数学的な考え方が結びつく授業づくり

ー統合的・発展的に考える学びの実現に向けてー

田中　詩織[＊1]・足立　直之[＊2]・泉池　耕平

Creating classes that connect mathematical ideas:
Aiming for integrated and developmental learning

TANAKA Shiori[＊1], ADACHI Naoyuki[＊2], IZUCHI Kouhei

（Received October 21, 2024）

キーワード：数学的な考え方、見方・考え方、統合的・発展的

はじめに

数学は、定義や定理等を駆使しながら新たな知を創造する教科であると考える[1)]。その積み重ねにより体系的、系統的な数学の世界が学習者の中に広がっていく。しかし、このことは容易ではない。例えば「四角形ＡＢＣＤの対角が等しいならば平行四辺形であることを示せ」と言われれば、何を示すのかという目的地ははっきりしているが、そこまでの道のりは一見、不鮮明で全く見通しのないものだからである。答えにたどり着くかもわからないままに、粘り強く考えたり、じっくりと事柄を眺めたりすることは、子どもにとって案外難しい。だから、誰かが切り開いた道のりを、正しい順序でなぞっていくこと、もっといえば手順化して暗記することは、一定の子どもからすると、ある意味効率が良く合理的であるという解釈になる。とはいえ、単に「移項をすると符号が変わる」や「三平方の定理は $a^2+b^2=c^2$ である」といったように暗記をすることと、その意味を追求しようとするのでは子どもの学びは大きく異なっている。目的地に向けて道を切り開こうとする過程で働いている思考が、子どもの中に数学の世界を創り上げているからである。そして、この繰り返しにより、子どもの中にある数学の世界は体系化され、磨かれていく。だから、子どもが自ら考え、自ら数学を構築しようとすることが授業における理想的な学びの姿である。しかし、そもそも「数学的に考える」ということそれ自体や、その中で働くであろう「数学的な考え方」とはいったい何か、について知らなければ、教師の役割と手だてを明確にはできないと考え、研究主題を設定した。

１.「見方・考え方」の重要性

情報機器やグローバル化の急速な進展によって「変化の激しい社会」と言われている昨今においては、情報や知識はなんでもすぐに手に入る時代である。だから、大量の知識や情報をもっていることそれ自体よりも、流動的に発生する問題をどのように捉え、解決を図るのかという普遍的な能力が重要である。例えば、情報を適切に取捨選択したり、組み合わせたりして、納得解を見出すことや、多面的に物事を捉え、新たな価値を生み出そうとすること等が普遍的な能力である。そしてこの普遍的な能力に「見方・考え方」は関係していると考える。「見方」とは「AをBとして見る」つまり「どんなふうに見ているのか」に対し、「考え方」とは「どんな風に考えているか」ということである[2)]。つまり、ある問題に直面したとき、様々な「見方・考え方」が自己にあれば、どんな立場で対象を眺めるか、どの側面から考え進めようか、という思考の幅を広げてくれることになる。このことは、「見方・考え方」が上述した普遍的な能力を部分的に支える存在であることを意味している。「見方・考え方」を多様な他者と共有、協力、協働しながら創造的な活

＊１ 山口県立下関中等教育学校（令和５年度 山口大学大学院教育学研究科教職実践高度化専攻教職実践開発コース）
＊２ 山口市立大殿中学校（前 山口大学大学院教育学研究科）

動を行うことが人間らしさであり豊かさである。数学科においても広い意味での「見方・考え方」を身につける教科として捉えておく。

２．研究の目的と方法

本研究の目的は、「数学的な考え方」とは何かについて具体的に考察すること、および他者と考えを共有しながらよりよく学ぶために有効な考え方や手立てを探ることである。主に理論研究と実践研究の２つの側面から研究を進めていく。まず、「数学的な考え方」が何を指すのかについて、先行研究や文献をもとに本稿での扱いを考察する。そしてそれらをもとに、実践研究を行い、さまざまな子どもがいる学級集団の中でそれぞれがどのように「数学的な考え方」を働かせているかについて考察する。これらの考察をもとに、現時点で有効であろうと考えられる授業づくりにおける指導の方法や、実践にあたって必要な考え方等をまとめ、提案する。

３．理論研究

「数学的な見方•考え方」は、教師が数学を学ばせるうえで、子どもに内面化させたい考えの持ち方である。以下、片桐（1988）と松原（1990）の「数学的な見方・考え方」に理論を参考にするとともに、中学校学習指導要領（平成29年度告示）解説数学編（現行の学習指導要領）で示されている「数学的な見方・考え方」を整理し、さらに「統合的・発展的」に考えるとは何かについて述べることとする。

３－１　片桐重男（1998）の「数学的な見方・考え方」

片桐は、著書『名著復刻　数学的な考え方の具体化　数学的な考え方・態度とその指導』の中で、「数学的な見方・考え方」を表１のように示している[3)]。

片桐は著書の中で、「数学的活動は、数学的内容についての数学的方法を用いての研究であることからも、２面を考えるのが適当」[4)]として、「数学の方法に関係した考え方」と「数学の内容に関係した考え方」の２つに分類して示している。後者の「数学の内容に関係した考え方」は、数学の内容に共通して用いられる考え（アイデア）が示されている。しかし、「数学的な考え方」を宣言的なものではなく、より汎用性の高い手続き的なものとして幅広く捉えるために、本稿では特に「数学の方法に関係した考え方」に限定して考察することにした。

表１　片桐重男の示した「数学的な考え方」

数学の方法に関係した考え方	数学の内容に関係した考え方
①帰納的な考え方	①単位の考え
②類推的な考え方	②表現の考え
③演繹的な考え方	③操作の考え
④統合的な考え方	④アルゴリズムの考え
⑤発展的な考え方	⑤概括的把握の考え
⑥抽象化の考え方	⑥基本的性質の考え
⑦単純化の考え方	⑦関数的な考え
⑧一般化の考え方	⑧式についての考え
⑨特殊化の考え方	
⑩記号化の考え方	

「数学の方法に関係した考え方」の詳細については、本文の記載をもとに次頁の表２にまとめて示す。

まず、「数学の方法に関係した考え方」について着目したことは、５つの「○○『的』な考え方」と５つの「○○『化』の考え方」という言葉の違いである。国語辞典では、「…的」とは「…の性質をもつ。」と記されている。同様に、「…化」とは、「〈作用が加わって、形・性質などが〉そのようなものになること。また、そうすること。」と記されている[5)]。このことから、「○○『的』な考え方」は、考え方そのものの性質を表しているのに対し、「○○『化』の考え方」とは、性質や状態を変えるために働く考え方（プロセス）であると解釈できる。だから、片桐の示した「①帰納的な考え方」「②類推的な考え方」「③演繹的な考え方」「④統合的な考え方」「⑤発展的な考え方」は、考え方そのものの性質や特徴をあらわす言葉であり、「⑥抽象化の考え方」「⑦単純化の考え方」「⑧一般化の考え方」「⑨特殊化の考え方」「⑩記号化の考え方」は、その状態にすることを目的とした考え方であるとわかる。つまり、５つの「○○『的』な考え方」は根源的であり、５つの「○○『化』の考え方」は手段的である。

表２　片桐重男の示した数学の方法に関係する数学的な考え方の種類

①帰納的な考え方	一般的ルール、性質などを見出して、これをもとにして、当面の問題を解決しようとする時に用いられる考え方。
②類推的な考え方	ある事柄Ａについて、その性質または法則を知りたい、しかしそれが分からないという時、Ａと似よりの既知の事柄Ａ´を思い出し（Ａ´については性質または法則Ｐ´が成り立っているとする）、そこでＡについてもＰ´と同様な性質またはルールＰ´が成り立つのではないか、というように思考を進めていこうとする考え方。
③演繹的な考え方	以下のア、イのいずれか、あるいは両方が用いられる。 ア　解析的な考え方：求めるものが得られたとしたら、どんなことが成り立たなくてはならないかといった考えの進め方をしようということ。 イ　総合的な考え方：与えられた条件からいかなることがいえるか、いかなることが成り立つかという方向で思考を進めていこうとすること。
④統合的な考え方	多くの事柄を個々バラバラにしておかないで、より広い観点から、それらの本質的な共通性を抽象し、これによって同じものとしてまとめていこうとする考え方 <u>統合Ⅰ型</u>（集合による統合） 　統合の一つのタイプはある事柄（概念や原理法則、さらには理論、考え方などいろいろあろう）があるとき、これをより広い、より高い観点からみて、それらに共通な本質を見出し、これによってまとめていこうとするもの。 <u>統合Ⅱ型</u>（包括的統合） 　これまでのものを見直すことによって、既に得られているＳ１やＳ２がそれと同様にして得られたＳ３の特別な場合としてまとめられないかと考えること。 <u>統合Ⅲ型</u>（拡張による統合） 　条件を少し変えて包括的なものとする。これをもとにしてより一般的な、より新しい物を発見していこうとする考え方
⑤発展的な考え方	統合したことをさらに広い範囲に用いていこうとしたり、一つの結果が得られても、さらによりよい方法で求めたり、これを基にして、より一般的な、より新しいものを発見していこうとするのが発展的な考え方。 <u>発展Ⅰ型</u>（条件変更による発展） 　条件の一部をほかに置き換えてみる、または条件をゆるめる。あるいは、問題の場面をかえてみる。 <u>発展Ⅱ型</u>（観点変更による発展） 　思考の観点をかえてみる、思考の観点をかえてみることによって、問題の答えがただ１つだけあるという固定的な考えにとらわれず、自分の力によっていろいろなアプローチの仕方ができる。
⑥抽象化の考え方	ア　一つまたはいくつかの性質をひきだそうとする、抽象しようとする考え方と、それと裏表の関係にある捨象しようとする考え方。 イ　抽象化した性質をもった新しいものを求めて、抽象化した性質を使用してみるという具体化する考え方。 ウ　条件や性質が数学的な定義や原理法則の条件を満たしているような理想的な場合を考える考え方。 エ　多くの条件の中からいくつかの条件を抽出して、これを規定したり、曖昧な条件を明確にしようとする考え方。
⑦単純化の考え方	いくつも条件があって、それらが何々であるかは分かっているが、それらのすべての条件を考慮しなければならない時、いくつかの条件を一時無視して、簡単な基本的な場合に直して考えてみようとする考え方。
⑧一般化の考え方	問題を解決するために、そこに見られる一般性を見出したり、問題の解決をもとにして、この問題を含む集合全体で成り立つ一般性を求めていくという考え方。
⑨特殊化の考え方	一般化とは逆に、ある事象の集合に関する考察から、それに含まれるそれより小さい集合、またはその中の一つの事象について考えること。
⑩記号化の考え方	ア　記号に表していこうとするとともに､記号化されたものをよんでいこうとする考え方（形式的に表現しそれに基づいて思考をすすめていこうとする考え方 イ　数量化したり図形化したりして、取り扱いにくいものを容易に取り扱おうとする考え方。

例えば、$(x+1)^2+5(x+1)+6=0$ という二次方程式を解くためには、⑴すべてを展開し、整理する考えと、⑵ $a^2+5a+6=0$ と同じ構造だとして、同じ方法で解決しようとする考えがある。⑴の場合も⑵の場合も、既習の学習内容として扱うことができれば解決できるという見通しのもとになされる。ここには、既習のものと構造を同じにすれば既知の方法で解決できるという、方法を類推する「②類推的な考え方」が働いている。しかし、⑵の場合では $a^2+5a+6=0$ と同じ構造だからと言って、$(x+1)^2+5(x+1)+6=0$ という式のままで因数分解を進めるには考えにくい。そのため、より考えやすくするために $x+1=A$ のように、$x+1$ を文字で置きかえ、まとまりでみることで、$A^2+5A+6=0$ とし、全く同じ形で解決することができるという発想がある。ここには、類推したことから生まれた課題を解決するために、記号化することが手段として用いられているため「⑩記号化の考え方」と説明できる。

それぞれの考え方は完全に独立したものではなく、被る所も多く存在し、互いに複雑に関わりあっているものであることが、具体的考察から分かる。また、思考過程は人によって異なるものだから、上記に示した例は、あくまでも教科書的な思考過程をたどった場合に現れるだろう考え方であることを付け加えておく。

３－２　松原元一（1990）の「数学的な見方・考え方」

松原は「数学的な見方・考え方」を「数学固有の立場から考えなくてはならない」として次のように述べている[6)]。

> 数学的にものを見、数学的に考えるとは、課題に当面しこれを体制化し構造化する思考段階において次のことがなされることである。
> 一、対象を集合として捉える。
> 二、その集合に対し、別に都合のよい数学的構造をもった第二の集合に変換する。つまり関数を設定する。ここで飛躍的な抽象がなされることが多い。
> 三、第二の集合の特性を使って解決に導く。その後でその結論を第一の集合またははじめの課題に当てはめて課題自身の具体的な言葉に直すことも多い。　　　　（下線は筆者が付け加えた）

この中には、対象を①まとまり（集合）として捉えること、②対応関係を捉えること、という２つの場合が含まれている。このことは、片桐の示した「数学の内容に関する数学的な考え方」における「⑦関数的な考え方」（何を決めれば何が決まるのかということに着目したり、変数間の対応のルールをみつけたり、用いたりしようとするという考え方）に共通しているため、やはり対応関係を捉えようとすることは数学において要となる考え方であることが分かる。

以下、松原の定義を用いて、先ほどの【例１】を考察する。

$(x+1)^2+5$（$x+1$）$+6=0$ という２次方程式を、⑵ $a^2+5a+6=0$ と同じ構造だとして、同じ方法で解決しようとする場合、集合 X は、$(x+1)^2+5$（$x+1$）$+6=0$ のような、置き換えにより簡潔になる２次方程式の集まりである。（例えば、$(x-1)^2-5$（$x-1$）$-24=0$ などもこれに含まれる。）対し、集合 Y は、$a^2+5a+6=0$ や $a^2-5a-24=0$ という既習の基本的な２次方程式の集まりである。これらの集合をつないでいるのは、構造の一致である。

$(x+1)^2+5$（$x+1$）$+6=0$ を、$A^2+5A+6=0$ という、既習の数学の問題（集合 Y）へと変換することで $A=2$、3 という解が得られる。これは集合 Y における解である。したがって、元の課題に当てはめて、$x+1=2$、3 として、真の解、$x=1$、2 を得ることができる、ということである。（図１【例１】図解）

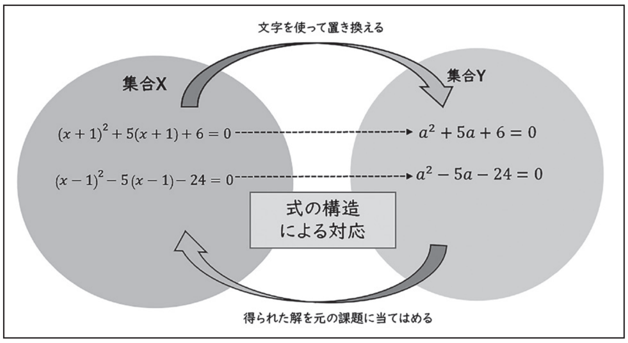

図１　【例１】図解

$(x+1)^2+5$（$x+1$）$+6=0$　のように、一見複雑に見える二次方程式が、置き換えにより既習の問題として解決できることを学習する授業では、これらの集合の橋渡しをする存在（関数）が子どもたちの中で自然と認められることが大切であると考える。その過程において、先に示したような片桐の「数学的な考え方」が必要になってくると解釈している。また、例えば、$(x+1)^2+5(x+2)+6=0$ は集合 X に属さない。（あるいは、集合 X に属するように $(x+1)^2+5(x+1)+6+5=0$ とする必要がある。）

このように、どのような式が集合Xの要素として認められるのかという境界を捉えることも重要な学習活動であると考える。

３－３　片桐と松原の「数学的な見方・考え方」の関係性

ここで、松原と片桐のそれぞれの「数学的な考え方」の関係性を明らかにする目的で、次の例を考える。「全国の中学生以下の子どものうち、無作為に１人選んだ場合、その子どもが山口県に住んでいる子どもである確率はどれぐらいだろうか？」という問題がある。仮に、友達のＡさんは山口県に住んでいて、友達のＢさんは広島県に住んでいて…というように、具体的な子どものことを、ひとりずつ考える生徒がいたとする。この場合、集合Xを「日本の中学生以下の子どもの全体」として、集合Yを「日本の都道府県の全体」と説明することができる。そして、この２つの集合をつなぐのは、日本の中学生以下の子どもの居場所である。（図２ 松原の示した「数学的な考え方」に該当しない例）この２つの集合には対応関係があるが、この場合「日本の都道府県の全体」に数学的構造は存在しないから、これ以上の進展はない。つまり、この例は、松原の示した「数学的な考え方」の定義（の特に二、三）に該当しないと解釈できる。

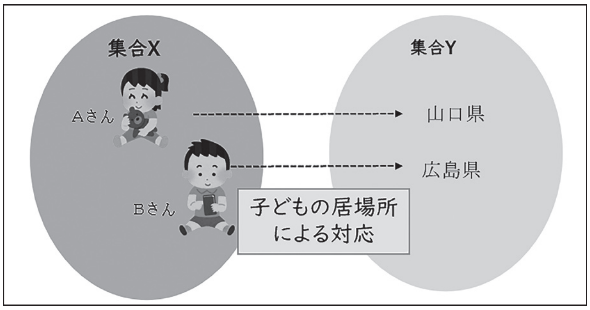

図２　松原の示した「数学的な考え方」に該当しない例

この例のように、数学的構造こそないものの、集合を捉え、対応させるという考えをもったとする。そのときの子どもの思考過程には、「数学的な考え方」が働いているといってよいのだろうか。松原の「数学的な考え方」の立場から検討すると、集合Yが数学的構造をもたない時点で「数学的な考え方」は働いていないと言える。しかし、片桐の「数学的な考え方」の立場から検討すると、まとまりとして捉えたり、対応関係を捉えたりする思考の過程に、「具体的な場合で考えてみよう」という「⑦単純化の考え方」や「⑨特殊化の考え方」が働いていると説明することができる。

このことから、片桐の「数学的な考え方」は、問題解決までの見通しが立っていないとき、その道のりを開拓するための足元を照らす存在のひとつであると解釈できる。それに対し、松原の「数学的な考え方」は、数学の問題を解決する際に成されるべき行いであり、非常に整理された枠組的な存在であると解釈できる。言い換えると、片桐の示した「数学的な考え方」は広義の「数学的な考え方」であって、試行錯誤において重要な役割を果たす存在であるのに対し、松原の「数学的な考え方」は、別の集合にある数学的性質を利用するという手法を含んでおり、より数学固有の、狭義の「数学的な考え方」である。

３－４　「統合的な考え方」と「発展的な考え方」の重要性

「統合」とは、これまで学習した内容を包括的なものとしてまとめて扱うという意味で、これまでの学習や生活経験、知識等を、何らかの基準をもとに再整理する意味合いがある。一方で「発展」とは、再整理したことをもとにする（あるいは、しない場合であっても）条件や観点を変更することで、学びを広げようとする行為である。言い換えると、「得られたことに対する学び」か「新しい何かを得ようとする学び」かの違いである。このことから「統合」と「発展」は互いに関わりあうことで、らせん状に学びが深まっていくものだと解釈できる。統合によって発展していくという解釈から、現行の学習指導要領では「統合的・発展的」とひとくくりにして扱われているものだと考える。

また、例にあるように、個々の知識を包括的に扱うためには、それらの「共通性」を見つける必要がある。この「共通」を取り出すということは、あらゆる側面から事柄を眺めることで見出されるものであり、事柄の本質的な部分を括りだすことでもある。統合と発展の過程には、ケースバイケースの数学ではなく、より洗練した抽象的な数学がある。いわば、「できあがった数学の教授」ではなく「つくる数学」として、数学を生み出す学び方である。したがって、「統合的・発展的」な学びの繰り返しによって、子どもたちの学びの質の向上が期待できると考える。

４．実践研究

４−１　確率の利用「同じクラスになる確率」を求める

⑴　実施日時：令和５年２月 14 日（水）６校時

⑵　単元名：「確率の利用」啓林館

⑶　題材名：「同じクラスになる確率」

⑷　主眼：身の回りの事象の起こりやすさを、樹形図だけでなく様々な方法で導出し、説明することができる。

確率は日常的にも聴きなじみのある数学のひとつであり、生徒の興味関心が高まりやすい単元である。中学校の数学では、１年次に、実際に試行や観察を繰り返し、統計的な事象の起こりやすさを明らかにする統計的な確率を学習している。２年次には、場合の数に基づいた確率を学習するが、樹形図や表を用いた全通りの書き並べによる原始的な確率計算が主の学習内容である。これまでの既習知識が乏しい生徒であっても比較的考えやすく、学びの対等性が保たれやすい単元でもある。樹形図や表は、すべての場合を書き並べるという単純さが強みである一方で、そもそも樹形図や表を用いて、何を整理するべきかという構造を捉えるところに子どもなりの難しさがある。そして何よりも、書き並べるという作業自体に手間と根気が必要なので、総数が手書きで数えられるくらいの単純な事象でしか役立たないのが弱点である。この弱点は致命的であると考える。なぜなら、せっかく興味ある事柄であるのに、子どもたちにとって身の回りにある事象は複雑で総数が多すぎるから、今の自分では計算不可能だと判断せざるを得ないからである。日常の事象と数学の問題との間に壁を感じる瞬間である。

そこで「同じクラスになる確率」という生徒の関心が高いであろう題材を用いて、樹形図という既習手段だけでなく、計算によって確率を求める方法を発見したり、その方法の根拠を説明したりして、学習したことを発展させていく授業を構想した。現行の学習指導要領では、計算による確率導出は主の学習内容として想定されていないため、この授業は発展的取扱であり、確率の利用の単元の最終回が本時にあたる。

４−２　子どもたちの働かせた「数学的な見方・考え方」

「□人が同じクラスになる」ということは「全員が１組 or ２組 or ３組になる」と言い換えることができるとを導入にて全体で確認した。

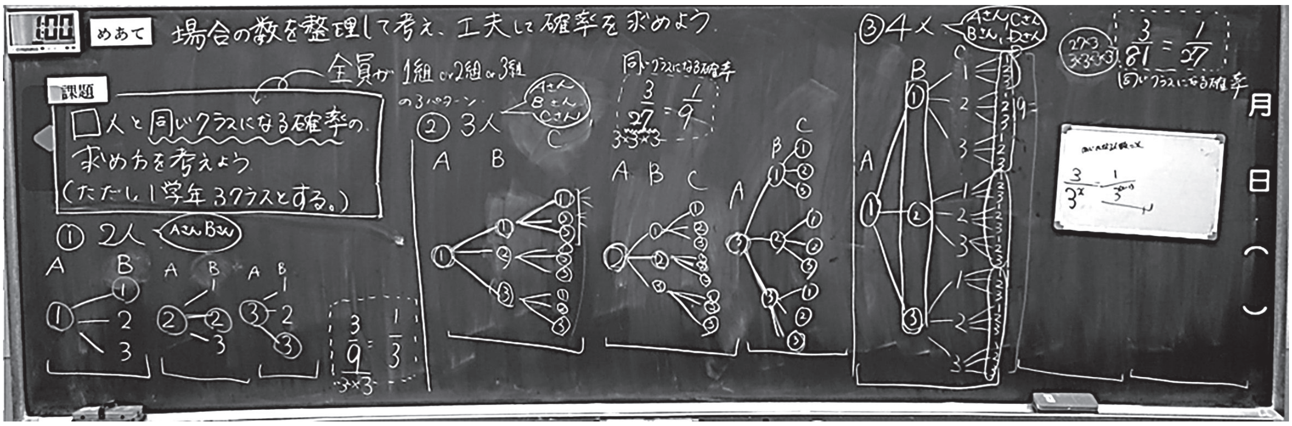

図３　板書

⑴樹形図で考える「ＡさんＢさんの２人が同じクラスになる確率を考える」

ホワイトボードと磁石を用いた実験の後に、２人の場合の課題を提示し、個人で取り組む時間を２分取り、班学習へと切り替えた。活動と並行して生徒を指名し、黒板で樹形図を描かせ、全体共有を行った。

⑵樹形図の構造を見抜く「３人が同じクラスになる確率を考える」

「次はＣさんも入った仲良し３人組が同じクラスになる確率はどうかな？」と問い、全体から班に返した。ここでも、樹形図で考える生徒が大半であった。しかし、思っていたよりも沢山の場合があり樹形図が予想以上に大きくなったために、プリントの枠内にすべての樹形図を書き並べることができない子どもが何人かいた。ある班では、「やばい（枠内に樹形図が）入らん」という子どもの発言に、「でも、どっちにしろ、同じのがボン、ボンってくるだけだから…」と発言する子どもがおり、樹形図には同じ構造が繰り返されていることに気付く姿が見られた。（図４　３人が同じクラスになる場合を考える樹形図）このことは後で全体共有を行った。

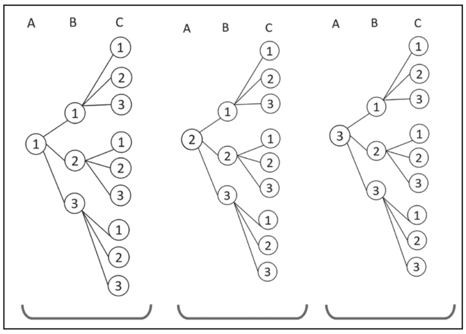

図４　特定の３人が同じクラスになる場合を考える樹形図

⑶樹形図の構造と確率を対応させる「４人が同じクラスになる確率を考える」

この課題では、９班中３つの班では、確率の規則性を捉えて　いたが、着目しているところは異なっていた。２つの班（a 班 b 班とする）では確率の結果（既約分数）が 1/3、1/9、となっていることから、人数が増えると確率は 1/3 倍になると考えていた。もうひとつの班（c 班とする）では、約分されていない状態の 3/9、3/27 から、分子はいつも３になること、そして分母が３倍ずつになると考えていた。「分子の３は何を表しているか？」という質問に対し、a 班 c 班ではすぐに、「全員が同じクラスにあるのは、みんなが１組か２組か３組か、の３パターンしかないから」という返答が返って来たので、授業の導入で行った、問題文の言い換えを手掛かりに考えたと思われる。続いて「じゃあ、分母の規則は樹形図のどこにあらわれている？」と問いかけを行った。残りの班の多くは、樹形図を用いて考えていた。先ほどと同じように「樹形図がプリントに収まらない」や「樹形図が大きくなりすぎて、ぐちゃぐちゃになってしまう」といったことから、樹形図をすべて書くのではなく、「Ａさんが１組の場合」の樹形図だけを書き、それを３倍することで「Ａさんが２組の場合」や「Ａさんが３組の場合」の樹形図は省略できる（計算で補える）ことを班の中で話をしていた。このことから、この時点で多くの生徒が、分子の数は常に３、分母の数は、ひとつ樹形図を書いて３倍すればよいということを見出していたと考えられる。（図５ 樹形図の構造を捉える）

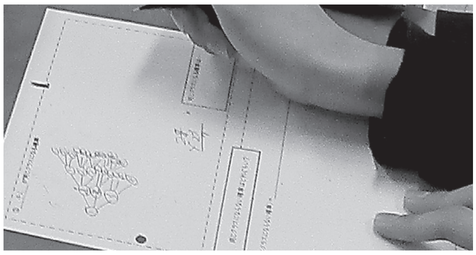

図５　樹形図の構造を捉える

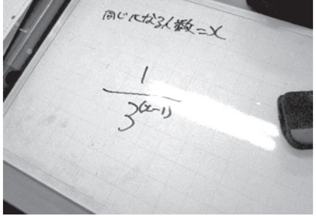

図６　子どもの考え

ここで、板書に分母の素因数分解（３の累乗）を記しておき、樹形図で考え進めている班に、「黒板のあの式（分母）は樹形図のどこにあたるかな？」や「あそこの班は、確率の計算結果に規則があると話しているよ」と働きかけた。このとき a 班や b 班の生徒は「x 人と同じクラスになる確率」と一般化した式を表現した。ここには「⑧一般化の考え方」だけでなく、条件を変え、適用範囲を広げようとする「⑤発展的な考え方」やこれまでに得られた確率の結果をまとめて扱う「④統合的な考え方（特にⅡ型）」が働いている。（図６ 子どもの考え）なお、この生徒は、$3/3^{x}=1/3^{(x-1)}$ という式変形（約分）を行っているが、このように指数が文字の場合の変形は高等学校の内容である。つまり、この生徒は、確率の規則を見出すと同時に、指数が文字の場合の式の変形方法を類推する「②類推的な考え方」も働かせていたといえる。

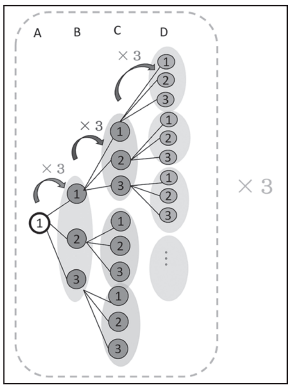

図７　樹形図の構造

また、樹形図を考えていた班からは。樹形図はひとつの場合から３つの枝が出るという繰り返しになっており、そのことが確率の分母に３の累乗の形で表現されているという話題が挙がったため、生徒を指名し､全体での共有を行った。４人の場合の確率の分母「81=3×3×3×3」は、ひとつの場合から３通りに派生するのが３回繰り返され、「3×3×3」。さらに、あくまでもこの樹形図は、「Ａさんが１組の場合」のみを表現したものであり、ほかにも「Ａさん２組の場合」と「Ａさんが３組の場合」があるので、さらに３倍して、(3×3×3)×3 と表現できるということ（図７ 樹形図の構造）や、５人の場合でも同様な構造をとっていくので、樹形図をかかずに確率を求めることができるということが説明された。その後、別の生徒を指名し、x 人の場合を考えた式の考えも取り上げて授業が終了した。

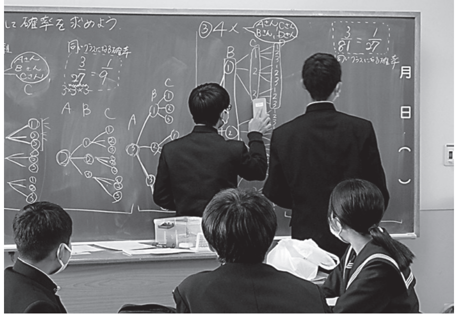

図８　授業の様子

⑷振り返りの記述から子どもの働かせた「数学的な見方・考え方」

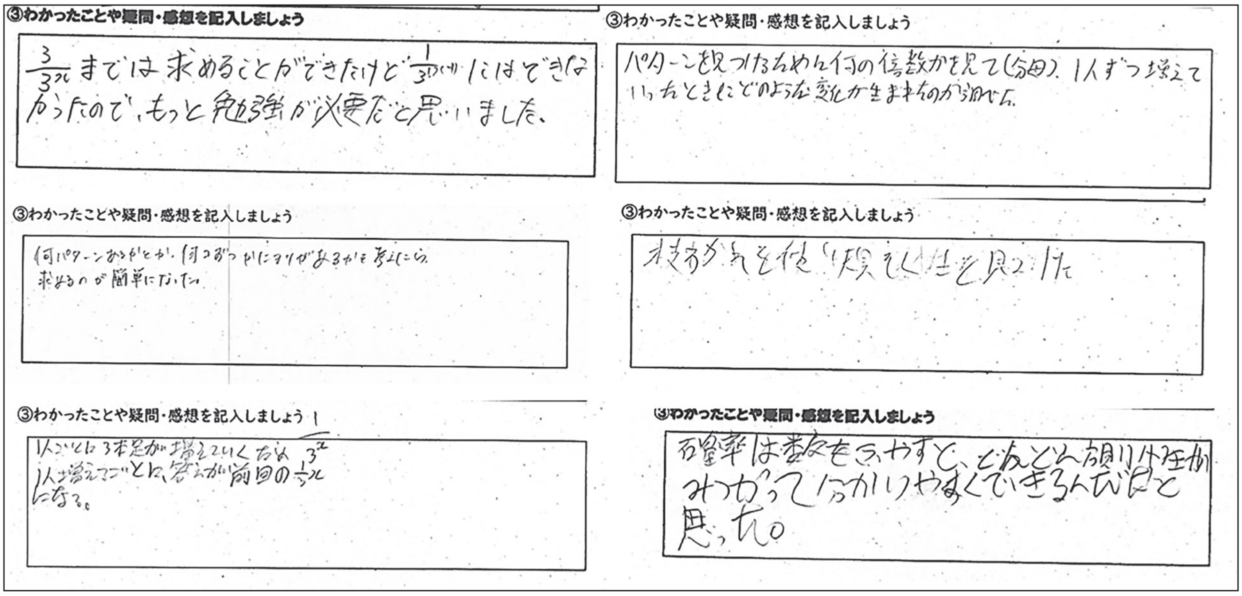

図９　確率の規則や値と樹形図の関係に関する振り返り

授業最後に取り上げた一般化された式については、非常に発展的な内容であったにも関わらず、最後の、$1/3^{(x-1)}$ にはとてもおどろいた」や「樹形図をかかないでも確率を出せた。最後の x を使ったのも分かってすごかった」など、その考えに触れることができた記述が複数あり、他者と考えが結びつく姿がみられた。

「何パターンあるかとか、何個ずつかたまりがあるかを考えたら求めるのが簡単になった」や「一人ずつ増えていったときに、どのような変化が生まれたのか調べた」など、樹形図と確率の値にはどんな対応関係があるかや、規則に関する振り返りを 25 人中 12 人が記述した。（図９ 確率の規則や値と樹形図の関係に関する振り返り）

⑸振り返りの記述からみえた子どもの発展的な考え

また、樹形図の構造を考えたことで、４クラス編成の場合は、分母は４の累乗であるという記述もあった。(図 10 問題の条件を変更する) この生徒は、授業中に樹形図の構造に気付いた生徒であるが、振り返りの記述では、さらに発展させて捉えていた。

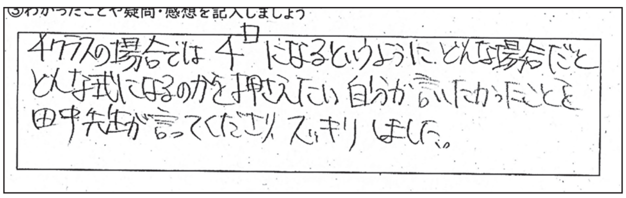

図 10　問題の条件を変更する

５．提案と今後の課題

５－１　教材研究および教材開発の視点としての数学的な考え方

４―１で述べた確率の利用の授業では、最初はただの解答にすぎなかった確率の数値に、「人数変化に伴って分母が３倍になる」という数学的な性質があることに気付いた生徒がいた。このとき、生徒は確率をただの解答ではなく、数列という集合を捉えたと説明できる。また、一般化した生徒があらわれたとき、それに納得した子どもたちは、この集合の名前を「規則のある数列」から「$1/3^{(x-1)}$」というより一般化された表現で捉えなおす。ただの解答としての数字の並びという捉えから比較すると、飛躍的な変化がある。これが、思考の発展であり、統合的・発展的な姿であると考える。

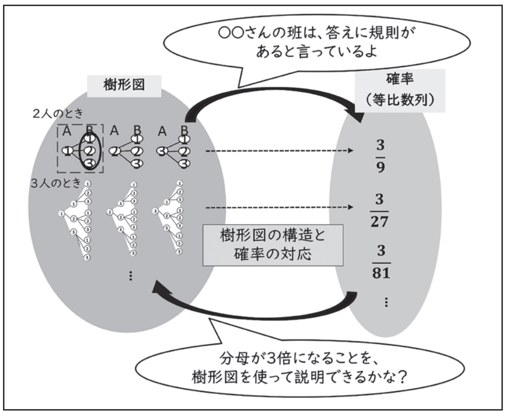

図 11　実践における数学的な考え方

このような授業の共通点は、授業で扱った問題の一問一問が集合の要素であるということである。「統合的」とは、独立した問題同士をそのままにしておかないで、何らかの性質などを見出すことでその関連性を考えることだと解釈できる。また「発展的」とは、統合したことを元に、条件を変更するなどして、得た集合をさらに幅広く捉えていこうとすることである。統合的・発展的」な学びを目指した授業は、教師がどのような問題をどの順で示すのかというストーリーの作り方にかかっている。そして、そのストーリーを支える発問づくりが子どもの思考の方向を支えている。

５－２　表現された内容と思考の内容は同一ではないということ

例えば、図形の問題では補助線を引くことで問題が解決する場合がある。この「補助線を引く」という行為に至るまでに様々な思考があるはずであって、試行錯誤の結果として「補助線を引くという」手段がとられている。しかし、他者に自分の考えを説明する際には「まず補助線を引くでしょ。そうするとね…」という風に、「補助線を引く」という行為がまず先に共有されることになる。聞き手からすると「なぜその補助線が急に現れたのか」という思考の飛びがここにある。

このように、思考の内容と表現された内容には差異がある。様々な試行錯誤の結果を、式や記号を用いて表現することは、自己の思考を整理し、自己とのコミュニケーションをとるという大きな意味がある行為である。しかし、それを他者と共有するとなると、そこには言語化されない思考が多分に存在するのも事実である。本稿では「考えを共有する」という表現をここまでに使ってきたが、実践を通じて、「考えを共有する」ことと「思考過程を共有する」ことは質的な差があると分かった。「数学的な考え方」がつながるためには、単に他者の考えが理解できるかどうかという前者よりも、より納得できるかどうかという後者の方が重要であると考える。思考過程が共有されるためには、子どもたちが、省略せずに途中式を書いたり、正しく数学的な用語が使えたりするという、言葉の指導にもかかっていると考える。今後は、「思考過程を共有する」場面の設定について、より厳密な検討がされなければならない。

おわりに

ここまで、「数学的な見方・考え方」を働かせ、他者と考えを共有しながらよりよく考えるための授業づくりについて検討してきた。しかし、プロ野球選手のフォームや打ち方を理論的に説明されても、誰でも野球が上手になるわけではないように、「数学的な見方・考え方」も、それが何かを詳細に示すことで、数学的思考が上達していくわけではない。子どもたちにこれらの内面化を図るには、数学の問題に直面させ、じっくりと考えさせる授業が重要であり、その過程で「数学的な見方・考え方」が体得されていくものだと考える。そのことに留意しながら、学びの対等性を保持したり、問い方を工夫したりして、これまで授業を実践してきた。授業の実践に当たっては、多くの先生方にご協力をいただいた。当時実習生であった私を快く受け入れてくださった校長先生、大切な授業時間を沢山私に割いていただき、指導に当たってくださったメンターの先生、日々の授業を快く公開し授業を参観させてくださった数学科の先生方、学校行事や学年の指

導についてご教授くださった学年部の先生方など多くの先生方のお世話になった。教員としてこの学びを、目の前の子どもたちに還元し、これからも「数学的な見方・考え方」を広げ、深めていくような授業を追求していきたい。

付記

本論文の内容は、田中詩織が執筆した令和５年度山口大学大学院教育学研究科教職実践高度化専攻の実践研究報告書に加筆・修正を加えたものである。
足立直之、泉池耕平は田中詩織の指導教員として適宜指導助言を与えるとともに、本論文の執筆に際しては、全体の総括及び部分的な修正の指示を行った。

参考文献

松原元一（1990）「数学的な見方考え方　子どもはどのように考えるか」国土社
片桐重男（2017）「名著復刻　数学的な考え方の具体化　数学的な考え方・態度とその指導」
半田進（1987）「考えさせる授業　算数・数学　実践編」東京書籍
松原元一（1987）「考えさせる授業　算数・数学」東京書籍
遠山啓（1991）「数学教育ノート」国土社
教育科学　数学教育特集　2022 年 12 月号　清水宏幸（2022）「数学的な見方・考え方とはなにか　解説」明治図書
川村晃英（2008）「数学的な考え方の再考 ―Wittmann の数学教育学の視点から一」
黒澤俊二（2019）「数学的な考え方という用語は何を意味するのか」
上ヶ谷友佑（2003）「どのような問題提示の工夫が数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を生じさせるか？」
松岡克典(2023)「算数科における「理論構成型」の授業モデルの在り方」日本科学教育学会研究報告書 VOL.37 NO.6
松岡克典（2022）「演繹的思考を育む算数科授業モデルの開発」日本科学教育学会研究報告書 VOL.36 NO.7

引用文献

１）中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編　p.20～p.30 を参照し、特に p.30 に示されている「新しい考えを創造しようとする態度」という言葉を参考にして自身がまとめたものである。
２）上ヶ谷の記事『どのような問題提示の工夫が数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を生じさせるか？』を参照し、まとめて記載した。
３）片桐重男の著書「名著復刻　数学的な考え方の具体化　数学的な考え方・態度とその指導」を参照し、１０分類を再整理し、示したものである
４）片桐重男（1988)「名著復刻　数学的な考え方の具体化　数学的な考え方・態度とその指導」明治図書 p.124
５）「三省堂国語辞典」p.173、p.841 から部分抜粋した。
６）松原元一の著書「数学的な見方考え方　子どもはどのように考えるか」より部分的に抜粋して示している。
７）中学校学習指導要領解説（平成 29 年度告示）数学編 p.21、p.21～22 より部分的に抜粋して示している。