

III 研究ノート III

確率的マクロ均衡モデルにおける生産性の分布の導出過程〔Ⅱ〕

—経済物理学を用いたマクロ経済学研究—

山口大学経済学部 加藤 真也

KATO, Shinya

山口大学大学院創成科学研究科 鳴海 孝之

NARUMI, Takayuki

1 はじめに

本稿は前稿（加藤・鳴海 2024）の続編であり，吉川（2020）第3章で示されている生産性の分布の導出過程について解説をすることを目的としている。前稿では，指数分布に従う生産性の分布の左側の導出について解説した。それに対して本稿では，生産性の分布の右側がベキ分布¹⁾に従うような生産性の分布全体の導出について解説をする。経済物理学を用いた吉川理論は経済学者にとっては必ずしも馴染み深いものではないと考えられる。前稿と本稿を通じて，本理論への理解が一層深まる契機となれば幸いである。

本稿の構成は次の通りである。第2節では，統計物理学の理論モデルを用いて，生産性の分布全体の導出を行い，第3節ではパラメータに数値例を与えて生産性の分布を導出する。第4節では吉川理論の展望について若干のコメントをする。

2 生産性の分布全体の導出

総供給（総生産量） Y を確率変数とし，その期待値を $\langle Y \rangle$ と書く。そして，これが次式のように外生的に与えられる総需要 D に等しいとする²⁾。

$$\langle Y \rangle = D \quad (1)$$

次に，総供給 Y が $Y_1, Y_2, \dots, Y_J$ まで J 個の水準があり， m_j を Y が $Y_j (j=1, 2, \dots, J)$ という値をとる回数とし， m_j の和を M とすると，(1)式より次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^J Y_j \cdot \frac{m_j}{M} = \sum_{j=1}^J \frac{Y_j}{M} \cdot m_j = D \quad (2)$$

ここで，前稿において，(c_i : セクター i の生産性， n_i : 労働者数， K : セクターの数， N : 総雇用者数)

$$\sum_{i=1}^K c_i n_i = D, \quad \sum_{i=1}^K n_i = N \quad (3)$$

1) 本稿では，ベキ分布を右側にもつような生産性の分布の導出を行うが，ベキ分布自体が得られる理由については扱わないこととする。吉川（2020）第3章では，マルコフ・モデルを用いて，職 (job) の数 f_i に創造と破壊のダイナミクスを考え，生産性が高くなればなるほど，職の数を少なくなり，さらに，その職の数の減り方がベキ分布に従うことが示されている。

2) 総需要 D は後に変数と考える。第3節では， D の様々な大きさに対してシミュレーションを行う。

より, (β : 総需要制約 (有効需要の原理) に関するラグランジュ乗数)

$$\frac{n_i}{N} = \frac{e^{-\beta N c_i}}{\sum_{i=1}^K e^{-\beta N c_i}} \quad (4)$$

が得られたことと対応させると, 本稿では,

$$\sum_{j=1}^J \frac{Y_j}{M} \cdot m_j = D, \quad \sum_{j=1}^J m_j = M \quad (5)$$

であることから, (3)式と(5)式の変数の対応関係より,

$$\frac{m_j}{M} = \frac{e^{-\beta M \frac{Y_j}{M}}}{\sum_{j=1}^J e^{-\beta M \frac{Y_j}{M}}} = \frac{e^{-\beta Y_j}}{\sum_{j=1}^J e^{-\beta Y_j}} \quad (6)$$

が得られるため, (6)式より Y の確率分布は次式で表される指数分布³⁾になる。

$$g(Y) = \frac{e^{-\beta Y}}{\sum_j e^{-\beta Y_j}} \quad (7)$$

このとき, (7)式の右辺の分母である分配関数 Z は次式で表される。

$$Z = \sum_j e^{-\beta Y_j} \quad (8)$$

次に, 総供給 Y は総雇用者数 N に依存することから $Y_j(N)$ と書く。このとき, 分配関数 Z_N は

$$Z_N = \sum_j e^{-\beta Y_j(N)} \quad (9)$$

となり, 前稿より,

$$Y = \sum_{i=1}^K y_i = \sum_{i=1}^K c_i n_i \quad (10)$$

であったことから, (9)式は

$$Z_N = \sum_j \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^K c_i n_i^j \right) \quad (11)$$

となり, (n_i^j : 総供給の水準が Y_j であるときのセクター i の労働者数)

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{n_1=0} \sum_{n_2=0} \cdots \sum_{n_K=0} \delta \left(\sum_{i=1}^K n_i - N \right) \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^K c_i n_i \right) \\ &= \sum_{|n|} \delta \left(\sum_{i=1}^K n_i - N \right) \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^K c_i n_i \right) \end{aligned} \quad (12)$$

と書き換えることができる⁴⁾。ただし, $\delta(\cdot)$ はクロネッカーのデルタであり, $\sum n_i = N$ のときに1, それ以外は0の値をとる関数である。

ここで, 生産性 c_i をもつ職につく労働者数 n_i には, f_i という上限が存在すること ($n_i \leq f_i$) を考慮し

3) 指数関数の形をしているため, このように呼ばれるが, 統計学における指数分布とは異なるので注意しなければならない。また, この確率分布は, ボルツマン分布, 正準分布, カノニカル分布, ギブス分布などとも呼ばれる。

4) (11)式と(12)式が等しいことは, 付録Aで数値例を用いて確認する。

た上で、 $\sum n_i = N$ という制約を課しないとすると、(12)式は次式のように書き換えることができる⁵⁾。

$$Z'_N = \sum_{|n|}^{f_1} \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^K c_i n_i \right) = \sum_{n_1=0}^{f_1} \sum_{n_2=0}^{f_2} \cdots \sum_{n_K=0}^{f_K} \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^K c_i n_i \right) \quad (13)$$

次に、総雇用者数 N を可変（変数）とした次式で表される大分配関数 Φ を考える。

$$\Phi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z'_N \quad (14)$$

ここで、(14)式において N は有限であり労働力人口 L の上限をもつが、便宜上、 N は ∞ までの総和をとっている。また、 z は次式で定義され、

$$z = e^{\beta \mu} \quad (15)$$

μ は総雇用者数の期待値 $\langle N \rangle$ に関する制約に対応するラグランジュ乗数であり、 $\langle N \rangle$ が限界的に1人増えたときにエントロピー S がどれだけ増大するかを表すパラメータである。また、前稿の図3で見たように、エントロピー S と総需要 D 、すなわち総供給 Y は一対一に対応していたので、 μ は失業プールを離れて⁶⁾、新たに職についた労働者の平均的な限界生産性、つまり、留保賃金の平均値に対応していると考えられる。なぜなら、ある失業者が職についた際の限界生産性（その職で生産される財価格で測った実質賃金）があったとすると、その実質賃金より低い水準では、その人は失業をしたままであったはずだからである。さらに、 μ は留保賃金の平均値であるため、生産性が μ より低い職を受け入れる労働者もいることには注意が必要である。

さて、(14)式に対して、(13)式、(15)式、および、 $\sum n_i = N$ を代入して変形していく。

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \sum_{|n|}^{f_1} \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^K c_i n_i \right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \exp \left(\beta \mu \sum_{i=1}^K n_i \right) \sum_{|n|}^{f_1} \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^K c_i n_i \right) \end{aligned} \quad (16)$$

より⁷⁾、(16)式は次式へ変形することができる⁸⁾。

5) (13)式において、 $K=2, f_1=f_2=1$ とすると、

$$\begin{aligned} Z'_N &= \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \exp(-\beta(c_1 n_1 + c_2 n_2)) \\ &= \sum_{n_1=0}^1 \{ \exp(-\beta(c_1 n_1 + c_2 \cdot 0)) + \exp(-\beta(c_1 n_1 + c_2 \cdot 1)) \} \\ &= \{ \exp(-\beta(c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0)) + \exp(-\beta(c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1)) \} + \{ \exp(-\beta(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0)) + \exp(-\beta(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1)) \} \\ &= \exp(0) + \exp(-\beta c_1) + \exp(-\beta c_2) + \exp(-\beta(c_1 + c_2)) \end{aligned}$$

となる。

6) 前稿では、セクターには失業や余暇、家庭内生産も含まれており、 N には就業者、失業者、非労働力人口が含まれていた。しかし本稿では、 N には就業者（労働者）のみが含まれていると考えるべきである。

7) (16)式は $\sum n_i = N$ が制約として課されているため、

$$\Phi = \sum_{N=0}^{\infty} \exp \left(\beta \mu \sum_{i=1}^K n_i \right) \sum_{|n|}^{f_1} \delta \left(\sum_{i=1}^K n_i - N \right) \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^K c_i n_i \right)$$

と表記した方がより正確である。

8) この変形において、 $\sum_{N=0}^{\infty}$ が消えたように見えるが、式変形の結果、すべての $|n|$ に関する和に切り替えたことから、 $\sum_{|n|}$ の中で $\sum_{N=0}^{\infty}$ が考慮されるため、 $\sum_{N=0}^{\infty}$ が不要になるのである。

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{\{n_i\}} \exp\left(\beta\mu \sum_{i=1}^K n_i\right) \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^K c_i n_i\right) \\
&= \sum_{\{n_i\}} \exp\left(\beta\mu \sum_{i=1}^K n_i - \beta \sum_{i=1}^K c_i n_i\right) \\
&= \sum_{\{n_i\}} \exp\left(\sum_{i=1}^K \beta(\mu - c_i) n_i\right)
\end{aligned} \tag{17}$$

さらに、(17)式は次式へと変形することができる⁹⁾。

$$\Phi = \prod_{i=1}^K \sum_{\{n_i\}} \exp(\beta(\mu - c_i) n_i) \tag{18}$$

(18)式は次式へと変形できるが、

$$\begin{aligned}
\Phi &= \prod_{i=1}^K \{\exp(\beta(\mu - c_i) \cdot 0) + \exp(\beta(\mu - c_i) \cdot 1) + \cdots + \exp(\beta(\mu - c_i) \cdot f_i)\} \\
&= \prod_{i=1}^K \{1 + \exp(\beta(\mu - c_i)) + \cdots + \exp(f_i \beta(\mu - c_i))\}
\end{aligned} \tag{19}$$

(19)式の Π 中の括弧内は、初項 $a=1$ 、公比 $r=\exp(\beta(\mu - c_i))$ 、項数 $n=f_i+1$ の等比級数であるので、その和の公式より、

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1 - \exp((f_i+1)\beta(\mu - c_i))}{1 - \exp(\beta(\mu - c_i))} \tag{20}$$

となるので、

$$\Phi = \prod_{i=1}^K \left\{ \frac{1 - \exp((f_i+1)\beta(\mu - c_i))}{1 - \exp(\beta(\mu - c_i))} \right\} \tag{21}$$

と書ける。

大分配関数 Φ の特徴として、

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Phi \right) = \langle N \rangle \tag{22}$$

であることが知られているので、(22)式に(21)式を代入することで、

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \ln \prod_{i=1}^K \left\{ \frac{1 - \exp((f_i+1)\beta(\mu - c_i))}{1 - \exp(\beta(\mu - c_i))} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^K \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \left\{ \frac{1 - \exp((f_i+1)\beta(\mu - c_i))}{1 - \exp(\beta(\mu - c_i))} \right\} \\
&= \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^K \frac{\partial}{\partial \mu} \{ \ln(1 - \exp((f_i+1)\beta(\mu - c_i))) - \ln(1 - \exp(\beta(\mu - c_i))) \} \\
&= \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^K \left\{ -\frac{(f_i+1)\beta \exp((f_i+1)\beta(\mu - c_i))}{1 - \exp((f_i+1)\beta(\mu - c_i))} - \frac{-\beta \exp(\beta(\mu - c_i))}{1 - \exp(\beta(\mu - c_i))} \right\}
\end{aligned}$$

9) (17)式と(18)式が等しいことは付録Bで確認する。

$$= \sum_{i=1}^K \left\{ \frac{(f_i+1)e^{(f_i+1)\beta(\mu-c_i)}}{e^{(f_i+1)\beta(\mu-c_i)} - 1} - \frac{e^{\beta(\mu-c_i)}}{e^{\beta(\mu-c_i)} - 1} \right\} \quad (23)$$

となる。

さらに、生産性 c_i をもつ職についている労働者数 n_i の期待値 $\langle n_i \rangle$ は (23) 式の右辺の各項に他ならないため、

$$\langle n_i \rangle = \frac{(f_i+1)e^{(f_i+1)\beta(\mu-c_i)}}{e^{(f_i+1)\beta(\mu-c_i)} - 1} - \frac{e^{\beta(\mu-c_i)}}{e^{\beta(\mu-c_i)} - 1} \quad (24)$$

と表すことができる。(24)式は生産性 c_i をもつ職に労働者がどのように分布しているかを表している。

3 シミュレーション

本節では、吉川（2020）第3章で示されているシミュレーションの再現を試みる。

生産性 c_i の水準は、 $c_1=1, c_2=2, \dots, c_{200}=200$ まで200段階あるものとする。 $\mu=25$ とし、労働力人口 L は630とする。 c_i が上昇するにつれて、職の数の上限である f_i は $1/c_i^2$ というベキ分布に従う¹⁰⁾ ($i=50, 51, \dots, 200$)。ただし、 $i < 50$ では、 $f_i=10$ で一定とする。

図1は、(24)式に対して以上の値を代入することで得られ、総需要 D の水準が高いとき ($\beta = -0.05$) と低いとき ($\beta = -0.02$) の2種類の生産性の分布が示されている（灰色の破線は職の数 f_i を表している）。また、生産性の分布は山型になっており、現実の生産性の分布の基本的な型をとらえているといえる¹¹⁾。

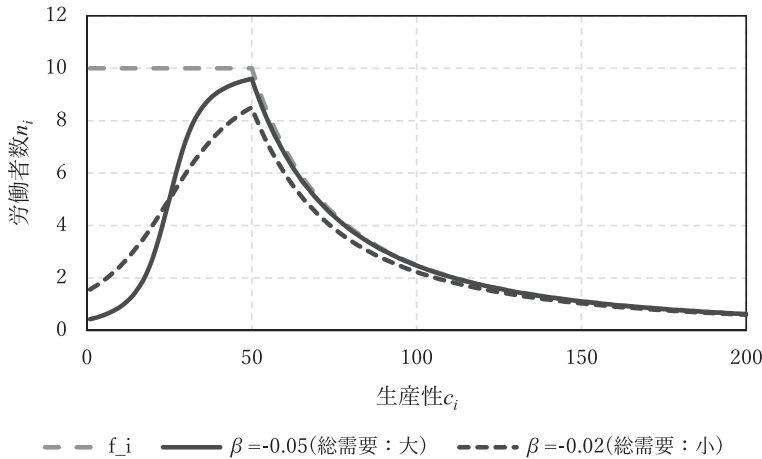


図1 生産性の分布と β の変化

10) 実際には、 c_{50} において $f_{50}=10$ になるよう調整するために、 $50 \leq i \leq 200$ において、 f_i は $10c_{50}^2 \cdot 1/c_i^2$ のベキ分布に従うものとしてシミュレーションをしている。これに対して、 c_i の全範囲においてベキ分布に従うとしてシミュレーションをした結果を付録Cに示す。

11) 現実の生産性の分布は吉川（2020）p.110に示されている。また、図1より総需要 D が減少することで、生産性の分布が左ヘシフトすることがわかるが、吉川（2020）p.131には、2008年のリーマン・ショックにより、現実の生産性の分布が左ヘシフトしていることが示されている。ところで、図1における生産性の分布の左側が右上がりとなっている解釈は、前稿と同様に労働者がより「よい職」を求めていることを表しているが、生産性が低い領域では、指数分布に従っている可能性もあるが、 $0 \leq c_i \leq 2\mu$ の領域で指数分布に従っているわけではないことに注意が必要である（ロジスティック曲線のような形状ではあるが、ロジスティック関数ではない）。そのため、山型である現実の生産性の分布の左側が指数分布に従っている場合には、部分的には前稿での議論の方が当てはまりがよいことになる。

図1において、 $\beta = -0.05$ と $\beta = -0.02$ のグラフの交点の横軸の値は $c_{25} = 25$ であり、 $\mu = 25$ に対応し、縦軸の値は $f_{25}/2 = 10/2 = 5$ である。 μ は留保賃金の平均値に対応していたので、総需要 D の水準が高いとき ($\beta = -0.05$) には、 μ よりも低い生産性の職では、労働者数 n_i が大幅に減少し、総需要 D の水準が低いとき ($\beta = -0.02$) には、労働者数 n_i の減少が抑えられる。つまり、不景気には生産性が低い水準の職にそれなり労働者が雇われることを示している。また、 $\beta = -0.05$ と $\beta = -0.02$ のグラフより下側の面積がそれぞれのケースにおける総雇用者数 N になるが、 $\beta = -0.05$ のとき $N = 618$ 人、 $\beta = -0.02$ のとき $N = 582$ 人となり、労働力人口 L が630人であるため、失業者数 U はそれぞれ $U = 12$ 人、 $U = 48$ 人、失業率 U/L はそれぞれ $U/L = 0.018(1.8\%)$ 、 $U/L = 0.076(7.6\%)$ となる。さらに、 $\mu = 25$ 以上の生産性の職につく労働者の割合は、 $\beta = -0.05$ のとき94%、 $\beta = -0.02$ のとき88%となることから、総需要 D が増加に伴い、失業率は低下し、高い生産性の職につく労働者の割合も上がることがわかる。

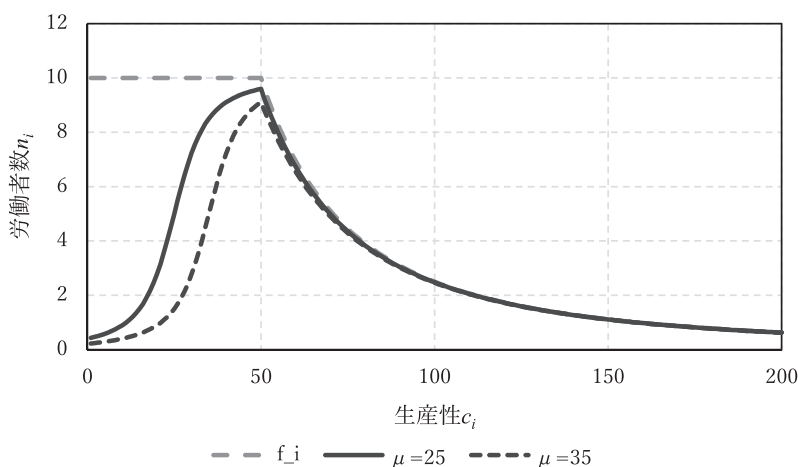


図2 生産性の分布と μ の変化

次に、図2は、 $\beta = -0.05$ とした下での、留保賃金の平均値が低いとき ($\mu = 25$) と高いとき ($\mu = 35$) の2種類の生産性の分布が示されている。留保賃金の平均値が高いときは低いときと比べて、同じ生産性 c_i の職であっても労働者数 n_i が少なくなっていることがわかる。これは留保賃金が高いことで働き始めない人が多いことを意味している。また、 $\mu = 25$ のとき $N = 618$ 人、 $\mu = 35$ のとき $N = 521$ 人となり、労働力人口 $L = 630$ 人より、失業者数 U はそれぞれ $U = 12$ 人、 $U = 109$ 人、失業率 U/L はそれぞれ $U/L = 0.018(1.8\%)$ 、 $U/L = 0.172(17.2\%)$ となる。これは、失業保険の存在が μ を上昇させ、失業率を高めることを表している。

最後に、総需要 D が高いとき ($\beta = -0.1$) における μ の変化と、総需要 D が低いとき ($\beta = -0.01$) における μ の変化を比較する。

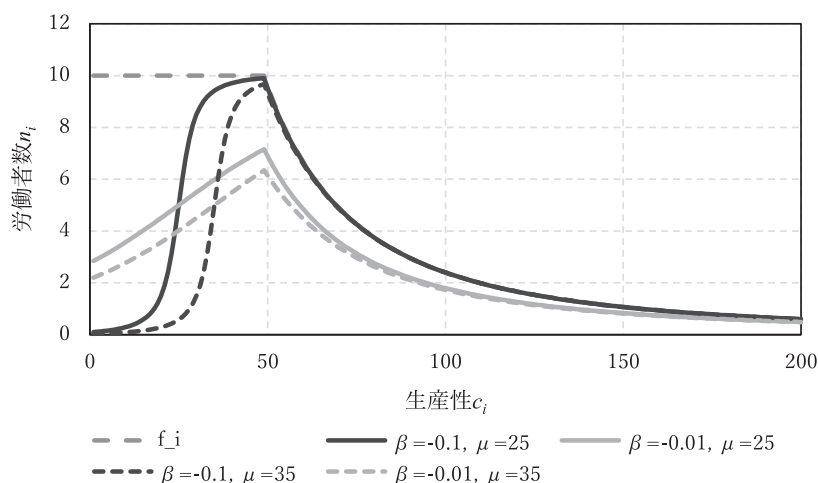
図3 生産性の分布と β と μ の同時変化

図3は、 $(\beta, \mu) = (-0.1, 25)$, $(-0.1, 35)$, $(-0.01, 25)$, $(-0.01, 35)$ の4通りの生産性の分布である。この図より、総需要 D が高いとき($\beta = -0.1$)に留保賃金の平均値 μ が25から35へ上昇することで失業者が多く生じ、総需要 D が低いとき($\beta = -0.01$)の μ の上昇は失業者をあまり増やさないことがわかる¹²⁾。吉川(2020)はこれに関して、「サーチ理論は、失業保険が μ を上げることによって失業の長期化を促す。といった議論をし、現実の政策にも大きな影響を与えてきたが、実はそうした効果は、好況のときと不況のときとはまったく異なる。需要の制約を考慮しないスタンダードなサーチ理論は、暗黙裡に現実にはありえないほどの「大好況」を仮定しているのである。」と指摘している。程度の問題はあるであろうが、スタンダードなサーチ理論からは得られないインプリケーションがこの吉川理論から見出せることがわかる。

4 おわりに

前稿で生産性の分布が指数分布になることを示し、本稿で生産性の分布の一部がベキ分布に従うような生産性の分布全体を導出した。吉川(2020)の核心的な内容である統計物理学を用いた生産性の分布の導出を扱ってきたわけであるが、ここではこの吉川理論に対して若干のコメントを残し、本稿を締めくくるとする。

吉川理論は、統計物理学におけるグランドカノニカル分布(大正準分布)で用いられる変数と、経済学における変数とを一对一に対応させることで、統計物理学の枠組みを経済現象の分析に導入する試みである。そのため、本理論を拡張・発展させていくためには、統計物理学に関するより高度な知見が不可欠であり、本稿がその一例であるように、統計物理学の専門家との共同研究がより一層重要になる分

12) $(\beta, \mu) = (-0.1, 25)$ のとき失業率 U/L は3.3%, $(\beta, \mu) = (-0.1, 35)$ のとき失業率 U/L は19.1%であるので、15.8%ポイントだけ失業率を上昇させる。それに対して、 $(\beta, \mu) = (-0.01, 25)$ のとき失業率 U/L は17.9%, $(\beta, \mu) = (-0.01, 35)$ のとき失業率 U/L は27.1%であるので、9.2%ポイントしか失業率を上昇させない。

野であると考えられる。

アダム・スミスがニュートン力学から着想を得て経済学の構想を発展させたように、経済学が物理学の理論的枠組みに依拠することは、ごく自然な流れであろう。この意味において、吉川理論のさらなる拡張・発展は、経済学にとって理論的にも応用的にも極めて重要な課題であると考えられる。

参考文献

- 加藤真也・鳴海孝之（2024）「確率的マクロ均衡モデルにおける生産性の分布の導出過程〔Ⅰ〕—経済物理学を用いたマクロ経済学研究—」東亜経済研究，第83巻，第1号，pp. 41-51.
- 吉川洋（2020）『マクロ経済学の再構築—ケインズとシュンペーター』岩波書店

付録

A (11)式と(12)式が等しいことの確認

ここでは、簡単な数値例を用いて、(11)式と(12)式が等しいことを確認する。

2種類の生産性（職種）（ $K=2$ ），総雇用者数（ $N=2$ ）とする。(11)式に関して、状態 j は $n_1^j + n_2^j = 2$ を満たすすべての組 (n_1^j, n_2^j) に対応することから、これに該当する状態を表 A-1 にまとめる。

表A-1 (11)式の展開

状態 j	(n_1^j, n_2^j)	$\sum_i c_i n_i^j$	対応する項
1	(0, 2)	$2c_2$	$\exp(-2\beta c_2)$
2	(1, 1)	$c_1 + c_2$	$\exp(-\beta(c_1 + c_2))$
3	(2, 0)	$2c_1$	$\exp(-2\beta c_1)$

このとき、(11)式は

$$Z_N = \sum_{j=1}^3 \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^2 c_i n_i^j\right) = \exp(-2\beta c_2) + \exp(-\beta(c_1 + c_2)) + \exp(-2\beta c_1) \quad (\text{A-1})$$

と展開することができる。

次に、(12)式に関して、 $\delta(n_1 + n_2 - 2) = 1$ となる (n_1, n_2) の組は表 A-2 のように3組である。

表A-2 (12)式の展開

(n_1, n_2)	$\delta(n_1 + n_2 - 2)$	対応する項
(0, 2)	1	$\exp(-2\beta c_2)$
(1, 1)	1	$\exp(-\beta(c_1 + c_2))$
(2, 0)	1	$\exp(-2\beta c_1)$

そのため、(12)式は

$$Z_N = \sum_{n_1, n_2} \delta(n_1 + n_2 - 2) \exp(-\beta(c_1 n_1 + c_2 n_2)) = \exp(-2\beta c_2) + \exp(-\beta(c_1 + c_2)) + \exp(-2\beta c_1) \quad (\text{A-2})$$

と展開することができる。

(A-1)式と(A-2)式が一致することから、(11)式と(12)式が等しいことが確認できる。

B (17)式と(18)式が等しいことの確認

付録 A と同様に、簡単な数値例を用いて、(17)式と(18)式が等しいことを確認する。

$K=2, f_1=f_2=1$ (つまり, $n_1, n_2 \in \{0, 1\}$) とすると, (17)式の左辺は,

$$\sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \exp(\beta(\mu - c_1)n_1 + \beta(\mu - c_2)n_2) \quad (\text{B-1})$$

となるので, これを展開すると,

$$\begin{aligned} & \exp(0) + \exp(\beta(\mu - c_1)) + \exp(\beta(\mu - c_2)) + \exp(\beta(\mu - c_1) + \beta(\mu - c_2)) \\ & = 1 + \exp(\beta(\mu - c_1)) + \exp(\beta(\mu - c_2)) + \exp(\beta(2\mu - c_1 - c_2)) \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

となる。

これに対して, (18)式の右辺は,

$$\left(\sum_{n_1=0}^1 \exp(\beta(\mu - c_1)n_1) \right) \cdot \left(\sum_{n_2=0}^1 \exp(\beta(\mu - c_2)n_2) \right) \quad (\text{B-3})$$

であるので, これより,

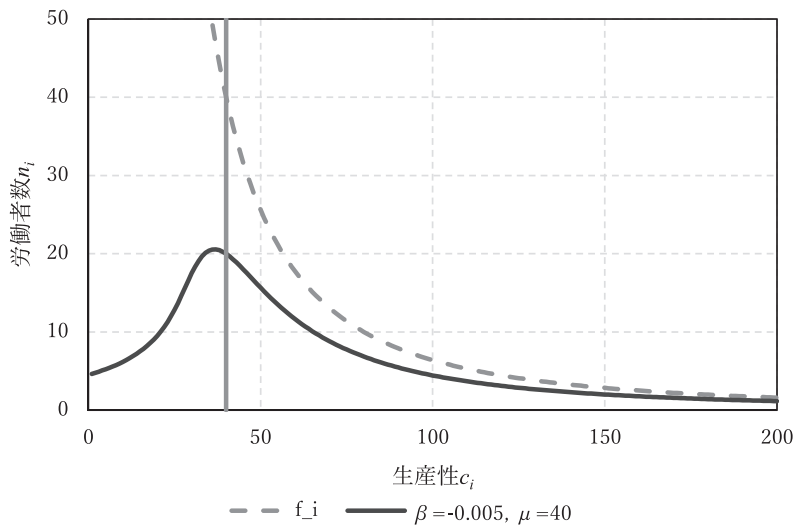
$$\begin{aligned} & (1 + \exp(\beta(\mu - c_1))) \cdot (1 + \exp(\beta(\mu - c_2))) \\ & = 1 + \exp(\beta(\mu - c_1)) + \exp(\beta(\mu - c_2)) + \exp(\beta(2\mu - c_1 - c_2)) \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

となる。

(B-2)式と(B-4)式が一致することから, (17)式と(18)式が等しいことが確認できる。

C 職の数の分布全体がベキ分布に従うケース

本稿のシミュレーションでは, $i=50, 51, \dots, 200$ において, 職の数の上限である f_i が $10c_{50}^2 \cdot 1/c_i^2$ というベキ分布に従い, $i < 50$ では $f_i=10$ で一定とした。しかし, 吉川(2020) p.113においてベキ分布はかなり広い範囲で得られることが指摘されているため, ここでは, $(\beta, \mu) = (-0.005, 40)$ とし, $i=1, 2, \dots, 200$ において f_i がベキ分布 $10c_{50}^2 \cdot 1/c_i^2$ に従うケースについてシミュレーションを行う。その結果, 生産性の分布は図 C-1のようになる。



図C-1 職の数の分布全体がベキ分布に従うケース

図C-1より、職の数 f_i の分布全体がベキ分布に従うケースであっても山形の実産性の分布を導出できることがわかる。ところで、図中の縦線が留保賃金の平均値 $\mu=40$ を表しているが、このとき第3節で行ったような留保賃金に関する解釈が難しくなる。このことから吉川理論において、ある生産性の水準以下のとき職の数 f_i が一定値をとることが重要であることがわかる。