子が分母の倍数となっている
借り	・「帯分数－仮分数（真分数）」の形で、 (帯分数の分数部分) ＜（仮分数［真分数］）となっている (ただし、引く項が帯分数で、その分数部分が仮分数（真分数）となっている場合も含む)
帯分数化	・仮分数がある
整数部分演算	・帯分数が２項以上ある
同分母演算	・同じ分母の項が２項以上ある
部分通分	・前２項通分するより、小さい数で通分可能なものがある ・分母に倍数の関係となっているものがある
前２項通分	・全体通分をすると分母の数が３桁以上 ・どのような場合でも行う
全体通分	・全体通分による分母が２桁以内 ・どのような場合でも行う
項順序交換	・同分母演算、整数部分演算、部分通分などの部分的計算を行うものがある場合で、そのままだとわかりにくい場合に行う

表３：通分・約分・帯分数化に関する代表的な計算ミス

通分 (部分通分・前２項通分・全体通分)	・分母・分子にaを掛けるところ、分子には（a±1）を掛ける ・分母・分子にaを掛けるところ、分母、もしくは分子の掛け算をしない ・分母・分子にaを掛けるところ、分子には10aを掛ける ・分母・分子にaを掛けるところ、分子には分母を掛ける ・通分後の分子の10の位が±１間違える ・通分後の分子の100の位が±１間違える ・帯分数の項で、分母・分子にaを掛けるところ、分子には整数部分を掛ける
約分	・分母・分子をaで割るところ、通分後はaを分母にしている ・分母の１の位が０のとき、０の位が抜けて１桁間違える
帯分数化	・帯分数化前の分母もしくは分子の10の位を±１間違える ・分子は正しく操作できているが、整数部分は帯分数化前と同じ ・帯分数の分数部分が仮分数で、それをさらに帯分数化するときに、帯分数化前の整数部分を帯分数化のときに、＋しなければならないが、－してしまう ・整数部分の操作を±１間違える

表４：２項以上の分数式に見られるバグの例

状　　況	バ　　グ	原　　因	解法戦術
同分母計算後の回答	約分をしない	・分子・分母の値の最大公約数が見つけられない。 ・分数式を１つの項に計算できたら、それが回答と思っている（もしくは思ってしまう）。	約分
通分後	符号が変わっている 例：(操作前) $-\frac{y}{x}$ → (操作後) $\frac{y'}{x'}$	・項の符号を見ていない（－を＋にしてしまう場合が多い）。	部分通分 前２項通分 全体通分
全体通分・前２項通分で、通分の分母が（分母×分母）よりも小さい数になる	（分母×分母）で通分する 例：(操作前) $-\frac{x}{w}+\frac{z}{y}$ → (操作後) $-\frac{x\times y}{w\times y}+\frac{z\times w}{y\times w}$	・分母と分母の最小公倍数が見つけられない。 （分母×分母が全体通分・前２項通分の最小公倍数となる場合は除く）	前２項通分 全体通分
同分母計算後の回答	分子で10の値の計算をしていない	・10の位の値を書き忘れている ・１の位の計算を先にする	同分母計算
通分前	各分母の最小公倍数の値が見つけられない	・各分母、もしくは第１・２項の分母の最小公倍数の値が３桁を超えると、通分できない	前２項通分 全体通分
仮分数化・通分を同時に行った後	仮分数化の分子の値は（分母×整数部分＋分子）となるが、（分母×整数部分）になっている 例：(操作前) $w\frac{y}{x}$ → (操作後) $\frac{w\times x}{x}$	・仮分数化と通分を同時に行ったために、計算しなくてはならない値が抜けている	仮分数化
帯分数の項がある分数式、通分後	整数部分がなくなる（仮分数化・整数部分計算ではない） 例：(操作前) $u\frac{x}{w}+v\frac{z}{y}$ → (操作後) $\frac{x'}{w'}+\frac{z'}{y'}$	・帯分数の整数部分は通分の数値計算に関わらないため、整数部分を表記し忘れている	部分通分 全体通分 前２項通分
帯分数の項の符号が「－」で、整数部分計算と同分母計算を同時に行う操作	整数部分の符号を＋で計算してしまう 例：(操作前) $u\frac{y}{x}-v\frac{z}{x}$ → (操作後) $(u+v)\frac{y-z}{x}$	・整数部分、分数部分の符号が両方とも項の符号と同じものという知識がない	整数部分計算 同分母計算
同分母計算後の解答が帯分数で、分数部分が仮分数となっているとき	帯分数化ができない	・分子の値が大きいため、帯分数化ができない （分子３桁、分子２桁以下によく見られる）	帯分数化

表5：３項以上の分数式に見られるバグの例

状　　況	バ　　グ	原　　因	解法戦術
通分後	項が１つ消えている（計算をせずに） 例：(操作前) $\frac{v}{u}+\frac{x}{w}+\frac{z}{y}$ →（操作後）$\frac{v'}{u'}+\frac{x'}{w'}$	・通分の操作に意識が集中してしまい、通分していない項を通分したと思いこんでしまう	部分通分 前２項通分 全体通分
同分母の項がある分数式	同分母の項の分母の値を全ての項の分母の値にする 例：(操作前) $\frac{v}{u}+\frac{x}{w}+\frac{z}{v}$ →（操作後）$\frac{x+y+z}{v}$	・同分母の項があることを学習者が発見したために、その値が「全ての項の分母」と思ってしまう。	同分母計算
項順序交換後	項の値は交換しても、符号も一緒に交換していない 例：(操作前) $\frac{v}{u}+\frac{x}{w}-\frac{z}{y}$ →（操作後）$\frac{z}{y}+\frac{v}{u}-\frac{x}{w}$	・符号と数値を別々に考えている	項順序交換
４項以上の多項分数式	２項ずつ（）で囲んで計算するが、（）をつける前と符号がかわっていない 例：(操作前) $\frac{t}{s}+\frac{u}{v}-\frac{x}{w}+\frac{z}{y}$ →（操作後）$(\frac{t}{s}+\frac{u}{v})-(\frac{x}{w}+\frac{z}{y})$	・符号の切り替えについての知識がない	項順序交換
第３項目以降に帯分数の項がある分数式で、１・２項の計算を終えた後	整数部分がなくなる（仮分数化・整数部分計算ではない） 例：(操作前) $\frac{v}{u}+\frac{w}{u}+x\frac{z}{y}$ →（操作後）$\frac{v+w}{u}+\frac{z}{y}$	・第１・２項の計算をした後で、その計算に関わらなかった第３項は分数部分しか見ていない	同分母計算

これらは実験問題を学習者の回答内において比較することにより、同じ条件で同じような誤りが発生していたものを「バグ」、条件が異なっていても誤りが発生する、もしくは、同じ条件でも誤りが発生しているとは限らないものを「計算ミス」（ケアレスミス）としている。**表３**は全て個別技術に関する計算ミスなので、２項以上の分数式で起こる。**表４**、**表５**の「状況」は式の状態、「バグ」はその状態で起こるバグ、「原因」は学習者の誤った知識や誤っている認識、「解法戦術」はどのような解法戦術を行った後に起こりうるバグであるかを示している。また、**表４**のバグは１項以上の分数式に起こるバグで、**表５**のバグは２項分数式では起こらない。この実験において、バグ・計算ミスの例として32種類を抽出できた。

このような被験者の解法分析とバグの抽出により、被験者が多項分数式において捉えている構成要素を抽出した（**表６**参照）。

表6：多項分数式における構成要素

(a)分数 (b)整数 (c)符号 (d)項の数
(e)分子の値 (f)分母の値 (g)項の符号 (h)真分数 (i)仮分数 (j)帯分数 (k)整数の値
(l)約分の可否 (m)帯分数化の可否 (n)仮分数化の可否 (o)整数化の可否 (p)符号の順序
(q)fが同じ項があるか (r)分母と分母が倍数関係 (s)jの分数部分 (t)jの整数部分
(u)qの項の符号 (v)rは各第何項目か (w)qは各第何項目か
(x)eの桁数 (y)fの桁数 (z)第1-2項の分母の積 (aa)各項のfの積 (ab)aaの桁数
(ac)eとfが倍数関係(ad)eとfが同じ (ae)eの素因数 (af)fの素因数 (ag)ae,afの共通素因数
(ai)eが同じ項があるか (ah)eをfで割ったときの商・余り (aj)各項の分母の共通でない素因数
(ak)第１項を除くｇを並べると左右対称である（+-+, -+-など）(al)j-iの引き算がある
(am)j-hの引き算がある (an)j-jの引き算がある (ao)i-jの引き算がある
(ap)al,am,anで(jの分数部分)＞(引く項)

表７：解法戦略の決定要因

［解法戦略］	［決定要因となる構成要素］
約分	(l),(x),(y),(ac),(ag)
整数化	(o),(x),(y),(ac),(ad)
仮分数化	(b),(j),(n),(x),(y)
借り	(al),(am),(an),(ao),(ap)
帯分数化	(b),(i),(m),(x),(y),(ah)
同分母計算	(q),(u),(w)
整数部分計算	(j),(p),(t)
部分通分	(r),(x),(y),(z),(aa),(ab),(af)
前２項通分	(x),(y),(z),(aa),(ab)
全体通分	(x),(y),(z),(aa),(ab),(af),(aj)
項順序交換	(p),(q),(r),(x),(y),(ak)

表８：使用可能な解法戦術

［解法戦術］	［考慮が予想される構成要素］
約分	(a),(e),(f),(h),(i),(j),(l),(x),(y),(ac),(ae),(af),(ag)
整数化	(a),(e),(f),(i),(o),(x),(y),(ac),(ad),(ae),(af),(ag),(ai)
仮分数化	(a),(b),(e),(f),(j),(k),(n),(x),(y)
借り	(a),(b),(e),(f),(g),(h),(i),(k),(m),(n),(p),(x),(y),(al),(am),(an),(ao),(ap)
帯分数化	(a),(e),(f),(i),(j),(m),(x),(y),(ac),(af),(ai)
整数部分計算	(a),(b),(c),(d),(g),(j),(k),(p),(t)
同分母演算	(a),(c),(d),(e),(f),(g),(h),(i),(j),(p),(q),(u),(w),(x),(y)
部分通分	(a),(b),(c),(d),(e),(f),(g),(h),(i),(j),(k),(p),(q),(r),(u),(v),(w),(x),(y),(af),(aj)
前２項通分	(a),(b),(c),(d),(e),(h),(i),(j),(k),(p),(x),(y),(z),(aa),(ab),(af),(aj)
全体通分	(a),(b),(c),(d),(e),(f),(g),(h),(i),(j),(k),(p),(x),(y),(z),(aa)
項順序交換	(a),(b),(c),(d),(e),(f),(g),(h),(i),(j),(k),(p),(q),(r),(x),(y),(ak)

表６に示した構成要素は5段階に表記し、上にいくほど抽象的、下にいくほど具体的な構成要素となる。実験前に仮定した構成要素は (a) ～(d)の抽象的なものであったが、実験後は(e)～(ap)のより具体的な構成要素を見つけることができた。

また、この構成要素によって分数式に使用可能な解法戦略・戦術が決まってくる。その対応を**表７**、**表８**に示す。**表７**は解法戦略の決定要因となる構成要素を表している。これは解法戦略を決定するときに、分数式のどの部分に着目しているか、つまり解法戦略を決定するための着眼点と言える。**表８**は解法戦略が決定されたあとに解法戦術の並びを決定する際に用いられる構成要素を表している。

分数式の問題空間は、**表６**に示す構成要素、**表７**、**表８**の構成要素に対応した解法戦略・戦術により定義することが可能である。

3.3　実験２：実験１で抽出した構成要素の妥当性検証

[目的]

実験１で抽出した構成要素が、妥当なものであるかどうかを検証することを目的とする。

[方法]

実験１の分析から、被験者ごとに解法・バグが見られる状況をまとめ、それと同じ状況（構成要素）をもつ多項分数式問題を作成し、実験１のデータと比較する。同じ状況で同じ解法・バグが見られるのであれば、実験１により抽出された構成要素が妥当であると考えられる。

[手順]

実験１における各被験者の解法・バグをもとに、同じ解法戦術が使用できる、同じバグが見られると思われる多項分数式問題を作成する。多項分数式問題は26題作成し、その問題のうち被験者の解法データに対応した５題を選択し、その問題に対する被験者の解法・バグの調査を行う。

[結果]

実験１で仮定した被験者の解法・バグが、実験２で同じ状況において見られることが確認できた。ここでは、３被験者の回答を例示する。

例１：被験者Ａの場合

データ：(1)　同分母の分数が隣接していたら同分母計算を行う。

(2)　(1)以外の場合は全体通分を行う。

（実験２における解答）

$$\frac{5}{3}-\frac{4}{3}+\frac{3}{13}-\frac{2}{13}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{13} \quad \text{———} \quad \boxed{\text{同分母計算}}$$
$$=1\frac{13}{39}+\frac{3}{39}$$
$$=1\frac{16}{39}$$

$$\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$$
$$=\frac{35}{42}+\frac{30}{42}+\frac{7}{42}-\frac{6}{42} \quad \text{———} \quad \boxed{\text{全体通分}}$$
$$=\frac{66}{42}$$
$$=\frac{11}{7}$$

例２：被験者Bの場合

データ：(1)　それぞれの分母の最小公倍数が2桁以内なら全体通分を行う。

(2)　(1)以外（分母の最小公倍数が3桁以上）の場合は前2項通分を行う。

（実験２における解答）

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}-\frac{5}{11}$$
$$=\frac{44}{88}+\frac{66}{88}+\frac{77}{88}-\frac{40}{88}$$ ―― 全体通分
$$=1\frac{147}{88}$$

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{11}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$$
$$=\frac{22}{110}+\frac{20}{110}+\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$$ ―― 前２項通分
$$=1\frac{42}{110}+\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$$
$$=1\frac{42}{110}+\frac{66}{110}-\frac{1}{5}$$
$$=1\frac{108}{110}-\frac{1}{5}$$
$$=1\frac{108}{110}-\frac{22}{110}$$
$$=1\frac{86}{110}$$
$$=1\frac{43}{55}$$

例３：被験者Cの場合

データ：(1)　分数式が４項以上（整数を含めず）の場合、第１・２項、第３・４項…と、２項ずつ選んで部分通分を行う

(2)　(1)以外の場合は前２項通分を行う。

（実験２における解答）

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}-\frac{5}{11}$$
$$=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{77}{88}-\frac{40}{88}$$ ―― 部分通分
$$=\frac{5}{4}+\frac{37}{88}$$
$$=\frac{110}{88}+\frac{37}{88}$$
$$=\frac{147}{88}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{3}{2}+1\frac{4}{8}$$
$$=\frac{2}{18}+\frac{27}{18}+1\frac{4}{8}$$ ―― 前２項通分
$$=\frac{29}{18}+1\frac{4}{8}$$
$$=\frac{116}{72}+1\frac{36}{72}$$
$$=1\frac{152}{72}$$
$$=1\frac{19}{9}$$
$$=3\frac{1}{9}$$

例１、例２、例３のように、実験1での解法被験者のデータを比較すると、その仮定のもとで実験２において同じ傾向が確認できた。

この実験２から、実験１で抽出した構成要素の存在を確認することができた。また、他にも構成要素が存在すると思われるが、本研究においての「構成要素」は実験１、実験２によって抽出・検証された**表６**で扱った項目に限定する。

４．多項分数式の問題空間と解法モデル

これらの２つの実験から学習者の問題空間、解法プロセスを考察し、**図１**の解法モデルを作成した。

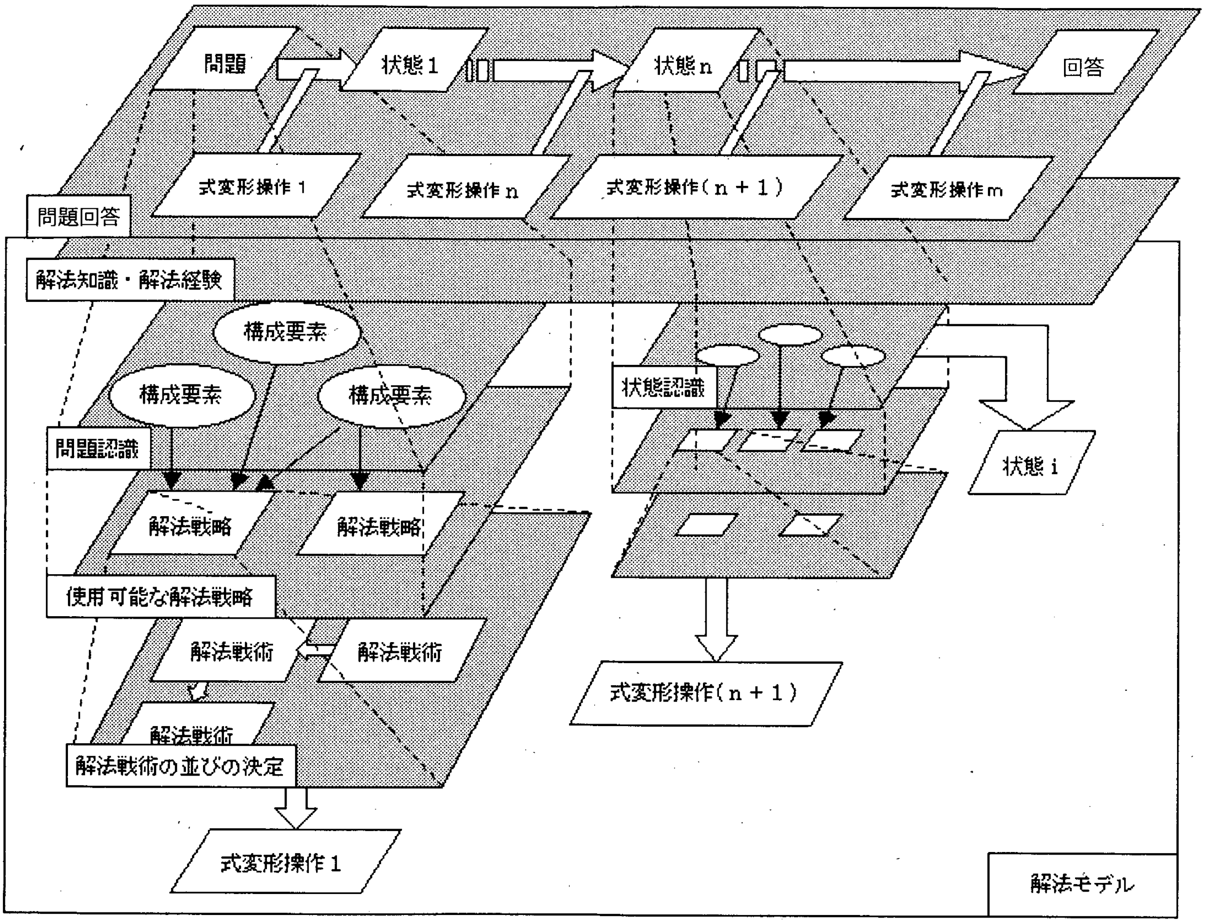

図１：多項分数式の解法モデル

図１は学習者の問題解決時に、実際に行う行動と、頭の中で行う作業をモデル化したものである。また、この解法モデルにコントロールが働く状況を**図２**で示す［1］。

まず、最上部の「問題回答」は、学習者が問題解決をしていることを視覚的に確認できる部分である。「問題」が与えられた時に、「式変形操作」を行って「状態」へと変化する。式変形操作ｎ（１≦ｎ≦ｍ）によって変化した分数式の状態を「状態ｎ」で表すとすると、「問題」は「状態０」、「回答」は「状態ｍ」となる。問題（状態０）に対する式変形操作によって状態の構造とｍの数値は変化する。

次の問題回答例を例題として説明する。問題解答例１と２は、その解法過程が異なるの

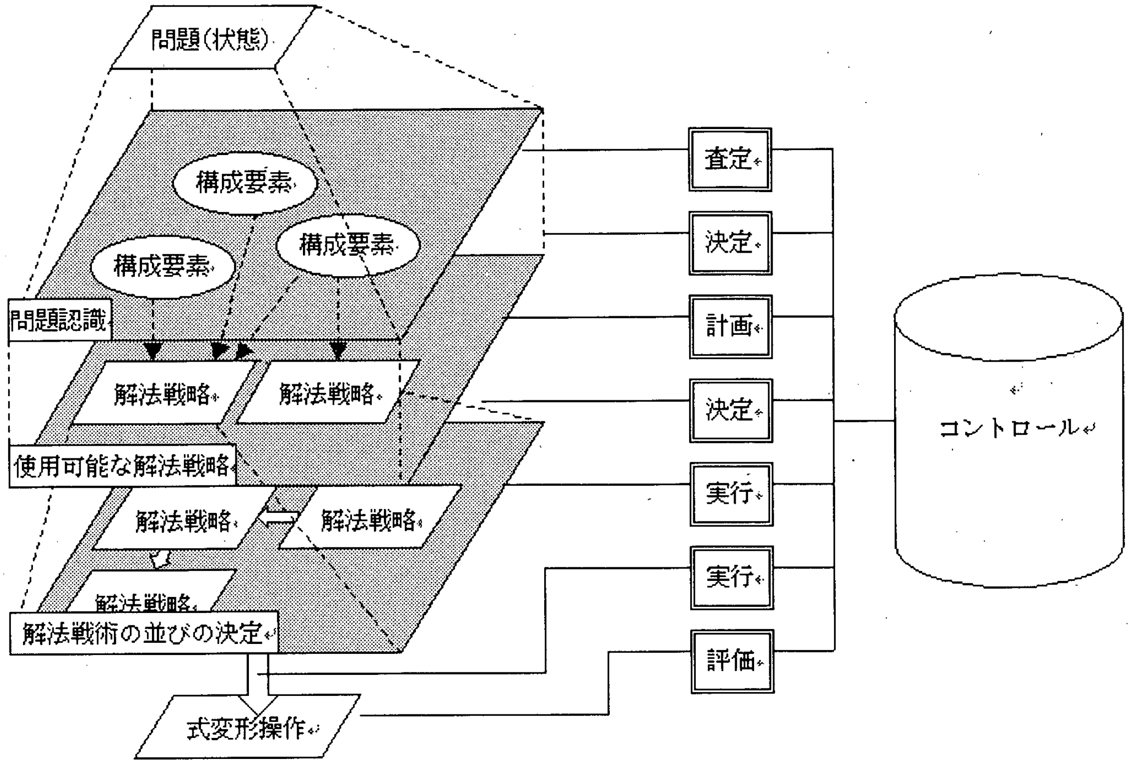

図２：解法モデルとコントロールの関係

問題回答例		問題回答例
$\frac{3}{46}+\frac{1}{4}+\frac{43}{46}+\frac{2}{4}$	←問題（状態０）→	$\frac{3}{46}+\frac{1}{4}+\frac{43}{46}+\frac{2}{4}$
$=\frac{6}{92}+\frac{23}{92}+\frac{86}{92}+\frac{46}{92}$	←　状態１　→	$=\left(\frac{3}{46}+\frac{43}{46}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)$
$=\frac{161}{92}$	←　状態２　→	$=1+\frac{3}{4}$
$=\frac{7}{4}$	←回答（状態３）→	$=\frac{7}{4}$

で問題−解答間の状態もそれぞれ異なっている。問題回答例１では全体通分、問題回答例２では同分母計算の解法戦略が用いられている。また、問題回答例１の状態3で、学習者が帯分数化の式変形操作を行えば状態３ではなく、その次の状態４が回答となる。

問題−式変形操作間のプロセスを表現しているのが解法モデルである。まず、学習者は問題（状態）を解法知識（分数に関する理解度）や解法経験（分数計算の経験）をもとに「問題認識」する。問題認識では、学習者が問題の構成要素を抽出する（コントロール：査定)。構成要素は「分数式がどんなものによって構成されているか」を表す部分で、具体的には**表６**の(a)〜(ak)である。「問題の特徴的な部分をどれだけ捉えられるか」という面が解法経験や解法知識において異なるため、構成要素の抽出も学習者によって異なってくる。また、それは解法戦術の選出、解法戦略の決定に大きく関わってくる。

構成要素の抽出に対応して（コントロール：決定)、学習者はその問題に使用可能な解

法戦略を取捨選択する（コントロール：計画)。これは「その問題に使うことができる解法戦略」ではなく「学習者がその問題に使うことができると判断した解法戦略」である。解法知識や解法経験によって抽出される構成要素は異なるため、学習者が使用可能と判断した解法戦略も異なる。また、学習者が構成要素を抽出しても、その解法戦略を使うことができることに気付かない場合も考えられる。これも「学習者がその解法戦略を知っているか」、「解法戦略を使うために必要な構成要素を知っているか」などの解法知識・解法経験の有無によって異なってくる。

「使用可能な解法戦略」から解法戦略を決定した後（コントロール：決定)、具体的にどのような解法戦術をどの順序で利用するかを考え（コントロール：計画)、「解法戦術の並びの決定」を行う（コントロール：決定)。この決定要因となる構成要素が、問題の特徴ともいえる部分で、数学（算数）に慣れている問題回答者は意識的・無意識的にこれを抽出している。逆に、慣れていない本研究で対象とするような学習者は、これらの問題の特徴を抽出していない、もしくは抽出してもうまく利用できない場合が多いと考えられる。解法戦術の並びが決まると具体的に式変形操作へと移る（コントロール：実行)。また、式変形操作の最中に、その解法が問題に適したものであったのかを振り返る場合もある(コントロール：評価)

この問題－式変形操作のプロセスは、解法過程の「状態」にもあてはまる。コントロール「査定」により、解法戦略の建て直しが必要と判断した場合は、解法戦略を再決定して、式変形操作i（ $1 \leqq i < n$ ）へと戻る。また、新たに必要な解法戦略はなく、最初の「問題」で決定した解法戦略の解法戦術の並びがこのまま実行できるならば、新たに使用可能な解法戦術を抽出せず、式変形操作（n+1）を実行する。解法戦略の解法戦術を全て実行して、「査定」により新たに解法戦術、解法戦略の抽出が必要であると判断した場合は構成要素の抽出により解法戦術、解法戦略があげられ、式変形操作（n+1）を実行へと移る。

実験１の被験者で最も多かったのが「どんな問題でも全体通分を行う」（例えば問題回答例１）であった。さらに、これらの学習者の多くが「約分を行う場合は分数式の項が１つになった後」、つまり最後に約分を行い解答としている。これは解法戦略レベルでの「約分」ではなく、解法戦術レベルの「約分」である。

これら被験者の問題解決を、解法モデルを通して説明する。この被験者は、作成した15題において全て全体通分を行っていた。解法知識として「約分は分数式の項が１つになってから」、解法戦術は「全体通分」を知っていると思われる。問題認識の部分では、その経験に基づいて構成要素(af)(aj)、つまり全体通分に必要な構成要素を主に抽出する。当然、構成要素の抽出により使用可能な解法戦術は「全体通分」のみあげられ、コントロール「計画」は行われることなく全体通分を解法戦略としてコントロール「決定」が働く。そして式変形操作へコントロール「実行」が働く。コントロール「評価」が働いた学習者は、間違った分母で通分してしまった場合、それに気付いて再度全体通分の実行を行い、分母の値となる各分母の最小公倍数を探す。コントロール「評価」が働かない学習者は、間違った分母でもそのまま通分後の同分母計算を行う（正しい分母で通分できた場合はコントロール「評価」の必要がない)。同分母計算により分数の項が１つになったら、解法経験・解法知識により「約分」ができるか否かの状態認識を行う。状態認識によって抽出された構成要素により約分ができるならば、使用可能な解法戦術は「約分」となる。新たに解法戦略を決定する必要はないので、コントロール「計画」、「決定」は働かず、そのまま式変

形操作を実行する。そして最後約分を行って、これを回答とする。

5. おわりに

本稿では、多項分数式計算の問題解決モデルを提案するために、実験から多項分数式の問題空間を定義することを試み、次に多項分数式における学習者に特有のバグ（誤った操作・スキル）を抽出した。さらに、これらの結果と文献［1］を参考に多項分数式の解法モデルを提案した。

提案した解法モデルは、２つの実験結果から提案しているが、今後、その妥当性と信頼性を高めていく必要がある。また、複数の解法が存在する問題解法において、学習者の意識は正しい回答を求めることである。したがって、回答が誤っている場合には、提示される正しい解法を自分自身の解法として受入れることは容易であるが、回答は正しいが解法に冗長性がみられたり、より効率的な解法が考えられる場合に、それらの解法を受入れて次の問題解決にいかすことは簡単なことではないと思われる。そこでは、学習者の解法に対する認知的負荷を調整するモデルが必要であり、このモデルの構築は多項分数式の戦略的・戦術的側面の育成を目指した知的学習支援システムを開発する際に重要な課題である。

【謝辞】

本研究を進めるにあたり、横浜市立美しヶ丘小学校、宇部市立川上小学校、山口大学教育学部附属光小学校にご協力頂きました。ここに感謝致します。また、本研究の一部は、平成14年度山口大学教育学部研究支援経費の援助を受け、実施しています。

【参考・引用文献】

［1］Alan H. Schoenfeld：“MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING”, ACADEMIC PRESS, INC.（1985）

［2］鷹岡　亮，岡本敏雄：“分数計算のための相互作用型学習環境の構築”，教育システム情報学会誌第20回全国大会講演論文集，pp.161-164　(1995)

［3］渡辺健次，岡崎泰久，只木進一，近藤弘樹：“分数計算を指導する知的CAIシステムの実現”，電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J77-A, No.3, pp.518-529(1994)