

山口大学数理科学
レクチャーノート
No.5

conformal maps に関連する
変分問題とその周辺

中内伸光
(山口大学名誉教授)

山口大学数理科学

レクチャーノート

No.5

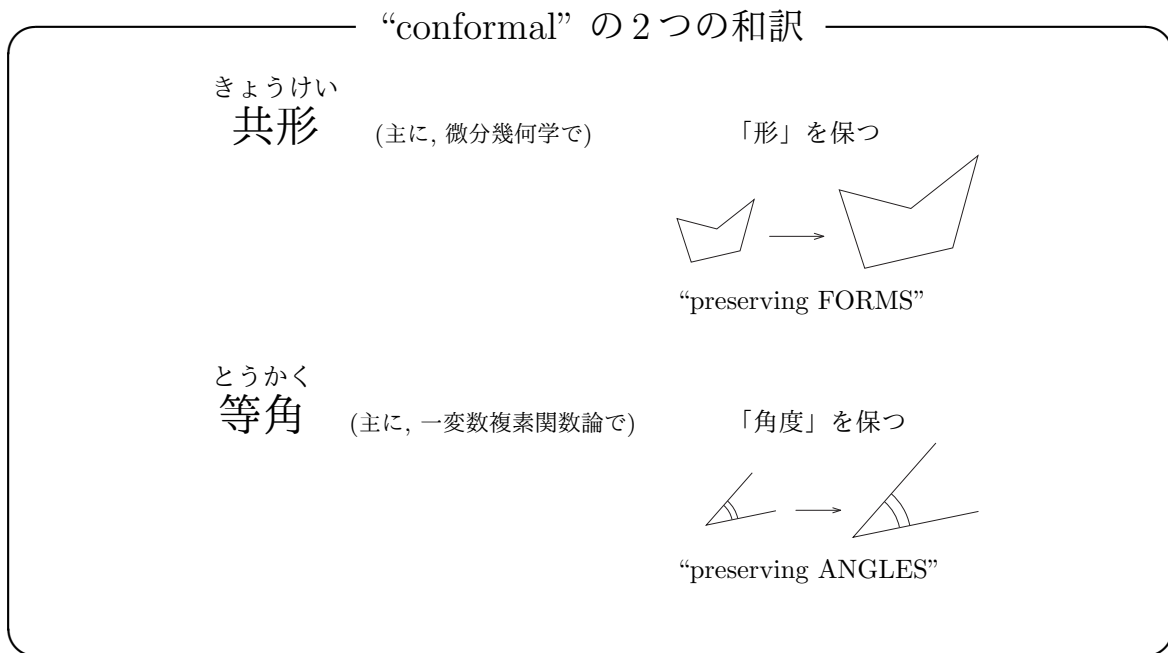
conformal maps に関連する
変分問題とその周辺

中内伸光

(山口大学名誉教授)

はじめに

“Conformal” という用語があるが、数学では、“conformal” の和訳が 2 種類ある。幾何学では「共形」と訳され、一変数複素関数論では「等角」とよばれる。



これらは、“conformal” の特性を表現している。写像に限定して、“conformal” の定義を見てみると、infinitesimally (無限小的に) に表現すれば、conformal map とは

接空間のレベルでは
本質的に、拡大・縮小写像のことである

となる¹。(このあたりの内容は、本書の 9 ページから 12 ページまでの段落で丁寧に解説した。) 簡単のため、“接空間のレベル”を忘れて、単に“拡大・縮小写像”を考えると、上記の“形を保つ”という性質や“角度を保つ”という性質は、納得のいくものであろう。

“Conformal” という特性をもつ対象や概念は、数学や物理学で、時々登場する。用語としては、例えば

数学では、“conformal geometry”, “conformal invariant”, “conformal structure” など

という言葉で耳にし、また、

¹ 「拡大・縮小写像」というときには、恒等写像の場合も含んでいることに注意せよ。

物理では, “conformal field theory”, “conformal gauge”, “conformal symmetry” など

の用語で, なじみがあると思われる. このレクチャーノートでは, 和訳せずに, 原語 conformal を用いることにする.

このレクチャーノートでは, 以下の 5 つの内容についての研究の解説を行ったものである:

- [1] Conformal map (和訳は, 共形写像, あるいは, 等角写像) に関連した積分量である **conformality エネルギー (energy of conformality)**
- [2] Conformality エネルギーから, 変分学的に得られる写像である **C-stationary maps**
- [3] Conformality エネルギーの自然な $\pm$ 分解で現れる新しい積分量である **symphonic エネルギー (symphonic energy)**
- [4] Symphonic エネルギーから, 変分学的に得られる写像である **symphonic maps**
- [5] Radial map を含む harmonic maps の新しい族と, その不安定性

上記の 5 つの内容 [1] ~ [5] について, 少し説明を与えよう. まず

conformality エネルギー (energy of conformality)

は, 著者の一連の研究の発端となるもので

写像の conformality を測る新しい積分量

として, この概念を導入した. これは

写像の conformality をどうとらえるかという問題への一つの試み

であり, 第 1 章で解説する. Conformality エネルギーの定義から

“conformality エネルギーを最小にする写像は, conformal map に最も近い写像ではないか”

という自然に出てくる考えをもとに, “最小解 (minimizer)” より広い対象である

“停留解 (stationary solution)” により, **C-stationary map** という概念

を導く.

第 2 章では, “conformality エネルギーを最小にする写像は, conformal map に最も近い写像ではないか” という期待を裏づけるいくつかの例を与える. “Conformal map に最も近い写像” という意味は,

conformal map が存在する場合は,
conformal map に一致する

ということであり,

conformal map が存在しない状況でも,
“conformal map に最も近い写像” として捉えることができる

というわけである. 具体的なプロセスとしては, “conformality エネルギーを最小にする C-stationary maps” のクラスより少し広いクラスである

“安定な (stable) C-stationary maps” という写像のクラス

で議論する. これまでの考察から

conformality エネルギーを最小にする C-stationary map は
conformal map に最も近い写像である

という期待に対応して述べると

安定な C-stationary map は
conformal map に “局所的に” 最も近い写像である

と考えられる. ここで, 「局所的に」 最も近い」の意味は, 「その写像の近くの写像の中では最も近い」
という意味である.

まず, “安定な C-stationary maps” という概念が conformal maps の概念と一致してしまわないこ
との例として, 第 2.2 節で

“conformal map でない安定な C-stationary map” の特徴的な一つの例

を与える. 次に, 第 2.3 節から第 2.5 節にかけて

対称的な状況では, 安定な C-stationary maps と weakly conformal maps が一致する

ことを主張するいくつかの定理について解説する.

第 3 章は

conformality エネルギーの分解と, 分解によって得られる新しい積分量

についての解説である. まず

conformality エネルギーを自然に, 2 つの積分量に分解

したとき

“4-エネルギー” とよばれる積分量

(「一般には, 正の実数 p に対して “ p -エネルギー” として知られている L^p -積分量」の $p = 4$ の場合),
および,

これまで議論されてこなかった新しいタイプの積分量

が現れる.

後者の新しいタイプの積分量を **symphonic エネルギー**

とよび,

symphonic エネルギーの停留解として得られる写像を **symphonic map**

と名づけて研究を行った. これらは, 第 3 章で解説される.

第 4 章は, これまでの内容と趣きが異なり, まず, 第 4.1 節で, radial map を含む harmonic maps
の新しい族を帰納的に構成する. これらは, 原点に特異点をもち, また, p -harmonic maps ($p \geq 2$),

symphonic maps, C-stationary maps の特徴をもつ. さらに, これまでの研究により

radial map は
 harmonic map, p -harmonic map として
 安定である

という特徴が知られているのに対し, 上記の写像の新しい族の中で

radial map 以外の写像は
 harmonic map, p -harmonic map, symphonic map, C-stationary map として
 ほとんどの場合, 不安定になる

ということが証明される. 第 4 章は, 写像の新しい族の構成とその性質であり, 他の章とは独立していると考えられるが, 不安定な解の族が得られたという意味でも, 特徴的な内容となっている.

解析学的方法については, 微分幾何学で用いられている幾何解析 (Geometric Analysis) に特化したので, 例えば, symphonic maps の解析学的側面からの研究などは, 割愛した. これらに関しては, 熊本大学の三沢教授との共同研究で, symphonic map の方程式の弱解の存在と正則性 (本書の §3.8 で少しだけふれる), symphonic map の熱方程式 (symphonic map flow) などについての研究があるので, 興味をお持ちの方は, 直接, 論文 ([18], [19], [20], [22], [24] など) にあたってください.

本書では, できる限り丁寧な説明を心がけ, また, 議論や式変形の「理由」を可能な限り添えました. そのために, 専門家にとって冗長すぎる書き方になっているところもありますが, レクチャーノートという性質のため, と御理解いただけましたら幸いです. 本書により, “写像の conformality” に興味をもっていただけましたら, 望外の幸せです.

最後になりましたが, 本書で解説した一連の研究は, 科研費の基盤研究 (C) の研究課題として, 長年にわたり, 援助を受けてきました. 心より御礼申し上げます. また, このレクチャーノートの印刷にあたり, 山口大学基金「学術研究成果等出版支援事業」の支援を受けています. 本書の作成は, 山口大学基金の支援が無ければ, 実現しませんでした. 厚く御礼申し上げます.

2025 年 3 月 中内伸光

目次

第 1 章	Conformality エネルギー	7
1.1	設定と記号	7
1.2	Conformal maps	8
1.3	Conformality テンソル	14
1.4	Conformality エネルギー	17
1.5	第一変分公式と C-stationary maps	18
1.6	第二変分公式と安定性	23
1.7	計量を変形する変分に対する第一変分と Stress energy tensor	31
1.8	下半連続性	42
1.9	Conformality エネルギーの応用	46
第 2 章	C-stationary maps	51
2.1	この章の内容	51
2.2	Weakly conformal map でない安定な C-stationary map の例	52
2.3	球面からの安定な C-stationary maps	61
2.4	球面への安定な C-stationary maps	73
2.5	Rotationally symmetric maps の場合	77
2.6	C-stationary maps に関する今後の展望	86
第 3 章	Symphonic maps	87
3.1	Conformality エネルギーの分解と Symphonic エネルギー	87
3.2	Symphonic エネルギーに対する第一変分公式と Symphonic maps	90
3.3	Symphonic エネルギーに対する第二変分公式と安定性	92
3.4	Bochner type formula	94
3.5	Monotonicity formula	101
3.6	Liouville type theorems	107
3.7	m -symphonic エネルギーの条件のもとでの結果	110
3.8	Symphonic map の方程式の弱解の存在と正則性	124
第 4 章	Radial map を含む Harmonic maps の Family	127
4.1	Radial map を含む Harmonic maps の Family	127
4.2	Harmonic maps としての不安定性	143
4.3	p -harmonic map としての不安定性	157
4.4	Symphonic map としての不安定性	168
4.5	C-stationary map としての不安定性	180

記号表	185
参考文献	187
索引	190

第1章 Conformality エネルギー

1.1 設定と記号

まずは、リーマン多様体の基本事項と記号から始める。このレクチャーノートを通して、以下の設定で議論を進める：

設定：

- (1) (M, g) , (N, h) は、境界をもたないリーマン多様体 (Riemannian manifold) , すなわち, M , N は, $\partial M = \partial N = \emptyset$ であるなめらかな多様体 (smooth manifold) で, g, h はそれぞれ, その上のリーマン計量 (Riemannian metric) とする. m を多様体 M の次元とする.
- (2) $f : M \rightarrow N$ は, 多様体 M から 多様体 N へのなめらかな写像 (smooth map) とする.

“なめらかな (smooth)” というのは, “ C^∞ 級” という意味であるが, 微分幾何学では「微分可能性を気にせず, どんどん微分していった, 幾何学的性質や不変量を見つける」という方針であって, 一般の C^r 級 ($1 \leq r < \infty$) で考えることは少ないので, “ C^∞ 級” という言い方より, “smooth” というよび名を使用する. それどころか, “smooth” であることが前提なので, なめらかな多様体 (smooth manifold) を単に, 多様体 (manifold) とよぶことも多い. また, リーマン計量を単に, 計量 (metric) とよぶことも多い.

多様体が “境界をもたない” と仮定するのは, 多様体が境界をもつ場合は, 境界に対する配慮が必要となって, 議論が複雑になるからである. 例えば, このレクチャーノートでも, 多様体が境界をもたないと仮定しているので, 積分量の計算で,

divergence form (発散形) の関数を, 多様体上で積分するとゼロになる

という事実を用いることが少なくないが, 多様体が境界をもつと, 境界上の積分が現れ, この積分量に対応しなければならなくなる. また, 変分問題としても, 境界を持つ場合は, 「境界を固定する」か, あるいは, 「境界を動かすか」によってそれぞれ「固定境界値問題」, あるいは, 「自由境界値問題」として, 扱い方が異なってくる.

以下の記号は標準的である：

記号：

- (1) (接空間) M の任意の点 x に対して, $T_x M$ は, 点 x における M の接空間 (tangent space) を表す. $T_y N$ も同様に, 点 $y \in N$ における N の接空間である.

- (2) (接ベクトル) 接空間 $T_x M$ に属する接ベクトル (**tangent vector**) は $X_x, Y_x, Z_x, \dots$ と表す. 接ベクトルを単に, ベクトル (**vector**) とよぶことも多い.
- (3) (接ベクトル場) M 上の接ベクトル場 (**tangent vector field**) は $X, Y, Z, \dots$ とかく. 接ベクトル場を単に, ベクトル場 (**vector field**) とよぶことも多い.

このレクチャーノートで, 記号を使用する接ベクトルや接ベクトル場は, 写像 f の定義域である多様体 M 上のものがほとんどである.

多様体 M から多様体 N へのなめらかな写像 f は, 接空間の間の線形写像である微分写像 (**differential map**) df を引き起こす. 記号の簡単のため df と書いたが, 実際は, リーマン多様体 M の各点 x に対して定まる線形写像

$$(df)_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

の総称である. このとき, N の リーマン計量 h を写像 f で引き戻す (**pull back**) という操作が定まる. この引き戻されたテンソル量 f^*h は, 計量 h の写像 f による引き戻し (**pullback**) とよばれる:

——— 引き戻し (Pullback) ———

$$(f^*h)(X, Y) = h(df(X), df(Y))$$

これも, 記号の簡単のため省略して書いたが, 正確には

$$(f^*h)_x(X_x, Y_x) = h_{f(x)}((df)_x(X_x), (df)_x(Y_x))$$

の意味である. ここで, 計量 h は, N の各点 y に対して, 点 y における接空間 $T_y N$ の内積であるので, そのことを強調して h_y と表している. したがって, 上記の $h_{f(x)}((df)_x(X_x), (df)_x(Y_x))$ は, 接空間 $T_{f(x)} N$ の2つのベクトル $(df)_x(X_x)$ と $(df)_x(Y_x)$ の内積 $h_{f(x)}$ をとった結果を表している.

1.2 Conformal maps

まずは, conformal map の定義から始めよう.

——— Conformal map ———

写像 f が **conformal map** であるとは, M 上の, ゼロの値をとらない, なめらかな関数 φ が存在して

$$(*) \quad f^*h = \varphi g$$

が成り立つことをいう.

Conformal map の条件式 (*) を, pullback の定義の部分を書き下すと

$$(*)_0 \quad h(df(X), df(Y)) = \varphi(x)g(X, Y)$$

となる. 記号の簡単さのため省略して書いたが, 正確には

$$h_{f(x)}((df)_x(X_x), (df)_x(Y_x)) = \varphi(x)g_x(X_x, Y_x)$$

の意味である. Conformal map の定義としては, 通常は, 上記の $(*)_0$ の形で書かれていることが多い. ここで, conformality の条件 (*), すなわち, 条件 $(*)_0$ の内容を少し説明する.

Conformality の条件 $(*)_0$ の内容の説明

ここから

Conformality の条件 $(*)_0$ は, 計量の記号で書いてあるので少し見にくいかもしれないが, 実は“単なる線形代数の内容”であるので, その点を取り上げて説明する.

Conformality の条件 $(*)_0$ の本質的な部分は, 以下のような「線形代数の構造」の条件である.

2つの線形空間 V, W がそれぞれ, 内積 $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_W$ をもつとき
 V から W への線形写像 T に対して
 ある定数 C_1 が存在して
 V の任意のベクトル u, v に対して

$$(\sharp) \quad (T(u), T(v))_W = C_1(u, v)_V$$

が成り立つ.

ここは

$$\begin{array}{ccc} \text{微分写像} & & \text{線形写像} \\ (df)_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N & \longleftrightarrow & T : V \rightarrow W \end{array}$$

という対応, すなわち

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \longleftrightarrow & V \\ T_{f(x)} N & \longleftrightarrow & W \\ g_x(\cdot, \cdot) & \longleftrightarrow & (\cdot, \cdot)_V \\ h_{f(x)}(\cdot, \cdot) & \longleftrightarrow & (\cdot, \cdot)_W \\ (df)_x & \longleftrightarrow & T \\ X_x & \longleftrightarrow & u \\ Y_x & \longleftrightarrow & v \\ \varphi(x) & \longleftrightarrow & C_1 \end{array}$$

という対応で,

条件 $(*)_0$ を, 「線形代数の構造」の条件 $(\sharp)$ としてとらえる

が必要となる. ここで, 条件 $(\sharp)$ について, 以下の3つの注意点 [1], [2], [3] をあげておく.

[1] $C_1 \geq 0$ である. これは, 内積 $(\cdot, \cdot)_V$ および $(\cdot, \cdot)_W$ が正定値であることからわかる.

[2] $C_1 = 1$ の場合, すなわち,

$$(T(u), T(v))_W = (u, v)_V \text{ が成り立つ場合は, 線形写像 } T \text{ が内積を保つとよぶ}$$

こともある.

[3] 一般に

条件 $(\sharp)$ は

“線形変換 T が, 本質的に, 拡大・縮小写像であること” にほかならない.

これは, 以下の命題に根拠を置いている.

次の条件 (1) と (2) は同値である:

- (1) 正の定数 C_1 が存在して, V の任意のベクトル u, v に対して $(T(u), T(v))_W = C_1(u, v)_V$ である.
- (2) 正の定数 C_2 , および, 内積を保つ線形同型写像 $A: V \rightarrow \text{Im } T$ が存在して $T(u) = C_2 A(u)$ である. ただし, $\text{Im } T$ は T の像, すなわち, $\text{Im } T = \{ T(u) \mid u \in V \}$ とする.

上記の条件 (2) が成り立つとき,

内積を保つ線形同型写像 A により

$A(u)$ と u を同一視すると

T の像 $\text{Im } T$ と V が内積をもつ線形空間として同一視される

ので

T は V 上の線形変換とみなすことができ, $T(u) = C_2 u$ となる,

すなわち

T は拡大・縮小写像である

ことがわかる. これをもって,

T は, 本質的に, 拡大・縮小写像である

と表現している.

なお, 上記の命題の条件 (1) と (2) が同値であることの証明については, 以下のように示される.

(1) $\Rightarrow$ (2) を示そう. (1) を仮定すると,

V の任意の正規直交基底 $e_1, \dots, e_m$

に対して

$\frac{1}{\sqrt{C_1}} T(e_1), \dots, \frac{1}{\sqrt{C_1}} T(e_m)$ は $\text{Im } T$ の正規直交基底である

ことが確かめられる. 実際, これらのベクトルが, 線形空間 $\text{Im } T$ を生成することは作り方から明らかであり, また, 正規直交性は, $1 \leq i, j \leq m$ となる任意の正の整数 i, j に対して

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{C_1}} T(e_i), \frac{1}{\sqrt{C_1}} T(e_j) \right)_W &= \frac{1}{C_1} (T(e_i), T(e_j))_W \\ &\stackrel{(1)}{=} (e_i, e_j)_V \\ &= \delta_{ij} \quad (\because e_1, \dots, e_m \text{ は } V \text{ の正規直交基底}) \end{aligned}$$

と確認できるからである. ただし, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である, すなわち,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である. また

$$A(u) = \frac{1}{\sqrt{C_1}} T(u)$$

とおくと

線形写像 A は, e_i を $\frac{1}{\sqrt{C_1}} T(e_i)$ に対応させる

ことから

線形写像 A は, V から T の像 $\text{Im } T$ への同型写像を与えている

ことがわかる. そこで, $C_2 = \sqrt{C_1}$, および, $A(u) = \frac{1}{\sqrt{C_1}} T(u)$ とおけば (2) が得られる.

逆に, (2) $\Rightarrow$ (1) を確かめよう. (2) を仮定するとき, $C_1 = C_2^2$ とおくと

$$\begin{aligned} (T(u), T(v))_W &= C_2^2 (A(u), A(v))_W \\ &= C_1 (u, v)_V \quad (\because A \text{ は, 内積を保つ}) \end{aligned}$$

となり, (1) が成り立つ.

上記の 3 つの注意点 [1], [2], [3] を, もともとの conformality の条件 $(*)_0$ にフィードバックすると, それぞれ, 以下の 3 つの内容 [1], [2], [3] になる:

- [1] 関数 φ は非負値関数である。これは、計量 g および h が正定値であることからわかる。
 [2] $\varphi(x) = 1$ (定数関数) の場合、すなわち、

$$f^*h = g \text{ が成り立つ場合は、写像 } f \text{ が計量を保つとよぶ}$$

こともある。このとき、 f は **isometry** (等長写像) とよばれる。また、このことをふまえて、

conformal map とは、

“isometry から 関数倍 (φ 倍) だけズレた写像” である

ということができる。したがって、

conformal map では、この “ φ による関数倍” が重要な特性を表している

というわけである。

- [3] 線形写像 T と微分写像 df の対応を考慮すれば、

conformality の条件 $(*)_0$ は

“微分写像 df が、本質的に、拡大・縮小写像であること” にほかならない

ということになり、1 ページの「はじめに」で述べた

conformal map は、“接空間のレベルでは、本質的に、拡大・縮小写像” である

という表現の説明になっている。

Conformality の条件 $(*)_0$ の内容の説明

ここまで

ここで、weakly conformal map の定義にふれておこう。上記の “conformal map” の定義で、「関数 φ がゼロの値をとらない」という条件を除いたものを “weakly conformal map” とよぶ。言いかえると、単に、conformal map の定義の条件 $(*)$ を満たす写像を weakly conformal map とよぶ。

Weakly conformal map

写像 f が **weakly conformal map** であるとは、 M 上のなめらかな関数 φ が存在して

$$(*) \quad f^*h = \varphi g$$

が成り立つことをいう。

さて、ここで、これから議論のポイントとなる点を説明する。Conformal map (あるいは、weakly conformal map) の定義の条件 $(*)$ について、もう少し詳しく調べる。実は、

関数 φ は、写像 f を用いて書き下すことができる。

実際、等式 (*) の両辺の、 g に関するトレース Tr_g をとると

$$(1.1) \quad \text{Tr}_g(f^*h) = \varphi \text{Tr}_g g$$

であるが、 e_i ($i = 1, \dots, m$) を M 上の局所的な正規直交フレーム (各接空間で正規直交基底となる局所的なベクトル場の組) とすると

$$(1.2) \quad \text{Tr}_g(f^*h) = \sum_{i=1}^m (f^*h)(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^m h(df(e_i), df(e_i)) = \|df\|^2$$

$$(1.3) \quad \text{Tr}_g g = \sum_{i=1}^m g(e_i, e_i) = m$$

であるので、(1.1) は

$$\|df\|^2 = m\varphi \quad \text{すなわち} \quad \varphi = \frac{1}{m} \|df\|^2$$

となって、 φ が df で記述できる。ここで、 $\|df\|$ は、微分写像 df のノルム

$$\|df\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m h(df(e_i), df(e_i))}$$

である。したがって、weakly conformal map の定義は次のように言い換えられる。

Weakly conformal map (書き直し)

写像 f が **weakly conformal map** であるとは

$$(**) \quad f^*h = \frac{1}{m} \|df\|^2 g$$

が成り立つことをいう。

同様に、conformal map の定義は次のように言い換えられる。

Conformal map (書き直し)

写像 f が **conformal map** であるとは、 $df \neq 0$ (df はゼロ写像でない) であって

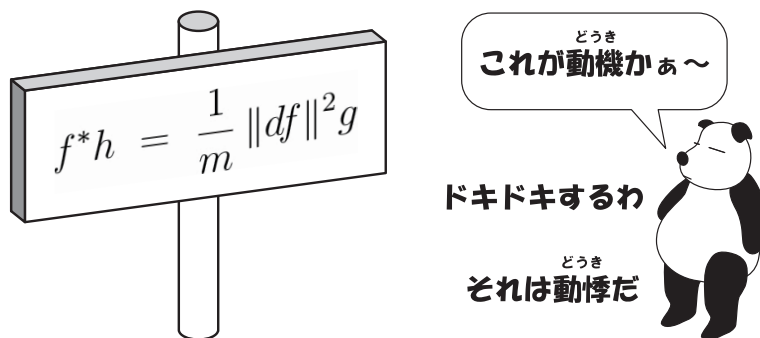
$$(**) \quad f^*h = \frac{1}{m} \|df\|^2 g$$

が成り立つことをいう。

ここで、強調しておく

Conformal map は、通常は式 (*) で定義されるが、
式 (**) の形に表せることに気づいたことが、
一連の研究の発端となる動機となった。

これは、今後の議論のポイントとなる内容であるので、少し記憶に残しておいてください。



1.3 Conformality テンソル

前節で、conformal map の条件が、式 (**) の形で表せることを観察した。そこで、新しいテンソル量 (covariant 2-tensor) として、次のような量を考えることにする。

Conformality テンソル (Tensor of conformality)

$$(1.4) \quad T_f := f^*h - \frac{1}{m} \|df\|^2 g$$

これまでの考察から

$$(1.5) \quad f \text{ が weakly conformal map} \iff T_f = 0$$

であり

$$(1.6) \quad f \text{ が conformal map} \iff T_f = 0 \text{ かつ } df \neq 0$$

となっている。

この節の最後に、conformality テンソル T_f の基本的性質にふれておこう。

補題 1.3.1 (conformality テンソルの基本的性質)

- (1) T_f は symmetric, すなわち, $T_f(X, Y) = T_f(Y, X)$
- (2) f が weakly conformal map である $\iff T_f = 0$
- (3) T_f は (計量 g に関して) trace-free である, すなわち,

$$\mathrm{Tr}_g T_f \stackrel{\text{定義}}{=} \sum_{i=1}^m T_f(e_i, e_i) = 0$$

である. ただし, e_i ($i = 1, \dots, m$) を, リーマン多様体 (M, g) 上の局所的な正規直交フレームとする. これは, 言いかえると, 2つの covariant 2-tensor g と T_f の積がゼロである, すなわち,

$$(g, T_f) \stackrel{\text{定義}}{=} \sum_{i,j=1}^m g(e_i, e_j) T_f(e_i, e_j) = 0$$

である.

- (4) pullback f^*h と conformality テンソル T_f の積は T_f の二乗ノルムの二乗 $\|T_f\|^2$ に等しい, すなわち,

$$(f^*h, T_f) = \sum_{i,j=1}^m (f^*h)(e_i, e_j) T_f(e_i, e_j) = \|T_f\|^2$$

- (5) $\|T_f\|^2 = \|f^*h\|^2 - \frac{1}{m} \|df\|^4$

ここで, (3), (4) において, 積 $(\ , \)$ は, 2つの covariant 2-tensors A, B に対する積

$$(A, B) = \sum_{i,j=1}^m A(e_i, e_j) B(e_i, e_j)$$

を表している.

注意 1.3.2 上記の定理 (定理 1.3.1) の (3) において, 前半と後半の主張をつなぐのは, 等式 $(g, T_f) = \mathrm{Tr}_g T_f$ である. この等式に関しては, より一般に, 任意の covariant 2-tensor B に対して

$$(1.7) \quad (g, B) = \mathrm{Tr}_g B$$

が成り立ち, 特に, $B = T_f$ として, 等式 $(g, T_f) = \mathrm{Tr}_g T_f$ が得られる. 一般的等式 (1.7) は,

$$(g, B) = \sum_{i,j=1}^m g(e_i, e_j) B(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^m \delta_{ij} B(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^m B(e_i, e_i) = \mathrm{Tr}_g B$$

と容易に確かめられる. ここで, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である, すなわち,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である.

補題 1.3.1 の証明 (1) は T_f の定義から容易にわかる.

(2) は, すでに確かめた.

(3):

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Tr}_g T_f &= \sum_{i=1}^m T_f(e_i, e_i) \\
 &\stackrel{(1.4)}{=} \sum_{i=1}^m \left\{ (f^* h)(e_i, e_i) - \frac{1}{m} \|df\|^2 g(e_i, e_i) \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^m h(df(e_i), df(e_i)) - \frac{1}{m} \|df\|^2 \sum_{i=1}^m g(e_i, e_i) \\
 &\stackrel{(1.3)}{=} \sum_{i=1}^m h(df(e_i), df(e_i)) - \|df\|^2 \\
 &\stackrel{(1.2)}{=} \|df\|^2 - \|df\|^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

後半の等式は, 注意 1.3.2 から明らかである.

(4):

$$\begin{aligned}
 (f^* h, T_f) &\stackrel{(1.4)}{=} \left(T_f + \frac{1}{m} \|df\|^2 g, T_f \right) \\
 &= (T_f, T_f) + \frac{1}{m} \|df\|^2 (g, T_f) \\
 &\stackrel{(3)}{=} \|T_f\|^2
 \end{aligned}$$

(5):

$$\begin{aligned}
 \|T_f\|^2 &\stackrel{(4)}{=} (f^* h, T_f) \\
 &\stackrel{(1.4)}{=} \left(f^* h, f^* h - \frac{1}{m} \|df\|^2 g \right) \\
 &= \|f^* h\|^2 - \frac{1}{m} \|df\|^2 (f^* h, g) \\
 &\stackrel{(f^* h, g) = \mathrm{Tr}_g(f^* h) \text{ および } (1.2)}{=} \|f^* h\|^2 - \frac{1}{m} \|df\|^4
 \end{aligned}$$

上記の最後の等式では, 注意 1.3.2 の式 (1.7) で, $B = f^* h$ とおくことにより得られる等式 $(f^* h, g) = \mathrm{Tr}_g(f^* h)$ を用いている. 以上で, 補題 1.3.1 の証明が終わった. $\square$

最後に一つ, コメントを述べておくことにする. **harmonic map** (調和写像) という概念があり, その応用も含めて, 多くの研究がなされている. ここでは詳しく触れないが, harmonic maps については, Eells と Lemaire が総合報告 ([4], [5]) を書いているので, 必要に応じて, そちらを参照のこと. 一般に, harmonic maps に対して, **stress energy tensor**

$$S_f = f^* h - \frac{1}{2} \|df\|^2 g$$

というのが考えられている ([5], p.392). 多様体 M が 2 次元のとき ($m = 2$ の場合) には, stress energy tensor S_f は conformality テンソル T_f に一致する. Stress energy tensor というのは, harmonic maps のエネルギーに関する変分問題で, 写像を動かさず, 定義域の多様体 M の計量を動かして, 第一変分をとることにより得られる. 多様体 M が 2 次元の場合, harmonic maps のエネルギーは conformally invariant (定義域の多様体の計量の conformal deformation で不変) であるので, conformality テンソル T_f が現れたという次第である. このことから, conformality テンソル T_f は, 自然な概念であると言える.

1.4 Conformality エネルギー

Conformality テンソル T_f から, スカラー量となる積分量を定義する.

Conformality エネルギー (Energy of conformality)

$$(1.8) \quad E_{con}(f) = \int_M \|T_f\|^2 dv_g$$

ここで, dv_g は, リーマン多様体 (M, g) の体積要素であり, また, $\|T_f\|$ は conformality テンソル T_f のノルム

$$\|T_f\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^m T_f(e_i, e_j)^2}$$

とする. また, e_i ($i = 1, \dots, m$) は, これまでと同様に, リーマン多様体 (M, g) 上の局所的な正規直交フレームである. Conformality エネルギー $E_{con}(f)$ に対応して, 関数 $\|T_f\|^2$ を **conformality エネルギー密度 (energy density of conformality)** と呼ぶことにする. (1.5) や (1.6) の条件の $T_f = 0$ の右辺の 0 はゼロテンソルということであるので, M のすべての点で $T_f = 0$ を満たすということであるが, 積分量 (1.8) にすることにより,

$$(1.9) \quad f \text{ が weakly conformal map} \iff E_{con}(f) = 0$$

であり

$$(1.10) \quad f \text{ が conformal map} \iff E_{con}(f) = 0 \text{ かつ } df \neq 0$$

となり¹,

この積分量で定義されるスカラー量 $E_{con}(f)$ が,
写像 f の conformality を “測る” ことができるのではないか

と期待される. そこで, (1.8) で定義されるスカラー量を **conformality エネルギー (energy of conformality)** とよぶことにする. 定義より明らかに $E_{con}(f) \geq 0$ であるので,

¹ 正確には $E_{con}(f) = 0$ ならば $T_f = 0$ a.e. (ほとんどいたるところ $T_f = 0$) であるが, ここでは f は smooth map という前提であるので, $T_f = 0$ (いたるところ $T_f = 0$) となる.

conformality エネルギーの最小値 $E_{con}(f) = 0$ が
写像 f の conformality を特徴づける

という状況になっている。これは

「conformality エネルギー $E_{con}(f)$ を最小にする」
という変分問題を考えることにより、
conformal map を見つけたり、特徴づけたりすることが
できるのではないか

という動機につながる。さらに進んで、conformal maps が存在しない状況のときには

conformality エネルギー $E_{con}(f)$ を最小にする写像 f として
“conformal map に最も近い写像” が得られるのではないか

という期待も出てくる。

このような次第で、conformality エネルギー $E_{con}(f)$ の最小値問題という変分問題を考える。微分学で、最小値問題を解くときには、一階微分と二階微分を計算して増減表をかくが、“無限次元版の微分学”である変分学では、「一階微分に相当する第一変分」と「二階微分に相当する第二変分」を計算する必要がある。次の節で第一変分を、その次の節で第二変分を計算する。さらに、conformal maps を見据えながら、次の節で、第一変分を用いて

conformality エネルギー E_{con} の停留点、すなわち、
任意の変分に対して E_{con} の第一変分がゼロである写像を
C-stationary map と定義する

ことにしよう。

1.5 第一変分公式と C-stationary maps

この節では、conformality エネルギーの第一変分を用いて C-stationary map の定義を与え、さらに、第一変分公式を導こう。

まず、変分の一般的定義から始める。写像 f をパラメーター t でなめらかに動かした変分 f_t を考える。写像 f をなめらかに動かすことを直接に定義するのは難しいので、パラメーター t を変分の定義域に組み込んで、次のように定義するのが一般的である。

定義 1.5.1 (変分) 写像 f の変分 (variation) とは、なめらかな写像

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow N$$

であって、 $F(0, x) = f(x)$ を満たすものをいう。ここで ε は (小さな) 正の数とする。そこで

$$f_t(x) = F(t, x)$$

とおく。 $f_0(x) = f(x)$ であるので、写像 f_t は、写像 f をパラメーター t で変形したものとなる。 f_t も、写像 f の変分 (variation) とよぶ。

変分 f_t が欲しかったものであるが、写像をなめらかに変形することを、直接に定義することは難しいので², 上記のように、写像 F を経由して定義したわけである。このとき

定義 1.5.2 (変分ベクトル場)

$$X = dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}$$

とおき、変形 F の変分ベクトル場 (**variation vector field**) とよぶ。ここで、 $\frac{\partial}{\partial t}$ は、偏微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ から誘導される $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ 上のベクトル場である。

ここで、第一変分の定義を思い起こそう。

定義 1.5.3 (第一変分) E_{con} の f における X の方向の第一変分とは

$$(\delta E_{con})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \frac{dE_{con}(f_t)}{dt} \Big|_{t=0}$$

のことをいう³。

ここで、前節の最後にふれたように、C-stationary map の定義を与えておく：

定義 1.5.4 (C-stationary map) なめらかな写像 f が **C-stationary map** であるとは、 f の任意の変分 f_t に対して、 E_{con} の第一変分がゼロである、すなわち、

$$(\delta E_{con})(f)(X) = \frac{dE_{con}(f_t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

であることをいう。

ちなみに

“C-stationary map” の冒頭の “C” は conformal の頭文字から命名したもの

である。以下、第一変分を計算しよう。まず、後出の第一変分公式に現れる、次のテンソル量を定義しておく。

——— テンソル量 ξ_f ———

$$(1.11) \quad \xi_f(X) = \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) df(e_j)$$

ここで e_i ($i = 1, \dots, m$) は、局所的な正規直交フレームである⁴。

² 直接に定義しようとする、「写像をなめらかに変形する」ということを記述するために、写像の (無限次元) 空間に、局所座標を入れて多様体の構造を入れるなど、記述に必要となることが増えてくるからである。

³ 第一変分は、変分 f_t を用いて定義されているが、写像 f とベクトル場 X だけで定まることに注意せよ。

⁴ テンソル量 ξ_f が、局所的な正規直交フレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) のとり方によらずに well-defined であることは容易に

テンソル量 ξ_f は M 上の $f^{-1}TN$ -valued 1-form と見なせる．ここで、後で使用する等式にふれておく：

補題 1.5.5

$$(1.12) \quad \|T_f\|^2 = \sum_{i=1}^m h(df(e_i), \xi_f(e_i))$$

証明 計量 $h(\cdot, \cdot)$ は bilinear (双線形) であるから

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) &= h\left(df(e_i), \sum_{j=1}^m T_f(e_i, e_j) df(e_j)\right) \\ &\stackrel{(1.11)}{=} h(df(e_i), \xi_f(e_i)) \end{aligned}$$

となる．この等式の両辺において、 i に関して 1 から m まで和をとると

$$\sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^m h(df(e_i), \xi_f(e_i))$$

となる．ここで、 $(f^*h)(e_i, e_j) = h(df(e_i), df(e_j))$ であることに注意すると、上記の等式と補題 1.3.1 (4) から (1.12) が導かれる．□

Conformality エネルギー E_{con} に対する第一変分公式は、以下のようになる．

定理 1.5.6 (第一変分公式)

$$(\delta E_{con})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{dE_{con}(f_t)}{dt} \right|_{t=0} = -4 \int_M h(X, \operatorname{div}_g \xi_f) dv_g$$

ここで、 $\operatorname{div}_g \xi_f$ は ξ_f の発散 (divergence) とする、すなわち、 $\operatorname{div}_g \xi_f = \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \xi_f)(e_i)$ である．

証明 M 上の接続 ∇ は、 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ 上の接続に自然に拡張されるが、この拡張された接続も、同じ記号 ∇ で表す． M 上の局所的な正規直交フレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) をとる． M の領域 U を e_i 確かめられる．実際、2つの正規直交フレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) および $\hat{e}_j$ ($j = 1, \dots, m$) をとったとき、お互いに、直交変換で移りあえるので、ある直交行列 a_{ij} が存在して $e_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \hat{e}_j$ となる．ここで、 a_{ij} は直交行列なので $\sum_{i=1}^m a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$ (δ_{jk} は Kronecker の δ 記号) を満たす．このとき

$$\sum_{i=1}^m T_f(X, e_i) df(e_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m a_{ij} a_{ik} T_f(X, \hat{e}_j) df(\hat{e}_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{jk} T_f(X, \hat{e}_j) df(\hat{e}_k) = \sum_{j=1}^m T_f(X, \hat{e}_j) df(\hat{e}_j)$$

となって、局所的な正規直交フレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) のとり方によらないことが確かめられた．

このように、幾何学量やテンソル量の定義が、局所的な正規直交フレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) のとり方によらないことは大前提で、定義自体に組み込まれていると言っても過言ではない．これまで、例えば、補題 1.3.1 において、(3) の trace Tr_g や、(3), (4) で用いられている積 $(\cdot, \cdot)$ や、さらには、(4), (5) におけるノルム $\|\cdot\|$ も、局所的な正規直交フレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) のとり方によらないことが前提になっている．今後は、様々な定義において、「局所的な正規直交フレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) のとり方によらない」という点には全くふれないが、大前提になっていることに注意してください．

$(i = 1, \dots, m)$ の定義域とすると, e_i は $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$ に自然に拡張できるが, これも同じ記号 e_i で表す.

M 上の任意の点 x_0 を一つとり, 固定する. 点 x_0 において $\frac{\partial}{\partial t} \|T_{f_t}\|^2$ を計算する. x_0 における normal coordinate (正規座標) を用いると,

$$(1.13) \quad x_0 \text{ において, 任意の } i, j = 1, \dots, m \text{ に対して } \nabla_{e_i} e_j = 0$$

である. また

$$(1.14) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i = 0$$

$$(1.15) \quad \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

であるから

$$\begin{aligned}
 (1.16) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)) &\stackrel{(1.14)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)) - dF\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i\right) \\
 &\stackrel{\text{Hessian } (\nabla_X df)(Y) \text{ の定義}}{=} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dF)(e_i) \\
 &\stackrel{\text{Hessian の可換性 } (\nabla_X df)(Y) = (\nabla_Y df)(X)}{=} (\nabla_{e_i} dF)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
 &\stackrel{\text{Hessian } (\nabla_X df)(Y) \text{ の定義}}{=} \nabla_{e_i} \left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) - dF\left(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t}\right) \\
 &\stackrel{(1.15)}{=} \nabla_{e_i} \left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)
 \end{aligned}$$

である. このとき

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \|T_{f_t}\|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j=1}^m T_{f_t}(e_i, e_j)^2 \\
 &= 2 \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial T_{f_t}(e_i, e_j)}{\partial t} T_{f_t}(e_i, e_j) \\
 &\stackrel{(1.4)}{=} 2 \sum_{i,j=1}^m \left\{ \frac{\partial}{\partial t} h(df_t(e_i), df_t(e_j)) - \frac{1}{m} \frac{\partial \|df_t\|^2}{\partial t} g(e_i, e_j) \right\} T_{f_t}(e_i, e_j) \\
 &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} h(df_t(e_i), df_t(e_j)) \right) T_{f_t}(e_i, e_j) - \frac{2}{m} \frac{\partial \|df_t\|^2}{\partial t} \sum_{i,j=1}^m g(e_i, e_j) T_{f_t}(e_i, e_j) \\
 &\stackrel{\text{補題 1.3.1(3)}}{=} 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} h(df_t(e_i), df_t(e_j)) \right) T_{f_t}(e_i, e_j) \\
 &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_i), dF(e_j)) \right) T_{f_t}(e_i, e_j) \\
 &\stackrel{\text{補題 1.3.1(1)}}{=} 4 \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)), dF(e_j)\right) T_{f_t}(e_i, e_j) \\
 &\stackrel{(1.16)}{=} 4 \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{e_i} \left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right), df_t(e_j)\right) T_{f_t}(e_i, e_j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{補題 1.5.5}}{=} 4 \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \sum_{j=1}^m T_{f_t}(e_i, e_j) df_t(e_j) \right) \\
& \quad (\because h(A, B) T_{f_t}(C, D) = h(A, T_{f_t}(C, D) B)) \\
& \stackrel{(1.11)}{=} 4 \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_{f_t}(e_i) \right)
\end{aligned}$$

すなわち

$$(1.17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \|T_{f_t}\|^2 = 4 \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_{f_t}(e_i) \right)$$

となる。そこで

$$\alpha(X) = h \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \xi_{f_t}(X) \right)$$

とおくと

$$(1.18) \quad \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_{f_t}(e_i) \right) = \operatorname{div} \alpha - h \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \operatorname{div} \xi_{f_t} \right)$$

である。実際、

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \alpha &= \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \alpha)(e_i) = \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} (\alpha(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_{f_t}(e_i) \right) + h \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} (\xi_{f_t}(e_i)) \right) \\
&= \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_{f_t}(e_i) \right) + h \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \xi_{f_t})(e_i) \right) \\
&\quad \left(\because \begin{array}{l} \text{点 } x \text{ において} \\ (\nabla_{e_i} \xi_{f_t})(e_i) \stackrel{(\nabla_X \xi_f)^{(Y)} \text{ の定義}}{=} \nabla_{e_i} (\xi_{f_t}(e_i)) - \xi_{f_t}(\nabla_{e_i} e_i) \stackrel{(1.13)}{=} \nabla_{e_i} (\xi_{f_t}(e_i)) \end{array} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_{f_t}(e_i) \right) + h \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \operatorname{div} \xi_{f_t} \right)
\end{aligned}$$

となる。したがって、(1.17) および (1.18) より

$$(1.19) \quad \frac{\partial}{\partial t} \|T_{f_t}\|^2 = \operatorname{div} \alpha - h \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \operatorname{div} \xi_{f_t} \right)$$

が得られる。 $\partial M = \emptyset$ であるから $\int_M \operatorname{div} \alpha dv_g = 0$ となるので、(1.19) の両辺を M 上で積分することにより

$$\frac{d}{dt} \int_M \|T_{f_t}\|^2 dv_g = \int_M \frac{\partial}{\partial t} \|T_{f_t}\|^2 dv_g = -4 \int_M \sum_{i=1}^m h \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \operatorname{div} \xi_{f_t} \right) dv_g$$

となる。この式で $t = 0$ とおくと、求める第一変分公式が得られる。 $\square$

定義 1.5.4 において、conformality エネルギー E_{con} の停留点として C-stationary maps の概念が定義されたが、第一変分公式 (命題 1.5.6) により、次が導かれる：

命題 1.5.7 (C-stationary map の方程式) なめらかな写像 f が C-stationary map であるための必要十分条件は f が, conformality エネルギー E_{con} に対するオイラー・ラグランジュ方程式 (Euler-Lagrange equation)

$$(1.20) \quad \operatorname{div}_g \xi_f = 0$$

を満たすことである. ここで, ξ_f は, 等式 (1.11) で定義される共変テンソルである. この方程式 (1.20) を **C-stationary map の方程式 (C-stationary map equation)** とよぶことにする.

証明 第一変分公式により

f が C-stationary map である

$\Leftrightarrow$

f の任意の変分 f_t に対して
 E_{con} の第一変分がゼロである, すなわち,

$$\left. \frac{dE_{con}(f_t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

第一変分公式
 $\Leftrightarrow$

任意のベクトル X に対して

$$\int_M h(X, \operatorname{div}_g \xi_f) dv_g = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\operatorname{div}_g \xi_f = 0$$

となり, 証明された. $\square$

1.6 第二変分公式と安定性

まずは, 第二変分の定義を思い起こそう.

定義 1.6.1 (第二変分) Conformality エネルギー E_{con} の f における X の方向の第二変分とは

$$(\delta^2 E_{con})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2 E_{con}(f_t)}{dt^2} \right|_{t=0}$$

のことをいう⁵.

以下のような第二変分公式が成り立つ.

定理 1.6.2 (第二変分公式)

$$\begin{aligned}
 (1.21) \quad & \frac{1}{4} (\delta^2 E_{con})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \frac{1}{4} \left. \frac{d^2 E_{con}(f_t)}{dt^2} \right|_{t=0} \\
 &= \int_M h \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right), \text{div}_g \xi_f \right) dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_j} X) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_j))^2 dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_j)) h(df(e_i), \nabla_{e_j} X) dv_g \\
 &\quad - \frac{2}{m} \int_M \left\{ \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_i)) \right\}^2 dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h({}^N R(X, df(e_i)) X, df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g
 \end{aligned}$$

ここで Hess_f は f のヘッシアン (Hessian) とする, すなわち, $\text{Hess}_f(Y, Z) = (\nabla_Y df)(Z) = (\nabla_Z df)(Y)$ である.

注意 1.6.3 f が C-stationary map であれば, f は C-stationary map の方程式 $\text{div}_g \xi_f = 0$ を満たす (命題 1.5.7) ので, 第二変分公式の右辺の第一項はゼロになる.

注意 1.6.4 第二変分公式の右辺の最後の項は

$$\int_M \sum_{i=1}^m h({}^N R(X, df(e_i)) X, \xi_f(e_i)) dv_g$$

に等しい. なぜならば

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^m h({}^N R(X, df(e_i)) X, df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m h \left({}^N R(X, df(e_i)) X, \sum_{j=1}^m T_f(e_i, e_j) df(e_j) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^m h({}^N R(X, df(e_i)) X, \xi_f(e_i))
 \end{aligned}$$

であるからである.

定理 1.6.2 (第二変分公式) の証明 M 上の接続 ∇ は, $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ 上の接続に自然に拡張されるが, この拡張された接続も, 同じ記号 ∇ で表す. M 上の局所的な正規直交フレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) を

⁵ Conformality エネルギー E_{con} の第二変分も, 第一変分の場合と同様に, 変分 f_t を用いて定義されているが, 写像 f とベクトル場 X だけで定まることに注意せよ.

とる. M の領域 U を e_i ($i = 1, \dots, m$) の定義域とすると, e_i は $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$ に自然に拡張できるが, これも同じ記号 e_i で表す.

M 上の任意の点 x_0 を一つとり, 固定する. 点 x_0 において $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \|f_t^* h\|^2$ を計算する. x_0 における normal coordinate (正規座標) を用いると,

$$(1.22) \quad x_0 \text{ において, 任意の } i, j = 1, \dots, m \text{ に対して } \nabla_{e_i} e_j = 0$$

である. また,

$$(1.23) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i = \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

であるから, (1.16) と同様に

$$(1.24) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)) = \nabla_{e_i} (dF(\frac{\partial}{\partial t}))$$

となる. したがって

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \|T_{f_t}\|^2 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i,j=1}^m T_{f_t}(e_i, e_j)^2 \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 T_{f_t}(e_i, e_j)}{\partial t^2} T_{f_t}(e_i, e_j) + 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial T_{f_t}(e_i, e_j)}{\partial t} \right)^2 \\ &\stackrel{\text{定義}}{=} I_1 + I_2 \end{aligned}$$

である. ここで, 式 (1.25) の最右辺の 2 つの項をそれぞれ, I_1 および I_2 とおいた. このとき

$$(1.26) \quad \begin{aligned} I_1 &\stackrel{(1.4)}{=} 2 \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(h(df_t(e_i), df_t(e_j)) - \frac{1}{m} \|df_t\|^2 g(e_i, e_j) \right) T_{f_t}(e_i, e_j) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} h(df_t(e_i), df_t(e_j)) \right) T_{f_t}(e_i, e_j) \\ &\quad - \frac{2}{m} \frac{\partial^2 \|df_t\|^2}{\partial t^2} \sum_{i,j=1}^m g(e_i, e_j) T_{f_t}(e_i, e_j) \\ &\stackrel{\text{補題 1.3.1(3)}}{=} 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} h(df_t(e_i), df_t(e_j)) \right) T_F(e_i, e_j) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} h(dF(e_i), dF(e_j)) \right) T_F(e_i, e_j) \\ &\stackrel{\text{補題 1.3.1(1)}}{=} 4 \sum_{i,j=1}^m h \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)), dF(e_j) \right) T_F(e_i, e_j) \\ &\quad + 4 \sum_{i,j=1}^m h \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_j)) \right) T_F(e_i, e_j) \\ &= 4 \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)), \sum_{j=1}^m T_F(e_i, e_j) dF(e_j) \right) \\ &\quad + 4 \sum_{i,j=1}^m h \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_j)) \right) T_F(e_i, e_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(1.11)}{=} 4 \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)), \xi_F(e_i) \right) \\
& \quad + 4 \sum_{i,j=1}^m h \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_j)) \right) T_F(e_i, e_j)
\end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}
(1.27) \quad & \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)) \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dF \right) (e_i) \right) \\
& \quad \left(\begin{array}{c} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dF \right) (e_i) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)) - dF \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i \right) \\ \vdots \quad \stackrel{(1.23)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)) \end{array} \right) \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\left(\nabla_{e_i} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\
& \quad \left(\begin{array}{c} \vdots \text{ Hessian の可換性 } (\nabla_X dF)(Y) = (\nabla_Y dF)(X) \\ \vdots \end{array} \right) \\
&= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{e_i} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\
& \quad \left(\begin{array}{c} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{e_i} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\left(\nabla_{e_i} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) - \left(\nabla_{e_i} dF \right) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \vdots \quad \stackrel{t \text{ の領域が flat なので } \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\left(\nabla_{e_i} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \end{array} \right) \\
&= \left(\nabla_{e_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + {}^N R \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), dF(e_i) \right) dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\
& \quad \left(\begin{array}{c} \vdots \text{ 一般的公式 } \\ \left(\nabla_X \nabla_Y dF \right) (Z) = \left(\nabla_Y \nabla_X dF \right) (Z) + {}^N R(dF(X), dF(Y)) dF(Z) \end{array} \right) \\
&= \nabla_{e_i} \left(\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) - {}^N R \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\
& \quad \left(\begin{array}{c} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{e_i} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \nabla_{e_i} \left(\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) - \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dF \right) \left(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \vdots \quad \stackrel{(1.23)}{=} \nabla_{e_i} \left(\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \end{array} \right) \\
&= \nabla_{e_i} \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) - {}^N R \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)
\end{aligned}$$

となる。上述の式変形で使用した “一般的公式”

$$(\nabla_X \nabla_Y dF)(Z) = (\nabla_Y \nabla_X dF)(Z) + {}^N R(dF(X), dF(Y)) dF(Z)$$

は, もっと一般には, 1-form (1 次微分形式) α に対して

$$(\nabla_X \nabla_Y \alpha)(Z) = (\nabla_Y \nabla_X \alpha)(Z) + \alpha(R(X, Y)Z)$$

というもので, 例えば, [9] の 213 ページの 4.13 Lemma などを参照のこと。[9] では, この公式を Ricci identity とよんでいる。

以上から (1.24), (1.26), (1.27) より

$$\begin{aligned}
 (1.28) \quad I_1 &= 4 \sum_{i,j=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_F(e_i) \right) \\
 &\quad - 4 \sum_{i,j=1}^m h \left({}^NR \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) T_F(e_i, e_j) \\
 &\quad + 4 \sum_{i,j=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \nabla_{e_j} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \right) T_F(e_i, e_j)
 \end{aligned}$$

である. そこで

$$\beta(X) = h \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right), \xi_F(X) \right)$$

とおくと

$$(1.29) \quad \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_F(e_i) \right) = \text{div } \beta - h \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right), \text{div } \xi_F \right)$$

である. 実際,

$$\begin{aligned}
 \text{div } \beta &= \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \beta)(e_i) = \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} (\beta(e_i)) - \beta(\nabla_{e_i} e_i) \stackrel{(1.22)}{=} \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} (\beta(e_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_F(e_i) \right) + h \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right), \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} (\xi_F(e_i)) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_F(e_i) \right) + h \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right), \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \xi_F)(e_i) \right) \\
 &\quad \left(\because (\nabla_{e_i} \xi_F)(e_i) \stackrel{(\nabla_X \xi_F)(Y) \text{ の定義}}{=} \nabla_{e_i} (\xi_F(e_i)) - \xi_F(\nabla_{e_i} e_i) \stackrel{(1.22)}{=} \nabla_{e_i} (\xi_F(e_i)) \right) \\
 &\stackrel{\text{div の定義}}{=} \sum_{i=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \xi_F(e_i) \right) + h \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right), \text{div } \xi_F \right)
 \end{aligned}$$

となる. 以上から, (1.28) および (1.29) より

$$\begin{aligned}
 (1.30) \quad I_1 &= 4 \text{div } \beta - 4 h \left(\text{Hess}_F \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right), \text{div } \xi_F \right) \\
 &\quad - 4 \sum_{i,j=1}^m h \left({}^NR \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) T_F(e_i, e_j) \\
 &\quad + 4 \sum_{i,j=1}^m h \left(\nabla_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), \nabla_{e_j} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \right) T_F(e_i, e_j)
 \end{aligned}$$

次に, I_2 を計算する. T_{f_t} の定義より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{f_t}(e_i, e_j)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(h(df_t(e_i), df_t(e_j)) - \frac{1}{m} \|df_t\|^2 g(e_i, e_j) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} h(df_t(e_i), df_t(e_j)) - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial}{\partial t} \|df_t\|^2 \right) g(e_i, e_j) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_i), dF(e_j)) - \frac{1}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_k), dF(e_k)) \right\} g(e_i, e_j) \\
&\quad \left(\because \|df_t\|^2 = \sum_{k=1}^m h(df_t(e_k), df_t(e_k)) = \sum_{k=1}^m h(dF(e_k), dF(e_k)) \right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
(1.31) \quad I_2 &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial T_{f_t}(e_i, e_j)}{\partial t} \right)^2 \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_i), dF(e_j)) - \frac{1}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_k), dF(e_k)) \right\} g(e_i, e_j) \right]^2 \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_i), dF(e_j)) \right)^2 \\
&\quad - \frac{4}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_k), dF(e_k)) \right\} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_i), dF(e_j)) g(e_i, e_j) \\
&\quad + \frac{2}{m^2} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_k), dF(e_k)) \right\}^2 \sum_{i,j=1}^m g(e_i, e_j)^2 \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_i), dF(e_j)) \right)^2 \\
&\quad - \frac{4}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_k), dF(e_k)) \right\}^2 \\
&\quad + \frac{2}{m} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_k), dF(e_k)) \right\}^2 \left(\because \sum_{i,j=1}^m g(e_i, e_j)^2 = m \right) \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_i), dF(e_j)) \right)^2 - \frac{2}{m} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial t} h(dF(e_i), dF(e_i)) \right\}^2 \\
&\stackrel{\text{定義}}{=} : I_3 + I_4
\end{aligned}$$

である. ここで, 式 (1.31) の最右辺の 2 つの項をそれぞれ, I_3 および I_4 とおいた. このとき

$$\begin{aligned}
 (1.32) \quad I_3 &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left\{ h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_j)\right) + h\left(dF(e_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_j))\right) \right\} \\
 &\quad \times \left\{ h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_j)\right) + h\left(dF(e_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_j))\right) \right\} \\
 &= 2 \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_j)\right) h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_j)\right) \\
 &\quad + 2 \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_j)\right) h\left(dF(e_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_j))\right) \\
 &\quad + 2 \sum_{i,j=1}^m h\left(dF(e_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_j))\right) h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_j)\right) \\
 &\quad + 2 \sum_{i,j=1}^m h\left(dF(e_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_j))\right) h\left(dF(e_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_j))\right) \\
 &= 4 \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_j)\right)^2 \\
 &\quad + 4 \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_j)\right) h\left(dF(e_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_j))\right) \\
 &\stackrel{(1.24)}{=} 4 \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{e_i}(dF(\frac{\partial}{\partial t})), dF(e_j)\right)^2 \\
 &\quad + 4 \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{e_i}(dF(\frac{\partial}{\partial t})), dF(e_j)\right) h\left(dF(e_i), \nabla_{e_j}(dF(\frac{\partial}{\partial t}))\right)
 \end{aligned}$$

となる. さらに

$$\begin{aligned}
 (1.33) \quad I_4 &= -\frac{8}{m} \left\{ \sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_i)\right) \right\}^2 \\
 &\stackrel{(1.24)}{=} -\frac{8}{m} \left\{ \sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{e_i}(dF(\frac{\partial}{\partial t})), dF(e_i)\right) \right\}^2
 \end{aligned}$$

である. 以上から, (1.25), (1.30), (1.31), (1.32), (1.33) より

$$\begin{aligned}
 (1.34) \quad \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \|T_{f_t}\|^2 &= \operatorname{div} \beta - h\left(\operatorname{Hess}_F\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right), \operatorname{div} \xi_F\right) \\
 &+ \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{e_i}\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right), \nabla_{e_j}\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right) T_F(e_i, e_j) \\
 &+ \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{e_i}\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right), dF(e_j)\right)^2 \\
 &+ \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla_{e_i}\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right), dF(e_j)\right) h\left(dF(e_i), \nabla_{e_j}\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right) \\
 &- \frac{2}{m} \left\{ \sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{e_i}\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right), dF(e_i)\right) \right\}^2 \\
 &- \sum_{i,j=1}^m h\left({}^N R\left(dF(e_i), dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) T_F(e_i, e_j)
 \end{aligned}$$

が得られる. そこで, $\partial M = \emptyset$ より

$$\int_M \operatorname{div} \beta \, dv_g = 0$$

であること, および,

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_M \|T_{f_t}\|^2 \, dv_g = \int_M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \|T_{f_t}\|^2 \, dv_g$$

であることに注意して, (1.34) の両辺を M 上で積分して $t = 0$ とおくと, 求める第二変分公式が得られる. $\square$

ここで, 安定 (stable) の定義を与えておく.

定義 1.6.5 (安定 (stable)) C-stationary map f が^s, **C-stationary map** として安定 (stable) であるとは, 任意のベクトル場 X (を与える変分 f_t) に対して

$$(\delta^2 E_{con})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2 E_{con}(f_t)}{dt^2} \right|_{t=0} \geq 0$$

であることをいう.

第4章では, 「不安定」という性質がテーマとなるが, 「不安定」は「安定」の否定であるので, 以下のような定義となる.

定義 1.6.6 (不安定 (unstable)) C-stationary map f が^s, **C-stationary map** として不安定 (unstable) であるとは, あるベクトル場 X (を与える変分 f_t) に対して

$$(\delta^2 E_{con})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2 E_{con}(f_t)}{dt^2} \right|_{t=0} < 0$$

であることをいう.

1.7 計量を変形する変分に対する第一変分と Stress energy tensor

この節では, 写像は動かさずに, 定義域となるリーマン多様体の計量を変形したときの, conformality エネルギーの変分問題を考える. このときの第一変分に現れる量として, conformality エネルギーに関する **stress energy tensor** を定義する. stress energy tensor は, Baird と Eells [2] が harmonic maps のエネルギーに対して定義したのが最初である.

Conformality エネルギーに対する Stress energy tensor

M 上の任意のベクトル場 X および Y に対して

$$\begin{aligned}
 (1.35) \quad \mu_f(X, Y) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{4} \|T_f\|^2 g(X, Y) - \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) T_f(Y, e_j) - \frac{1}{m} \|df\|^2 T_f(X, Y) \\
 &= \frac{1}{4} \|T_f\|^2 g(X, Y) - \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) (f^*h)(Y, e_j) \\
 &= \frac{1}{4} \|T_f\|^2 g(X, Y) - \sum_{j=1}^m (f^*h)(X, e_j) T_f(Y, e_j)
 \end{aligned}$$

ただし, e_j ($j = 1, \dots, m$) は, M 上の局所的な正規直交フレームとする.

Stress energy tensor μ_f の定義 (定義 1.7) の (1.35) の最後の 2 つの等式は, conformality テンソル T_f の定義 (1.4) からしたがう. 実際, $T_f = f^*h - \frac{1}{m} \|df\|^2 g$ より

$$T_f(Y, e_j) = (f^*h)(Y, e_j) - \frac{1}{m} \|df\|^2 g(Y, e_j)$$

であるので

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) T_f(Y, e_j) \\
 &= \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) (f^*h)(Y, e_j) - \frac{1}{m} \|df\|^2 \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) g(Y, e_j) \\
 &= \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) (f^*h)(Y, e_j) - \frac{1}{m} \|df\|^2 T_f\left(X, \sum_{j=1}^m g(Y, e_j) e_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) (f^*h)(Y, e_j) - \frac{1}{m} \|df\|^2 T_f(X, Y)
 \end{aligned}$$

となり, したがって

$$(1.36) \quad \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) T_f(Y, e_j) + \frac{1}{m} \|df\|^2 T_f(X, Y) = \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) (f^*h)(Y, e_j)$$

である. 同様に, X と Y についての対称性から

$$(1.37) \quad \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) T_f(Y, e_j) + \frac{1}{m} \|df\|^2 T_f(X, Y) = \sum_{j=1}^m (f^*h)(X, e_j) T_f(Y, e_j)$$

となる. これらの 2 つの式 (1.36), (1.37) から定義 1.7 の (1.35) の最後の 2 つの等式が導かれる.

Stress energy tensor μ_f は, C-stationary maps に対してのみならず, 一般のなめらかな写像について定義される symmetric covariant 2-tensor である. Stress energy tensor μ_f は, C-stationary maps に対しては divergence free であることがわかるが, そのことを証明するために, 次のように変形しておく.

補題 1.7.1

$$\begin{aligned}
 (1.38) \quad \mu_f(X, Y) &= \frac{1}{4} \|T_f\|^2 g(X, Y) - h(\xi_f(X), df(Y)) \\
 &= \frac{1}{4} \|T_f\|^2 g(X, Y) - h(df(X), \xi_f(Y))
 \end{aligned}$$

証明 計算すると

$$\begin{aligned}
 (1.39) \quad \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) (f^*h)(Y, e_j) &= \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) h(df(Y), df(e_j)) \\
 &= h\left(df(Y), \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) df(e_j)\right) \\
 &\stackrel{(1.11)}{=} h(df(Y), \xi_f(X)) \\
 &= h(\xi_f(X), df(Y))
 \end{aligned}$$

となる. X と Y の対称性から, 同様にして

$$(1.40) \quad \sum_{j=1}^m (f^*h)(X, e_j) T_f(Y, e_j) = h(df(X), \xi_f(Y))$$

となる. ゆえに, (1.39) および (1.40) より, stress energy tensor の定義 (定義 1.7) から補題 1.7.1 が導かれる. $\square$

Stress energy tensor の 2 つの基本的量 (trace と divergence) の計算をしておく.

命題 1.7.2 (stress energy tensor μ_f の trace と divergence)

$$(1) \text{ (trace)} \quad \text{tr}_g \mu_f = \frac{m-4}{4} \|T_f\|^2$$

ただし, m は, リーマン多様体 (M, g) の次元であり, また, symmetric covariant 2-tensor α に対して, $\text{tr}_g \alpha$ は α の **trace** (トレース) である, すなわち

$$\text{tr}_g \alpha = \sum_{i=1}^m \alpha(e_i, e_i)$$

であって, e_i ($i = 1, \dots, m$) は M 上の局所的な正規直交フレームとする.

$$(2) \text{ (divergence)} \quad (\text{div}_g \mu_f)(X) = -h(\text{div}_g \xi_f, df(X)),$$

ただし, symmetric covariant 2-tensor α に対して, $\text{div}_g \alpha$ は α の (第一成分についての) **divergence** (発散) である, すなわち

$$\text{div}_g \alpha = \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \alpha)(e_i, X)$$

であって, e_i ($i = 1, \dots, m$) は M 上の局所的な正規直交フレームとする.

この命題 (命題 1.7.2) から, 次の 2 つのことがらが直ちに導かれる.

系 1.7.3

(1) (trace free) リーマン多様体 (M, g) が 4 次元であるならば, $\text{tr}_g \mu_f = 0$ となる.

(2) (divergence free) f が C-stationary map であるならば, $\text{div}_g \mu_f = 0$ となる.

証明 (1) は, 命題 1.7.2 (1) より明らかである.

(2) は, f が C-stationary map であれば C-stationary map の方程式 $\text{div}_g \xi_f = 0$ を満たすことを考慮すると, 命題 1.7.2 (2) より明らかである. $\square$

命題 1.7.2 の証明

(1):

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_g \mu_f &= \sum_{i=1}^m \mu_f(e_i, e_i) \\
&\stackrel{(1.35)}{=} \frac{1}{4} \|T_f\|^2 \sum_{i=1}^m g(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m T_f(e_i, e_j) (f^* h)(e_i, e_j) \\
&\stackrel{\text{補題 1.3.1(4)}}{=} \frac{m}{4} \|T_f\|^2 - \|T_f\|^2 \\
&= \frac{m-4}{4} \|T_f\|^2
\end{aligned}$$

となって, 示された.

(2): まず, 等式

$$(1.41) \quad \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (T_f(e_j, e_k)) = \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (h(df(e_j), df(e_k)))$$

に注意しておく. 実際, この等式は

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (T_f(e_j, e_k)) \\
&= \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X \left\{ h(df(e_j), df(e_k)) - \frac{1}{m} \|df\|^2 g(e_j, e_k) \right\} \\
&= \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (h(df(e_j), df(e_k))) - \frac{1}{m} \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (\|df\|^2 g)(e_j, e_k) \\
&= \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (h(df(e_j), df(e_k))) \\
&\quad - \frac{1}{m} \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (\|df\|^2) g(e_j, e_k) - \frac{1}{m} \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \|df\|^2 (\nabla_X g)(e_j, e_k) \\
&\stackrel{\nabla g=0}{=} \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (h(df(e_j), df(e_k))) - \frac{1}{m} \nabla_X (\|df\|^2) \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) g(e_j, e_k) \\
&\stackrel{\text{補題 1.3.1(3)}}{=} \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (h(df(e_j), df(e_k)))
\end{aligned}$$

となって、成り立つことが確認できる。このとき

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}_g \mu_f)(X) &= \sum_{k=1}^m (\nabla_{e_k} \mu_f)(e_k, X) \\
&\stackrel{\text{補題 1.7.1}}{=} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \nabla_{e_k} (\|T_f\|^2 g)(e_k, X) - \sum_{k=1}^m h((\nabla_{e_k} \xi_f)(e_k), df(X)) \\
&\quad - \sum_{k=1}^m h(\xi_f(e_k), (\nabla_{e_k} df)(X)) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m (\nabla_{e_k} \|T_f\|^2) g(e_k, X) + \frac{1}{4} \|T_f\|^2 \sum_{k=1}^m (\nabla_{e_k} g)(e_k, X) \\
&\quad - h\left(\sum_{k=1}^m (\nabla_{e_k} \xi_f)(e_k), df(X)\right) - \sum_{k=1}^m h(\xi_f(e_k), (\nabla_{e_k} df)(X)) \\
&\stackrel{\nabla g=0}{\stackrel{(1.11)}}{=} \frac{1}{4} \nabla_{\sum_{k=1}^m g(X, e_k) e_k} \|T_f\|^2 - h(\operatorname{div}_g \xi_f, df(X)) \\
&\quad - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m T_f(e_j, e_k) h(df(e_j), (\nabla_{e_k} df)(X)) \\
&= \frac{1}{4} \nabla_X \|T_f\|^2 - h(\operatorname{div}_g \xi_f, df(X)) \\
&\quad - \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) h(df(e_j), (\nabla_X df)(e_k)) \\
&\quad (\because \text{Hessian の基本的性質: } (\nabla_X df)(Y) = (\nabla_Y df)(X)) \\
&\stackrel{T_f \text{ の対称性}}{=} \frac{1}{4} \nabla_X \|T_f\|^2 - h(\operatorname{div}_g \xi_f, df(X)) - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (h(df(e_j), df(e_k))) \\
&\stackrel{(1.41)}{=} \frac{1}{4} \nabla_X \|T_f\|^2 - h(\operatorname{div}_g \xi_f, df(X)) - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k) \nabla_X (T_f(e_j, e_k)) \\
&= \frac{1}{4} \nabla_X \|T_f\|^2 - h(\operatorname{div}_g \xi_f, df(X)) - \frac{1}{4} \nabla_X \left(\sum_{j,k=1}^m T_f(e_j, e_k)^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \nabla_X \|T_f\|^2 - h(\operatorname{div}_g \xi_f, df(X)) - \frac{1}{4} \nabla_X \|T_f\|^2 \\
&= -h(\operatorname{div}_g \xi_f, df(X))
\end{aligned}$$

となり、示された。□

Stress energy tensor が消える (ゼロになる) ことは、実は、 f が weakly conformal map であることにほかならない。

定理 1.7.4 ([28]) 次の 2 つのことがらは同値である：

- (1) $\mu_f = 0$
- (2) f は weakly conformal map である

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): $\mu_f = 0$ であると仮定する. このとき, 定義 1.7 より

$$\sum_{k=1}^m T_f(X, e_k) (f^*h)(Y, e_k) = \frac{1}{4} \|T_f\|^2 g(X, Y)$$

となる. そこで $X = e_i$ とし, $Y = e_j$ とおくと

$$(1.42) \quad \sum_{k=1}^m T_f(e_i, e_k) (f^*h)(e_j, e_k) = \frac{1}{4} \|T_f\|^2 \delta_{ij}$$

となる. ただし, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である, すなわち,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である. ここで, 2つの対称行列 A, B を

$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{def}}{=} \left(T_f(e_i, e_j); i, j = 1, \dots, m \right) \\ B &\stackrel{\text{def}}{=} \left((f^*h)(e_i, e_j); i, j = 1, \dots, m \right) \end{aligned}$$

と定義する. このとき (1.42) より

$$AB = BA = \frac{1}{4} \|T_f\|^2 E$$

となる. ただし, E は単位行列である.

さて, 証明は背理法を用いる. M のある点 x で $T_f \neq 0$ であるとする. このとき

$$\tilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{\|T_f\|^2} A$$

とおくと, 点 x において

$$(1.43) \quad \tilde{A}B = B\tilde{A} = E$$

となる. 行列 B は対称行列であるので, ある直交行列 T を用いて, 対角化できる, すなわち

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

である. しかも B は半正定値であるので $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ となる. 一方, conformality テンソル T_f の定義 (1.4) から $A = B - \frac{1}{m}(\text{tr } B)E$ であるので, $TAT^{-1} = TBT^{-1} - \frac{1}{m}\text{tr}(TBT^{-1})E$ であるから

$$(1.44) \quad TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_j & & & \\ & \lambda_2 - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_j \end{pmatrix}$$

となる. また, (1.43) により, $\tilde{A}$ は, 半正定値な対称行列 B の逆行列であるから, $\tilde{A}$ も半正定値である. したがって, A も半正定値である. このとき, (1.44) により, 任意の i に対して

$$(1.45) \quad \lambda_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_j \geq 0$$

そこで, λ_{i_0} が最小値をとる, すなわち, 任意の i に対して $\lambda_{i_0} \leq \lambda_i$ であるとする. このとき

$$(1.46) \quad \lambda_{i_0} = \frac{1}{m} \underbrace{(\lambda_{i_0} + \cdots + \lambda_{i_0})}_m \leq \frac{1}{m} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_m) \stackrel{(1.45)}{\leq} \lambda_{i_0}$$

となる. したがって, (1.46) の不等号はすべて等号となる. ゆえに, 任意の i に対して $\lambda_i = \lambda_{i_0}$ が導かれた. 以上から, 点 x において

$$(1.47) \quad f^*h = \lambda_{i_0}g$$

となる. この等式 (1.47) の両辺の trace をとると

$$(1.48) \quad \|df\|^2 = \lambda_{i_0}m, \text{ すなわち, } \lambda_{i_0} = \frac{1}{m}\|df\|^2$$

が得られる. よって, (1.47) および (1.48) より, 点 x において

$$f^*h = \frac{1}{m}\|df\|^2g, \text{ すなわち, } T_f = 0$$

となるが, これは背理法の仮定に矛盾する. 以上から, M のすべての点で $T_f = 0$ となり, したがって, f は weakly conformal map である.

(2) $\Rightarrow$ (1): f が weakly conformal map であるとするならば, $T_f = 0$ となり, したがって, μ_f の定義 (式 (1.35)) から $\mu_f = 0$ が導かれる. $\square$

さて, この節の本題に入ろう. Stress energy tensor μ_f が, 写像を固定して, 多様体 M の計量 g を動かした状況での conformality エネルギーの第一変分に現れること, くわしくは,

Stress energy tensor μ_f は, conformality エネルギー E_{con} を
 M の計量の functional (汎関数) と見たときの “gradient” になっていること

を確かめよう.

まず, conformality エネルギー E_{con} は, 多様体 M の計量 g によっても決まるので, ここでは

$$(1.49) \quad E_{con}(f, g) = \int_M \|T_f\|_g^2 dv_g$$

と書いておこう. Tensor T_f のノルム $\|T_f\|$ も, 計量 g を用いているので, $\|T_f\|_g$ と書いて, 計量 g によって決まることを強調している. そこで, 写像 f を固定して,

$E_{con}(f, g)$ を, 計量 g の functional (汎関数) と見たときの
“gradient” が stress energy tensor μ_f である

ということを主張しているのが, 次の定理である.

定理 1.7.5 (第一変分公式) g_t を, $g_0 = g$ を満たす, M 上のリーマン計量の 1 パラメーターの族 (one parameter family) とする. このとき, 次の変分公式が成り立つ:

$$\left. \frac{d}{dt} E_{con}(f, g_t) \right|_{t=0} = 2 \int_M (\mu_f, w) dv_g$$

ここで, w は

$$w \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial}{\partial t} g_t \right|_{t=0} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} g_t \Big|_{t=0}$$

で定義される covariant 2-tensor とする.

証明 まず

$$\begin{aligned} (1.50) \quad & \left. \frac{d}{dt} E_{con}(f, g_t) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_M \|T_f\|_{g_t}^2 dv_{g_t} \right|_{t=0} \\ &= \int_M \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \|T_f\|_{g_t}^2 \right|_{t=0} \right) dv_{g_t} + \int_M \|T_f\|_g^2 \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} dv_{g_t} \right|_{t=0} \right) \end{aligned}$$

であることに注意する. (1.36), (1.37), (1.39), (1.40) を考慮して, covariant 2-tensor γ を, M 上の任意のベクトル場 X および Y に対して

$$\begin{aligned} (1.51) \quad \gamma(X, Y) &= \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) T_f(Y, e_j) + \frac{1}{m} \|df\|^2 T_f(X, Y) \\ &= \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) (f^* h)(Y, e_j) = h(\xi_f(X), df(Y)) \\ &= \sum_{j=1}^m (f^* h)(X, e_j) T_f(Y, e_j) = h(df(X), \xi_f(Y)) \end{aligned}$$

と定義する. このとき, stress energy tensor については

$$(1.52) \quad \mu_f = \frac{1}{4} \|T_f\|^2 g - \gamma$$

であることに注意しておく.

M 上の局所的なフレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) で, 計量 $g = g_0$ に関して正規直交になるようなものをとる. このとき, 計量テンソル g_t は, フレーム e_i ($i = 1, \dots, m$) を用いて, 行列表現される:

$$(g_t)_{ij} = g_t(e_i, e_j)$$

$t = 0$ のときは $g_{ij} = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ および $g^{ij} = \delta^{ij}$ であることに注意しておく. ここで, δ_{ij} および δ^{ij} は Kronecker のデルタ記号である, すなわち,

$$\delta_{ij} (\text{および } \delta^{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である. 補題 1.3.1 (4) により

$$\|T_f\|_{g_t}^2 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^m (g_t)^{ik} (g_t)^{j\ell} T_f(e_i, e_j) (f^* h)(e_k, e_\ell)$$

となる. ここで

$$(1.53) \quad \frac{\partial}{\partial t} (g_t)^{ik} = - \sum_{p,q=1}^m (g_t)^{ip} \frac{\partial}{\partial t} (g_t)_{pq} (g_t)^{qk}$$

であることに注意しておく. 実際, 逆行列の定義関係式

$$\sum_{p=1}^m (g_t)^{ip} (g_t)_{pq} = \delta_q^i$$

の両辺を微分すると

$$\sum_{p=1}^m \frac{\partial}{\partial t} (g_t)^{ip} (g_t)_{pq} + \sum_{p=1}^m (g_t)^{ip} \frac{\partial}{\partial t} (g_t)_{pq} = 0$$

が得られ, この両辺に, 右から逆行列 $(g_t)^{qk}$ をかけることにより, (1.53) が得られる. ここで, δ_j^i は Kronecker のデルタ記号である, すなわち,

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である. このとき

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \|T_f\|_{g_t}^2 \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j,k,\ell=1}^m (g_t)^{ik} (g_t)^{j\ell} T_f(e_i, e_j) (f^* h)(e_k, e_\ell) \right|_{t=0} \\ &= 2 \sum_{i,j,k,\ell=1}^m \left. \frac{\partial}{\partial t} (g_t)^{ik} \right|_{t=0} g^{j\ell} T_f(e_i, e_j) (f^* h)(e_k, e_\ell) \\ &\stackrel{(1.53)}{=} -2 \sum_{i,j,k,\ell,p,q=1}^m \left(\left. g^{ip} \frac{\partial}{\partial t} (g_t)_{pq} \right|_{t=0} g^{qk} \right) g^{j\ell} T_f(e_i, e_j) (f^* h)(e_k, e_\ell) \\ &= -2 \sum_{i,k=1}^m \sum_{j=1}^m T_f(e_i, e_j) (f^* h)(e_k, e_j) \left. \frac{\partial}{\partial t} (g_t)_{ik} \right|_{t=0} \quad (\because g^{ij} = \delta^{ij}) \\ &\stackrel{(1.51)}{=} -2 \sum_{i,k=1}^m \gamma(e_i, e_k) \left. \frac{\partial}{\partial t} g_t(e_i, e_k) \right|_{t=0} \\ &= -2 \left(\gamma, \left. \frac{\partial}{\partial t} g_t \right|_{t=0} \right) \end{aligned}$$

すなわち

$$(1.54) \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \|T_f\|_{g_t}^2 \right|_{t=0} = -2 (\gamma, w)$$

となる.

一方, 局所座標 $(x_1, \dots, x_m)$ を用いて, $\frac{\partial}{\partial t} dv_{g_t} \Big|_{t=0}$ を局所的に計算しよう. ここでは, 局所的なフレームとしては, 座標基底 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ をとり

$$(g_t)_{ij} = g_t \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

とおく. このとき

$$dv_{g_t} = \sqrt{\det((g_t)_{ij})} dx^1 \cdots dx^m \quad \text{and} \quad dv_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \cdots dx^m$$

であることに注意しておく. 後出の補題 1.7.6 より

$$(1.55) \quad \frac{\partial}{\partial t} \det((g_t)_{ij}) \Big|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial((g_t)_{ij})}{\partial t} \Big|_{t=0} \det(g_{ij})$$

であるが,

$$\begin{aligned} (1.56) \quad \frac{\partial}{\partial t} dv_{g_t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det((g_t)_{ij})} \Big|_{t=0} dx^1 \cdots dx^m \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \det((g_t)_{ij}) \Big|_{t=0} \right) dx^1 \cdots dx^m \\ &\stackrel{(1.55)}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \left(\sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial((g_t)_{ij})}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \det(g_{ij}) dx^1 \cdots dx^m \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}_g \left(\frac{\partial}{\partial t} g_t \Big|_{t=0} \right) \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \cdots dx^m \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{tr}_g w) dv_g \\ &= \frac{1}{2} (g, w) dv_g \end{aligned}$$

となる. ここで, $\operatorname{tr}_g \left(\frac{\partial}{\partial t} g_t \Big|_{t=0} \right)$ は, covariant 2-tensor $\frac{\partial}{\partial t} g_t \Big|_{t=0}$ の計量 g に関する trace である. 以上から, (1.50), (1.54), (1.56) より

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} E_{con}(f, g_t) \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{(1.50)}{=} \int_M \frac{\partial}{\partial t} \|T_f\|_{g_t}^2 \Big|_{t=0} dv_g + \int_M \|T_f\|_g^2 \frac{\partial}{\partial t} dv_{g_t} \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{(1.54), (1.56)}{=} \int_M \left(-2\gamma + \frac{1}{2} \|T_f\|^2 g, w \right) dv \\ &= 2 \int_M \left(\frac{1}{4} \|T_f\|^2 g - \gamma, w \right) dv \\ &\stackrel{(1.52)}{=} 2 \int_M (\mu_f, w) dv \end{aligned}$$

が得られて, 定理 1.7.5 の証明が終わる. あとは, 証明中に用いられた, 次の補題の証明を与えることだけである.

補題 1.7.6 対称行列に値をとる関数 $A(t) = (a_{ij}(t))$ に対して

$$(1.57) \quad \frac{\partial \det A}{\partial t} = \operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} \right) \det A = \left(\sum_{i,j=1}^m a^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \det A$$

が成り立つ。ただし, (a^{ij}) は $A = (a_{ij})$ の逆行列である。

証明 A は対称行列であるから, 対角化できる, すなわち, ある直交行列 $T = T(t)$ が存在して

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

である。このとき

$$(1.58) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \det A &= \frac{\partial}{\partial t} \det (TAT^{-1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_1 \cdots \lambda_m) \\ &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \lambda_2 \cdots \lambda_m + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \lambda_3 \cdots \lambda_m + \cdots + \lambda_1 \cdots \lambda_{m-1} \frac{\partial \lambda_m}{\partial t} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \cdots + \frac{1}{\lambda_m} \frac{\partial \lambda_m}{\partial t} \right) \lambda_1 \cdots \lambda_m \\ &= \operatorname{tr} \left((TAT^{-1})^{-1} \frac{\partial (TAT^{-1})}{\partial t} \right) \det A \end{aligned}$$

となる。また

$$(1.59) \quad \begin{aligned} &\operatorname{tr} \left((TAT^{-1})^{-1} \frac{\partial (TAT^{-1})}{\partial t} \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(TA^{-1}T^{-1} \left(\frac{\partial T}{\partial t} AT^{-1} + T \frac{\partial A}{\partial t} T^{-1} + TA \frac{\partial T^{-1}}{\partial t} \right) \right) \\ &= \operatorname{tr} \left((TA^{-1}T^{-1}) \left(\frac{\partial T}{\partial t} AT^{-1} \right) \right) + \operatorname{tr} \left(TA^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} T^{-1} \right) + \operatorname{tr} \left(T \frac{\partial T^{-1}}{\partial t} \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial t} AT^{-1} \right) (TA^{-1}T^{-1}) \right) + \operatorname{tr} \left(TA^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} T^{-1} \right) + \operatorname{tr} \left(T \frac{\partial T^{-1}}{\partial t} \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(\frac{\partial T}{\partial t} T^{-1} \right) + \operatorname{tr} \left(T \frac{\partial T^{-1}}{\partial t} \right) + \operatorname{tr} \left(TA^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} T^{-1} \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(\frac{\partial (TT^{-1})}{\partial t} \right) + \operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} \right) \quad \left(\because TT^{-1} = I \text{ (単位行列)} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \left(\sum_{i,j=1}^m a^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right)$$

であるから, 補題 1.7.6 は, (1.58) および (1.59) から得られる。□

1.8 下半連続性

$C^\infty(M, N)$ を, リーマン多様体 (M, g) からリーマン多様体 (N, h) への smooth maps の全体からなる写像空間とする⁶. Conformality エネルギー E_{con} は, 写像空間 $C^\infty(M, N)$ 上の関数 —— 汎関数 (functional) —— である⁷. この節では, 汎関数として, conformality エネルギー E_{con} のある種の連続性について議論する. そのために, 定義域の空間を $C^\infty(M, N)$ から, Sobolev 空間 $L^{1,4}(M, N)$ に広げておく.

ここで, Sobolev 空間 $L^{1,4}(M, N)$ の定義について, 説明を加えておく. 対象となる写像 f の値域 N がリーマン多様体 (N, h) である場合, Sobolev 空間 $L^{1,4}(M, N)$ は, 通常は, 以下のように3つのステップで定義される:

[ステップ1] まず, Nash の embedding theorem などを用いて,

リーマン多様体 (N, h) を十分次元の高いユークリッド空間 $\mathbb{R}^q$ に
isometric に (等長的に) 埋め込む

ことにより, リーマン多様体 (N, h) はユークリッド空間 $\mathbb{R}^q$ のリーマン部分多様体と見なせる.

[ステップ2] 一般に

値域がユークリッド空間 $\mathbb{R}^q$ の場合は,
写像 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^q$ はベクトル値関数と見なせる

ので, Sobolev 空間 $L^{1,4}(M, \mathbb{R}^q)$ は, 次のように自然に定義される:

$$L^{1,4}(M, \mathbb{R}^q) = \left\{ f \mid \begin{array}{l} f(x) \text{ は } \mathbb{R}^q \text{ に値をとる } M \text{ 上の可測関数で} \\ \int_M |f|^4 dv_g < \infty, \int_M \|Df\|^4 dv_g < \infty \end{array} \right\}$$

ここで, f の大きさ $|f|$ は, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^q$ の距離で測っていることに注意せよ. また, Df は, 超関数の意味の弱微分 (weakly derivative) であり, Df のノルム $\|Df\|$ についてもユークリッド空間 $\mathbb{R}^q$ の距離を用いている⁸.

[ステップ3] この前提で

$$L^{1,4}(M, N) = \left\{ f \in L^{1,4}(M, \mathbb{R}^q) \mid f(x) \in N \text{ a.e.} \right\}$$

と定義する. ここで, “ $f(x) \in N$ a.e.” は, 「ほとんどいたるところ (almost everywhere) $f(x) \in N$ である」($f(x) \notin N$ となる x の集合が測度ゼロである) の意味である.

Conformality エネルギー E_{con} は, Sobolev 空間 $L^{1,4}(M, N)$ 上に拡張定義され, その空間上で有限値をとることは容易に確認できる. 実際, 一般に $\|T_f\|^2 \leq C\|Df\|^4$ (C は定数) となるので, $f \in L^{1,4}(M, N)$ であるならば

$$E_{con}(f) = \int_M \|T_f\|^2 dv_g \leq C \int_M \|Df\|^4 dv_g < \infty$$

⁶ 写像空間 $C^\infty(M, N)$ は, M および N が多様体であれば定義され, リーマン多様体である必要はない. その意味で $C^\infty((M, g), (N, h))$ という記号は用いていない. 一方, すぐ後に出てくる「conformality エネルギー E_{con} は, 写像空間 $C^\infty(M, N)$ 上の汎関数である」という表現は, conformal エネルギーの定義に M および N のリーマン計量が必要となるので, 「写像空間 $C^\infty((M, g), (N, h))$ 上の汎関数である」と書くべき内容である.

⁷ 一般に, 「関数空間あるいは写像空間上の関数」を汎関数 (functional) とよぶ. 通常の関数に対しては, 「微分学」が用いられるのに対し, 汎関数は定義域となる空間が無限次元であって, 「変分学」が必要となる.

⁸ ユークリッド空間 $\mathbb{R}^q$ は線形空間であるので, 接空間 $T_x \mathbb{R}^q$ ($x \in \mathbb{R}^q$) が $\mathbb{R}^q$ と同型となり, 両者を “混同している”. ここで, 「混同している」という記述を「同一視している」という言い方にしなかったのは, ふつうの解析学では, この辺りを全く認識していないからである.

となる. Sobolev 空間 $L^{1,4}(M, N)$ を用いるメリットの一つは, Sobolev 空間の弱収束

$$f_i \rightharpoonup f_\infty$$

を用いることができるからである. このような弱い収束 (弱い位相) を使用すると, 収束性が容易になり, また, Sobolev 空間 $L^{1,4}(M, N)$ は, この収束について完備であるので, 収束先もこの Sobolev 空間内でとらえることができる. そこで, この収束について, 汎関数 E_{con} は連続であるかということが問題になるが, 一般には, 以下の下半連続性 (lower semi-continuity) が成り立つ.

定理 1.8.1 (下半連続性) $f_i \in L^{1,4}(M, N)$ ($i = 1, 2, \dots$) に対して

$$f_i \rightharpoonup f_\infty \text{ (弱収束)}$$

であるならば

$$E_{con}(f_\infty) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} E_{con}(f_i)$$

である.

注意 1.8.2 (“下半連続性 $\Rightarrow$ 最小値の存在”) 一般に

下半連続性があると, 最小値をとらえることができる.

例えば,

「条件 (*)」として “弱収束で保たれる条件”

を考えたとき

$$S \stackrel{\text{定義}}{=} \{ f \in L^{1,4}(M, N) \mid \text{条件 (*)} \}$$

とおくと,

S 上で E_{con} の最小値が存在する

ことがわかる. 実際, S 上の E_{con} の最小化列 f_i ($i = 1, 2, \dots$), すなわち,

$$E_{con}(f_i) \rightarrow m \stackrel{\text{定義}}{=} \min \{ E_{con}(f) \mid f \in S \} \leftarrow S \text{ 上の } E_{con} \text{ の最小値}$$

となる列 $f_i \in S$ ($i = 1, 2, \dots$) をとると, f_i の conformality エネルギーは一様有界であるので, Sobolev 空間の一般的性質から, 必要なら部分列をとれば, f_i は, ある $f_\infty \in L^{1,4}(M, N)$ に弱収束する. 「条件 (*)」は弱収束で保たれるので, f_∞ も「条件 (*)」を満たす. したがって, $f_\infty \in S$ となる. このとき, m は S における E_{con} の最小値であることを考慮すれば, $m \leq E_{con}(f_\infty)$ である. ゆえに

$$m \leq E_{con}(f_\infty) \stackrel{\text{下半連続性}}{\leq} \liminf_{i \rightarrow \infty} E_{con}(f_i) \stackrel{\text{最小化列であること}}{=} m$$

となるので, $E_{con}(f_\infty) = m$ である, すなわち, f_∞ が S において E_{con} の最小値を与えることがわかった.

注意 1.8.3 (下半連続性が明らかでない理由) 考えている量が, 微分写像 df の何らかのノルム $\|df\|$ という形であれば, その量の下半連続性

$$(1.60) \quad \|df_\infty\| \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|df_i\|$$

は期待できるが⁹, conformality エネルギー $E_{con}(f)$ は, T_f の L^2 -ノルム $\|T_f\|_{L^2}$ の二乗であるので, これを df のノルムで書き下すと, 補題 1.3.1 (5) で見たように,

$$(1.61) \quad E_{con}(f) = \|T_f\|_{L^2}^2 = \|f^*h\|_{L^2}^2 - \frac{1}{m} \|df\|_{L^4}^4$$

となり,

(1.61) の右辺の第1項はノルムの形なので, 下半連続性が期待できる
(pullback f^*h は df で書けていることに注意)

が

(1.61) の右辺の第2項は“マイナス・ノルム”の形で,
マイナス符号がついているので, 下半連続性は期待できなくなる
(逆に, 上半連続性が期待できる)

という状況になっていて, 定義からは

conformality エネルギー E_{con} の下半連続性は明らかなものではない.

そこで, ここでは, 2つのステップ

1. f_i の弱収束性から T_{f_i} の弱収束性を導く
2. “conformality エネルギー $E_{con}(f)$ は T_f の L^2 -ノルムであること”に注意して, 一般的事実“弱収束に関する L^2 -ノルムの下半連続性”に帰着させる

を実行する方法で, conformality エネルギーの下半連続性を証明する.

定理 1.8.1 の証明 T_{f_i} が T_{f_∞} に弱収束することが証明されれば, 一般的に知られている事実:

弱収束に関する L^2 -norm の下半連続性

$\varphi_i, \varphi_\infty \in L^2(M, V)$ (V は線形空間), すなわち, $\varphi_i, \varphi_\infty$ がベクトル値関数
に対して

$\varphi_i \rightharpoonup \varphi_\infty$ (弱収束) in $L^2(M, V)$

ならば

$$\|\varphi_\infty\|_{L^2(M, V)} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i\|_{L^2(M, V)}$$

⁹ 正の整数 p に対して, p 乗関数 $g(x) = x^p$ は連続関数なので, (1.60) が成り立てば, このノルムの p 乗についても, 下半連続性が得られる, すなわち,

$$\|df_\infty\|^p \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|df_i\|^p$$

が成り立つことに注意しておく.

を用いると, 求める結論が得られる. 実際, T_{f_i} が T_{f_∞} に弱収束するとすると, 上記の事実から, 下半連続性

$$\int_M \|T_{f_\infty}\|^2 dv_g \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_M \|T_{f_i}\|^2 dv_g$$

が得られる. これは conformality エネルギーの下半連続性

$$E_{con}(f_\infty) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} E_{con}(f_i)$$

にほかならない.

あとは, T_{f_i} が T_{f_∞} に弱収束することを証明すればよい. 任意の covariant 2-tensor S に対して

$$\begin{aligned} \int_M (T_{f_i}, S) dv_g & \stackrel{T_{f_i} \text{ の定義}}{=} \int_M \left((f_i)^* h - \frac{1}{m} \|df_i\|^2 g, S \right) dv_g \\ &= \int_M \left\{ ((f_i)^* h, S) - \frac{1}{m} \|df_i\|^2 (g, S) \right\} dv_g \\ &= \int_M \left\{ ((f_i)^* h, S) - \frac{1}{m} ((f_i)^* h, g) (g, S) \right\} dv_g \\ & \quad \left(\begin{array}{l} \|df_i\|^2 = \sum_{k=1}^m h(df_i(e_k), df_i(e_k)) = \sum_{k=1}^m ((f_i)^* h)(e_k, e_k) \\ \vdots \\ = \sum_{k, \ell=1}^m ((f_i)^* h)(e_k, e_\ell) g(e_k, e_\ell) = ((f_i)^* h, g) \end{array} \right) \\ &= \int_M \left((f_i)^* h, S - \frac{1}{m} (g, S) g \right) dv_g \end{aligned}$$

すなわち

$$(1.62) \quad \int_M (T_{f_i}, S) dv_g = \int_M \left((f_i)^* h, S - \frac{1}{m} (g, S) g \right) dv_g$$

となる. ここで, $(\ , \)$ は covariant 2-tensors の積である, すなわち, 任意の covariant 2-tensors A, B に対して

$$(A, B) = \sum_{i, j=1}^m A_{ij} B_{ij}$$

とする. 同様に

$$(1.63) \quad \int_M (T_{f_\infty}, S) dv_g = \int_M \left((f_\infty)^* h, S - \frac{1}{m} (g, S) g \right) dv_g$$

である. 一方

$$f_i \ (i = 1, 2, \dots) \text{ は, } L^{1,4}(M, N) \text{ において } f_\infty \text{ に弱収束する}$$

ので, pullback $(f_i)^* h$ の定義より

$$(1.64) \quad (f_i)^* h \ (i = 1, 2, \dots) \text{ は, } L^2(M, (\otimes^2 TN)^*) \text{ において } (f_\infty)^* h \text{ に弱収束する}$$

ことが容易に確認できる. ただし, $(\otimes^2 TN)^*$ は N 上の covariant 2-tensors の空間とする. 特に, $i \rightarrow \infty$ のとき

$$(1.65) \quad \int_M \left((f_i)^* h, S - \frac{1}{m}(g, S)g \right) dv_g \xrightarrow{(1.64)} \int_M \left((f_\infty)^* h, S - \frac{1}{m}(g, S)g \right) dv_g$$

となる. 以上から, (1.62), (1.63), (1.65) より, 任意の covariant 2-tensor S に対して,

$$\int_M (T_{f_j}, S) dv_g \longrightarrow \int_M (T_{f_\infty}, S) dv_g$$

であることがわかる. これは, T_{f_i} が T_∞ に弱収束すること, すなわち,

$$T_{f_i} \rightharpoonup T_{f_\infty} \quad (\text{弱収束}) \quad \text{in } L^2(M, (\otimes^2 TN)^*)$$

であることを示している. 以上で, T_{f_i} が T_{f_∞} に弱収束することが示された. $\square$

1.9 Conformality エネルギーの応用

この節では, conformality エネルギーの一つの応用として, 次のような Laplacian の第一固有値に関する Lichnerowicz の定理への新しいアプローチを与えよう.

Lichnerowicz の定理

境界をもたない n 次元 compact なリーマン多様体 (M, g) が Ricci 曲率の条件

$$\text{Ric}_g \geq (n-1)g$$

を満たすとき, Laplacian の第一固有値 λ は

$$\lambda \geq n$$

を満たす.

Laplacian の固有値に関する評価はいろいろあるが, Lichnerowicz の定理は, 有名で基本的な結果となっている. この定理は, 通常は, Laplacian についての Bochner formula を用いて証明される. ここでは, conformality エネルギー E_{con} を用いた変分法的アプローチ ([33]) を与えよう. 我々のアプローチでは, 以下のように証明が進む:

- (1) 多様体 M 上の恒等写像 id_M は明らかに conformal map であるので, conformality エネルギー E_{con} を最小にする. したがって, 恒等写像 id_M は安定である, すなわち, 恒等写像 id_M における第二変分は非負である.
- (2) Laplacian の第一固有値 λ に対する固有関数 φ を一つとる. さらに, $d\varphi$ に対応するベクトル場 (φ の gradient) をとり, それを variation vector field とした第二変分を考えると, 恒等写像 id_M における第二変分が非負という不等式から, 求める不等式が導かれる.

まずは, 第二変分公式 (定理 1.6.2) を, 必要な状況

$$\text{恒等写像 } f = \text{id}_M : M \rightarrow M \quad (f(x) = x)$$

の場合に, 次のような形に書きかえておく:

命題 1.9.1 (恒等写像における第二変分公式) 恒等写像 id_M において

$$\begin{aligned} & (\delta^2 E_{con})(\text{id}_M)(X) \\ &= \frac{2(n-1)}{n} \int_M g(d\delta X, X) dv_g + \int_M g(\delta dX, X) dv_g - 2 \int_M \text{Ric}_g(X, X) dv_g, \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, X は第一固有値 λ の微分 $d\lambda$ に対応するベクトル場を表し, また, d and δ は, 通常の 1 次微分形式 (1-forms) に対する作用素に対応したベクトル場に対する作用素である.

証明 [6] の 29 ~ 30 ページ と同様の計算を用いる. 恒等写像 id_M は, 明らかに conformal map であるから, conformality エネルギー E_{con} を最小にし, また, $T_{\text{id}_M} = 0$ である. このとき, 第二変分公式 (定理 1.6.2) より

$$\begin{aligned} (1.66) \quad & (\delta^2 E_{con})(\text{id}_M)(X) \\ &= \int_M \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_j) g(\nabla_{e_i} X, e_j) dv_g \\ &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_j) g(e_i, \nabla_{e_j} X) dv_g \\ &\quad - \frac{2}{n} \int_M \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) \sum_{j=1}^n g(\nabla_{e_j} X, e_j) dv_g \end{aligned}$$

となる.

等式 (1.66) の右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned} (1.67) \quad & \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_j) g(\nabla_{e_i} X, e_j) = \sum_{i=1}^n g\left(\nabla_{e_i} X, \sum_{j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_j) e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X) = -g(\Delta X, X) + \text{div } \alpha \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\alpha(Y) = g(\nabla_Y X, X)$$

である. 実際, (1.67) の最後の等式は

$$\begin{aligned} \text{div } \alpha &\stackrel{\text{div の定義}}{=} \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \alpha)(e_i) \stackrel{(\nabla_X \alpha)(Y) \text{ の定義}}{=} \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} (\alpha(e_i)) - \sum_{i=1}^n \alpha(\nabla_{e_i} e_i) \\ &\stackrel{\alpha \text{ の定義}}{=} \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} X, X) + \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X) - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} X, X) \\ &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i})X, X) + \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X) \\ &\stackrel{\Delta \text{ の定義}}{=} g(\Delta X, X) + \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X) \end{aligned}$$

と確かめられる.

また, divergence (発散) の定義より, 等式 (1.66) の右辺の第3項は

$$(1.68) \quad \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) \sum_{j=1}^n g(\nabla_{e_j} X, e_j) = (\operatorname{div} X)^2$$

となる.

さらに, 等式 (1.66) の右辺の第2項に対しては, 次の補題を用いる:

補題 1.9.2

$$\sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_j) g(e_i, \nabla_{e_j} X) = -\operatorname{Ric}_g(X, X) + (\operatorname{div} X)^2 - \operatorname{div}(\beta - \gamma)$$

ただし

$$\begin{aligned} \beta(Y) &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) g(X, Y) \\ \gamma(Y) &= \sum_{j=1}^n g(\nabla_{e_j} X, Y) g(X, e_j) \end{aligned}$$

である.

補題 1.9.2 を用いて, 命題 1.9.1 の証明を進めよう. 多様体 M は境界をもたないから, divergence の項 $\operatorname{div} \alpha$ および $\operatorname{div}(\beta - \gamma)$ は, M 上積分するとゼロになる. したがって, 補題 1.9.2 を用いると, (1.66), (1.67), (1.68) より

$$(1.69) \quad \begin{aligned} &(\delta^2 E_{con})(\operatorname{id}_M)(X) \\ &= - \int_M g(\triangle X, X) dv_g + \left(1 - \frac{2}{n}\right) \int_M (\operatorname{div} X)^2 dv_g - \int_M \operatorname{Ric}_g(X, X) dv_g \end{aligned}$$

となる. ここで, ふつうの Laplacian (rough Laplacian) $\triangle$ と Hodge-de Rham Laplacian $d\delta + \delta d$ の関係式

$$g(\triangle X, X) = -g((d\delta + \delta d)X, X) + \operatorname{Ric}_g(X, X)$$

および

$$(\operatorname{div} X)^2 = (\delta X)^2 = g(d\delta X, X)$$

であることに注意すると, (1.69) から命題 1.9.1 の結論の式が導かれて証明が終わる. したがって, 命題 1.9.1 の証明には, 補題 1.9.2 を証明すれば良いだけになる.

補題 1.9.2 の証明 M の任意の点 p を一つとり, 固定する. 点 p のまわりの normal coordinate (正規座標) を用いる. このとき, 点 p において $\nabla_{e_i} e_j = 0$ ($i, j = 1, \dots, m$) である. 以下の計算は, 点 p で

行う.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} X - \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} X, e_i) g(X, e_j) \\
&= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{\sum_{j=1}^n g(X, e_j) e_j} \nabla_{e_i} X - \nabla_{e_i} \nabla_{\sum_{j=1}^n g(X, e_j) e_j} X, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n g(\nabla_X \nabla_{e_i} X - \nabla_{e_i} \nabla_X X, e_i) \\
&= -\operatorname{Ric}_g(X, X)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \beta - \operatorname{div} \gamma \\
&= \sum_{j=1}^n (\nabla_{e_j} \beta)(e_j) - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \gamma)(e_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} X, e_i) g(X, e_j) + \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) g(\nabla_{e_j} X, e_j) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} X, e_i) g(X, e_j) - \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_j} X, e_i) g(\nabla_{e_i} X, e_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} X - \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} X, e_i) g(X, e_j) + \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) g(\nabla_{e_j} X, e_j) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_j} X, e_i) g(\nabla_{e_i} X, e_j) \\
&= -\operatorname{Ric}_g(X, X) + (\operatorname{div} X)^2 - \sum_{i,j=1}^g (\nabla_{e_j} X, e_i) g(\nabla_{e_i} X, e_j),
\end{aligned}$$

となる. 点 p の任意性から, 補題 1.9.2 が得られる. $\square$

Lichnerowicz の定理の証明を進めよう. 恒等写像 id_M は conformal map であるので, conformality エネルギー E_{con} を最小にする. したがって id_M は安定であるので, 任意のベクトル場 X に対して

$$(1.70) \quad (\delta^2 E_{con})(\operatorname{id}_M)(X) \geq 0$$

である. Laplacian の第一固有値 λ に対する固有関数 φ をとると

$$(1.71) \quad \Delta \varphi = -\lambda \varphi$$

である. そこで

$$(1.72) \quad X = (d\varphi)^\sharp$$

とおく. ただし $\sharp$ は sharp 作用素である, すなわち, 一次微分形式 (1-form) α に対して, $\alpha^\sharp$ は α に対応するベクトル場とする. また,

$$(1.73) \quad \text{関数に対しては } \Delta = -\delta d \text{ である}$$

ので

$$(1.74) \quad \begin{cases} d\delta X \stackrel{(1.72)}{=} d\delta(d\varphi)^\sharp = (d\delta d\varphi)^\sharp \stackrel{(1.73)}{=} -(d\triangle\varphi)^\sharp \stackrel{(1.71)}{=} \lambda(d\varphi)^\sharp \stackrel{(1.72)}{=} \lambda X \\ \delta dX \stackrel{(1.72)}{=} \delta d(d\varphi)^\sharp = (\delta d d\varphi)^\sharp \stackrel{dd=0}{=} 0 \end{cases}$$

である. ゆえに, 命題 1.9.1 と (1.70), (1.74) により, 不等式

$$(1.75) \quad \begin{aligned} 0 &\leq (\delta^2 E_{con})(\text{id}_M)(X) \\ &= 2 \int_M \left\{ \frac{(n-1)}{n} \lambda g(X, X) - \text{Ric}_g(X, X) \right\} dv_g \end{aligned}$$

が得られる. ここで, 定理の仮定 $\text{Ric}_g \geq (n-1)g$ を用いると

$$\text{Ric}_g(X, X) \geq (n-1)g(X, X)$$

であるから, 上記の不等式 (1.75) より

$$2(n-1) \left(\frac{\lambda}{n} - 1 \right) \int_M g(X, X) dv_g \geq 0$$

となる. $g(X, X)$ は, 「恒等的にゼロ」ではないので $\int_M g(X, X) dv_g > 0$ である. したがって

$$\frac{\lambda}{n} - 1 \geq 0, \quad \text{すなわち, } \lambda \geq n$$

となり, Lichnerowicz の定理の結論の不等式が得られる. $\square$

第2章 C-stationary maps

2.1 この章の内容

前章で, 写像に対して “conformality” を測る conformality エネルギーを定義し, その停留点として得られる C-stationary map の概念を導入した. その経緯から,

(♡) 安定な C-stationary map は weakly conformal map に
 “局所的に” 最も近い写像であろう¹

と期待される. この章では, 上記の (♡) の内容を間接的に支持する, 次の2つのことがらを議論する:

- (1) 安定な C-stationary maps と weakly conformal maps は, 一般には異なること
- (2) 対称性がある状況では, 安定な C-stationary maps と weakly conformal maps は一致すること

具体的には, (1) については, 第 2.2 節で, “weakly conformal map でない安定な C-stationary map” の特徴的な例をあげる. (2) については, 安定な C-stationary maps と weakly conformal maps が, 以下のような状況では一致することを証明する:

- (a) 第 2.3 節では, 写像の定義域が 5 次元以上の球面の場合 (定義域が対称性をもつ)
- (b) 第 2.4 節では, 写像の値域が 5 次元以上の球面の場合 (値域が対称性をもつ)
- (c) 第 2.5 節では, 写像が rotationally symmetric な場合 (写像が対称性をもつ)

¹ 「“局所的に” 最も近い」の意味は, 「その写像の近くの写像の中では最も近い」という意味である.

2.2 Weakly conformal map でない安定な C-stationary map の例

この節では, “weakly conformal map でない安定な C-stationary map” の特徴的な例を構成しよう.

定理 2.2.1 ([14]) r を $r \neq 1$ である正の実数とし, 写像

$$f : M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \rightarrow N = \mathbb{S}_r^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$$

を

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = (rx_1, x_2, \dots, x_m)$$

を考える. ここで $\mathbb{S}^1$ は, 半径が 1 の円周 (1 次元球面) とし, また, $\mathbb{S}_r^1$ は, 半径が r の円周とする:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &= \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1 \} \\ \mathbb{S}_r^1 &= \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = r^2 \} \end{aligned}$$

このとき, 以下の 3 つのことがらが成り立つ.

- (1) f は weakly conformal map ではない.
- (2) f は C-stationary map である.
- (3) $r < 1$ であって r が十分 1 に近いならば, f は安定 (stable) である.

証明 まず

$$\begin{aligned} e_i &\text{ を } M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \text{ の第 } i \text{ 成分方向の単位ベクトル } (i = 1, \dots, m) \\ E_j &\text{ を } N = \mathbb{S}_r^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \text{ の第 } j \text{ 成分方向の単位ベクトル } (j = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

とおくと,

$$(2.1) \quad e_1, \dots, e_m \text{ は } M \text{ の正規直交フレーム}$$

$$(2.2) \quad E_1, \dots, E_m \text{ は } N \text{ の正規直交フレーム}$$

となっている. また, 写像 f の定義から

$$(2.3) \quad df(e_i) = \begin{cases} rE_i & (i = 1) \\ E_i & (i \neq 1) \end{cases} = b_i E_i$$

であることに注意しておく. ただし,

$$b_i = \begin{cases} r & (i = 1) \\ 1 & (i \neq 1) \end{cases}$$

である.

(1): $r \neq 1$ であることに注意すると, f の定義から明らかである. 実際, (2.1) より

$$g(e_1, e_1) = 1 = g(e_2, e_2)$$

であるにもかかわらず,

$$\begin{aligned} (f^*h)(e_1, e_1) &= h(df(e_1), df(e_1)) \stackrel{(2.3)}{=} h(rE_1, rE_1) = r^2 h(E_1, E_1) \stackrel{(2.2)}{=} r^2 \\ (f^*h)(e_2, e_2) &= h(df(e_2), df(e_2)) \stackrel{(2.3)}{=} h(E_2, E_2) \stackrel{(2.2)}{=} 1 \end{aligned}$$

であるから, $r \neq 1$ ならば

$$(f^*h)(e_1, e_1) \neq (f^*h)(e_2, e_2)$$

となって, 8 ページの conformal map の条件 (*) は満たさないので, f は weakly conformal map ではない.

(2): (2.3) より

$$(2.4) \quad \begin{cases} (f^*h)(e_1, e_1) &= h(df(e_1), df(e_1)) \stackrel{(2.3)}{=} r^2 h(E_1, E_1) \stackrel{(2.2)}{=} r^2 \\ (f^*h)(e_i, e_i) &= h(df(e_i), df(e_i)) \stackrel{(2.3)}{=} h(E_i, E_i) \stackrel{(2.2)}{=} 1 \quad (i \neq 1) \\ (f^*h)(e_i, e_j) &= h(df(e_i), df(e_j)) \stackrel{(2.3)}{=} b_i b_j h(E_i, E_j) \stackrel{(2.2)}{=} 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

であり, また

$$\begin{aligned} (2.5) \quad \|df\|^2 &= \sum_{i=1}^m h(df(e_i), df(e_i)) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} r^2 h(E_1, E_1) + h(E_2, E_2) + \cdots + h(E_m, E_m) \\ &\stackrel{(2.2)}{=} r^2 + m - 1 \end{aligned}$$

であるから

$$(2.6) \quad \begin{cases} T_f(e_1, e_1) &= (f^*h)(e_1, e_1) - \frac{1}{m} \|df\|^2 g(e_1, e_1) \\ &\stackrel{(2.4), (2.5)}{=} r^2 - \frac{1}{m} (r^2 + m - 1) = \frac{(r^2 - 1)(m - 1)}{m} \\ T_f(e_i, e_i) &= (f^*h)(e_i, e_i) - \frac{1}{m} \|df\|^2 g(e_i, e_i) \\ &\stackrel{(2.4), (2.5)}{=} 1 - \frac{1}{m} (r^2 + m - 1) = -\frac{r^2 - 1}{m} \quad (i \neq 1) \\ T_f(e_i, e_j) &= (f^*h)(e_i, e_j) - \frac{1}{m} \|df\|^2 g(e_i, e_j) \stackrel{(2.1), (2.4)}{=} 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

となり, したがって

$$(2.7) \quad \begin{cases} \xi_f(e_1) &= \sum_{j=1}^m T_f(e_1, e_j) df(e_j) \stackrel{(2.3), (2.6)}{=} \frac{r(r^2 - 1)(m - 1)}{m} E_1 \\ \xi_f(e_i) &= \sum_{j=1}^m T_f(e_i, e_j) df(e_j) \stackrel{(2.3), (2.6)}{=} -\frac{r^2 - 1}{m} E_i \quad (i \neq 1) \end{cases}$$

である. ゆえに

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \xi_f &= \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \xi_f)(e_i) \\
 &= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{e_i} (\xi_f(e_i)) - \xi_f(\nabla_{e_i} e_i) \right\} \\
 &\stackrel{e_i \text{ は parallel なので } \nabla_{e_i} e_i = 0}{=} \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} (\xi_f(e_i)) \\
 &\stackrel{(2.7)}{=} \nabla_{e_1} \left(\frac{r(r^2 - 1)(m - 1)}{m} E_1 \right) - \sum_{i=2}^m \nabla_{e_i} \left(\frac{r^2 - 1}{m} E_i \right) \\
 &\stackrel{E_j \text{ は parallel なので } \nabla_{e_i} E_j = 0}{=} 0
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 最後の等式では, E_j が parallel であることから

$$\nabla_{e_i} E_j = \nabla_{df(e_i)} E_j \stackrel{(2.3)}{=} \nabla_{b_i E_i} E_j = b_i \nabla_{E_i} E_j \stackrel{E_j \text{ は parallel}}{=} 0$$

となることを用いた. 以上で, f は C-stationary map の方程式 $\operatorname{div} \xi_f = 0$ を満たし, C-stationary map であることがわかった.

(3): ベクトル場 X は, M の各点 x において, $X_x = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) E_j$ と書ける. このとき, $a_{ij} = \nabla_{e_i} \varphi_j$ とおくと

$$(2.8) \quad \nabla_{e_i} X = \sum_{j=1}^m (\nabla_{e_i} \varphi_j) E_j = \sum_{j=1}^m a_{ij} E_j$$

であるので, (2.3) および (2.8) を考慮すると

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad h(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X) &= h \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} E_j, \sum_{k=1}^m a_{ik} E_k \right) \\
 &\stackrel{(2.8)}{=} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ij} a_{ik} h(E_j, E_k) \stackrel{(2.2)}{=} \sum_{j=1}^m a_{ij}^2
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad h(\nabla_{e_i} X, df(e_j)) &\stackrel{(2.3), (2.8)}{=} \begin{cases} h \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} E_k, r E_j \right) & (j = 1) \\ h \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} E_k, E_j \right) & (j \neq 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} r \sum_{k=1}^m a_{ik} h(E_k, E_j) & (j = 1) \\ \sum_{k=1}^m a_{ik} h(E_k, E_j) & (j \neq 1) \end{cases} \\
 &\stackrel{(2.2)}{=} \begin{cases} r a_{ij} & (j = 1) \\ a_{ij} & (j \neq 1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

がわかる. 第二変分公式 (定理 1.6.2) の式 (1.21) の右辺の各項を計算する. まず, 第 1 項は, 注意 1.6.3 により, ゼロとなる. 第 2 項は

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad & \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_j} X) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 & \stackrel{(2.6)}{=} \int_M \left\{ \frac{(r^2-1)(m-1)}{m} h(\nabla_{e_1} X, \nabla_{e_1} X) - \frac{r^2-1}{m} \sum_{i=2}^m h(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X) \right\} dv_g \\
 & \stackrel{(2.9)}{=} \int_M \left\{ \frac{(r^2-1)(m-1)}{m} \sum_{j=1}^m a_{1j}^2 - \frac{r^2-1}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right\} dv_g
 \end{aligned}$$

であり, 第 3 項は

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad & \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_j))^2 dv_g \\
 & = \int_M \left\{ \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_1))^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_j))^2 \right\} dv_g \\
 & \stackrel{(2.10)}{=} \int_M \left\{ \sum_{i=1}^m r^2 a_{i1}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 \right\} dv_g
 \end{aligned}$$

であり, 第 4 項は

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad & \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_j)) h(df(e_i), \nabla_{e_j} X) dv_g \\
 & = \int_M \left\{ h(\nabla_{e_1} X, df(e_1)) h(df(e_1), \nabla_{e_1} X) \right. \\
 & \quad + \sum_{j=2}^m h(\nabla_{e_1} X, df(e_j)) h(df(e_1), \nabla_{e_j} X) + \sum_{i=2}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_1)) h(df(e_i), \nabla_{e_1} X) \\
 & \quad \left. + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_j)) h(df(e_i), \nabla_{e_j} X) \right\} dv_g \\
 & \stackrel{(2.10)}{=} \int_M \left\{ r^2 a_{11}^2 + 2r \sum_{i=2}^m a_{1i} a_{i1} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij} a_{ji} \right\} dv_g
 \end{aligned}$$

であり, さらに, 第 5 項は

$$\begin{aligned}
 (2.14) \quad & -\frac{2}{m} \int_M \left\{ \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_i)) \right\}^2 dv_g \\
 & = -\frac{2}{m} \int_M \left\{ h(\nabla_{e_1} X, df(e_1)) + \sum_{i=2}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_i)) \right\}^2 dv_g \\
 & \stackrel{(2.10)}{=} -\frac{2}{m} \int_M \left(r a_{11} + \sum_{i=2}^m a_{ii} \right)^2 dv_g \\
 & = -\frac{2}{m} \int_M \left\{ r^2 a_{11}^2 + 2r a_{11} \sum_{i=2}^m a_{ii} + \left(\sum_{i=2}^m a_{ii} \right)^2 \right\} dv_g \\
 & = -\frac{2}{m} \int_M \left\{ r^2 a_{11}^2 + 2r \sum_{i=2}^m a_{11} a_{ii} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ii} a_{jj} \right\} dv_g
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 次の補題に注意する.

補題 2.2.2

$$(2.15) \quad \int_M (\nabla_{e_i} \psi_i)(\nabla_{e_j} \psi_j) dv_g = \int_M (\nabla_{e_i} \psi_j)(\nabla_{e_j} \psi_i) dv_g$$

すなわち

$$(2.16) \quad \int_M a_{ii} a_{jj} dv_g = \int_M a_{ij} a_{ji} dv_g$$

証明 等式 (2.16) は, 等式 (2.15) を a_{ij} で書き下したものであるので, 等式 (2.15) を示せばよい.

任意の i と j に対して, 2 つの恒等式

$$(2.17) \quad (\nabla_{e_i} \psi_j)(\nabla_{e_j} \psi_i) = \nabla_{e_i}(\psi_j \nabla_{e_j} \psi_i) - \psi_j(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \psi_i)$$

$$(2.18) \quad (\nabla_{e_i} \psi_i)(\nabla_{e_j} \psi_j) = \nabla_{e_j}(\psi_j \nabla_{e_i} \psi_i) - \psi_j(\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \psi_i)$$

の右辺の第1項はどちらも, divergence form (発散形) であるので, 境界のない多様体 M 上で積分するとゼロになる. したがって, 等式 (2.17), (2.18) それぞれの両辺を積分すると

$$(2.19) \quad \int_M (\nabla_{e_i} \psi_j)(\nabla_{e_j} \psi_i) dv_g = - \int_M \psi_j(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \psi_i) dv_g$$

$$(2.20) \quad \int_M (\nabla_{e_i} \psi_i)(\nabla_{e_j} \psi_j) dv_g = - \int_M \psi_j(\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \psi_i) dv_g$$

が得られる. 一方, $M = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ であるから, $[e_i, e_j] = 0$ であり, したがって, $\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \psi_i = \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \psi_i$ となるので, 等式 (2.19) の右辺と, 等式 (2.20) の右辺が等しいことになり, 求める等式 (2.15) が得られる. $\square$

定理 2.2.1 の証明を続けよう. 補題 2.2.2 の式 (2.16) より

$$\int_M a_{11} a_{ii} dv_g = \int_M a_{1i} a_{i1} dv_g$$

であることに注意して, 上記の 4 つの等式 (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) から, 第二変分公式 (1.21) は

$$\begin{aligned}
(2.21) \quad & \frac{1}{4} (\delta^2 E_{con})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \frac{1}{4} \left. \frac{d^2 E_{con}(f_t)}{dt^2} \right|_{t=0} \\
&= \int_M \left\{ \frac{(r^2-1)(m-1)}{m} \sum_{j=1}^m a_{1j}^2 - \frac{r^2-1}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right. \\
&\quad + r^2 \sum_{i=1}^m a_{i1}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 \\
&\quad + r^2 a_{11}^2 + 2r \sum_{i=2}^m a_{1i} a_{i1} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij} a_{ji} \\
&\quad \left. - \frac{2}{m} r^2 a_{11} - \frac{4r}{m} \sum_{i=2}^m a_{11} a_{ii} - \frac{2}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ii} a_{jj} \right\} dv_g \\
&= \int_M \left\{ \frac{(r^2-1)(m-1)}{m} a_{11}^2 + \frac{(r^2-1)(m-1)}{m} \sum_{j=2}^m a_{1j}^2 \right. \\
&\quad - \frac{r^2-1}{m} \sum_{i=2}^m a_{i1}^2 - \frac{r^2-1}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 \\
&\quad + r^2 a_{11} + r^2 \sum_{i=2}^m a_{i1}^2 + \sum_{j=2}^m a_{1j}^2 + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 \\
&\quad + r^2 a_{11}^2 + 2r \sum_{i=2}^m a_{1i} a_{i1} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij} a_{ji} \\
&\quad \left. - \frac{2}{m} r^2 a_{11} - \frac{4r}{m} \sum_{i=2}^m a_{11} a_{ii} - \frac{2}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ii} a_{jj} \right\} dv_g \\
&= \int_M \left[\left\{ \frac{(r^2-1)(m-1)}{m} + r^2 + r^2 - \frac{2r^2}{m} \right\} a_{11}^2 \right. \\
&\quad + \frac{1-r^2}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 + \left\{ 2r - \frac{4r}{m} \right\} \sum_{i=2}^m a_{1i} a_{i1} \\
&\quad + \left\{ \frac{(r^2-1)(m-1)}{m} + 1 \right\} \sum_{j=2}^m a_{1j}^2 + \left\{ -\frac{r^2-1}{m} + r^2 \right\} \sum_{i=2}^m a_{i1}^2 \\
&\quad \left. + \left\{ \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij} a_{ji} - \frac{2}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ii} a_{jj} \right\} \right] dv_g \\
&= \int_M \left[\frac{m-1}{m} (3r^2-1) a_{11}^2 + \frac{1-r^2}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 + 2r \left(1 - \frac{2}{m} \right) \sum_{i=2}^m a_{1i} a_{i1} \right. \\
&\quad + \frac{1}{m} (r^2(m-1)+1) \sum_{j=2}^m a_{1j}^2 + \frac{1}{m} (r^2(m-1)+1) \sum_{i=2}^m a_{i1}^2 \\
&\quad \left. + \left\{ \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij} a_{ji} - \frac{2}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ii} a_{jj} \right\} \right] dv_g \\
&= \int_M \left[\frac{m-1}{m} (3r^2-1) a_{11}^2 + \frac{1-r^2}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 \right. \\
&\quad + 2r \left(1 - \frac{2}{m} \right) \sum_{i=2}^m a_{1i} a_{i1} + \frac{1}{m} (r^2(m-1)+1) \sum_{i=2}^m (a_{1i}^2 + a_{i1}^2) \\
&\quad \left. + \left\{ \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij} a_{ji} - \frac{2}{m} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ii} a_{jj} \right\} \right] dv_g
\end{aligned}$$

となる. ここで, 次の2つの補題に注意する.

補題 2.2.3 r が十分 1 に近いとき

$$(2.22) \quad 2r \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sum_{i=2}^m a_{1i} a_{i1} + \frac{1}{m} (r^2(m-1) + 1) \sum_{i=2}^m (a_{1j}^2 + a_{i1}^2) \geq 0$$

補題 2.2.4 任意の k 次正方行列 B に対して

$$(2.23) \quad \|B\|^2 + \text{Tr}(B^2) - \frac{2}{k} (\text{Tr}(B))^2 \geq 0$$

が成り立つ. $B = (b_{ij})$ と成分表示したとき

$$(2.24) \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij} b_{ji} - \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ii} b_{jj} \geq 0$$

となる.

この補題を認めると, r が十分 1 に近いとき, 第二変分 (2.21) の右辺が非負になることが確かめられる. 実際, (2.22) により

(#1) r が十分 1 に近いとき,
「第3項 + 第4項」は非負

となり, 補題 2.2.4 で $k = m - 1$ として, $m - 1$ 次正方行列 B を $B = (a_{ij})_{2 \leq i, j \leq m}$ とおくと, 不等式 (2.24) は

$$(2.25) \quad \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij}^2 + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ij} a_{ji} - \frac{2}{m-1} \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m a_{ii} a_{jj} \geq 0$$

となる. 不等式 (2.25) の左辺は, 第5項より小さいので

(#2) 第5項は非負

であることを示している. 一方, 明らかに

(#3) r が十分 1 に近いとき, 第1項は非負
 $r < 1$ より, 第2項は非負

であるから, (#1), (#2), (#3) より, 第二変分 (2.21) の右辺は非負となり, 定理 2.2.1 の証明が終わる. したがって, あとは, 補題 2.2.3 および補題 2.2.4 を示せば良いだけである. 以下, これらの補題を示そう.

補題 2.2.3 の証明 r が十分 1 に近いとき

$$\begin{aligned}
& 2r \left(1 - \frac{2}{m}\right) \sum_{i=2}^m a_{1i} a_{i1} + \frac{1}{m} (r^2(m-1) + 1) \sum_{i=2}^m (a_{1i}^2 + a_{i1}^2) \\
& \geq -r \sum_{i=2}^m \left(1 - \frac{2}{m}\right) (a_{1i}^2 + a_{i1}^2) + \frac{1}{m} (r^2(m-1) + 1) \sum_{i=2}^m (a_{1i}^2 + a_{i1}^2) \\
& \quad (\because \text{一般的不等式 } A^2 + B^2 \geq -2AB) \\
& = \left\{ \frac{1}{m} (r^2(m-1) + 1) - r \left(1 - \frac{2}{m}\right) \right\} \sum_{i=2}^m (a_{1i}^2 + a_{i1}^2) \\
& = \frac{1}{m} \left\{ r^2(m-1) - r(m-2) + 1 \right\} \sum_{i=2}^m (a_{1i}^2 + a_{i1}^2) \\
& = \frac{1}{m} \left\{ 1 + r + r(r-1)(m-1) \right\} \sum_{i=2}^m (a_{1i}^2 + a_{i1}^2) \\
& \geq 0
\end{aligned}$$

となる. $\square$

補題 2.2.4 の証明 後半の不等式 (2.24) は, k 次正方形行列 B を $B = (b_{ij})$ と成分表示したときに, 前半の不等式 (2.23) を行列の成分で書き直したものであるので, 前半の不等式 (2.23) のみを証明すればよい.

まず, 任意の対称行列 B に対して (2.23) を示そう. この場合は, 行列 B を対角化

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

しておくと

$$\begin{aligned}
\|B\|^2 &= \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \\
\text{Tr}(B^2) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \\
(\text{Tr} B)^2 &= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^2
\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}
& \|B\|^2 + \text{Tr}(B^2) - \frac{2}{k} (\text{Tr} B)^2 \\
&= 2 \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 - \frac{2}{k} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^2 = \frac{2}{k} \left[k \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

となり, (2.23) は Schwarz の不等式

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^k 1^2 \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 = k \sum_{i=1}^k \lambda_i^2$$

にほかならないので, 成り立つことがわかる.

一般の行列 B に対しては, B を対称行列 B_1 と交代行列 B_2 の和で表しておく:

$$(2.26) \quad B = B_1 + B_2$$

ただし

$$(2.27) \quad {}^t B_1 = B_1, \quad {}^t B_2 = -B_2$$

である. 具体的には

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2}(B + {}^t B) \\ B_2 &= \frac{1}{2}(B - {}^t B) \end{aligned}$$

とおけばよい. このとき

$$\begin{aligned} (2.28) \quad \|B\|^2 &= \text{Tr}({}^t B B) \\ &\stackrel{(2.26)}{=} \text{Tr}({}^t(B_1 + B_2)(B_1 + B_2)) \\ &= \text{Tr}({}^t B_1 B_1) + \text{Tr}({}^t B_1 B_2 + {}^t B_2 B_1) + \text{Tr}({}^t B_2 B_2) \\ &\stackrel{(2.27)}{=} \|B_1\|^2 + \text{Tr}(B_1 B_2 - B_2 B_1) - \text{Tr}(B_2^2) \\ &= \|B_1\|^2 - \text{Tr}(B_2^2) \\ &\quad \left(\begin{array}{c} \text{trace の基本的性質より} \\ \vdots \quad \text{Tr}(B_1 B_2 - B_2 B_1) \\ \quad \quad = \text{Tr}(B_1 B_2) - \text{Tr}(B_2 B_1) = 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.29) \quad \text{Tr}(B^2) &\stackrel{(2.26)}{=} \text{Tr}((B_1 + B_2)^2) \\ &= \text{Tr}(B_1^2 + B_1 B_2 + B_2 B_1 + B_2^2) \\ &= \text{Tr}(B_1^2) + \text{Tr}(B_1 B_2 + B_2 B_1) + \text{Tr}(B_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.30) \quad (\text{Tr}(B))^2 &\stackrel{(2.26)}{=} (\text{Tr}(B_1 + B_2))^2 \\ &= (\text{Tr}(B_1) + \text{Tr}(B_2))^2 \\ &= (\text{Tr}(B_1))^2 + 2\text{Tr}(B_1)\text{Tr}(B_2) + (\text{Tr}(B_2))^2 \end{aligned}$$

である. また,

$$(2.31) \quad \text{Tr}(B_1 B_2 + B_2 B_1) = 0$$

$$(2.32) \quad \text{Tr}(B_2) = 0$$

となる. 実際, trace の基本的性質と (2.27) より

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(B_1 B_2) &= \mathrm{Tr}({}^t(B_1 B_2)) = \mathrm{Tr}({}^t B_2 {}^t B_1) \stackrel{(2.27)}{=} -\mathrm{Tr}(B_2 B_1) \\ \mathrm{Tr}(B_2) &= \mathrm{Tr}({}^t B_2) \stackrel{(2.27)}{=} -\mathrm{Tr}(B_2)\end{aligned}$$

というように, (2.31) および (2.32) が得られる. 以上から

$$\begin{aligned}\|B\|^2 + \mathrm{Tr}(B^2) - \frac{2}{m}(\mathrm{Tr} B)^2 \\ \stackrel{(2.28), (2.29), (2.30)}{=} \|B_1\|^2 + \mathrm{Tr}(B_1^2) - \frac{2}{m}(\mathrm{Tr} B_1)^2 \\ + \mathrm{Tr}(B_1 B_2 + B_2 B_1) - \frac{4}{m}\mathrm{Tr}(B_1)\mathrm{Tr}(B_2) - \frac{2}{m}(\mathrm{Tr}(B_2))^2 \\ \stackrel{(2.31), (2.32)}{=} \|B_1\|^2 + \mathrm{Tr}(B_1^2) - \frac{2}{m}(\mathrm{Tr} B_1)^2\end{aligned}$$

すなわち

$$\|B\|^2 + \mathrm{Tr}(B^2) - \frac{2}{m}(\mathrm{Tr} B)^2 = \|B_1\|^2 + \mathrm{Tr}(B_1^2) - \frac{2}{m}(\mathrm{Tr} B_1)^2$$

となり, 対称行列 B_1 に対して (2.23) を示せば良いことになるが, これはすでに確かめてある. $\square$

以上で, 補題 2.2.3 および 補題 2.2.4 の証明が終わり, 第二変分 (2.21) は非負となることが導かれ, f が安定であることが確かめられた. 定理 2.2.1 の証明が完結した. $\square$

2.3 球面からの安定な C-stationary maps

この節では, 次の定理を証明する.

定理 2.3.1 ([14]) f を m 次元球面 $\mathbb{S}^m$ からリーマン多様体 N への写像とする. このとき, $m \geq 5$ ならば, 以下の 2 つのことがらは同値である:

- (1) f は 安定な (stable) C-stationary map である.
- (2) f は weakly conformal map である.

証明 m 次元球面 $\mathbb{S}^m$ は, $m+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{m+1}$ の部分多様体であるので, $\mathbb{S}^m$ の点 x における $\mathbb{S}^m$ の接空間 $T_x \mathbb{S}^m$ は, 線形空間 $\mathbb{R}^{m+1} \simeq T_x \mathbb{R}^{m+1}$ の線形部分空間と見なすことができる. このとき, ν を $\mathbb{R}^{m+1}$ における $\mathbb{S}^m$ の外向き法線ベクトル場とし, そのうち, 点 $x \in \mathbb{S}^m$ におけるベクトルを ν_x で表す. 単位球面 $\mathbb{S}^m$ 上では, x を位置ベクトルと見なせば, $\nu_x = x$ である. また, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^{m+1}$ の内積とする.

任意の $x \in \mathbb{S}^m$ に対して, $p = p_x$ を $\mathbb{R}^{m+1}$ から接空間 $T_x \mathbb{S}^m$ への標準的な射影とする, すなわち,

$$\begin{array}{ccc} p_x : \mathbb{R}^{m+1} & \longrightarrow & T_x \mathbb{S}^m \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ u & \longmapsto & p_x(u) \stackrel{\text{def}}{=} u - \langle u, \nu_x \rangle \nu_x \end{array}$$

とする.

さて, $\mathbb{R}^{m+1}$ 上の任意の平行ベクトル場 E をとり,

$$\varphi(x) = \langle E_x, \nu_x \rangle$$

とし, ベクトル場 Z を, 各点 $x \in \mathbb{S}^m$ において

$$(2.33) \quad Z_x = p_x(E_x) = E_x - \langle E_x, \nu_x \rangle \nu_x = E_x - \varphi(x) \nu_x$$

で定義する. ここで E_x, Z_x はそれぞれ, ベクトル場 E, Z の x におけるベクトルを表す. このとき

$$(2.34) \quad \nabla_{e_i} Z = -\varphi e_i$$

である. 実際, D を $\mathbb{R}^{m+1}$ の標準的な接続とすると, 球面 $\mathbb{S}^m$ の接続 ∇ は, 点 $x \in \mathbb{S}^m$ において

$$(2.35) \quad \nabla_X Y = p_x(D_X Y)$$

と表せる. したがって, x において

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} Z &\stackrel{(2.33)}{=} \nabla_{e_i}(E - \varphi \nu) = -\nabla_{e_i}(\varphi \nu) \stackrel{(2.35)}{=} -p_x(D_{e_i}(\varphi \nu)) \\ &= -p_x((D_{e_i} \varphi) \nu + \varphi D_{e_i} \nu) \\ &= -(D_{e_i} \varphi) p_x(\nu) - \varphi p_x(D_{e_i} \nu) \\ &\stackrel{p_x(\nu)=0}{=} -\varphi p_x(D_{e_i} \nu) \stackrel{(2.35)}{=} -\varphi \nabla_{e_i} \nu = -\varphi e_i \end{aligned}$$

となり, (2.34) が確かめられた. 上記の最後の等式では, 単位球面 $\mathbb{S}^m$ 上の接続 ∇ に対して $\nabla_{e_i} \nu = e_i$ であることを用いた. ここで

$$(2.36) \quad \begin{aligned} \nabla_{e_i}(df(Z)) &\stackrel{\nabla df \text{ の定義}}{=} (\nabla_{e_i} df)(Z) + df(\nabla_{e_i} Z) \\ &\stackrel{(2.34)}{=} (\nabla_{e_i} df)(Z) - \varphi df(e_i) \end{aligned}$$

であることに注意しておく.

さて, $\mathbb{R}^{m+1}$ の正規直交基底の平行なベクトル場

$$E_1, \dots, E_{m+1}$$

をとり,

$$Z_k = p(E_k) \quad (k = 1, \dots, m+1)$$

とおく. このとき, (2.36) により

$$(2.37) \quad \nabla_{e_i}(df(Z_k)) = (\nabla_{e_i} df)(Z_k) - \varphi_k df(e_i)$$

となる. ただし

$$(2.38) \quad \varphi_k = \langle E_k, \nu \rangle$$

である.

C-stationary map f の安定性より, 第二変分は非負である. 特に

$$(\delta^2 E_{con})(f)(df(Z_k)) \geq 0, \quad \text{したがって} \quad \sum_{k=1}^{m+1} (\delta^2 E_{con})(f)(df(Z_k)) \geq 0$$

である. そこで $(\delta^2 E_{con})(f)(df(Z_k))$ を計算しよう. まず, T_f の定義より

$$(2.39) \quad h(df(e_i), df(e_j)) = (f^*h)(e_i, e_j) = (T_f)(e_i, e_j) + \frac{1}{m} \|df\|^2 g(e_i, e_j)$$

であること, および, 補題 1.3.1 (5) により

$$(2.40) \quad \|f^*h\|^2 = \|T_f\|^2 + \frac{1}{m} \|df\|^4$$

であることに注意しておく.

第二変分公式から

$$(2.41) \quad \begin{aligned} & (\delta^2 E_{con})(f)(df(Z_k)) \\ &= \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i}(df(Z_k)), \nabla_{e_j}(df(Z_k))) T_f(e_i, e_j) dv_g \\ & \quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i}(df(Z_k)), df(e_j)) h(\nabla_{e_i}(df(Z_k)), df(e_j)) dv_g \\ & \quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i}(df(Z_k)), df(e_j)) h(df(e_i), \nabla_{e_j}(df(Z_k))) dv_g \\ & \quad - \frac{2}{m} \int_M \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i}(df(Z_k)), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h(\nabla_{e_j}(df(Z_k)), df(e_j)) dv_g \\ & \quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h({}^N R(df(Z_k), df(e_i)) df(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\ &= : A + B + C + D + E \end{aligned}$$

である. ここで, 等式 (2.41) の右辺の 5 つの項をそれぞれ, A, B, C, D, E とおいた. このとき (2.37) により

$$(2.42) \quad \begin{aligned} A & \stackrel{(2.37)}{=} \int_M \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), (\nabla_{e_j} df)(Z_k)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\ & \quad - 2 \int_M \varphi_k \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\ & \quad + \int_M \varphi_k^2 \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\ & \stackrel{\text{補題 1.3.1(4)}}{=} \int_M \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), (\nabla_{e_j} df)(Z_k)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\ & \quad - 2 \int_M \varphi_k \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\ & \quad + \int_M \varphi_k^2 \|T_f\|^2 dv_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.43) \quad B \quad & \stackrel{(2.37)}{=} \int_M \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) dv_g \\
& - 2 \int_M \varphi_k \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) dv_g \\
& + \int_M \varphi_k^2 \|f^* h\|^2 dv_g \\
& \stackrel{(2.39),(2.40)}{=} \int_M \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) dv_g \\
& - 2 \int_M \varphi_k \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
& + \int_M \varphi_k^2 \|T_f\|^2 dv_g \\
& - \frac{2}{m} \int_M \varphi_k \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_i)) \|df\|^2 dv_g \\
& + \frac{1}{m} \int_M \varphi_k^2 \|df\|^4 dv_g \\
(2.44) \quad C \quad & \stackrel{(2.37)}{=} \int_M \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) h(df(e_i), (\nabla_{e_j} df)(Z_k)) dv_g \\
& - 2 \int_M \varphi_k \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) dv_g \\
& + \int_M \varphi_k^2 \|f^* h\|^2 dv_g \\
& \stackrel{(2.39),(2.40)}{=} \int_M \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) h(df(e_i), (\nabla_{e_j} df)(Z_k)) dv_g \\
& - 2 \int_M \varphi_k \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
& + \int_M \varphi_k^2 \|T_f\|^2 dv_g \\
& - \frac{2}{m} \int_M \varphi_k \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_i)) \|df\|^2 dv_g \\
& + \frac{1}{m} \int_M \varphi_k^2 \|df\|^4 dv_g \\
(2.45) \quad D \quad & \stackrel{(2.37)}{=} - \frac{2}{m} \int_M \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h((\nabla_{e_j} df)(Z_k), df(e_j)) dv_g \\
& + \frac{4}{m} \int_M \varphi_k \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_i)) \|df\|^2 dv_g \\
& - \frac{2}{m} \int_M \varphi_k^2 \|df\|^4 dv_g
\end{aligned}$$

となる。したがって, (2.41), (2.42), (2.43), (2.44), (2.45) より

$$\begin{aligned}
(2.46) \quad & (\delta^2 E_{con})(f)(df(Z_k)) \\
&= \int_M \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df(Z_k)), (\nabla_{e_j} df(Z_k))) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
&\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df(Z_k)), df(e_j)) h((\nabla_{e_i} df(Z_k)), df(e_j)) dv_g \\
&\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df(Z_k)), df(e_j)) h(df(e_i), (\nabla_{e_j} df(Z_k))) dv_g \\
&\quad - \frac{2}{m} \int_M \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h((\nabla_{e_j} df)(Z_k), df(e_j)) dv_g \\
&\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h({}^N R(df(Z_k), df(e_i)) df(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
&\quad - 6 \int_M \varphi_k \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
&\quad + 3 \int_M \varphi_k^2 \|T_f\|^2 dv_g
\end{aligned}$$

である。ここで, 次の公式を用いると, N の曲率の項は M のリッチ曲率の項に置き換えることができる。

補題 2.3.2 f を M から N へのなめらかな写像とし, X, Y を M 上の接ベクトル場とする.
このとき

$$\begin{aligned}
 (2.47) \quad & \frac{1}{4} \nabla_X \nabla_Y \|T_f\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} \nabla_X df)(Y), \xi_f(e_i)) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_X df)(e_i), (\nabla_Y df)(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_X df)(e_i), df(e_j)) h((\nabla_Y df)(e_i), df(e_j)) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_X df)(e_i), df(e_j)) h(df(e_i), (\nabla_Y df)(e_j)) \\
 &\quad - \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m h((\nabla_X df)(e_i), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h((\nabla_Y df)(e_j), df(e_j)) \\
 &\quad - \sum_{i,j=1}^m h(df({}^M R(X, e_i)(Y)), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^m h({}^N R(df(X), df(e_i)) df(Y), df(e_j)) T_f(e_i, e_j)
 \end{aligned}$$

である. ここで $\{e_i\}$ は M 上の局所的な正規直交フレームである.

注意 2.3.3 f が C-stationary map ならば, 部分積分により, 補題 2.3.2 の等式 (2.47) の右辺の第 1 項の M 上の積分はゼロになる.

補題 2.3.2 の証明 T_f の定義より

$$(2.48) \quad h(df(e_i), df(e_j)) = (f^*h)(e_i, e_j) = T_f(e_i, e_j) + \frac{1}{m} \|df\|^2 g(e_i, e_j)$$

であり, 補題 1.3.1 (5) により

$$(2.49) \quad \|f^*h\|^2 = \|T_f\|^2 + \frac{1}{m} \|df\|^4$$

であること, および,

$$(2.50) \quad \|f^*h\|^2 = \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2$$

$$\begin{aligned}
 (2.51) \quad \|df\|^4 &= \left\{ \sum_{i=1}^m h(df(e_i), df(e_i)) \right\}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m h(df(e_i), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h(df(e_j), df(e_j))
 \end{aligned}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}
(2.52) \quad & \frac{1}{4} \nabla_X \nabla_Y \|T_f\|^2 \stackrel{(2.49)}{=} \frac{1}{4} \nabla_X \nabla_Y (\|f^* h\|^2) - \frac{1}{4m} \nabla_X \nabla_Y (\|df\|^4) \\
& \stackrel{(2.50), (2.51)}{=} \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_X \nabla_Y df)(e_i), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), (\nabla_X df)(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), df(e_j)) h((\nabla_X df)(e_i), df(e_j)) \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), df(e_j)) h(df(e_i), (\nabla_X df)(e_j)) \\
& \quad - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h((\nabla_X \nabla_Y df)(e_i), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h(df(e_j), df(e_j)) \\
& \quad - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), (\nabla_X df)(e_i)) \sum_{j=1}^m h(df(e_j), df(e_j)) \\
& \quad - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h((\nabla_X df)(e_j), df(e_j)) \\
& \quad - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h(df(e_j), (\nabla_X df)(e_j)) \\
& \stackrel{(2.48)}{=} \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_X \nabla_Y df)(e_i), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), (\nabla_X df)(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), df(e_j)) h((\nabla_X df)(e_i), df(e_j)) \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), df(e_j)) h(df(e_i), (\nabla_X df)(e_j)) \\
& \quad - \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m h((\nabla_Y df)(e_i), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h((\nabla_X df)(e_j), df(e_j))
\end{aligned}$$

となる. また, Ricci formula により

$$\begin{aligned}
(2.53) \quad & (\nabla_X \nabla_Y df)(e_i) = (\nabla_X \nabla_{e_i} df)(Y) \\
& = (\nabla_{e_i} \nabla_X df)(Y) - df({}^M R(X, e_i)(Y)) + {}^N R(df(X), df(e_i)) df(Y)
\end{aligned}$$

である. ゆえに, (2.52) および (2.53) により, 補題 2.3.2 の等式が得られる. $\square$

定理 2.3.1 の証明に戻ろう. 補題 2.3.2 で $X = Y = Z_k$ とおくと

$$\begin{aligned}
 (2.54) \quad & \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{Z_k} df)(e_i), (\nabla_{Z_k} df)(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
 & + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{Z_k} df)(e_i), df(e_j)) h((\nabla_{Z_k} df)(e_i), df(e_j)) \\
 & + \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{Z_k} df)(e_i), df(e_j)) h(df(e_i), (\nabla_{Z_k} df)(e_j)) \\
 & - \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m h((\nabla_{Z_k} df)(e_i), df(e_i)) \sum_{j=1}^m h((\nabla_{Z_k} df)(e_j), df(e_j)) \\
 & + \sum_{i,j=1}^m h({}^N R(df(Z_k), df(e_i)) df(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
 = & \frac{1}{4} \nabla_{Z_k} \nabla_{Z_k} \|T_f\|^2 \\
 & - \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} \nabla_{Z_k} df)(Z_k), \xi_f(e_i)) \\
 & + \sum_{i,j=1}^m h(df({}^S R(Z_k, e_i)(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j)
 \end{aligned}$$

という等式が得られる. この等式 (2.54) の左辺は, 等式 (2.46) の右辺の第1項～第5項であるので, この等式により, 等式 (2.46) の第1項～第5項は等式 (2.54) の右辺で置き換えることができ

$$\begin{aligned}
 (2.55) \quad & \sum_{k=1}^{m+1} (\delta^2 E_{con})(f)(df(Z_k)) \\
 = & \frac{1}{4} \int_M \sum_{k=1}^{m+1} \nabla_{Z_k} \nabla_{Z_k} \|T_f\|^2 dv_g \\
 & - \int_M \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} \nabla_{Z_k} df)(Z_k), \xi_f(e_i)) dv_g \\
 & + \int_M \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i,j=1}^m h(df({}^S R(Z_k, e_i)Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 & - 6 \int_M \sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 & + 3 \int_M \sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k^2 \|T_f\|^2 dv_g \\
 = & : \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV} + \text{V}
 \end{aligned}$$

である. ここで, 等式 (2.55) の最右辺の5つの項をそれぞれ I, II, III, IV, V とおいた. これらの項を計算するために, 次の補題を必要とする.

補題 2.3.4

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{m+1} \nabla_{Z_k} \nabla_{Z_k} = \Delta$$

ここで Δ は $M = \mathbb{S}^m$ 上のラプラシアンとする

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{m+1} g(e_i, Z_k) Z_k = e_i$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{m+1} g(Z_k, Z_k) = m$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^m h(df(Z_k), df(e_i)) T_f(Z_k, e_i) = \|T_f\|^2$$

証明 まず,

$$(h) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \sim (4) \text{ の左辺の量が,} \\ \mathbb{R}^{m+1} \text{ 上の} \\ \text{平行な正規直交フレーム } E_1, \dots, E_{m+1} \text{ の} \\ \text{取り方によらない} \end{array} \right.$$

ことを仮定すると,

球面 $\mathbb{S}^m$ 上の任意の点 x において,
 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上の平行な正規直交フレーム $E_1, \dots, E_{m+1}$ で,
 $Z_1, \dots, Z_m$ が
 球面 $\mathbb{S}^m$ の接空間 $T_x \mathbb{S}^m$ の正規直交フレームであり,
 かつ, $Z_{m+1}(x) = 0$ であるものをとる

ことにより, (1) ~ (3) は明らかに成り立ち, また, (4) も, 補題 1.3.1 (3) により, 成り立つことがわかる. したがって, あとは, 上記の (h) を示せばよい.

$\{E_k\}$ と $\{\bar{E}_k\}$ をどちらも, $\mathbb{R}^{m+1}$ 上の平行な正規直交フレームとする. このとき, 直交行列 (a_{kp}) が存在して

$$E_k = \sum_{p=1}^{m+1} a_{kp} \bar{E}_p$$

となる. したがって, $\bar{Z}_k = p(\bar{E}_k)$ も

$$(2.56) \quad Z_k = \sum_{p=1}^{m+1} a_{kp} \bar{Z}_p$$

を満たす. また, (a_{ij}) が直交行列なので,

$$(2.57) \quad \sum_{k=1}^m a_{kp} a_{kq} = \delta_{pq}$$

を満たす. ただし δ_{pq} は Kronecker のデルタ記号である, すなわち

$$(2.58) \quad \delta_{pq} = \begin{cases} 1 & (p = q \text{ の場合}) \\ 0 & (p \neq q \text{ の場合}) \end{cases}$$

とする.

まず, (1) について, $\sum_{k=1}^{m+1} \nabla_{Z_k} \nabla_{Z_k}$ が E_k の選び方によらずに定まることを示そう.

$$\sum_{k=1}^{m+1} \nabla_{Z_k} \nabla_{Z_k} \stackrel{(2.56)}{=} \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{q=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} a_{kp} a_{kq} \nabla_{\bar{Z}_p} \nabla_{\bar{Z}_q}$$

$$\stackrel{(2.57)}{=} \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{q=1}^{m+1} \delta_{pq} \nabla_{\bar{Z}_p} \nabla_{\bar{Z}_p},$$

$$\stackrel{(2.58)}{=} \sum_{\ell=1}^{m+1} \nabla_{\bar{Z}_\ell} \nabla_{\bar{Z}_\ell}$$

となる. ここで, (a_{ij}) が直交行列なので, $\sum_{k=1}^m a_{kp} a_{kq} = \delta_{pq}$ であることを用いた. 以上から, (1) につい

て $\sum_{k=1}^{m+1} \nabla_{Z_k} \nabla_{Z_k}$ が E_k の選び方によらないことがわかった.

同様に (2), (3), (4) についても, (a_{ij}) が直交行列なので, $\sum_{k=1}^m a_{kp} a_{kq} = \delta_{pq}$ であることを考慮すれば, 以下のように, E_k の選び方によらないことが確かめられる.

$$\sum_{k=1}^{m+1} g(X, Z_k) Z_k \stackrel{(2.56)}{=} \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{q=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} a_{kp} a_{kq} g(X, \bar{Z}_p) \bar{Z}_q$$

$$\stackrel{(2.57)}{=} \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{q=1}^{m+1} \delta_{pq} g(X, \bar{Z}_p) \bar{Z}_p$$

$$\stackrel{(2.58)}{=} \sum_{\ell=1}^{m+1} g(X, \bar{Z}_\ell) \bar{Z}_\ell$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} g(Z_k, Z_k) \stackrel{(2.56)}{=} \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{q=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} a_{kp} a_{kq} g(Z_p, Z_q)$$

$$\stackrel{(2.57)}{=} \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{q=1}^{m+1} \delta_{pq} g(Z_p, Z_p)$$

$$\stackrel{(2.58)}{=} \sum_{\ell=1}^{m+1} g(Z_\ell, Z_\ell)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^m h(df(Z_k), df(e_i)) T_f(Z_k, e_i) &\stackrel{(2.56)}{=} \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{q=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} a_{ip} a_{iq} h(df(Z_k), df(e_p)) T_f(Z_k, e_q) \\
&\stackrel{(2.57)}{=} \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{q=1}^{m+1} \delta_{pq} h(df(Z_k), df(e_p)) T_f(Z_k, e_q) \\
&\stackrel{(2.58)}{=} \sum_{\ell=1}^{m+1} h(df(Z_k), df(e_\ell)) T_f(Z_k, e_\ell)
\end{aligned}$$

以上で, 補題 2.3.4 の証明が終わった. $\square$

補題 2.3.4 (1) によって

$$(2.59) \quad \text{I} = \frac{1}{4} \int_M \sum_{k=1}^{m+1} \nabla_{Z_k} \nabla_{Z_k} \|T_f\| dv_g = \frac{1}{4} \int_M \Delta \|T_f\| dv_g = 0$$

である. 部分積分により

$$\begin{aligned}
(2.60) \quad \text{II} &= \int_M \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} \nabla_{Z_k} df)(Z_k), \xi_f(e_i)) dv_g \\
&= - \int_M h((\nabla_{Z_k} df)(Z_k), \operatorname{div}_g \xi_f) dv_g \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる. ここで f が C-stationary map であること, すなわち, $\operatorname{div}_g \xi_f = 0$ を満たすことを用いた.

$\mathbb{S}^m R(U, V)W = g(V, W)U - g(U, W)V$ であることに注意すれば, 補題 2.3.4 (2), (3) より

$$\begin{aligned}
(2.61) \quad \text{III} &= \int_M \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i,j=1}^m h(df(\mathbb{S}^m R(Z_k, e_i)Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
&= \int_M \sum_{i,j=1}^m \sum_{k=1}^{m+1} h(df(g(e_i, Z_k)Z_k - g(Z_k, Z_k)e_i), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
&\stackrel{\text{補題 2.3.4 (2), (3)}}{=} - (m-1) \int_M \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
&\stackrel{\text{補題 1.3.1 (3)}}{=} - (m-1) \int_M \|T_f\|^2
\end{aligned}$$

である. さらに, 項 IV を計算するために,

$$(2.62) \quad \gamma_k(X) = h(df(Z_k), \xi_f(X))$$

とおく. (2.37) と補題 1.5.5 から

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
&= \sum_{i=1}^m h\left((\nabla_{e_i} df)(Z_k), \sum_{j=1}^m T_f(e_i, e_j) df(e_j)\right) \\
&\stackrel{\xi_f \text{ の定義 (1.11)}}{=} \sum_{i=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), \xi_f(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{e_i}(df(Z_k)), \xi_f(e_i)\right) - \sum_{i=1}^m h(df(\nabla_{e_i} Z_k), \xi_f(e_i)) \\
&\quad \left(\because (\nabla_X df)(Y) \text{ の定義: } (\nabla_X df)(Y) = \nabla_X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) \right) \\
&\stackrel{(2.34)}{=} \sum_{i=1}^m \left\{ h(\nabla_{e_i}(df(Z_k)), \xi_f(e_i)) + \varphi_k \sum_{i=1}^m h(df(e_i), \xi_f(e_i)) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \gamma_k)(e_i) - h\left(df(Z_k), \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \xi_f)(e_i)\right) + \varphi_k \sum_{i=1}^m h(df(e_i), \xi_f(e_i)) \\
&\quad \left(\because \begin{array}{l} \gamma_k \text{ の定義より} \\ \operatorname{div} \gamma_k = \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i}(df(Z_k)), \xi_f(e_i)) + \sum_{i=1}^m h(df(Z_k), (\nabla_{e_i} \xi_f)(e_i)) \end{array} \right) \\
&= \operatorname{div} \gamma_k + \varphi_k \|T_f\|^2 \\
&\quad \left(\because \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \xi_f)(e_i) = \operatorname{div} \xi_f = 0 \right)
\end{aligned}$$

となる. したがって

$$\begin{aligned}
(2.63) \quad & \sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_i} df)(Z_k), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k \operatorname{div} \gamma_k + \sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k^2 \|T_f\|^2 \\
&= \operatorname{div} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k \gamma_k \right) - \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^m e_i(\varphi_k) \gamma_k(e_i) + \sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k^2 \|T_f\|^2 \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \operatorname{div} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k \gamma_k \right) = \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k \gamma_k \right) (e_i) \\ \because \qquad \qquad \qquad = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{m+1} e_i(\varphi_k) \gamma_k(e_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k (\nabla_{e_i} \gamma_k)(e_i) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

である. また, D を $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な接続とすると, $D_{e_i} \nu = e_i$ であり, また, E は平行であるから

$$\sum_{i=1}^m e_i(\varphi_k) e_i = \sum_{i=1}^m e_i(\langle E_k, \nu \rangle) e_i = \sum_{i=1}^m \langle E_k, D_{e_i} \nu \rangle e_i = \sum_{i=1}^m \langle E_k, e_i \rangle e_i = p(E_k) = Z_k$$

となる. ゆえに, 補題 2.3.4 (3) より

$$\begin{aligned}
 (2.64) \quad \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^m e_i(\varphi_k) \gamma_k(e_i) &= \sum_{k=1}^{m+1} \gamma_k \left(\sum_{i=1}^m e_i(\varphi_k) e_i \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{m+1} \gamma_k(Z_k) \stackrel{\gamma_k \text{ の定義 (2.62)}}{=} \sum_{k=1}^{m+1} h(df(Z_k), \xi_f(Z_k)) \\
 &\stackrel{\xi_f \text{ の定義 (1.11)}}{=} \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^m h(df(Z_k), df(e_i)) T_f(Z_k, e_i) \stackrel{\text{補題 2.3.4 (3)}}{=} \|T_f\|^2
 \end{aligned}$$

である. また

$$(2.65) \quad \sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k^2 \stackrel{\varphi_k \text{ の定義 (2.38)}}{=} \sum_{k=1}^{m+1} g(E_k, \nu)^2 = g\left(\nu, \sum_{k=1}^{m+1} g(\nu, E_k) E_k\right) = g(\nu, \nu) = 1$$

である. (2.63), (2.64), (2.65) によって

$$(2.66) \quad \text{IV} = 0$$

が得られる. また, (2.65) によって

$$(2.67) \quad V = 3 \int_M \|T_f\|^2 dv_g$$

となる.

以上から, (2.59), (2.60), (2.61), (2.66), (2.67) を (2.55) に代入することにより

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{k=1}^{m+1} (\delta^2 E_{con})(f)(df(Z_k)) \\
 &= -(m-1) \int_M \|T_f\|^2 dv_g + 3 \int_M \|T_f\|^2 dv_g \\
 &= (4-m) \int_M \|T_f\|^2 dv_g
 \end{aligned}$$

すなわち

$$(m-4) \int_M \|T_f\|^2 dv_g \leq 0$$

となる. したがって $m \geq 5$ ならば $\|T_f\| = 0$, すなわち, f は weakly conformal map となる. $\square$

2.4 球面への安定な C-stationary maps

この節では, 次の定理を証明する.

定理 2.4.1 ([14]) f をリーマン多様体 M から m 次元球面 S^n への写像とする. このとき, $n \geq 5$ ならば, 以下の 2 つのことがらは同値である:

- (1) f は 安定な (stable) C-stationary map である
- (2) f は weakly conformal map である

証明 n 次元球面 $\mathbb{S}^n$ は, $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体であるので, $\mathbb{S}^n$ の点 y における $\mathbb{S}^n$ の接空間 $T_y\mathbb{S}^n$ は, 線形空間 $\mathbb{R}^{n+1} \simeq T_y\mathbb{R}^{n+1}$ の線形部分空間と見なすことができる. このとき, ν を $\mathbb{R}^{n+1}$ における $\mathbb{S}^n$ の外向き法線ベクトル場とし, そのうち, 点 $y \in \mathbb{S}^n$ におけるベクトルを ν_y で表す. 単位球面 $\mathbb{S}^n$ 上では, y を位置ベクトルと見なせば, $\nu_y = y$ である. また, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の内積とする.

任意の $y \in \mathbb{S}^n$ に対して, $p = p_y$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ から接空間 $T_y\mathbb{S}^n$ への標準的な射影とする, すなわち,

$$\begin{array}{ccc} p_y : \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & T_y\mathbb{S}^n \\ \Psi & & \Psi \\ u & \longmapsto & p_y(u) \stackrel{\text{def}}{=} u - \langle u, \nu_y \rangle \nu_y \end{array}$$

とする.

さて, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の任意の平行ベクトル場 F をとり,

$$\psi(x) = \langle F_{f(x)}, \nu_{f(x)} \rangle$$

とし, ベクトル場 W を, 各点 $x \in \mathbb{S}^m$ において

$$(2.68) \quad W_x = Z_{f(x)} = p_{f(x)}(F_{f(x)}) = F_{f(x)} - \langle F_{f(x)}, \nu_{f(x)} \rangle \nu_{f(x)} = F_{f(x)} - \psi(x) \nu_{f(x)}$$

で定義する. W は pullback bundle $f^{-1}T\mathbb{S}^n$ の smooth section と見なせる.

このとき

$$(2.69) \quad \nabla_{e_i} W = -\psi df(e_i)$$

となる. 実際,

$$\nabla_{e_i} W = f^{-1}T\mathbb{S}^n \nabla_{e_i} W = \mathbb{S}^n \nabla_{df(e_i)} Z = -\psi df(e_i)$$

である. ここで, 最後の等式は, (2.34) を

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^m & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \\ e_i & \longrightarrow & df(e_i) \\ \varphi & \longrightarrow & \psi \end{array}$$

として用いた.

f は C-stationary map であるので $\operatorname{div}_g \xi_f = 0$ となることに注意すると, 第二変分公式から

$$\begin{aligned}
 (2.70) \quad (\delta^2 E_{con})(f)(W) &= \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} W, \nabla_{e_j} W) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} W, df(e_j))^2 dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} W, df(e_j)) h(df(e_i), \nabla_{e_j} W) dv_g \\
 &\quad - \frac{2}{m} \int_M \left\{ \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i} W, df(e_i)) \right\}^2 dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\mathbb{S}^n R(W, df(e_i)) W, df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 &\stackrel{(2.69)}{=} \int_M \psi^2 \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 &\quad + 2 \int_M \psi^2 \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2 dv_g \\
 &\quad - \frac{2}{m} \int_M \psi^2 \|df\|^4 dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\mathbb{S}^n R(W, df(e_i)) W, df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 &\stackrel{\text{補題 1.3.1 (3),(4)}}{=} 3 \int_M \psi^2 \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\mathbb{S}^n R(W, df(e_i)) W, df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \\
 &= 3 \int_M \psi^2 \|T_f\|^2 dv_g \\
 &\quad - \int_M h(W, W) \|T_f\|^2 dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(W, df(e_i)) h(W, df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g
 \end{aligned}$$

となる. 上記の最後の等式では, 球面の曲率の一般的等式 $\mathbb{S}^n R(U, V)W = h(V, W)U - h(U, W)V$ を用いた.

さて, $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底の平行なベクトル場

$$F_1, \dots, F_{n+1}$$

をとり, 対応するベクトル W を

$$W_1, \dots, W_{n+1}$$

とおく. このとき, (2.69) により

$$(2.71) \quad \nabla_{e_i} W_k = -\psi_k df(e_i)$$

となる. ただし

$$(2.72) \quad \psi_k = \langle F_k, \nu \rangle$$

である.

C-stationary map f の安定性より

$$(\delta^2 E_{con})(f)(W_k) \geq 0, \text{ したがって } \sum_{k=1}^{n+1} (\delta^2 E_{con})(f)(W_k) \geq 0$$

であるが, (2.70) によって

$$(2.73) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^{n+1} (\delta^2 E_{con})(f)(W_k) \\ &= 3 \int_M \sum_{k=1}^{n+1} \psi_k^2 \|T_f\|^2 dv_g \\ &\quad - \int_M \sum_{k=1}^{n+1} h(W_k, W_k) \|T_f\|^2 dv_g \\ &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m \sum_{k=1}^{n+1} h(W_k, df(e_i)) h(W_k, df(e_j)) T_f(e_i, e_j) dv_g \end{aligned}$$

となる. $(\delta^2 E_{con})(f)(W_k)$ を計算するために, 次の補題を準備する.

補題 2.4.2

- (1) $\sum_{k=1}^{n+1} h(W_k, W_k) = n$
- (2) $\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^m h(df(Z_k), df(e_i)) T_f(Z_k, e_i) = \|T_f\|^2$

証明

(1) については, まず, $\sum_{k=1}^{n+1} h(W_k, W_k)$ が F_k の選び方によらずに定まることを示そう. $\{F_k\}$ と $\{\bar{F}_k\}$ をどちらも, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の平行な正規直交フレームとする. このとき, 直交行列 (a_{kp}) が存在して

$$F_k = \sum_{p=1}^{n+1} a_{kp} \bar{F}_p$$

となる. したがって, $\bar{W}_k = p(\bar{F}_k)$ も

$$W_k = \sum_{p=1}^{n+1} a_{kp} \bar{W}_p$$

を満たす. このとき

$$\sum_{k=1}^{n+1} h(W_k, W_k) = \sum_{p=1}^{n+1} \sum_{q=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_{kp} a_{kq} h(\bar{W}_p, \bar{W}_q) = \sum_{\ell=1}^{n+1} h(\bar{W}_\ell, \bar{W}_\ell)$$

となり, $\sum_{k=1}^{n+1} h(W_k, W_k)$ が F_k の選び方によらないことがわかった.

そこで, 球面 $\mathbb{S}^m$ 上の任意の点 x において, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の平行な正規直交フレーム $F_1, \dots, F_{n+1}$ で, $W_1(x), \dots, W_n(x)$ が球面 $\mathbb{S}^n$ の接空間 $T_{f(x)}\mathbb{S}^n$ の正規直交フレームであり, かつ, $W_{n+1}(x) = 0$ であるようなものをとると, (1) の等式が成り立つことがわかる.

(2) については

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i,j=1}^m h(W_k, df(e_i)) h(W_k, df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), \sum_{k=1}^{n+1} h(df(e_j), W_k) W_k) T_f(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) T_f(e_i, e_j) \\ &\stackrel{\text{補題 1.3.1 (4)}}{=} \|T_f\|^2 \end{aligned}$$

となり, 成り立つことがわかる. $\square$

$F_1, \dots, F_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交フレームであるから

$$(2.74) \quad \sum_{k=1}^{n+1} \psi_k^2 \stackrel{(2.72)}{=} \sum_{k=1}^{m+1} h(F_k, \nu)^2 = h\left(\nu, \sum_{k=1}^{n+1} h(\nu, F_k) F_k\right) = h(\nu, \nu) = 1$$

である. したがって, 補題 2.4.2 および式 (2.73), (2.74) によって

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^{n+1} (\delta^2 E_{con})(f)(W_k) \\ &= 3 \int_M \|T_f\|^2 dv_g - n \int_M \|T_f\|^2 dv_g + \int_M \|T_f\|^2 dv_g \\ &= (4-n) \int_M \|T_f\|^2 dv_g \end{aligned}$$

以上から

$$(n-4) \int_M \|T_f\|^2 dv_g \leq 0$$

が得られる. ゆえに, $n \geq 5$ ならば $\|T_f\| = 0$ となる. すなわち f は weakly conformal map である. $\square$

2.5 Rotationally symmetric maps の場合

この節では, rotationally symmetric maps の場合を考えてみよう. まず, 次のようなモデル空間を考える.

$$\begin{aligned} M^n(\varphi) &= (M^n(\varphi), g) = ([0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}, g_{[0, \infty)} + \varphi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}) \\ N^n(\psi) &= (N^n(\psi), h) = ([0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}, g_{[0, \infty)} + \psi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}) \end{aligned}$$

ここで,

$(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ は $(n-1)$ 次元球面

であり, φ および ψ は $[0, \infty)$ 上の C^∞ 級関数であって

$$\varphi(r), \psi(r) > 0 \text{ for } \forall r \in (0, \infty)$$

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0$$

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 1$$

を満たすとする. このとき rotationally symmetric smooth map f を

$$\begin{array}{ccc} f : M^n(\varphi) & \longrightarrow & N^n(\psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (r, \omega) & \longmapsto & f(r, \omega) = (y(r), \omega) \end{array}$$

と定める. ここで $y(0) = 0$ を満たすとする. この節では, 次の定理を証明する.

定理 2.5.1 ([29]) $n = 4$ とする. $f : M^4(\varphi) \longrightarrow N^4(\psi)$ は rotationally symmetric smooth map で $y(0) = 0$ を満たすとする. このとき, 以下の2つのことがらは同値である:

- (1) f は C-stationary map である
- (2) f は conformal map である

注意 2.5.2 これらのモデル空間 $M^n(\varphi)$ および $N^n(\psi)$ の内部はそれぞれ, warped product Riemannian 多様体 $(0, \infty) \times_\varphi \mathbb{S}^{n-1}$ および $(0, \infty) \times_\psi \mathbb{S}^{n-1}$ である. 厳密に述べると, $[0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ は

$$([0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}) / (\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}) = ([0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}) / \sim$$

に見なす必要がある. ここで

$$(0, x) \sim (0, y) \quad \text{for } \forall x, \forall y \in \mathbb{S}^{n-1}$$

である. しかし, これらのモデル空間の間の *rotationally symmetric maps* を考える限り, この差はないので, $[0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ という記号を用いている.

この rotationally symmetric map f が conformal map である条件について見ておこう.

命題 2.5.3 (rotationally symmetric maps の conformality) 任意の rotationally symmetric smooth map $f : M^n(\varphi) \longrightarrow N^n(\psi)$ に対して, 次の2つのことがらは同値である:

- (1) f は conformal map である
- (2) $\psi(y(r))^2 = y'(r)^2 \varphi(r)^2$

証明 まず, $r \neq 0$ と思ってよいことに注意しておく. 定義から f が conformal map であるとは, ある $\lambda \in C^\infty(M^n(\varphi))$ ($\lambda > 0$) が存在して $f^*h = \lambda g$ が成り立つことである. 一方,

$$g = g_{[0, \infty)} + \varphi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

および

$$\begin{aligned} f^*h &= f^*(g_{[0, \infty)} + \psi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}) \\ &= y'(r)^2 g_{[0, \infty)} + \psi(y(r))^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}} \end{aligned}$$

である. したがって $f^*h = \lambda g$ ($\lambda > 0$)

$$y'(r)^2 = \lambda \quad \text{and} \quad \psi(y(r))^2 = \lambda \varphi(r)^2$$

すなわち

$$\psi(y(r))^2 = y'(r)^2 \varphi(r)^2$$

となる. さらに $\varphi(r), \psi(r) > 0$ であるから $\lambda > 0$ となる. $\square$

ここで, 次の基本的な量を計算しておこう.

命題 2.5.4 任意の rotationally symmetric smooth map $f : M^n(\varphi) \rightarrow N^n(\psi)$ に対して基本的な量は以下ようになる:

(1) (volume form) $dv_g = \varphi(r)^{n-1} dr dv_{\mathbb{S}^{n-1}}$

(2) (conformality エネルギーの密度)

$$\|T_f\|^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2}\right)^2$$

(3) (conformality エネルギー)

$$E_{con}(f, D) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\rho \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2}\right)^2 \varphi(r)^{n-1} dr$$

ここで, D は $D = [0, \rho] \times \mathbb{S}^{n-1}$ ($\rho > 0$) の形の $M^n(\varphi)$ のコンパクト部分領域とし, また, dv_g および $dv_{\mathbb{S}^{n-1}}$ はそれぞれ, $M^n(\varphi) = (M^n(\varphi), g)$ および $n-1$ 次元球面 $\mathbb{S}^{n-1} = (\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ の体積要素であり, $\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})$ は $(n-1)$ 次元球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ の体積とする.

証明 (1): warped product の極座標を用いると $g = g_{[0, \infty)} + \varphi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}} = dr^2 + \varphi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ であるので, 体積要素は $dv_g = \varphi(r)^{n-1} dr dv_{\mathbb{S}^{n-1}}$ であることが容易に確かめられる.

(2): $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ を $n-1$ 次元球面 $(\mathbb{S}^{n-1}, \varphi^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ 上の局所的な正規直交フレームとする:

$$(\varphi^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}})(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad \text{すなわち, } g_{\mathbb{S}^{n-1}}(e_i, e_j) = \frac{1}{\varphi^2} \delta_{ij}$$

である. ただし, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である, すなわち,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である。このとき

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, e_1, \dots, e_{n-1} \right\}$$

は、モデル空間 $(M^n(\varphi), g)$ 上の局所的な正規直交フレームである。これを用いると

$$\begin{aligned} \|f^*h\|^2 &= h\left(df\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} h(df(e_i), df(e_j))^2 \\ &= g_{[0,\infty)}\left(dy\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), dy\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)^2 + \psi(y(r))^4 \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{\mathbb{S}^{n-1}}(e_i, e_j)^2 \\ &= y'(r)^4 + (n-1) \frac{\psi(y(r))^4}{\varphi(r)^4} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \|df\|^2 &= h\left(df\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n-1} h(df(e_i), df(e_i)) \\ &= g_{[0,\infty)}\left(dy\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), dy\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) + \psi(y(r))^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{\mathbb{S}^{n-1}}(e_i, e_i) \\ &= y'(r)^2 + (n-1) \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \end{aligned}$$

であることがわかる。 $m = n$ のときの 補題 1.3.1 (5) より

$$\begin{aligned} \|T_f\|^2 &= \|f^*h\|^2 - \frac{1}{n} \|df\|^4 \\ &= y'(r)^4 + (n-1) \frac{\psi(y(r))^4}{\varphi(r)^4} - \frac{1}{n} \left(y'(r)^2 + (n-1) \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) y'(r)^4 - 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} y'(r)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\psi(y(r))^4}{\varphi(r)^4} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。

(3): 上記の (1) および (2) より

$$\begin{aligned} E_{con}(f, D) &= \int_D \|T_f\|^2 dv_g \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\rho \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right)^2 \varphi(r)^{n-1} dr dv_{\mathbb{S}^{n-1}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\rho \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right)^2 \varphi(r)^{n-1} dr \end{aligned}$$

となる。 $\square$

命題 2.5.4 (3) によって, conformality エネルギー E_{con} の第一変分を計算して, Euler-Lagrange 方程式である C-stationary map の方程式を得ることができる.

命題 2.5.5 (rotationally symmetric C-stationary map equation) Rotationally symmetric smooth map $f : M^n(\varphi) \rightarrow N^n(\psi)$ が C-stationary map であるならば, $y(r)$ は次の常微分方程式を満たす:

$$(2.75) \quad \frac{d}{dr} \left\{ \varphi(r)^{n-1} \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) y'(r) \right\} \\ + \varphi(r)^{n-1} \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) \frac{\psi(y(r))\psi'(y(r))}{\varphi(r)^2} = 0$$

証明 $\mathcal{F}$ を rotationally symmetric smooth maps の空間とする:

$$\mathcal{F} = \left\{ f \left| \begin{array}{ccc} f : M^n(\varphi) & \longrightarrow & N^n(\psi) \\ \Psi & & \Psi \\ (r, \omega) & \longmapsto & f(r, \omega) = (y(r), \omega) \\ & & y \in C^\infty([0, \infty)), y(0) = 0 \end{array} \right. \right\}$$

空間 $\mathcal{F}$ における変分 f_t をとる:

$$f_t(r, \omega) = (y_t(r), \omega)$$

であって,

$$f_0 = f, \text{ すなわち, } y_0 = y$$

を満たす. 任意の関数 $\eta \in C_0^\infty([0, \rho])$ をとり,

$$y_t(r, \omega) = y(r) + t\eta(r)$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned}
E_{con}(f_t) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\rho \left\{ \left(y'(r) + t\eta'(r) \right)^2 - \frac{\psi(y(r) + t\eta(r))^2}{\varphi(r)^2} \right\}^2 \varphi(r)^{n-1} dr \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\rho \left\{ y'(r)^2 + 2t\eta'(r)y'(r) + O(t^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\psi(y(r)) + t\psi'(y(r))\eta(r) + O(t^2))^2}{\varphi(r)^2} \right\}^2 \varphi(r)^{n-1} dr \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\rho \left\{ \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2t \left(y'(r)\eta'(r) - \frac{\psi(y(r))\psi'(y(r))}{\varphi(r)^2} \eta(r) \right) + O(t^2) \right\}^2 \varphi(r)^{n-1} dr \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\rho \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right)^2 \varphi(r)^{n-1} dr \\
&\quad + 4t \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \\
&\quad \times \int_0^\rho \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) \left(y'(r)\eta'(r) - \frac{\psi(y(r))\psi'(y(r))}{\varphi(r)^2} \eta(r) \right) \varphi(r)^{n-1} dr \\
&\quad + O(t^2) \\
&= E_{con}(f) \\
&\quad + 4t \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\rho \left\{ \varphi(r)^{n-1} \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) y'(r)\eta'(r) \right. \\
&\quad \left. - \varphi(r)^{n-1} \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) \frac{\psi(y(r))\psi'(y(r))}{\varphi(r)^2} \eta(r) \right\} dr \\
&\quad + O(t^2)
\end{aligned}$$

となる. 部分積分により

$$\begin{aligned}
E_{con}(f_t) &= E_{con}(f) \\
&\quad - 4t \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\rho \left[\frac{d}{dr} \left\{ \varphi(r)^{n-1} \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) y'(r) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \varphi(r)^{n-1} \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) \frac{\psi(y(r))\psi'(y(r))}{\varphi(r)^2} \right] \eta(r) dr + O(t^2)
\end{aligned}$$

となるので, 第一変分公式は

$$\begin{aligned}
 (\delta E_{con})(f)(X) &\stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d}{dt} E_{con}(f) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_{con}(f_t) - E_{con}(f)}{t} \\
 &= -4 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\rho \left[\frac{d}{dr} \left\{ \varphi(r)^{n-1} \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) y'(r) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \varphi(r)^{n-1} \left(y'(r)^2 - \frac{\psi(y(r))^2}{\varphi(r)^2} \right) \frac{\psi(y(r))\psi'(y(r))}{\varphi(r)^2} \right] \eta(r) dr
 \end{aligned}$$

となる. したがって, $[0, \rho]$ 上の Euler-Lagrange 方程式 (2.75) が得られる. ρ の任意性により, この方程式は $[0, \infty)$ 上で成り立つ. $\square$

定理の証明のために, 次の補題を与えておこう.

補題 2.5.6 命題 2.5.5 の常微分方程式 (2.75) から次の方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \left(3\varphi(r)^2 y'(r)^2 + \psi(y(r))^2 \right) \right\} \\
 &\quad + 4(n-4) \varphi'(r) \varphi(r) y'(r)^2 \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) = 0
 \end{aligned}$$

したがって, $n = 4$ の場合は

$$(2.76) \quad \frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \left(3\varphi(r)^2 y'(r)^2 + \psi(y(r))^2 \right) \right\} = 0$$

となる.

証明 等式 (2.75) の両辺に $\varphi(r)^{5-n} y'(r)$ にかけると

$$\begin{aligned}
 (2.77) \quad &\varphi(r)^{5-n} y'(r) \frac{d}{dr} \left\{ \varphi(r)^{n-5} \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 y'(r) \right\} \\
 &\quad + \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \psi(y(r)) \psi'(y(r)) y'(r) = 0
 \end{aligned}$$

となる. 等式 (2.77) の右辺の第一項および第二項をそれぞれ, (I) および (II) とする. まず

$$\begin{aligned}
\text{(I)} &= y'(r) \frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 y'(r) \right\} \\
&\quad + (n-5) \varphi(r) \varphi'(r) y'(r)^2 \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 y'(r)^2 \right\} \\
&\quad - \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 y'(r) y''(r) \\
&\quad + (n-5) \varphi(r) \varphi'(r) y'(r)^2 \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 y'(r)^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 \frac{d}{dr} (y'(r)^2) \\
&\quad + (n-5) \varphi(r) \varphi'(r) y'(r)^2 \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 y'(r)^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \frac{d}{dr} (\varphi(r)^2 y'(r)^2) \\
&\quad + (n-4) \varphi(r) \varphi'(r) y'(r)^2 \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right)
\end{aligned}$$

となる. また

$$\text{(II)} = \frac{1}{2} \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \frac{d}{dr} (\psi(y(r))^2)$$

である. このとき (2.77) より

$$\begin{aligned}
(2.78) \quad &\frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 y'(r)^2 \right\} \\
&- \frac{1}{2} \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \frac{d}{dr} \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \\
&\quad + (n-4) \varphi(r) \varphi'(r) y'(r)^2 \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) = 0
\end{aligned}$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned}
& (2.78) \text{ の左辺} \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 y'(r)^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{d}{dr} \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right)^2 \\
&\quad + (n-4) \varphi(r) \varphi'(r) y'(r)^2 \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \\
&= \frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \varphi(r)^2 y'(r)^2 - \frac{1}{4} \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right)^2 \right\} \\
&\quad + (n-4) \varphi(r) \varphi'(r) y'(r)^2 \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \frac{d}{dr} \left\{ \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \left(3\varphi(r)^2 y'(r)^2 + \psi(y(r))^2 \right) \right\} \\
&\quad + (n-4) \varphi(r) \varphi'(r) y'(r)^2 \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right)
\end{aligned}$$

となる。したがって、補題 2.5.6 が得られる。□

定理 2.5.1 の証明を終わらせよう。補題 2.5.6 の (2.76) より、定数 C_1 が存在して

$$(2.79) \quad \left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \left(3\varphi(r)^2 y'(r)^2 + \psi(y(r))^2 \right) = C_1$$

$r \rightarrow 0$ としたときの、この等式の両辺の極限をとることにより

$$\left(\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) y'(r) \right)^4 = \frac{C_1}{3}$$

となる。ここで $y(0) = 0$ かつ $\psi(0) = 0$ であることを用いた。このとき、定数 C_2 が存在して

$$(2.80) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) y'(r) = C_2$$

である。一方、 $\varphi(0) = 0$ かつ $\varphi'(0) = 1$ であることから、 $r = 0$ の近傍で

$$\varphi(r) = \varphi(0) + \varphi'(0)r + O(r^2) = r + O(r^2)$$

となる。したがって、(2.80) により

$$y'(r) = \frac{C_2}{r} + O(1)$$

ゆえに

$$y(r) = C_2 \log r + O(r)$$

となる。もし $C_2 \neq 0$ であるとする、 $y(0) = 0$ という事実に矛盾する。ゆえに $C_2 = 0$ 、したがって、 $C_1 = 0$ となり、(2.79) により

$$\left(\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 \right) \left(3\varphi(r)^2 y'(r)^2 + \psi(y(r))^2 \right) = 0$$

ゆえに

$$\varphi(r)^2 y'(r)^2 - \psi(y(r))^2 = 0$$

が得られる。ここで、 $\psi(r) > 0$ であることを用いた。ゆえに、命題 2.5.3 により、 f は weakly conformal map となる。以上で (1) $\Rightarrow$ (2) が示された。逆は明らかなので、定理 2.5.1 が証明された。□

2.6 C-stationary maps に関する今後の展望

この章の第2.2節から第2.5節までで見てきたように、

C-stationary maps は、“weakly conformal map に最も近い写像”
の一つの候補として有力である

という状況になっている。個人的には、

当初の目標

C-stationary maps を
多様体の conformal structure を調べる道具にすること

あるいは、もう少し具体的な目標の一つとして

当初の目標 (その2)

Conformality エネルギー E_{con} を用いて
2つの conformal structure の間の距離を定義すること

などを念頭においていた。ただ、技術的な困難さのために、この方向の結果はなかなか得られなかった。実際、解析学的には、C-stationary map の方程式は、非線形で、主要項が退化していて、しかも、楕円型ですらない。ただ、この方程式の解は、幾何学的側面をもっているので、幾何学的なアプローチを加味して研究することが有効になると思われる。

「方程式が楕円型でない」という点に関しては、エネルギーの分解で方程式を分解することにより、研究を進めた。Conformality エネルギーを自然に「+エネルギー」と「-エネルギー」に分解してみると、C-stationary map の方程式の主要項が、自然に、2つの楕円型——「+楕円型」の部分と「-楕円型」の部分——に分かれることが確かめられる。後者のエネルギーは 4-harmonic map のエネルギーである 4-エネルギーであり、これは、一般の p -harmonic map の理論として、これまで多くの研究がなされてきた。一方、前者のエネルギーは、これまで研究されてこなかったタイプのエネルギーであり、そこで、このエネルギーを symphonic エネルギーと名づけ、そのエネルギーの停留点となる写像を symphonic map とよぶことにした。これが、次の章で議論する対象である。

上記の「当初の目標」および「当初の目標 (その2)」の方向は、ほとんど研究が進んでいないが、この研究課題の動機に関わる重要な観点であるので、今後の進展を期待している。

第3章 Symphonic maps

3.1 Conformality エネルギーの分解と Symphonic エネルギー

Conformality テンソル T_f は, その定義 $T_f = f^*h - \frac{1}{m}\|df\|^2g$ にしたがって, 補題 1.3.1 (5) で計算したように, 以下のようにプラス方向とマイナス方向の 2 つの成分に分解できる:

Conformality エネルギー密度 $\|T_f\|$ の分解

$$\|T_f\|^2 = \|f^*h\|^2 - \frac{1}{m}\|df\|^4$$

この分解の等式において:

左辺の項の積分量 $\int_M \|T_f\|^2 dv_g$ は conformality エネルギーである.

右辺の第 2 項の積分量 $\int_M \|df\|^4 dv_g$ は 4-エネルギー (4-energy) —— 4-harmonic map のエネルギー —— として知られている.

疑問: では, 右辺の第 1 項の積分量は何か?

このような積分量は, これまで調べられていない. そこで, 以下のように, 新しい積分量を定義する:

Symphonic エネルギー (Symphonic energy)

$$E_{sym}(f) = \int_M \|f^*h\|^2 dv_g$$

とにおいて, f の **symphonic エネルギー (symphonic energy)** とよぶことにする. さらに, $\|f^*h\|^2$ を **symphonic エネルギー密度 (symphonic energy density)** とよぶことにする.

この概念を用いると, conformality エネルギーは, プラス成分とマイナス成分の 2 つの成分に分解できたわけである:

Conformality エネルギー E_{conf} の分解

Conformality エネルギー密度の分解

$$\|T_f\|^2 = \|f^*h\|^2 - \frac{1}{m} \|df\|^4$$

$\Downarrow$

Conformality エネルギー

=

Symphonic エネルギー

− 4-エネルギー

$$E_{\text{con}}(f) = E_{\text{sym}}(f) - \frac{1}{m} E_4(f)$$

このような分解は、幾何学で見られる。実際、例えば、

total scalar curvature (scalar 曲率の積分)

$$\int_M \text{Scal}_g dv_g \quad (\text{ただし, } \text{Scal}_g \text{ は, 計量 } g \text{ のスカラー曲率})$$

を「計量 g の汎関数 (functional)」と見たとき、

total scalar curvature の
gradient flow

=

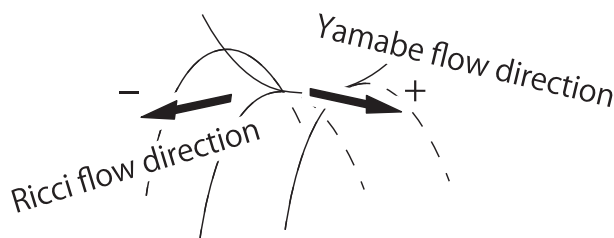
Yamabe flow

−

Ricci flow

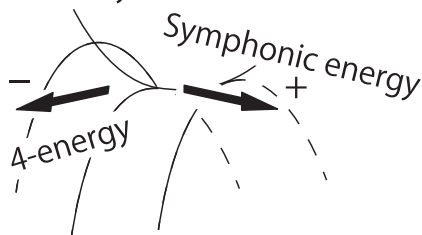
となっている。(有名な Ricci flow を出すために、「エネルギーの分解」ではなく、「gradient flow の分解」で説明した。)

Total scalar curvature



Conformality エネルギー (energy of conformality) の場合も、似た絵を描いておこう。

Energy of conformality



上記の分解で現れた symphonic エネルギーは、筆者が気づいた当時は、全く研究されていなかった対象である。symphonic エネルギーについて、harmonic maps のエネルギーと比較対照して、もう少しながめてみよう。

symphonic エネルギーに現れる“計量の pullback” f^*h に視点をおいてみると、harmonic maps のエネルギー密度 $\|df\|^2$ は

$$\|df\|^2 = \sum_{i=1}^m h(df(e_i), df(e_i)) = \sum_{i=1}^m (f^*h)(e_i, e_i) = \text{tr}_g(f^*h)$$

と変形ができて、

$$\|df\|^2 \text{ は pullback } f^*h \text{ のトレースである}$$

ということがわかる。もちろん、symphonic エネルギー密度

$$\|f^*h\|^2 \text{ は pullback } f^*h \text{ のノルムである}$$

ので、pullback f^*h の観点からみると、

“harmonic maps のエネルギー” と “symphonic エネルギー” は
 “pullback f^*h から作られるスカラー量” である
 “トレース” と “ノルム” という対応関係になっている

ことがわかる。

Harmonic and Symphonic

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_M \|df\|^2 dv_g & : \text{ Energy} \\ &= \int_M \text{tr}_g(f^*h) dv_g & \\ &\quad (\text{trace}) \\ E_{sym}(f) &= \int_M \|f^*h\|^2 dv_g & : \text{ Symphonic energy} \\ &\quad (\text{norm}) \end{aligned}$$

一般に

エネルギー E の停留点, すなわち,
 任意の変分に対して E の第一変分がゼロである写像は
harmonic map

とよばれている。これに対応して、

symphonic エネルギー E_{sym} の停留点, すなわち,
 任意の変分に対して E_{sym} の第一変分がゼロである写像は
symphonic map

とよぶことにしよう¹. Symphonic map の正確な定義は, 次の節の定義 3.2.2 で与えられる.

3.2 Symphonic エネルギーに対する第一変分公式と Symphonic maps

「変分」および「変分ベクトル場」などの基本的用語はそれぞれ, 定義 1.5.1 および, 定義 1.5.2 で与えられている. まずは, symphonic エネルギーの第一変分から始める.

定義 3.2.1 (第一変分) E_{sym} の f における X の方向の第一変分 $(\delta E_{sym})(f)(X)$ は

$$(\delta E_{sym})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{dE_{sym}(f_t)}{dt} \right|_{t=0}$$

で定義される.

この「第一変分」を用いて, symphonic map が定義される.

定義 3.2.2 (symphonic map) なめらかな写像 f が **symphonic map** であるとは, f の任意の変分 f_t に対して, E_{sym} の第一変分がゼロである, すなわち,

$$(\delta E_{sym})(f)(X) = \left. \frac{dE_{sym}(f_t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

であることをいう.

symphonic エネルギーに対する第一変分公式を導こう. まず, 次のような量を定義しておく:

¹ ちなみに, 上記で比較対照したように,

harmonic と symphonic は対応している

が,

harmonic の和訳が「調和」

であるのに対し,

symphonic の和訳は「協和」

であるという状況で,

harmonic map は「調和写像」
symphonic map は「協和写像」

という, 私の「お気に入りのジョーク」, いや, 「お気に入りの命名」となっている.

テンソル量 σ_f

$$(3.1) \quad \sigma_f(X) = \sum_{j=1}^m (f^*h)(X, e_j) df(e_j)$$

ここで $\{e_j\}$ は, 局所的な正規直交フレームである.

テンソル量 σ_f は M 上の $f^{-1}TN$ -valued 1-form と見なせる.

補題 3.2.3

$$(3.2) \quad \|f^*h\|^2 = \sum_{i=1}^m h(df(e_i), \sigma_f(e_i))$$

証明 補題 1.5.5 における議論と同様である. 計量 $h(\cdot, \cdot)$ は bilinear (双線形) であるから

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) (f^*h)(e_i, e_j) &= h\left(df(e_i), \sum_{j=1}^m (f^*h)(e_i, e_j) df(e_j)\right) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} h(df(e_i), \sigma_f(e_i)) \end{aligned}$$

となる. この等式の両辺において, i に関して 1 から m まで和をとると

$$(3.3) \quad \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) (f^*h)(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^m h(df(e_i), \sigma_f(e_i))$$

となる. ここで, $h(df(e_i), df(e_j)) = (f^*h)(e_i, e_j)$ であることに注意すると,

$$\text{等式 (3.3) の左辺} = \sum_{i,j=1}^m (f^*h)(e_i, e_j)^2 = \|f^*h\|^2$$

となり, (3.2) が導かれる. $\square$

Symphonic エネルギー E_{sym} に対する第一変分公式は, 以下のようになる.

定理 3.2.4 (Symphonic エネルギーに対する第一変分公式)

$$(3.4) \quad (\delta E_{sym})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{dE_{sym}(f_t)}{dt} \right|_{t=0} = -4 \int_M h(X, \operatorname{div}_g \sigma_f) dv_g$$

ここで, $\operatorname{div}_g \sigma_f$ は σ_f の divergence (発散) とする, すなわち, $\operatorname{div}_g \sigma_f = \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \sigma_f)(e_i)$ である.

定義 3.2.2 において, symphonic エネルギー E_{sym} の停留点として symphonic maps の概念が定義されたが, 第一変分公式により, 次が導かれる:

命題 3.2.5 (symphonic map の方程式) なめらかな写像 f が symphonic map であるための必要十分条件は f が, symphonic エネルギー E_{sym} に対するオイラー・ラグランジュ方程式 (Euler-Lagrange equation)

$$(3.5) \quad \operatorname{div}_g \sigma_f = 0$$

を満たすことである. ここで, σ_f は, 等式 (3.1) で定義される共変テンソルである. この方程式 (3.5) を **symphonic map の方程式 (symphonic map equation)** とよぶことにする.

証明 第一変分公式により

f が symphonic map である

$\Leftrightarrow$

f の任意の変分 f_t に対して
 E_{sym} の第一変分がゼロである, すなわち,

$$\left. \frac{dE_{sym}(f_t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

第一変分公式
 (3.4)
 $\Leftrightarrow$

任意のベクトル X に対して

$$\int_M h(X, \operatorname{div}_g \sigma_f) dv_g = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\operatorname{div}_g \sigma_f = 0$$

となり, 証明された. $\square$

3.3 Symphonic エネルギーに対する第二変分公式と安定性

まずは, 第二変分の定義を思い起こそう.

定義 3.3.1 (第二変分) Symphonic エネルギー E_{sym} の f における X の方向の第二変分とは

$$(\delta^2 E_{sym})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2 E_{sym}(f_t)}{dt^2} \right|_{t=0}$$

のことをいう².

² Symphonic エネルギー E_{con} の第二変分も, 第一変分の場合と同様に, 変分 f_t を用いて定義されているが, 写像 f とベクトル場 X だけで定まることに注意せよ.

この節では, 次の第二変分公式を導こう.

定理 3.3.2 (Symphonic エネルギーに対する第二変分公式)

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad & \frac{1}{4} (\delta^2 E_{sym})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \frac{1}{4} \left. \frac{d^2 E_{sym}(f_t)}{dt^2} \right|_{t=0} \\
 &= \int_M h(\text{Hess}_F(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}), \text{div}_g \sigma_f) dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_j} X) (f^* h)(e_i, e_j) dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_j))^2 dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_j)) h(df(e_i), \nabla_{e_j} X) dv_g \\
 &\quad - \frac{2}{m} \int_M \left\{ \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i} X, df(e_i)) \right\}^2 dv_g \\
 &\quad + \int_M \sum_{i,j=1}^m h({}^N R(X, df(e_i)) X, df(e_j)) (f^* h)(e_i, e_j) dv_g
 \end{aligned}$$

ここで Hess_f は f のヘッシアン (Hessian) とする, すなわち, $\text{Hess}_f(Z, W) = (\nabla_Z df)(W) = (\nabla_W df)(Z)$ である.

注意 3.3.3 f が symphonic map であれば, 第二変分公式の右辺の第一項はゼロになる.

注意 3.3.4 第二変分公式の右辺の最後の項は, 以下に等しい.

$$\int_M \sum_{i=1}^m h({}^N R(X, df(e_i)) X, \sigma_f(e_i)) dv_g$$

なぜならば

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^m h({}^N R(X, df(e_i)) X, df(e_j)) (f^* h)(e_i, e_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m h({}^N R(X, df(e_i)) X, \sum_j (f^* h)(e_i, e_j) df(e_j)) \\
 &\stackrel{\sigma_f \text{ の定義 (3.1)}}{=} \sum_{i=1}^m h({}^N R(X, df(e_i)) X, \sigma_f(e_i))
 \end{aligned}$$

であるからである.

ここで, 安定 (stable) の定義をしておく.

定義 3.3.5 (安定 (stable)) Symphonic map f が, **symphonic map** として安定 (stable) であるとは, f の任意の変分 f_t に対して, symphonic エネルギー E_{sym} の第二変分が非負である, すなわち

$$(\delta^2 E_{sym})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2 E_{sym}(f_t)}{dt^2} \right|_{t=0} \geq 0$$

であることをいう.

第4章では, 「不安定」という性質がテーマとなるので, 「安定」の否定である「不安定」の定義も追記しておく.

定義 3.3.6 (不安定 (unstable)) Symphonic map f が, **symphonic map** として不安定 (unstable) であるとは, f のある変分 f_t に対して, symphonic エネルギー E_{sym} の第二変分が非負である, すなわち

$$(\delta^2 E_{sym})(f)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2 E_{sym}(f_t)}{dt^2} \right|_{t=0} < 0$$

であることをいう.

3.4 Bochner type formula

この節では, symphonic maps の研究に必要な Bochner type formula を導く. まず, Bochner type formula に現れる 1-form (1 次微分形式) を定義しておく. 記号として, e_i ($i = 1, \dots, m$) は, これまで通り, (M, g) 上の局所的な正規直交フレームを表している.

定義 3.4.1 1-form α_f を, M 上の任意のベクトル場 X に対して

$$(3.7) \quad \alpha_f(X) = h(\sigma_f(X), \tau_f)$$

と定義する. ここで, τ_f は, harmonic maps の理論で出てくる tension field である, すなわち

$$(3.8) \quad \tau_f = \sum_{j=1}^m (\nabla_{e_j} df)(e_j)$$

である. ちなみに,

$$f \text{ が harmonic map である} \Leftrightarrow \tau_f = 0$$

である.

この節の目的は, 次の公式を証明することである:

定理 3.4.2 (Bochner type formula [13], [38]) リーマン多様体 (M, g) からリーマン多様体 (N, h) への smooth map f に対して, 次の公式が成り立つ :

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad & \frac{1}{4} \Delta \|f^* h\|^2 \\
 &= \operatorname{div}_g \alpha_f - h(\tau_f, \operatorname{div}_g \sigma_f) \\
 &+ \sum_{i,j,k=1}^m h((\nabla_{e_k} df)(e_i), (\nabla_{e_k} df)(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \\
 &+ \frac{1}{2} \|\nabla(f^* h)\|^2 \\
 &+ \sum_{i,j,k=1}^m h(df({}^M R(e_i, e_k)(e_k)), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \\
 &- \sum_{i,j,k=1}^m h({}^N R(df(e_i), df(e_k)) df(e_k), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j))
 \end{aligned}$$

ただし, α_f は, 定義 3.4.1 で定まるテンソル量である.

証明 計算を簡単にするため, M の任意の点 x をとり, 固定して, 点 x の周りの normal coordinate (正規座標) をとる. Normal coordinate を用いると, 点 x において $\nabla_{e_i} e_j = 0$ ($i, j = 1 \dots, m$) となるので, connection (接続) の計算を簡単に行うことができる. この利点を用いるために, 以下のすべての計算は, 点 x で行っている. symphonic energy density のラプラシアンをとってやると

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad & \frac{1}{4} \Delta \|f^* h\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} \|f^* h\|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2 \\
 &= \sum_{k=1}^m \nabla_{e_k} \left(\sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_k} df)(e_i), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^m \nabla_{e_k} \left(\sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_k} df)(e_i), df(e_j)) (f^* h)(e_i, e_j) \right) \\
 &= \sum_{i,j,k=1}^m h((\nabla_{e_k} \nabla_{e_k} df)(e_i), df(e_j)) (f^* h)(e_i, e_j) \\
 &+ \sum_{i,j,k=1}^m h((\nabla_{e_k} df)(e_i), (\nabla_{e_k} df)(e_j)) (f^* h)(e_i, e_j) \\
 &+ \sum_{i,j,k=1}^m h((\nabla_{e_k} df)(e_i), df(e_j)) (\nabla_{e_k} (f^* h))(e_i, e_j)
 \end{aligned}$$

となる. この等式 (3.10) の右辺の第3項は

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_{e_k} df)(e_i), df(e_j)) (\nabla_{e_k}(f^*h))(e_i, e_j) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\nabla_{e_k}(f^*h))(e_i, e_j)^2 = \frac{1}{2} \|\nabla(f^*h)\|^2 \\
 & \left(\begin{aligned} & (\nabla_{e_k}(f^*h))(e_i, e_j) = \nabla_{e_k}((f^*h)(e_i, e_j)) = \nabla_{e_k}(h(df(e_i), df(e_j))) \\ \therefore & = h\left(\nabla_{e_k}(df(e_i)), df(e_j)\right) + h\left(df(e_i), \nabla_{e_k}(df(e_j))\right) \\ & = h\left((\nabla_{e_k} df)(e_i), df(e_j)\right) + h\left(df(e_i), (\nabla_{e_k} df)(e_j)\right) \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

となる. また, 一般的な等式

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X df)(Y) &= (\nabla_Y df)(X) \\
 (\nabla_X \nabla_Y df)(Z) &= (\nabla_Y \nabla_X df)(Z) + df({}^M R(Y, X)Z) - {}^N R(df(Y), df(X))df(Z)
 \end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad & (\nabla_{e_k} \nabla_{e_k} df)(e_i) = (\nabla_{e_k} \nabla_{e_i} df)(e_k) \\
 &= (\nabla_{e_i} \nabla_{e_k} df)(e_k) + df({}^M R(e_i, e_k)e_k) - {}^N R(df(e_i), df(e_k))df(e_k)
 \end{aligned}$$

が得られる. さらに σ_f の定義 (3.1) により

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad & \sum_{i,j,k=1}^m h((\nabla_{e_i} \nabla_{e_k} df)(e_k), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \\
 &= \sum_{i,k=1}^m h\left((\nabla_{e_i} \nabla_{e_k} df)(e_k), \sum_{j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) df(e_j)\right) \\
 &\stackrel{\sigma_f \text{ の定義 (3.1)}}{=} \sum_{i,k=1}^m h((\nabla_{e_i} \nabla_{e_k} df)(e_k), \sigma_f(e_i)) \\
 &= \sum_{i,k=1}^m \left\{ \nabla_{e_i} (h((\nabla_{e_k} df)(e_k), \sigma_f(e_i))) - h((\nabla_{e_k} df)(e_k), (\nabla_{e_i} \sigma_f)(e_i)) \right\} \\
 &\stackrel{\tau_f \text{ の定義 (3.8)}}{=} \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} \left(h(\tau_f, \sigma_f(e_i)) \right) - h\left(\tau_f, \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \sigma_f)(e_i)\right) \\
 &\stackrel{\text{div の定義 } \alpha_f \text{ の定義 (3.7)}}{=} \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \alpha_f)(e_i) - h(\tau_f, \text{div}_g \sigma_f) \\
 &\stackrel{\text{div の定義}}{=} \text{div}_g \alpha_f - h(\tau_f, \text{div}_g \sigma_f)
 \end{aligned}$$

である. 以上から, (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) によって, Bochner type formula (3.9) が得られた. $\square$

Bochner type formula を用いるときに, 使用することが多い事実について, 補題としてまとめておく:

補題 3.4.3 定理 3.4.2 の Bochner type formula (3.9) において, 次が成り立つ :

(a) 写像 f が symphonic map であるならば, Bochner type formula (3.9) の右辺の第 2 項はゼロである.

(b) Bochner type formula (3.9) の右辺の第 3 項は非負である :

$$\sum_{i,j,k=1}^m h((\nabla_{e_k} df)(e_i), (\nabla_{e_k} df)(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \geq 0$$

(c) M の Ricci 曲率が非負であるならば, Bochner type formula (3.9) の右辺の第 5 項は非負である :

$$\sum_{i,j,k=1}^m h(df({}^M R(e_i, e_k)(e_k)), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \geq 0$$

(d) N の sectional curvature (断面曲率) が, 定数 C_0 以下であるならば, Bochner type formula (3.9) の右辺の第 6 項は次のように評価される :

$$(3.14) \quad \sum_{i,j,k=1}^m h({}^N R(df(e_i), df(e_k)) df(e_k), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \leq m\sqrt{m}C_0 \|f^*h\|^3$$

証明 (1) は, f が symphonic map であるならば symphonic map の方程式 $\operatorname{div}_g \sigma_f = 0$ を満たす (命題 3.2.5) ので, 明らかに成り立つ. (2), (3), (4) を示そう. 次の簡単な補題が必要となる. ここで必要となるのは, 補題 3.4.4 の (1) のみである. 補題 3.4.4 の (2) は, 後で必要となる事実であるが, まとめて証明しておく.

補題 3.4.4

(1) 2 つの対称行列 $A = (a_{ij})$ および $B = (b_{ij})$ が半正定値である, すなわち, 任意の m 次元ベクトル $u = (u_i)$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} u_i u_j \geq 0 \quad \sum_{i,j=1}^m b_{ij} u_i u_j \geq 0$$

であるとするならば,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} b_{ij} \geq 0$$

が成り立つ.

(2) 2 つの対称行列 $A = (a_{ij})$ および $B = (b_{ij})$ に対して, A が正定値で, B が半正定値とする. このとき, $\operatorname{tr}(AB) = 0$ であるならば, $B = 0$ である.

補題 3.4.4 の証明 (1): まず, 半正定値の対称行列 A を対角化すると, ある直交行列 T が存在して

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \quad \text{であって} \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

となる. そこで, $T^{-1}BT$ を $\tilde{B}$ とおく:

$$T^{-1}BT =: \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \cdots & \tilde{b}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{m1} & \cdots & \tilde{b}_{mm} \end{pmatrix}$$

このとき, $\tilde{b}_{ii} \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) である. 実際, $i = 1, \dots, m$ に対して, m 次元ベクトル ${}^t u = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$ にとると

$$(3.15) \quad \tilde{b}_{ii} = {}^t u \tilde{B} u = {}^t u T^{-1} B T u = {}^t u {}^t T B T u = {}^t (T u) B (T u) \stackrel{B \text{ は半正定値}}{\geq} 0$$

となるからである. ここで, T が直交行列であることから $T^{-1} = {}^t T$ であることを用いた. したがって

$$\begin{aligned} T^{-1}ABT &= (T^{-1}AT)(T^{-1}BT) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \cdots & \tilde{b}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{m1} & \cdots & \tilde{b}_{mm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \tilde{b}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \tilde{b}_{mm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. ゆえに

$$(3.16) \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(T^{-1}ABT) = \lambda_1 \tilde{b}_{11} + \cdots + \lambda_m \tilde{b}_{mm} \geq 0$$

となる.

(2): A が正定値であるから, $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, m$) であるが, 仮定より

$$\lambda_1 \tilde{b}_{11} + \cdots + \lambda_m \tilde{b}_{mm} \stackrel{(3.16)}{=} \operatorname{tr}(AB) \stackrel{\text{仮定}}{=} 0$$

であるので, (3.15) を考慮すると

$$(3.17) \quad \tilde{b}_{11} = \cdots = \tilde{b}_{mm} = 0$$

となる. 特に,

$$(3.18) \quad \operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(T^{-1}BT) = \tilde{b}_{11} + \cdots + \tilde{b}_{mm} \stackrel{(3.17)}{=} 0$$

である. ここで, 半正定値の対称行列 B を対角化すると, ある直交行列 S が存在して

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_m \end{pmatrix}$$

となる. このとき

$$\mu_1 + \cdots + \mu_m = \operatorname{tr}(S^{-1}BS) = \operatorname{tr} B \stackrel{(3.18)}{=} 0$$

であるが, $\mu_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) であることを考慮すると

$$\mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$$

となり, したがって $B = 0$ が得られる. $\square$

補題 3.4.3 の証明を進めよう.

(2): まず

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^m h((\nabla_{e_k} df)(e_i), (\nabla_{e_k} df)(e_j)) \\ b_{ij} &= h(df(e_i), df(e_j)) \end{aligned}$$

とおくと, 2つの対称行列 (a_{ij}) , (b_{ij}) が半正定値であることは, 容易に確かめられる. したがって, 補題 3.4.4 (1) が適用できて

$$\sum_{i,j,k=1}^m h((\nabla_{e_k} df)(e_i), (\nabla_{e_k} df)(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} b_{ij} \geq 0$$

となる.

(3): R_{ik} を Ricci 曲率の成分とする, すなわち

$$R_{ik} = \sum_{j=1}^m g(R(e_i, e_j)e_j, e_k)$$

である. このとき $\sum_{k=1}^m {}^M R(e_i, e_k)e_k = \sum_{k=1}^m R_{ik}e_k$ であるから,

$$\begin{aligned} (3.19) \quad & \sum_{i,j,k=1}^m h\left(df\left({}^M R(e_i, e_k)e_k\right), df(e_j)\right) h(df(e_i), df(e_j)) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^m R_{ik} h(df(e_k), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \\ &= \sum_{i,k=1}^m R_{ik} \sum_{j=1}^m h(df(e_k), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \end{aligned}$$

となる。仮定より, M の Ricci 曲率は非負であるので, R_{ik} は半正定値である。そこで

$$\begin{aligned} a_{ik} &= R_{ik} \\ b_{ik} &= \sum_{j=1}^m h(df(e_k), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) \end{aligned}$$

とおくと, これら2つの対称行列 (a_{ik}) および (b_{ik}) は半正定値であるので, 補題 3.4.4 (1) が適用できて

$$\sum_{i,j,k=1}^m h(df({}^M R(e_i, e_k)e_k), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} b_{ik} \geq 0$$

が得られる。

(4): まず

$$\begin{aligned} a_{ij} &= - \sum_{k=1}^m h({}^N R(df(e_i), df(e_k)) df(e_k), df(e_j)) + mC_0 \|f^* h\|^2 g_{ij} \\ b_{ik} &= h(df(e_i), df(e_j)) \end{aligned}$$

とおくと, 対称行列 (a_{ij}) は半正定値であることがわかる。実際, 任意の m 次元ベクトル $v = (v_1, \dots, v_m)$ に対して

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^m a_{ij} v_i v_j \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^m h({}^N R(df(e_i), df(e_k)) df(e_k), df(e_j)) v_i v_j + mC_0 \|f^* h\|^2 \|v\| \\ &= - \sum_{k=1}^m h({}^N R(df(\sum_{i=1}^m v_i e_i), df(e_k)) df(e_k), df(\sum_{j=1}^m v_j e_j)) + mC_0 \|f^* h\|^2 \|v\| \\ &= - \sum_{k=1}^m h({}^N R(df(v), df(e_k)) df(e_k), df(v)) + mC_0 \|f^* h\|^2 \|v\| \end{aligned}$$

となるからである。一方,

$$\begin{aligned} (3.20) \quad \|df\|^2 &= \sum_{i=1}^m h(df(e_i), df(e_i)) = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} h(df(e_i), df(e_j)) \\ &\stackrel{\text{Schwarz の不等式}}{\leq} \sqrt{\sum_{i,j=1}^m g_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2} = \sqrt{m} \|f^* h\| \end{aligned}$$

であるので, N の sectional curvature の仮定により

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m h({}^N R(df(v), df(e_k)) df(e_k), df(v)) &\leq C_0 \sum_{k=1}^m (\|df(v)\|^2 \|df(e_k)\|^2 - h(df(v), df(e_k))^2) \\ &\leq C_0 \|df(v)\|^2 \|df\|^2 \\ &\leq C_0 \|df\|^4 \|v\|^2 \\ &\leq mC_0 \|f^* h\|^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

となる。したがって, $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}v_i v_j \geq 0$ となるので, 対称行列 (a_{ij}) は半正定値である。ゆえに, 補題 3.4.4 (1) が適用できて

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i,k=1}^m a_{ik}b_{ik} \\ &= - \sum_{k=1}^m h({}^N R(df(e_i), df(e_k))df(e_k), df(e_j))h(df(e_i), df(e_j)) + mC_0\|f^*h\|^2\|df\|^2 \\ &\stackrel{(3.20)}{\leq} - \sum_{k=1}^m h({}^N R(df(e_i), df(e_k))df(e_k), df(e_j))h(df(e_i), df(e_j)) + m\sqrt{m}C_0\|f^*h\|^3 \end{aligned}$$

となる。これが求める不等式 (3.14) である。□

3.5 Monotonicity formula

この節では, symphonic エネルギー E_{sym} に対する monotonicity formula を証明することである。証明には, Price [39] の議論を用いている。まずは, 定義域となる多様体上の diffeomorphisms (微分同相写像) を用いた変分についての第一変分公式から始める。

命題 3.5.1 (第一変分公式) φ_t ($-\varepsilon < t < \varepsilon$) を M 上の diffeomorphisms の one parameter family であって, 集合 $\{x \in M \mid \varphi_t(x) \neq x \text{ for } t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ の閉包が M 上で compact であるようなものとする。 X は, one parameter family φ_t で生成された M 上のベクトル場とする。このとき

$$\left. \frac{d}{dt} E_{sym}(f \circ \varphi_t) \right|_{t=0} = \int_M \left\{ -\|f^*h\|^2 \operatorname{div} X + 4 \sum_{i=1}^m h(df(\nabla_{e_i} X), \sigma_f(e_i)) \right\} dv_g$$

が成り立つ。ここで, e_i ($i = 1, \dots, m$) は M 上の局所的な正規直交フレームである。

証明 この公式は, symphonic エネルギーに対する一般的な第一変分公式 (命題 3.2.4) を用いて証明することができる。まず, 変分を $f_t = f \circ \varphi_t$ と定める。この変分 f_t に対する変分ベクトル場を $\tilde{X}$ と書くことにする。このとき $\tilde{X} = df(X)$ であり, したがって

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} \tilde{X} &= (\nabla_{e_i} df)(X) + df(\nabla_{e_i} X) \\ &\stackrel{\text{Hessian の可換性}}{=} (\nabla_X df)(e_i) + df(\nabla_{e_i} X) \end{aligned}$$

となる. このとき

$$\begin{aligned}
 (3.21) \quad & 4 \sum_{i=1}^m h(\sigma_f(e_i), \nabla_{e_i} \tilde{X}) \\
 &= 4 \sum_{i=1}^m h(\sigma_f(e_i), (\nabla_X df)(e_i)) + 4 \sum_{i=1}^m h(\sigma_f(e_i), df(\nabla_{e_i} X)) \\
 &\stackrel{(3.1)}{=} 4 \sum_{i,j=1}^m h((\nabla_X df)(e_i), df(e_j)) h(df(e_i), df(e_j)) + 4 \sum_{i=1}^m h(\sigma_f(e_i), df(\nabla_{e_i} X)) \\
 &= X \left(\sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2 \right) + 4 \sum_{i=1}^m h(\sigma_f(e_i), df(\nabla_{e_i} X)) \\
 &= \mathcal{L}_X \|f^*h\|^2 + 4 \sum_{i=1}^m h(\sigma_f(e_i), df(\nabla_{e_i} X))
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 記号 $\mathcal{L}$ は Lie 微分である. 一方, M 上の diffeomorphisms φ_t による変換により

$$\int_M (\varphi_t)^* (\|f^*h\|^2 dv_g) = \int_M \|f^*h\|^2 dv_g$$

であるが, φ_t はベクトル場 X に対する one parameter family であるので, $t \rightarrow 0$ の極限をとると

$$(3.22) \quad \int_M \mathcal{L}_X (\|f^*h\|^2 dv_g) = \int_M \|f^*h\|^2 dv_g$$

となる. また, Lie 微分の基本的性質から

$$(3.23) \quad \mathcal{L}_X (\|f^*h\|^2 dv_g) = (\mathcal{L}_X \|f^*h\|^2) dv_g + \|f^*h\|^2 \mathcal{L}_X dv_g$$

であり, さらに, 簡単な計算により

$$(3.24) \quad \mathcal{L}_X dv_g = \operatorname{div} X dv_g$$

であることが確かめられる. 実際, (3.24) については, 局所座標 $(x_1, \dots, x_m)$ を用いて, 計量 g を g_{ij} と成分表示したとき, 体積要素 dv_g は

$$dv_g = \sqrt{\det (g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

と書けるから

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_X dv_g &= \mathcal{L}_X \left(\sqrt{\det (g_{ij})} \right) dx_1 \cdots dx_m \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det (g_{ij})}} \mathcal{L}_X (\det (g_{ij})) dx_1 \cdots dx_m \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det (g_{ij})}} \det (g_{ij}) \operatorname{Tr} (\mathcal{L}_X g_{ij}) dx_1 \cdots dx_m \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} (\mathcal{L}_X g_{ij}) dv_g \\
 &= \operatorname{div} X dv_g \\
 &\left(\because \mathcal{L}_X g_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i \text{ より } \operatorname{Tr} (\mathcal{L}_X g_{ij}) = 2 \sum_{i=1}^m \nabla_i X_i = 2 \operatorname{div} X \right)
 \end{aligned}$$

が得られる。以上から

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} E_{sym}(f \circ \varphi_t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{dE_{sym}(f_t)}{dt} \right|_{t=0} \\
&\stackrel{(3.21)}{=} \int_M \{ \mathcal{L}_X \|f^* h\|^2 + 4 \sum_{i=1}^m h(\sigma_f(e_i), df(\nabla_{e_i} X)) \} dv_g \\
&\stackrel{(3.22), (3.23)}{=} - \int_M \|f^* h\|^2 \mathcal{L}_X dv_g + 4 \int_M \sum_{i=1}^m h(\sigma_f(e_i), df(\nabla_{e_i} X)) dv_g \\
&\stackrel{(3.24)}{=} - \int_M \|f^* h\|^2 \operatorname{div} X dv_g + 4 \int_M \sum_{i=1}^m h(\sigma_f(e_i), df(\nabla_{e_i} X)) dv_g
\end{aligned}$$

となり、求める公式が得られた。□

さて、この節の目的である monotonicity formula を証明しよう。

定理 3.5.2 (monotonicity formula [38]) (M, g) を境界をもたないリーマン多様体で, sectional curvature (断面曲率) が^s (上下に) 有界であるとする。 $x_0 \in M$ であり $\rho > 0$ とする。 (M, g) から他のリーマン多様体への symphonic map f に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\rho} \left\{ e^{C_0 \rho} \rho^{4-m} \int_{B_\rho(x_0)} \|f^* h\|^2 dv_g \right\} \\
&\geq 4e^{C_0 \rho} \rho^{4-m} \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(x_0)} \|h(df(\operatorname{grad} r), df)\|^2 dv_g \geq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、特に、

$$e^{C_0 \rho} \rho^{4-m} \int_{B_\rho(x_0)} \|f^* h\|^2 dv_g \text{ は } \rho \text{ について単調非減少である。}$$

ここで、 C_0 は、 M の次元 m および、 M の sectional curvature の上界と下界によって決まる定数であり、また

$$\|h(df(\operatorname{grad} r), df)\|^2 = \sum_{i=1}^m h\left(df\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), df(e_i)\right)^2$$

であるとする。

証明 X を $B_r(x_0)$ 内に compact support をもつ M 上のベクトル場とする。このベクトル場 X を生成する one parameter family of diffeomorphism φ_t ($-\varepsilon < t < \varepsilon$) をとる。このとき、第一変分公式より

$$(3.25) \quad \int_M \left\{ -\|f^* h\|^2 \operatorname{div} X + 4 \sum_{i=1}^m h(df(\nabla_{e_i} X), \sigma_f(e_i)) \right\} dv_g = 0$$

となる。点 x_0 と点 x の間の距離を $r = r(x)$ とする。この距離関数 $r(x)$ の gradient vector field を $\frac{\partial}{\partial r}$ で表す。 M 上の局所的な正規直交フレーム $e_1, \dots, e_m$ を $e_m = \frac{\partial}{\partial r}$ となるようにしておく。そこで、ベクトル場 X を x_0 のある近傍 U で

$$X(x) = \xi(r) r \frac{\partial}{\partial r} = \xi(r(x)) r(x) \frac{\partial}{\partial r}$$

となり, かつ, U の外部でゼロになるようにとっておく. ここで, 関数 $\xi(r)$ は後で定める. $1 \leq i \leq m-1$ に対して,

$$\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial r} = \sum_{j=1}^{m-1} \text{Hess}(r)(e_i, e_j) e_j$$

となるようにとる. ここで, $\text{Hess}(r)(X, Y) = (\nabla dr)(X, Y)$ は関数 r の Hessian である. このとき

$$\begin{aligned} dr(e_j) &= g\left(\frac{\partial}{\partial r}, e_j\right) = 0 \\ g(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial r}, e_j) + g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \nabla_{e_i} e_j\right) &= \nabla_{e_i} \left(g\left(\frac{\partial}{\partial r}, e_j\right)\right) = 0 \\ g(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) &= \frac{1}{2} \nabla_{e_i} \left(g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)\right) = 0 \quad \left(\because g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1\right) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial r} &= \sum_{j=1}^{m-1} g(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial r}, e_j) e_j + g(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) \frac{\partial}{\partial r} = - \sum_{j=1}^{m-1} g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \nabla_{e_i} e_j\right) e_j \\ &= - \sum_{j=1}^{m-1} dr(\nabla_{e_i} e_j) e_j = \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \nabla_{e_i} (dr(e_j)) - dr(\nabla_{e_i} e_j) e_j \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} (\nabla dr)(e_i, e_j) e_j \end{aligned}$$

となる. したがって

$$(3.26) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} X = \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(\xi(r) r \frac{\partial}{\partial r} \right) = (\xi(r) r)' \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(3.27) \quad \nabla_{e_i} X = \xi(r) r \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial r} = \xi(r) r \sum_{j=1}^{m-1} \text{Hess}(r)(e_i, e_j) e_j$$

となる. ここで, Hessian の比較定理により

$$(3.28) \quad \frac{1}{r} g(e_i, e_j) (1 - cr) \leq \text{Hess}(r)(e_i, e_j) \leq \frac{1}{r} g(e_i, e_j) (1 + cr)$$

となる. ただし, c は M の sectional curvature の上界と下界によって決まる定数である. ここで, 第一変分公式 (3.25) における $\text{div } X$ および $\sum_{i=1}^m h(df(\nabla_{e_i} X), \sigma_f(e_i))$ を計算する. まず

$$\begin{aligned} (3.29) \quad \text{div } X &= \sum_{i=1}^{m-1} g(\nabla_{e_i} X, e_i) + g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} X, \frac{\partial}{\partial r}) \\ &\stackrel{(3.26), (3.27)}{=} \xi(r) r \sum_{i,j=1}^{m-1} \text{Hess}(r)(e_i, e_j) g(e_j, e_i) + (\xi(r) r)' \\ &\stackrel{(3.28)}{\geq} (m-1) \xi(r) (1 - cr) + (\xi(r) r)' \\ &= \xi'(r) r + m \xi(r) - (m-1) c \xi(r) r \end{aligned}$$

である. また

$$\begin{aligned}
(3.30) \quad & 4 \sum_{i=1}^m h(df(\nabla_{e_i} X), \sigma_f(e_i)) \\
= & 4 \sum_{i=1}^{m-1} h(df(\nabla_{e_i} X), \sigma_f(e_i)) + 4h(df(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} X), \sigma_f(\frac{\partial}{\partial r})) \\
(3.26), (3.27) \quad & \stackrel{=}{=} 4\xi(r)r \sum_{i,j=1}^{m-1} \text{Hess}(r)(e_i, e_j) h(df(e_j), \sigma_f(e_i)) + 4(\xi(r)r)' h(df(\frac{\partial}{\partial r}), \sigma_f(\frac{\partial}{\partial r})) \\
(3.28) \quad & \leq 4\xi(r)(1+cr) \sum_{i=1}^{m-1} h(df(e_i), \sigma_f(e_i)) + 4(\xi'(r)r + \xi(r)) h(df(\frac{\partial}{\partial r}), \sigma_f(\frac{\partial}{\partial r})) \\
= & 4\xi'(r)r h(df(\frac{\partial}{\partial r}), \sigma_f(\frac{\partial}{\partial r})) \\
& + 4\xi(r) \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} h(df(e_i), \sigma_f(e_i)) + h(df(\frac{\partial}{\partial r}), \sigma_f(\frac{\partial}{\partial r})) \right\} \\
& + 4c\xi(r)r \sum_{i=1}^{m-1} h(df(e_i), \sigma_f(e_i))
\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}
(3.31) \quad & \sum_{i=1}^{m-1} h(df(e_i), \sigma_f(e_i)) \stackrel{(3.1)}{=} \sum_{i=1}^{m-1} h(df(e_i), \sum_{j=1}^m h(df(e_i), df(e_j)) df(e_j)) \\
& = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2 \left(\leq \|f^*h\|^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.32) \quad & h(df(\frac{\partial}{\partial r}), \sigma_f(\frac{\partial}{\partial r})) \stackrel{(3.1)}{=} h(df(\frac{\partial}{\partial r}), \sum_{j=1}^m h(df(\frac{\partial}{\partial r}), df(e_j)) df(e_j)) \\
& = \sum_{j=1}^m h(df(\frac{\partial}{\partial r}), df(e_j))^2
\end{aligned}$$

となる. ゆえに

$$\begin{aligned}
(3.33) \quad & \sum_{i=1}^{m-1} h(df(e_i), \sigma_f(e_i)) + h(df(\frac{\partial}{\partial r}), \sigma_f(\frac{\partial}{\partial r})) \\
& \stackrel{(3.31), (3.32)}{=} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2 + \sum_{j=1}^m h(df(\frac{\partial}{\partial r}), df(e_j))^2 \\
& = \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2 \quad \left(\because e_m = \frac{\partial}{\partial r} \right) \\
& = \|f^*h\|^2
\end{aligned}$$

となる. 以上から, (3.30), (3.31), (3.32), (3.33) によって

$$\begin{aligned}
(3.34) \quad & 4 \sum_{i=1}^m h(df(\nabla_{e_i} X), \sigma_f(e_i)) \\
& \leq 4\xi'(r)r \|h(df(\frac{\partial}{\partial r}), df)\|^2 + 4\xi(r)\|f^*h\|^2 + 4c\xi(r)r\|f^*h\|^2
\end{aligned}$$

となる。ゆえに, (3.25), (3.29), (3.30), (3.34) により

$$(3.35) \quad - \int_M \xi'(r)r \|f^*h\|^2 dv_g + (4-m) \int_M \xi(r) \|f^*h\|^2 dv_g \\ + (m+3)c \int_M \xi(r)r \|f^*h\|^2 dv_g \geq -4 \int_M \xi'(r)r \|h(df(\frac{\partial}{\partial r}), df)\|^2 dv_g$$

となる。正の実数 ε を任意にとり, 固定する。 $[0, \infty)$ 上の関数 φ を

$$\varphi(r) = \varphi_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{if } 1+\varepsilon \leq r \end{cases} \quad \text{および} \quad \varphi'(r) \leq 0$$

となるようにとる。そこで, 関数 ξ を

$$\xi(r) = \xi_\rho(r) : \stackrel{\text{def}}{=} \varphi\left(\frac{r}{\rho}\right)$$

と定義すると,

$$(3.36) \quad \xi'(r)r = -\rho \frac{d}{d\rho} \xi(r)$$

となる。 $\|f^*h\|^2$ は ρ によらないので, (3.35) および (3.36) により

$$\rho \frac{d}{d\rho} \int_M \xi(r) \|f^*h\|^2 dv_g + (4-m) \int_M \xi(r) \|f^*h\|^2 dv_g \\ + C \int_M \xi(r)r \|f^*h\|^2 dv_g \geq 4\rho \frac{d}{d\rho} \int_M \|h(df(\frac{\partial}{\partial r}), df)\|^2 \xi(r) dv_g$$

である。ここで $C = (m+3)c$ とする。そこで ε をゼロに近づけていくと $\xi(r)$ は 集合 $B_\rho(x_0)$ の特性関数に近づくので

$$\rho \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(x_0)} \|f^*h\|^2 dv_g + (4-m) \int_{B_\rho(x_0)} \|f^*h\|^2 dv_g \\ + C\rho \int_{B_\rho(x_0)} \|f^*h\|^2 dv_g \geq 4\rho \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(x_0)} \|h(df(\frac{\partial}{\partial r}), df)\|^2 dv_g$$

となる。この不等式の両辺に $e^{C\rho}\rho^{3-m}$ をかけてやると

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ e^{C\rho}\rho^{4-m} \int_{B_\rho(x_0)} \|f^*h\|^2 dv_g \right\} \\ \geq 4e^{C\rho}\rho^{4-m} \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(x_0)} \|h(df(\frac{\partial}{\partial r}), df)\|^2 dv_g$$

となり, monotonicity formula が得られた。□

特に, $M = \mathbb{R}^m$ の場合には, 次のような形になる。

定理 3.5.3 (monotonicity formula) 定理 3.5.2 において $M = \mathbb{R}^m$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho^{4-m} \int_{B_\rho(x_0)} \|f^*h\|^2 dv_g \right\} \\ &= \rho^{4-m} \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(x_0)} \|h(df(\text{grad } r), df)\|^2 dv_g \geq 0 \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\rho^{4-m} \int_{B_\rho(x_0)} \|f^*h\|^2 dv_g$$

という量は, ρ について単調非減少である.

証明 ユークリッド空間 $M = \mathbb{R}^m$ の場合は, r の Hessian が³

$$\text{Hess}(r)(e_i, e_j) = \frac{1}{r} g(e_i, e_j)$$

すなわち, (3.28) は, 上記の等式になる. このとき, 式 (3.29) および (3.34) はそれぞれ, 等式

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \xi'(r)r + m\xi(r) \\ 4 \sum_{i=1}^m h(df(\nabla_{e_i} X), \sigma_f(e_i)) &= 4\xi'(r)r \|h(df(\frac{\partial}{\partial r}), df)\|^2 + 4\xi(r)\|f^*h\|^2 \end{aligned}$$

になる. これらの等式から結論が得られる. $\square$

3.6 Liouville type theorems

この節では, symphonic maps に対する Liouville type theorems をいくつか紹介する³.

もともとの Liouville の定理は
一変数複素関数論における結果で
「全平面で有界な正則関数は定数しかない」という主張

である. この定理のように

『結論』の部分「定数しかない」とか「定値写像しかない」という形の定理を
“Liouville type theorem” とよぶことがある

ので, その慣習にしがっている. ただ, “Liouville **type** theorem” という, より広い意味合いの定理では, もともとの Liouville の定理の

『条件』の部分「全平面で有界な」が $\implies$ 他の『条件』に置き代わる
『対象』の部分「正則関数」が $\implies$ 他の『対象』に置き代わる

ことを許す. 例えば, 微分幾何学における geometric analysis では,

³ Liouville は人名で, 英語読みの「リウヴィル」が標準的かもしれないが, フランスの物理学者・数学者であるので, フランスの発音では「リウビユ」と表記の方が原音に近い. 私学生時代は, 一変数複素関数論の先生から「リウビユ」の読み方で習った.

『条件』の部分の
「全平面で有界な」
の代わりに
「関数や写像の (何らかの) エネルギーの有限性」
を仮定

することも少なくない. 今の状況では, symphonic エネルギーの有限性を仮定すれば, 次のような結果が得られる.

定理 3.6.1 ([16]) (M, g) を noncompact で 完備で連結なリーマン多様体とし, また, (N, h) はリーマン多様体とする. (M, g) の Ricci 曲率は非負であり, (N, h) の sectional curvature は非正であるとする. このとき, $E_{sym}(f) < \infty$, すなわち, symphonic エネルギーが有限であるならば, f は定値写像である.

また, 第 2.3 節, および, 第 2.4 節と同様の議論によって, それぞれ,

『条件』として, 「写像の安定性 (第 2 変分が非負)」

により, 以下のような 2 つの結果を導くことができる.

定理 3.6.2 ([13]) f を m 次元球面 S^m からリーマン多様体への写像とする. このとき, $m \geq 5$ ならば, 以下の 2 つのことがらは同値である:

- (1) f は 安定な symphonic map である
- (2) f は 定値写像である

定理 3.6.3 ([13]) f をリーマン多様体から m 次元球面 S^m への写像とする. このとき, $m \geq 5$ ならば, 以下の 2 つのことがらは同値である:

- (1) f は 安定な symphonic map である
- (2) f は 定値写像である

少し横道にそれるが, もとものの

Liouville の定理 全平面で有界な正則関数は定数しかない

に呼応して, 3 次元ユークリッド空間内の極小曲面について

Bernstein の定理 全平面上のグラフで書けている極小曲面は平面しかない

という古典的結果がある⁴。実は、

極小曲面の「ガウス写像」、すなわち、
極小曲面の各点の単位法線ベクトルの終点への対応を
リーマン球面への対応と見たもの

を通してみると

極小曲面のガウス写像は反正則である⁵

という事実に基づいて

Liouville の定理から Bernstein の定理が導かれる

ことがわかる。さらに、Bernstein の定理は一般化されていて、一般化の方向の一つが

「全平面でグラフで書ける」という条件の代わりに
「写像の安定性」を仮定する

というものである。「Liouville の定理を写像の安定性の仮定で考える」という今の状況とは少し異なるが、関連して思い起こしたので、ふれておいた。

さらに、くわしい議論を行うことにより、以下のような2つの結果も得られる。

定理 3.6.4 ([15]) f を、球面の m 次元 compact な連結極小部分多様体 (M, g) からの写像とする。このとき、 (M, g) の Ricci 曲率 Ric_g が不等式

$$\text{Ric}_g > \frac{3}{4}mg$$

を満たすならば、以下の2つのことがらは同値である：

- (1) f は 安定な symphonic map である
- (2) f は 定値写像である

定理 3.6.5 ([15]) f を、球面の n 次元 compact な連結極小部分多様体 (N, h) への写像とする。このとき、 (N, h) の Ricci 曲率 Ric_h が不等式

$$\text{Ric}_h > \frac{3}{4}nh$$

を満たすならば、以下の2つのことがらは同値である：

- (1) f は 安定な symphonic map である
- (2) f は 定値写像である

⁴ Bernstein はドイツの数学者で「ベルンシュタイン」と日本語表記される。

⁵ 「反正則」とは、「複素共役をとると正則である」ということにほかならない。

Liouville type theorems の証明には, Bochner type formula が用いられることが多い. Symphonic maps に対して Bochner type formula (定理 3.4.2) が成り立つことは, 第 3.4 節で, すでに確かめた.

3.7 m -symphonic エネルギーの条件のもとでの結果

他の節と同様に, この節でも, f は, リーマン多様体 (M, g) からリーマン多様体 (N, h) への smooth map であるとする. symphonic エネルギーの $L^{\frac{p}{2}}$ -version である p -symphonic エネルギー

$$E_{sym}^p(f) = \int_M \|f^*h\|^{\frac{p}{2}} dv_g$$

を自然に考えることができる ([21]). この節では, 特に, p が多様体 (M, g) の次元 m に等しい場合の m -symphonic エネルギー

$$E_{sym}^m(f) = \int_M \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g$$

に注目し,

m -symphonic エネルギーになんらかの仮定をおくことで,
どのような結論が導かれるか?

について議論することにある.

m -symphonic エネルギーを考える利点の一つは, 次の性質にある:

命題 3.7.1 (m -symphonic エネルギーの conformal invariance) m -symphonic エネルギー E_{sym}^m は conformally invariant である. すなわち, M の計量の conformal change のもとで不変である.

証明 M の計量 g の conformal change

$$g \longrightarrow \tilde{g} := \varphi g$$

を考える. ここで, $\varphi = \varphi(x)$ は, M 上の正値の関数である. このとき, 多様体 $(M, \tilde{g})$ の体積要素は

$$(3.37) \quad dv_{\tilde{g}} = \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = \varphi^{\frac{m}{2}} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = \varphi^{\frac{m}{2}} dv_g$$

である. ここで, $(x_1, \dots, x_m)$ は x の局所座標である. また, e_i および $\tilde{e}_i$ ($i = 1, \dots, m$) をそれぞれ, 計量 g および $\tilde{g}$ に関する, 対応する局所的な正規直交フレームとすると,

$$\tilde{e}_i = \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{2}}} e_i$$

としてよい. したがって, 計量 g および $\tilde{g}$ に関するノルムを区別してそれぞれ, $\|f^*h\|_g$ および $\|f^*h\|_{\tilde{g}}$ と書くと

$$(3.38) \quad \begin{aligned} \|f^*h\|_{\tilde{g}} &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^m h(df(\tilde{e}_i), df(\tilde{e}_j))^2} = \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} \sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2} \\ &= \frac{1}{\varphi} \sqrt{\sum_{i,j=1}^m h(df(e_i), df(e_j))^2} \end{aligned}$$

である. 以上, (3.37) および (3.38) より,

$$\|f^*h\|_{\tilde{g}}^{\frac{m}{2}} dv_{\tilde{g}} = \|f^*h\|_g^{\frac{m}{2}} dv_g$$

であることが確かめられる. $\square$

この節の目的は, この conformal invariant なエネルギーである m -symphonic エネルギーに仮定をおくことで symphonic maps に対する, 以下の 2 つの定理 —— gap theorem と Liouville type theorem —— を証明することにある. まずは gap theorem から説明しよう.

定理 3.7.2 (gap theorem [31]) (M, g) を m 次元の noncompact な完備リーマン多様体で, 非負の Ricci 曲率をもち, また, 体積の条件

$$\inf \left\{ \frac{\text{vol}(B_r(x))}{r^m} \mid x \in M, r > 0 \right\} \geq \exists C_{vol} > 0$$

を満たすものとする. ここで, $\text{vol}(B_r(x))$ は, 点 x を中心とし, 半径が r の開球 $B_r(x)$ の体積を表す. 一方, (N, h) は sectional curvature が上に有界であるリーマン多様体であるとする. このとき, 正の実数 ε^* が存在して, (M, g) から (N, h) への任意の symphonic map f に対して,

$$E_{sym}(f) < \infty \quad \text{および} \quad E_{sym}^m(f) < \varepsilon^*$$

を満たすならば f は定値写像である.

$m = 4$ の場合は $E_{sym}^4(f) = E_{sym}(f)$ となるので, 次の結果が直ちに得られる.

系 3.7.3 定理 3.7.2 と同じ仮定を満たし, また, $m = 4$ であるとする. このとき, 正の実数 ε^* が存在して, (M, g) から (N, h) への任意の symphonic map f に対して,

$$E_{sym}(f) < \varepsilon^*$$

を満たすならば, f は定値写像である.

注意 3.7.4 このような主張の定理を “gap theorem” とよぶのは, 定理の主張の対偶をとることにより

定値写像でない symphonic map の symphonic エネルギーは ε^* 以上である

ということで, 言いかえると

symphonic map の symphonic エネルギーは, 区間 $(0, \varepsilon^*)$ の値をとらない

という主張になるので, “値に gap がある” ということを表している.

次に, “エネルギー有限なものは, 定値写像しかない” という主張の “Liouville type theorem” を説明する.

定理 3.7.5 (Liouville type theorem [31]) f を m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 5$) からリーマン多様体への symphonic map とする. このとき, $E_{sym}^m(f) < \infty$ であるならば, f は定値写像である.

注意 3.7.6 注意 3.7.4 に対応して, 定理 3.7.5 の主張の対偶をとると

定値写像でない symphonic map の symphonic エネルギーは有限ではない

ということになる.

上記の2つの定理 — gap theorem と Liouville type theorem — の証明に入る前に, これらの定理の条件の必要性を示す例をあげておこう.

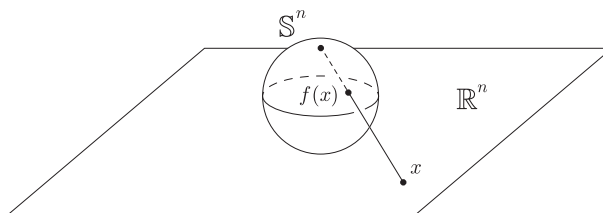
命題 3.7.7 (立体射影) 立体射影

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_{m+1}(x)) \end{array}$$

が

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{2x}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_m}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

で定義される.



このとき, 以下の性質が成り立つ.

- (1) 立体射影 f が symphonic map であるのは $m = 4$ のとき, そのときに限る.
- (2) (symphonic energy) 立体射影 f の symphonic energy density は

$$\sum_{i,j=1}^m (D_i f \cdot D_j f)^2 = \frac{16m}{(\|x\|^2 + 1)^4}$$

となる. したがって, 特に

$$E_{sym}(f) < \infty$$

となるのは, $m \leq 7$ のとき, そのときに限る.

- (3) 以上から,

$m = 4$ のとき, 立体射影 f は,
有限な symphonic エネルギーをもつ symphonic map

である.

注意 3.7.8 $m = 4$ のときは $E_{sym}^4(f) = E_{sym}(f)$ であるので, 命題 3.7.7 (3) から

(*) $m = 4$ の場合は, 立体射影 f が
 $E_{sym}^m(f) < \infty$ および $E_{sym}(f) < \infty$ を満たす定値写像でない symphonic map

となる. このことから, 以下の 2 つのことがらわかる:

- (1) gap theorem (定理 3.7.2) において,
 (*) は, 条件 $E_{sym}^m(f) < \varepsilon^*$ を仮定しないと成り立たない例になっている
 ので,
 仮定 $E_{sym}^m(f) < \varepsilon^*$ は必要である
 ことを示している. (条件 $E_{sym}^m(f) < \infty$ を仮定しただけでは成り立たない.)
- (2) Liouville type theorem (定理 3.7.5) について,
 (*) は $m = 4$ の場合に成り立たない例になっている
 ので,
 仮定 $m \geq 5$ は, 次元の条件としては必要である
 ことを示している.

命題 3.7.7 の証明 (3) は (1) および (2) から直ちに導かれるので, (1) および (2) を示す.

$$(3.39) \quad f_\alpha(x) = \frac{2x_\alpha}{\|x\|^2 + 1} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

$$(3.40) \quad f_{m+1}(x) = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}$$

であるから, 簡単な計算により

$$(3.41) \quad D_i f_\alpha = \frac{2\{(\|x\|^2 + 1)\delta_{i\alpha} - 2x_i x_\alpha\}}{(\|x\|^2 + 1)^2} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

$$(3.42) \quad D_i f_{m+1} = \frac{4x_i}{(\|x\|^2 + 1)^2}$$

$$(3.43) \quad \sum_{i=1}^m D_i D_i f_\alpha = -\frac{4\{(m-2)\|x\|^2 + m + 2\}}{(\|x\|^2 + 1)^3} x_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

$$(3.44) \quad \sum_{i=1}^m D_i D_i f_{m+1} = \frac{4\{(m-4)\|x\|^2 + m\}}{(\|x\|^2 + 1)^3}$$

が確かめられる. ここで, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である. このとき,

$$\begin{aligned}
& D_i f \cdot D_j f \\
= & \sum_{\alpha=1}^m D_i f_{\alpha} D_j f_{\alpha} + D_i f_{m+1} D_j f_{m+1} \\
(3.41), (3.42) \quad = & \frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^4} \sum_{\alpha=1}^m \left\{ (\|x\|^2 + 1) \delta_{i\alpha} - 2x_i x_{\alpha} \right\} \left\{ (\|x\|^2 + 1) \delta_{j\alpha} - 2x_j x_{\alpha} \right\} + \frac{16x_i x_j}{(\|x\|^2 + 1)^4} \\
= & \frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^4} \sum_{\alpha=1}^m \left\{ (\|x\|^2 + 1)^2 \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} - 2(\|x\|^2 + 1) \delta_{i\alpha} x_j x_{\alpha} \right. \\
& \quad \left. - 2(\|x\|^2 + 1) \delta_{j\alpha} x_i x_{\alpha} + 4x_{\alpha}^2 x_i x_j \right\} + \frac{16x_i x_j}{(\|x\|^2 + 1)^4} \\
= & \frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^4} \sum_{\alpha=1}^m \left\{ (\|x\|^2 + 1)^2 \delta_{ij} - 4(\|x\|^2 + 1) x_i x_j + 4\|x\|^2 x_i x_j \right\} + \frac{16x_i x_j}{(\|x\|^2 + 1)^4} \\
= & \frac{4\delta_{ij}}{(\|x\|^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

すなわち

$$(3.45) \quad D_i f \cdot D_j f = \frac{4\delta_{ij}}{(\|x\|^2 + 1)^2}$$

となる. したがって,

$$(3.46) \quad \sum_{i,j=1}^m (D_i f \cdot D_j f)^2 \stackrel{(3.45)}{=} \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{4\delta_{ij}}{(\|x\|^2 + 1)^2} \right)^2 = \frac{16m}{(\|x\|^2 + 1)^4}$$

となり, 命題 3.7.7 の (2) の前半 (symphonic energy density) が得られた. (2) の後半は, 極座標を用いることにより

$$\begin{aligned}
(3.47) \quad E_{sym}(f) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^m (D_i f \cdot D_j f)^2 dv_{\mathbb{R}^n} \\
&\stackrel{(3.46)}{=} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{16m}{(r^2 + 1)^4} r^{n-1} dr dv_{\mathbb{S}^{n-1}} \\
&= 16m \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(r^2 + 1)^4} dr \\
&= 16m \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \left\{ \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(r^2 + 1)^4} dr + \int_1^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(r^2 + 1)^4} dr \right\}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $dv_{\mathbb{R}^{n-1}}$ および $dv_{\mathbb{S}^{n-1}}$ はそれぞれ, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ および $n-1$ 次元球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ の体積要素であり, $\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})$ は $n-1$ 次元球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ の体積である. (3.47) において, 積分 $\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(r^2 + 1)^4} dr$ は有限値なので, symphonic エネルギー $E_{sym}(f)$ が有限値か否かは, 積分

$$(3.48) \quad \int_1^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(r^2 + 1)^4} dr$$

が有限値か否かに対応している. ところが, $r \geq 1$ のとき

$$\frac{r^{n-1}}{(r^2 + r^2)^4} \leq \frac{r^{n-1}}{(r^2 + 1)^4} \leq \frac{r^{n-1}}{(r^2)^4} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{16} r^{n-9} \leq \frac{r^{n-1}}{(r^2 + 1)^4} \leq r^{n-9}$$

であるので, 積分 (3.48) の収束性と

$$(3.49) \quad \int_1^\infty r^{n-9} dr$$

の収束性は同値になる. 明らかに

$$\text{積分 (3.49) が有限値} \Leftrightarrow n \leq 7$$

であるので,

$$E_{\text{sym}}(f) < \infty \Leftrightarrow n \leq 7$$

となり, 命題 3.7.7 の (2) の後半も示された.

次に, 命題 3.7.7 の (1) を示そう. 立体射影 f の定義域は $\mathbb{R}^n$ であり, 値域は $\mathbb{S}^n$ であるので, f が symphonic map であるためには, $f = (f_1, \dots, f_{m+1})$ が, この場合の symphonic map の方程式

$$(3.50) \quad \sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i f \cdot D_j f) D_j f \right) + \sum_{i,j=1}^m (D_i f \cdot D_j f)^2 f = 0$$

を満たすことと同値である. そこで, まず, symphonic operator 部分 ((3.50) の左辺の第 1 項) を計算すると

$$\begin{aligned} (3.51) \quad & \sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i f \cdot D_j f) D_j f_\alpha \right) \stackrel{(3.45)}{=} \sum_{i,j=1}^m D_i \left(\frac{4\delta_{ij}}{(\|x\|^2 + 1)^2} D_j f_\alpha \right) \\ &= 4 \sum_{i=1}^m D_i \left(\frac{1}{(\|x\|^2 + 1)^2} D_i f_\alpha \right) \\ &= 4 \sum_{i=1}^m \left\{ -\frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^3} x_i D_i f_\alpha + \frac{1}{(\|x\|^2 + 1)^2} D_i D_i f_\alpha \right\} \\ &= 4 \left\{ -\frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^3} \sum_{i=1}^m x_i D_i f_\alpha + \frac{1}{(\|x\|^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^m D_i D_i f_\alpha \right\} \end{aligned}$$

となるので, あとは, α の値に応じて, 場合分けして計算する.

$\alpha = 1, \dots, m$ に対して

$$\begin{aligned} (3.52) \quad & \sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i f \cdot D_j f) D_j f_\alpha \right) \\ & \stackrel{(3.41),(3.43),(3.51)}{=} 4 \left\{ -\frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^3} \sum_{i=1}^m \frac{2x_i \left\{ (\|x\|^2 + 1)\delta_{i\alpha} - 2x_i x_\alpha \right\}}{(\|x\|^2 + 1)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{(\|x\|^2 + 1)^2} \frac{4 \left\{ (m-2)\|x\|^2 + m+2 \right\} x_\alpha}{(\|x\|^2 + 1)^3} \right\} \\ &= \frac{16}{(\|x\|^2 + 1)^5} \left\{ 2(\|x\|^2 - 1) - (m-2)\|x\|^2 - (m+2) \right\} x_\alpha \\ &= -\frac{16}{(\|x\|^2 + 1)^4} \frac{(m-4)\|x\|^2 + (m+4)}{\|x\|^2 + 1} x_\alpha \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
 (3.53) \quad & \sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i f \cdot D_j f) D_j f_\alpha \right) + \sum_{i,j=1}^m (D_i f \cdot D_j f)^2 f_\alpha \\
 & \stackrel{(3.39),(3.46),(3.52)}{=} - \frac{16}{(\|x\|^2 + 1)^4} \frac{(m-4)\|x\|^2 + (m+4)}{\|x\|^2 + 1} x_\alpha + \frac{16m}{(\|x\|^2 + 1)^4} \frac{2x_\alpha}{\|x\|^2 + 1} \\
 & = - \frac{16}{(\|x\|^2 + 1)^5} \left\{ (m-4)\|x\|^2 - (m-4) \right\} x_\alpha \\
 & = - \frac{16(m-4)(\|x\|^2 - 1)}{(\|x\|^2 + 1)^5} x_\alpha
 \end{aligned}$$

$\alpha = m+1$ の場合は,

$$\begin{aligned}
 (3.54) \quad & \sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i f \cdot D_j f) D_j f_{m+1} \right) \\
 & \stackrel{(3.42),(3.44),(3.51)}{=} 4 \left\{ - \sum_{i=1}^m \frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^3} \frac{4x_i^2}{(\|x\|^2 + 1)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{(\|x\|^2 + 1)^2} \frac{4}{(\|x\|^2 + 1)^3} \left\{ (m-4)\|x\|^2 + m \right\} \right\} \\
 & = \frac{16m}{(\|x\|^2 + 1)^4} \left\{ - \frac{4}{m} \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} + \frac{m-4}{m} \right\}
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
 (3.55) \quad & \sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i f \cdot D_j f) D_j f_{m+1} \right) + \sum_{i,j=1}^m (D_i f \cdot D_j f)^2 f_{m+1} \\
 & \stackrel{(3.40),(3.46),(3.54)}{=} \frac{16}{(\|x\|^2 + 1)^4} \left\{ - 4 \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} + (m-4) \right\} + \frac{16m}{(\|x\|^2 + 1)^4} \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \\
 & = \frac{16(m-4)}{(\|x\|^2 + 1)^4} \left\{ \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} + 1 \right\} \\
 & = \frac{16(m-4)}{(\|x\|^2 + 1)^4} \frac{2\|x\|^2}{\|x\|^2 + 1}
 \end{aligned}$$

(3.53) および (3.55) をまとめると, $f = (f_1, \dots, f_{m+1})$ は, 方程式

$$\begin{aligned}
 (3.56) \quad & \sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i f \cdot D_j f) D_j f \right) + \sum_{i,j=1}^m (D_i f \cdot D_j f)^2 f \\
 & = - \frac{16(m-4)}{(\|x\|^2 + 1)^5} \left((\|x\|^2 - 1) x_1, \dots, (\|x\|^2 - 1) x_m, -2\|x\|^2 \right)
 \end{aligned}$$

を満たす. したがって, (3.56) により

$$f \text{ が symphonic map equation (3.50) を満たす} \Leftrightarrow m = 4$$

となるので, 命題 3.7.7 の (1) が証明された. $\square$

注意 3.7.9 (立体射影の harmonicity の条件) 命題 3.7.7 の証明における計算と同様にして, 立体射影 $f = (f_1, \dots, f_{m+1})$ は, 方程式

$$(3.57) \quad \Delta f + \|Df\|^2 f = -\frac{4(m-2)}{(\|x\|^2 + 1)^3} \left((\|x\|^2 - 1) x_1, \dots, (\|x\|^2 - 1) x_m, -2\|x\|^2 \right)$$

を満たすことが確かめられるので,

$$\begin{aligned} & f \text{ が harmonic map である} \\ \Leftrightarrow & f \text{ が harmonic map equation } \Delta f + \|Df\|^2 f = 0 \text{ を満たす} \\ \Leftrightarrow & m = 2 \end{aligned}$$

となる.

注意 3.7.10 (立体射影の p -harmonicity の条件) 注意 3.7.9 と同様に, 立体射影 $f = (f_1, \dots, f_{m+1})$ は, 方程式

$$(3.58) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^m D_i \left(\|Df\|^{p-2} D_i f \right) + \|Df\|^p f \\ &= -\frac{4(m-p)(4m)^{\frac{p-2}{2}}}{(\|x\|^2 + 1)^{p+1}} \left((\|x\|^2 - 1) x_1, \dots, (\|x\|^2 - 1) x_m, -2\|x\|^2 \right) \end{aligned}$$

を満たすことが確かめられるので,

$$\begin{aligned} & f \text{ が } p\text{-harmonic map である} \\ \Leftrightarrow & f \text{ が } p\text{-harmonic map equation } \sum_{i=1}^m D_i \left(\|Df\|^{p-2} D_i f \right) + \|Df\|^p f = 0 \text{ を満たす} \\ \Leftrightarrow & m = p \end{aligned}$$

となる.

Gap theorem (定理 3.7.2) の証明 まず, Sobolev の不等式

$$(3.59) \quad \left\{ \int_M |F|^{\frac{2m}{m-2}} dv_g \right\}^{\frac{m-2}{2m}} \leq C_{Sob}^M \left\{ \int_M \|\nabla F\|^2 dv_g \right\}^2$$

を思い起こそう. ここで, $F \in C_0^\infty(M)$ である⁶. 定理 3.7.2 の 2 つの仮定

⁶ 一般には, F は, $C_0^\infty(M)$ の $(F$ とその弱微分 DF が L^2 -space に属する) Sobolev 空間 $\mathbb{L}^{1,2}(M)$ の中での閉包 $\mathbb{L}_0^{1,2}(M)$ の要素で良いのだが, その場合は, Sobolev 空間の要素に対して connection ∇ の作用を定義しておく必要がある. ここでは, Sobolev の不等式は $F \in C_0^\infty(M)$ に対して用いれば良いだけなので, このような形で記述した.

- (a) M の Ricci 曲率 M は非負である
 (b) 体積の条件: $\inf \left\{ \frac{\text{vol}(B_r(x))}{r^m} \mid x \in M, r > 0 \right\} \geq \exists C_{vol} > 0$

から, Sobolev の不等式 (3.59) が導かれることが知られている. ([40] の Theorem 3.3.8 を参照せよ.)
 実際, 体積の条件 (b) から等周不等式が導かれ, 等周不等式から Sobolev の不等式 (3.59) が導かれる.
 したがって, 定理 3.7.2 において, 体積の条件 (b) の代わりに, Sobolev の不等式を仮定しても良いのである.
 ちなみに, Ricci 曲率の条件 (a) は Bochner formula を用いて議論するときに用いられる.

以上から, 定理 3.7.2 より少し一般的な, 次の定理を示す:

定理 3.7.11 (gap theorem) (M, g) を m 次元の完備で noncompact なリーマン多様体で, 非負の Ricci 曲率をもち, また, その上で Sobolev の不等式 (3.59) が成り立つとする.

$$\inf \left\{ \frac{\text{vol}(B_r(x))}{r^m} \mid x \in M, r > 0 \right\} \geq \exists C_{vol} > 0$$

を満たすものとする. ここで, $\text{vol}(B_r(x))$ は, 点 x を中心とし, 半径が r の開球 $B_r(x)$ の体積を表す. 一方, (N, h) は sectional curvature が上に有界であるリーマン多様体であるとする. このとき, Sobolev constant C_{Sob}^M による, 正の実数 ε^* が存在して, (M, g) から (N, h) への任意の symphonic map f に対して,

$$E_{sym}(f) < \infty \quad \text{および} \quad E_{sym}^m(f) < \varepsilon^*$$

を満たすならば f は定値写像である.

証明 C_0 を N の sectional curvature の上限とする. 定理 3.4.2 および 補題 3.4.3 より

$$\frac{1}{4} \Delta \|f^*h\|^2 - \frac{1}{2} \|\nabla(f^*h)\|^2 + m\sqrt{m}C_0 \|f^*h\|^3 \geq \text{div}_g \alpha_f$$

となる. また

$$\Delta \|f^*h\|^2 = \Delta \langle f^*h, f^*h \rangle = 2 \langle f^*h, \Delta(f^*h) \rangle + 2 \|\nabla(f^*h)\|^2$$

であるから

$$(3.60) \quad \frac{1}{2} \langle f^*h, \Delta(f^*h) \rangle + m\sqrt{m}C_0 \|f^*h\|^3 \geq \text{div}_g \alpha_f$$

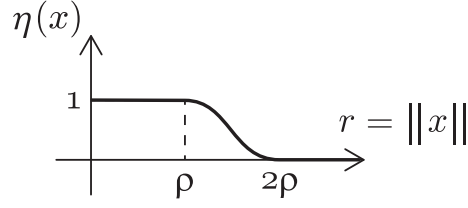
となる. x_0 を M の任意の点とし, ρ を正の実数とする. $B_\rho(x_0)$ を, 点 x_0 を中心とし, 半径が ρ の開球を表すとする. M 上の関数 $\eta(x)$ を

$$(3.61) \quad \eta(x) \begin{cases} = 1 & \text{for } x \in B_\rho(x_0) \\ \in [0, 1] & \text{for } x \in B_{2\rho}(x_0) - B_\rho(x_0) \\ = 0 & \text{for } x \in M - B_{2\rho}(x_0) \end{cases}$$

および,

$$(3.62) \quad \|\nabla \eta\| \leq \frac{C_1}{\rho}$$

を満たすようにしておく. ここで C_1 は正の定数である.



関数 η は $B_{2\rho}(x_0)$ に support をもち, η をかけることによって, $B_{2\rho}(x_0)$ で cut するので, cut-off 関数とよぶ⁷.

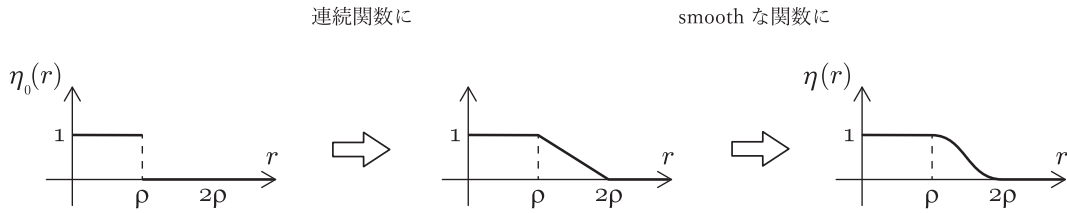
(3.60) の両辺に η^2 をかけて, 両辺を積分すると

$$(3.63) \quad \frac{1}{2} \int_M \langle \eta^2(f^*h), \Delta f^*h \rangle dv_g + m\sqrt{m}C_0 \int_M \|f^*h\|^3 \eta^2 dv_g \geq \int_M \eta^2 \operatorname{div}_g \alpha_f dv_g$$

となる. この不等式の左辺の第一項は, 任意の正の実数 ε に対して, 次のように計算できる:

$$\begin{aligned}
 (3.64) \quad & \int_M \langle \eta^2(f^*h), \Delta(f^*h) \rangle dv_g \\
 = & - \int_M \langle \nabla(\eta^2(f^*h)), \nabla(f^*h) \rangle dv_g \\
 = & - \int_M \eta^2 \|\nabla(f^*h)\|^2 dv_g - 2 \int_M \langle (f^*h) \nabla \eta, \eta \nabla(f^*h) \rangle dv_g \\
 \leq & - \int_M \eta^2 \|\nabla(f^*h)\|^2 dv_g + \frac{1}{4} \int_M \eta^2 \|\nabla(f^*h)\|^2 dv_g + 64 \int_M \|f^*h\|^2 \|\nabla \eta\|^2 dv_g \\
 & \left(\begin{array}{l} \text{一般的不等式} \\ \because -\langle A, B \rangle \leq \varepsilon \|A\|^2 + \frac{4}{\varepsilon} \|B\|^2 \\ \text{for } A = \eta \nabla(f^*h), B = (f^*h) \nabla \eta, \varepsilon = \frac{1}{8} \end{array} \right) \\
 \stackrel{(3.62)}{\leq} & -\frac{3}{4} \int_M \eta^2 \|\nabla(f^*h)\|^2 dv_g + \frac{64C_1^2}{\rho^2} \int_M \|f^*h\|^2 dv_g
 \end{aligned}$$

⁷ $B_\rho(x_0)$ 上で 1 をとり, それ以外で 0 をとる階段関数 η_0 なら, 正確に $B_\rho(x_0)$ で cut する関数であるが, そのままだと smooth どころか, 不連続な関数になるので, $B_{2\rho}(x_0) - B_\rho(x_0)$ の部分で smooth な関数に修正してある. 下記の図は, 関数 η および η_0 を $r = \|x\|$ の関数として記述したものである.



一方,

$$\begin{aligned}
 (3.65) \quad & \int_M \|f^*h\|^3 \eta^2 dv_g = \int_M \|f^*h\|^2 \eta^2 \|f^*h\| dv_g \\
 & \stackrel{\text{Hölder の不等式}}{\leq} \left\{ \int_M (\|f^*h\|^2 \eta^2)^{\frac{m}{m-2}} dv_g \right\}^{\frac{m-2}{m}} \left\{ \int_M \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g \right\}^{\frac{2}{m}} \\
 & = \left\{ \int_M (\|f^*h\| \eta)^{\frac{2m}{m-2}} dv_g \right\}^{\frac{m-2}{m}} \left\{ \int_M \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g \right\}^{\frac{2}{m}} \\
 & \stackrel{\text{Sobolev の不等式 (3.59)}}{\leq} (C_{Sob}^M)^2 \int_M \|\nabla(\|f^*h\| \eta)\|^2 dv_g \left\{ \int_M \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g \right\}^{\frac{2}{m}} \\
 & \stackrel{\text{仮定 } E_{sym}^m(f) < \varepsilon^*}{\leq} (\varepsilon^*)^{\frac{2}{m}} (C_{Sob}^M)^2 \int_M \|\nabla(\|f^*h\| \eta)\|^2 dv_g, \\
 & = (\varepsilon^*)^{\frac{2}{m}} (C_{Sob}^M)^2 \int_M \left\| (\nabla\|f^*h\|)\eta + \|f^*h\| \nabla\eta \right\|^2 dv_g, \\
 & \leq 2(\varepsilon^*)^{\frac{2}{m}} (C_{Sob}^M)^2 \int_M \left(\|\nabla\|f^*h\|\|^2 \eta^2 + \|f^*h\|^2 \|\nabla\eta\|^2 \right) dv_g \\
 & \quad \left(\begin{array}{l} \text{一般的不等式} \\ \because \|A+B\|^2 \leq 2(\|A\|^2 + \|B\|^2) \\ \text{for } A = (\nabla\|f^*h\|)\eta, B = \|f^*h\| \nabla\eta \end{array} \right) \\
 & \stackrel{(3.62)}{\leq} 2(\varepsilon^*)^{\frac{2}{m}} (C_{Sob}^M)^2 \int_M \|\nabla(f^*h)\|^2 \eta^2 dv_g \\
 & \quad + \frac{2(\varepsilon^*)^{\frac{2}{m}} (C_{Sob}^M)^2 C_1^2}{\rho^2} \int_M \|f^*h\|^2 dv_g \\
 & \quad \left(\begin{array}{l} \text{一般的不等式} \\ \because \|\nabla\|\beta\|\| \leq \|\nabla\beta\| \\ \text{for } \beta = \|f^*h\| \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

となる. また

$$\operatorname{div}_g(\eta^2 \alpha_f) = \langle \alpha_f, \nabla(\eta^2) \rangle + \eta^2 \operatorname{div}_g \alpha_f$$

であるから, (3.60) の右辺は

$$(3.66) \quad \int_M \eta^2 \operatorname{div}_g \alpha_f dv_g = - \int_M \langle \alpha_f, \nabla(\eta^2) \rangle dv_g \geq -2 \int_M \eta \|\nabla\eta\| \|\alpha_f\| dv_g$$

を満たす. 後出の補題 3.7.12 によって

$$(3.67) \quad \|\alpha_f\| \leq \frac{3}{2} \sqrt{m} \|f^*h\| \|\nabla(f^*h)\|$$

この等式を用いると,

$$\begin{aligned}
 (3.68) \quad & \int_M \eta^2 \operatorname{div}_g \alpha_f dv_g \\
 & \stackrel{(3.66), (3.67)}{\geq} -3\sqrt{m} \int_M \eta \|\nabla \eta\| \|f^* h\| \|\nabla(f^* h)\| dv_g \\
 & \geq -\frac{1}{4} \int_M \|\nabla(f^* h)\|^2 \eta^2 dv_g - (3\sqrt{m})^2 \int_M \|f^* h\|^2 \|\nabla \eta\|^2 dv_g \\
 & \quad \left(\begin{array}{l} \text{一般的不等式} \\ \because ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2 \\ \text{for } a = \|\nabla(f^* h)\| \eta, b = 3\sqrt{m} \|f^* h\| \|\nabla \eta\|, \varepsilon = \frac{1}{4} \end{array} \right) \\
 & \stackrel{(3.62)}{\geq} -\frac{1}{4} \int_M \|\nabla(f^* h)\|^2 \eta^2 dv_g - \frac{9mC_1^2}{\rho^2} \int_M \|f^* h\|^2 dv_g
 \end{aligned}$$

となる. 以上により, (3.63), (3.64), (3.65), (3.68) によって

$$\begin{aligned}
 (3.69) \quad & \left(\frac{1}{2} - 2(\varepsilon^*)^{\frac{2}{m}} (C_{Sob}^M)^2 \right) \int_M \|\nabla(f^* h)\|^2 \eta^2 dv_g \\
 & \leq \left(9m + 64 + 2(\varepsilon^*)^{\frac{2}{m}} (C_{Sob}^M)^2 \right) \frac{C_1^2}{\rho^2} \int_M \|f^* h\|^2 dv_g
 \end{aligned}$$

が得られた. さらに, ε の定義より

$$\varepsilon^* = \left(\frac{1}{8(C_{Sob}^M)^2} \right)^{\frac{m}{2}}, \quad \text{すなわち, } 2(\varepsilon^*)^{\frac{2}{m}} (C_{Sob}^M)^2 = \frac{1}{4}$$

であるので, (3.69) より

$$\int_M \|\nabla(f^* h)\|^2 \eta^2 dv_g \leq \frac{C_2}{\rho^2} \int_M \|f^* h\|^2 dv_g$$

が得られる. ただし, $C_2 = (36m + 257)C_1^2$ である. ゆえに, η の定義 (3.61) を考慮すれば

$$\int_{B_\rho(x_0)} \|\nabla(f^* h)\|^2 dv_g \leq \frac{C_2}{\rho^2} E_{sym}(f)$$

となる. ここで, $\rho \rightarrow \infty$ とすると, $E_{sym}(f) < \infty$ であることにより

$$\int_M \|\nabla(f^* h)\|^2 dv_g \leq 0$$

となる. したがって, $\nabla(f^* h) = 0$, すなわち, $f^* h$ は parallel である. それゆえ $\|f^* h\|$ は定数である, すなわち, $\|f^* h\| = C_3$ (C_3 は非負の定数) となる. M の Ricci 曲率が非負なので, M の体積は無限大である, すなわち, $\operatorname{Vol}(M) = \infty$ である. (この事実については, 例えば, [42] の 25 ページの Corollary を参照せよ.) したがって, もし $C_3 \neq 0$ であるならば

$$E_{sym}(f) = \int_M \|f^* h\|^2 dv_g = C_3^2 \operatorname{Vol}(M) = \infty$$

となり, $E_{sym}(f) < \infty$ という仮定に矛盾する. ゆえに $C_3 = 0$, したがって, $\|f^* h\| = 0$ となる. ゆえに f は定値写像である. $\square$

あとは, 定理 3.7.11 の証明で用いられた, 次の補題を証明するだけである.

補題 3.7.12

$$\|\alpha_f\| \leq \frac{3}{2}\sqrt{m} \|f^*h\| \|\nabla(f^*h)\|$$

証明 計算を簡単にするため, M の任意の点 x をとり, 固定して, 点 x の周りの normal coordinate (正規座標) をとる. Normal coordinate を用いると, 点 x において

$$(3.70) \quad \nabla_{e_i} e_j = 0 \quad (i, j = 1 \cdots, m)$$

となる. 以下のすべての計算は, 点 x で行っている.

α_f の定義 (定義 3.4.1) により

$$\alpha_f(X) = \sum_{i=1}^m (f^*h)(X, e_i) h(df(e_i), \tau_f)$$

である. このとき

$$(3.71) \quad \|\alpha_f\|^2 \leq \|f^*h\|^2 \|h(df(\cdot), \tau_f)\|^2$$

であるが, 積の微分法則により, M 上の任意のベクトル場 X に対して

$$\begin{aligned}
 (3.72) \quad (\operatorname{div}_g(f^*h))(X) &\stackrel{\operatorname{div}_g(f^*h) \text{ の定義}}{=} \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i}(f^*h))(e_i, X) \\
 &\stackrel{\nabla_{e_i}(f^*h) \text{ の定義}}{=} \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{e_i}((f^*h)(e_i, X)) - (f^*h)(\nabla_{e_i}e_i, X) - (f^*h)(e_i, \nabla_{e_i}X) \right\} \\
 &\stackrel{(3.70)}{=} \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{e_i}(h(df(e_i), df(X))) - (f^*h)(e_i, \nabla_{e_i}X) \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^m \left\{ h(\nabla_{e_i}(df(e_i)), df(X)) + h(df(e_i), \nabla_{e_i}(df(X))) \right. \\
 &\quad \left. - h(df(e_i), df(\nabla_{e_i}X)) \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^m \left\{ h((\nabla_{e_i}df)(e_i), df(X)) + h(df(\nabla_{e_i}e_i), df(X)) \right. \\
 &\quad \left. + h(df(e_i), (\nabla_{e_i}df)(X)) + h(df(e_i), df(\nabla_{e_i}X)) \right. \\
 &\quad \left. - h(df(e_i), df(\nabla_{e_i}X)) \right\} \\
 &\stackrel{(3.70)}{=} h\left(\sum_{i=1}^m ((\nabla_{e_i}df)(e_i), df(X))\right) + \sum_{i=1}^m h(df(e_i), (\nabla_{e_i}df)(X)) \\
 &\stackrel{(3.8)}{=} h(\tau_f, df(X)) + \sum_{i=1}^m h(df(e_i), (\nabla_{e_i}df)(X))
 \end{aligned}$$

が成り立つ. 一方

$$\sum_{i=1}^m h(df(e_i), (\nabla_{e_i}df)(X)) \stackrel{\text{Hessian の可換性}}{=} \sum_{i=1}^m h(df(e_i), (\nabla_X df)(e_i)) = \frac{1}{2} \nabla_X \|df\|^2$$

であることから, (3.72) より

$$(\operatorname{div}_g(f^*h))(X) = h(df(X), \tau_f) + \frac{1}{2}\nabla_X\|df\|^2$$

が得られる. したがって

$$(3.73) \quad \begin{aligned} \|h(df(\cdot), \tau_f)\| &= \left\| (\operatorname{div}_g(f^*h)) - \frac{1}{2}\nabla\|df\|^2 \right\| \\ &\leq \|\operatorname{div}_g(f^*h)\| + \frac{1}{2}\|\nabla\|df\|^2\| \end{aligned}$$

となる. ところが

$$(3.74) \quad \begin{aligned} \|\operatorname{div}_g(f^*h)\|^2 &= \sum_{i=1}^m |(\operatorname{div}_g(f^*h))(e_i)|^2 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m (\nabla_{e_j}(f^*h))(e_j, e_i) \right|^2 \\ &\leq m \sum_{i=1}^m \sum_{j,k=1}^m \left| (\nabla_{e_j}(f^*h))(e_k, e_i) \right|^2 = m\|\nabla(f^*h)\|^2 \end{aligned}$$

であり, また

$$(3.75) \quad \begin{aligned} \|\nabla\|df\|^2\|^2 &= \sum_{i=1}^m |\nabla_{e_i}\|df\|^2|^2 = \sum_{i=1}^m \left| \nabla_{e_i} \left(\sum_{j=1}^m (f^*h)(e_j, e_j) \right) \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m (\nabla_{e_i}(f^*h))(e_j, e_j) \right|^2 \\ &\stackrel{\delta_{jk} \text{ は Kronecker の } \delta \text{ 記号}}{=} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j,k=1}^m \delta_{jk} (\nabla_{e_i}(f^*h))(e_j, e_k) \right|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwarz の不等式}}{\leq} m \sum_{i=1}^m \sum_{j,k=1}^m \left| (\nabla_{e_i}(f^*h))(e_j, e_k) \right|^2 \\ &= m\|\nabla(f^*h)\|^2 \end{aligned}$$

となる. 上記の 2 つの不等式 (3.74) および (3.75) において, 一般的な不等式

$$\left| \sum_{j=1}^m a_{jj} \right|^2 \leq m \sum_{j,k=1}^m |a_{jk}|^2 \quad \left(|\operatorname{tr} a|^2 \leq m \|a\|^2 \right)$$

を用いた. この不等式は Schwarz の不等式から容易に得られる. 以上から, (3.73), (3.74), (3.75) により $\|h(df(\cdot), \tau_f)\| \leq \frac{3}{2}\sqrt{m}\|\nabla(f^*h)\|$ となる. それゆえ (3.71) から, 補題 3.7.12 が導かれる. $\square$

Liouville type theorem (定理 3.7.5) の証明 背理法による証明である. f が定値写像でないと仮定する. このとき, ある $s > 0$ が存在して

$$\beta \stackrel{\text{定義}}{=} \frac{1}{s^{m-4}} \int_{B_s} \|f^*h\|^2 dv_g > 0$$

である. ここで

$$B_s = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < s \}$$

とする. Monotonicity formula (定理 3.5.2) により, $s \leq t$ ならば

$$\frac{1}{t^{m-4}} \int_{B_t} \|f^*h\|^2 dv_g \geq \frac{1}{s^{m-4}} \int_{B_s} \|f^*h\|^2 dv_g$$

となる. このとき

$$\beta \leq \frac{1}{t^{m-4}} \left(\int_{B_s} \|f^*h\|^2 dv_g + \int_{B_t-B_s} \|f^*h\|^2 dv_g \right)$$

であるが,

$$\begin{aligned} (3.76) \quad \beta &\stackrel{\text{Hölder の不等式}}{\leq} \frac{1}{t^{m-4}} \left\{ \int_{B_s} \|f^*h\|^2 dv_g + \left(\int_{B_t-B_s} dv_g \right)^{\frac{m-4}{m}} \left(\int_{B_t-B_s} \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g \right)^{\frac{4}{m}} \right\} \\ &\leq \frac{1}{t^{m-4}} \left\{ \int_{B_s} \|f^*h\|^2 dv_g + C_4 (t^m - s^m)^{\frac{m-4}{m}} \left(\int_{B_t-B_s} \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g \right)^{\frac{4}{m}} \right\} \\ &\leq \frac{1}{t^{m-4}} \int_{B_s} \|f^*h\|^2 dv_g + C_4 \left(1 - \left(\frac{s}{t} \right)^m \right)^{\frac{m-4}{m}} \left(\int_{B_t-B_s} \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g \right)^{\frac{4}{m}} \\ &\leq \frac{1}{t^{m-4}} \int_{B_s} \|f^*h\|^2 dv_g + C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^m-B_s} \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g \right)^{\frac{4}{m}}, \end{aligned}$$

となる. ここで, C_4 は正の定数である. 一方, $E_{sym}^m(f) = \int_{\mathbb{R}^m} \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g < \infty$ であるので, 十分大きい s をとると

$$\int_{\mathbb{R}^m-B_s} \|f^*h\|^{\frac{m}{2}} dv_g < \left(\frac{1}{C_4} \frac{\beta}{4} \right)^{\frac{m}{4}}$$

となるようにできる. そこで, $t (> s)$ を十分大きくとることにより

$$\frac{1}{t^{m-4}} \int_{B_s} \|f^*h\|^2 dv_g \leq \frac{\beta}{4}$$

となるようにできる. したがって, (3.76) により

$$0 < \beta \leq \frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{4} = \frac{\beta}{2}$$

となり, これは矛盾である. したがって, Liouville type theorem の証明が終わった. $\square$

3.8 Symphonic map の方程式の弱解の存在と正則性

本書では, 解析学的な側面は述べないが, この節では, symphonic map の方程式の弱解の存在と正則性について, 少しふれておこう.

Symphonic map は symphonic map の方程式の解であり, 解析学的に取りあつかうことができる. 微分方程式の研究の“基本的行動様式”の一つとして, 「弱解の存在と正則性」という研究のプロセスがある. 具体的には, 次の2つのステップで行われる:

1. 弱い意味の解 (弱解) を定義し, 弱解の存在を示す
2. 弱解が正則性 (ある種の smoothness) をもつことを示す

Symphonic map の方程式の弱解は自然に定義され、弱解を構成することができる。問題となるのは、弱解の正則性である。

微分幾何学で現れる「多様体間の写像 $f: M \rightarrow N$ に関する微分方程式」の正則性については、一般的な状況でなく、次のような設定で議論を進めることも多い。

M は、 m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の部分領域とし、
 N は、 n 次元球面 $\mathbb{S}^n$ とする。

これについては、少しだけ補足を加えると

- (1) 定義域 M を多様体でなく、ユークリッド空間の部分領域にするのは、議論を簡単にするためである。実際、正則性は局所的な性質なので、ユークリッド空間の場合に正則性が示されれば、次のステップとして、多様体の場合は、局所座標の近傍で、方程式を局所座標を用いて書き下すことにより、計量で影響が出る係数や項を評価すれば良いという見通しが立つからである。
- (2) 値域 N を n 次元球面に限定するのは、一般的に、

値域の多様体の曲率が負になると、smooth な解が存在しやすく、逆に、
 値域の多様体の曲率が正になると、smooth な解が存在しにくくなる

という傾向に基づいて、

正の定曲率空間である n 次元球面 $\mathbb{S}^n$ でうまくいけば
 一般の多様体でも成り立つのではないか

という期待をもって、議論を進めることができるからである。また、値域 N が n 次元球面の場合は、ものごとが少し見やすくなることが多い。例えば、[21] を参照せよ。もちろん、一般の多様体でも成り立つかどうかは、なんらかの議論が必要である。

Symphonic map の方程式の弱解の正則性については、今のところ、以下のことがらがわかっている。

定理 3.8.1 ([19]) 4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の領域 D から n 次元球面 $\mathbb{S}^n$ への symphonic map の方程式の弱解は Hölder 連続である。

「定義域が4次元」というのは本質的で、一般には、以下の結果が成り立つのではないかと予想される。

予想 (部分的正則性)

m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の領域 D から n 次元球面 $\mathbb{S}^n$ への symphonic map の方程式の弱解は、 $m-4$ 次元 Hausdorff 測度がゼロである部分集合 S が存在して、 $D-S$ 上 Hölder 連続である。

また、「正則性がどのレベルまで期待できるか」ということに関しても、以下のように予想される。

予想 (正則性のレベル)

Symphonic map の方程式の弱解の正則性については, 上記の結論の

「Hölder 連続性」は, 「 $C^{1,\alpha}$ 級」 ($0 < \alpha < 1$) に
置きかえることができる⁸.

Symphonic map の方程式は, 主要項が退化はしているが非線形楕円型であるので, 調べることができたが, C-stationary map の方程式は主要項が複雑なので, 手つかずの状態である.

⁸ $C^{1,\alpha}$ 級というのは, C^1 級であり, さらに, 1 階微分が 指数 α の Hölder 連続であることをいう.

第4章 Radial map を含む Harmonic maps の Family

4.1 Radial map を含む Harmonic maps の Family

Radial map は, 原点で特異点をもつ harmonic map として有名な例である.

Radial map

写像

$$\begin{array}{ccc} u : & \mathbb{R}^m - \{0\} & \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto u(x) = \frac{x}{\|x\|} \end{array}$$

を **radial map** とよぶ¹.

Radial map は, 次の equator map という形で取り上げることもある.

Equator map

写像

$$\begin{array}{ccc} u : & \mathbb{R}^m - \{0\} & \longrightarrow \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto u(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, 0 \right) \end{array}$$

を **equator map** とよぶ.

¹ この章では, 写像の記号として u を用いている. ここでは,

多様体間の一般的な写像 f ではなくて,
ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ や球面 $\mathbb{S}^m$ のような特別な空間の間の写像であるから

という理由であると解釈していただければ幸いである. 実は, 「そんなにちゃんとした理由はない」というのが真相で,

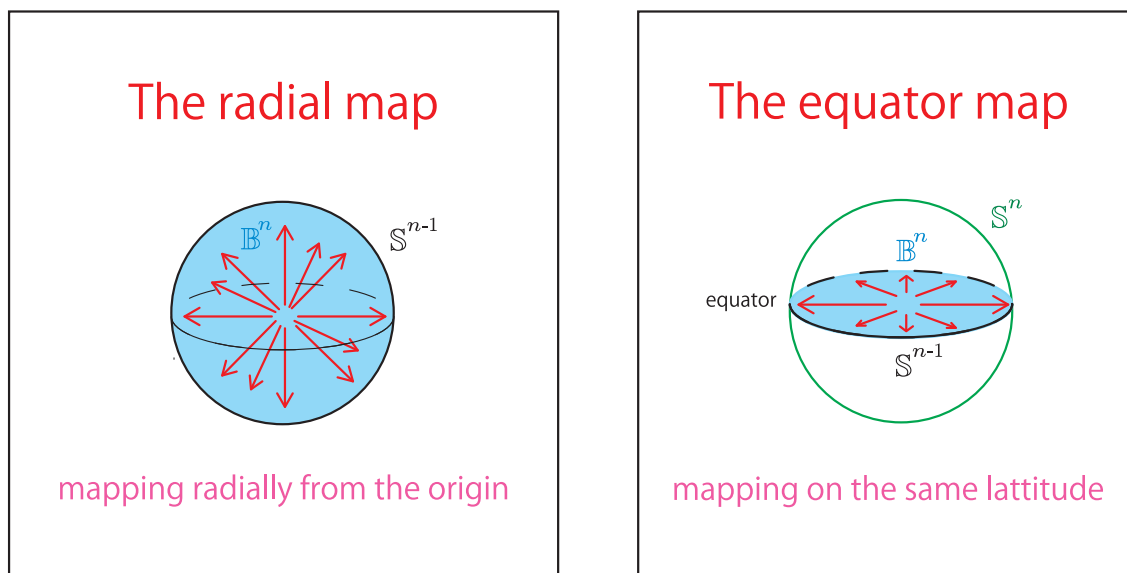
解析学では, 写像はすべて関数とよんで, 関数の記号には u を用いることも多い
(例えば「ベクトル値関数 u 」とか「球面に値をとる関数 u 」とか)

ので

著者が記号を混用している日常の影響が現れた

というのが実態である. 記号に対する順応性がないと, いろんな分野の論文を読むときに困りますからね.

定義を見ればわかるように, radial map と equator map は本質的には同じ写像であるが, 幾何学的な意味合いの違いからそれぞれ, radial map および equator map とよばれている.



上記の図を見てもわかるように

radial map および equator map は
 原点から球面^{すい}への錐 (cone) をとったもの

に対応していて, また,

特異性をもつ錐 (cone) が存在するかどうか,
 もとの写像に特異点が許されるか否かを決定する

という議論から,

もとの写像の正則性 (regularity) に関係している

ことも知られている. このように, radial map (あるいは equator map) は重要性をもち, これまでに様々な研究がなされている. 例えば, [1], [3], [12], [17], [25]などを参照のこと.

この節の目的は, 以下のような, radial map を含む harmonic maps の family を構成することである.

定理 4.1.1 (radial map を含む harmonic maps の family [32]) m を正の整数とする.
任意の正の整数 n に対して, harmonic map

$$\begin{array}{ccc} u^{(n)} : & \mathbb{R}^m - \{0\} & \longrightarrow \mathbb{S}^{m^n-1} \subset \mathbb{R}^{m^n} \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto u^{(n)}(x) = \left(u_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(x) \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m} \end{array}$$

が存在して, 以下の3つの条件を満たす:

- (1) $u^{(n)}$ は smooth な harmonic map である, すなわち, $u^{(n)}$ は harmonic map の方程式

$$\Delta u^{(n)} + \|Du^{(n)}\|^2 u^{(n)} = 0$$

を満たす.

- (2) $u^{(n)}(x)$ は, $y_1, \dots, y_m$ の n 次多項式である. ここで

$$y_i = \frac{x_i}{\|x\|} \quad (i = 1, \dots, m)$$

である. 詳しく述べると, $u^{(n)}(x)$ の成分 $u_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(x)$ は $y_{i_1}, \dots, y_{i_n}$ の n 次多項式である. 特に, $u^{(n)}$ は $x = 0$ において特異点をもつ.

- (3) (エネルギー密度)

$$\|Du^{(n)}\|^2 = \frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2}$$

ここで

$$Du^{(n)} = (D_1 u^{(n)}, \dots, D_m u^{(n)})$$

であり, また, D_i は x_i についての偏微分, すなわち,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

とする.

注意 4.1.2 $n = 1, 2, 3, 4$ に対しては, 知られている結果に対応している. 実際, $n = 1$ のときは, 最初に述べた radial map $u_i^{(1)}(x) = \frac{x_i}{\|x\|}$ ($1 \leq i \leq m$) になっている. また, 写像 $u^{(n)}$ の帰納的定義 (後

出の定義 4.1.4 の (4.3), (4.4)) から, 定理 4.1.1 で与えた例は, 具体的には, $n = 2, 3$ の場合はそれぞれ

$$(4.1) \quad u_{ij}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{m}{m-1}} \left(\frac{x_i x_j}{\|x\|^2} - \frac{1}{m} \delta_{ij} \right) = \sqrt{\frac{m}{m-1}} \left(y_i y_j - \frac{1}{m} \delta_{ij} \right) \\ (1 \leq i, j \leq m)$$

$$(4.2) \quad u_{ijk}^{(3)}(x) = \sqrt{\frac{m+2}{m-1}} \left\{ \frac{x_i x_j x_k}{\|x\|^3} - \frac{1}{m+2} \left(\delta_{ij} \frac{x_k}{\|x\|} + \delta_{jk} \frac{x_i}{\|x\|} + \delta_{ki} \frac{x_j}{\|x\|} \right) \right\} \\ = \sqrt{\frac{m+2}{m-1}} \left\{ y_i y_j y_k - \frac{1}{m+2} (\delta_{ij} y_k + \delta_{jk} y_i + \delta_{ki} y_j) \right\} \\ (1 \leq i, j, k \leq m)$$

となっている. ここで, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である, すなわち,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である. 上記の写像 (4.1), (4.2) はそれぞれ, harmonic maps

$$u^{(2)} : \mathbb{R}^m - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{m^2-1} \quad (m \geq 2) \\ u^{(3)} : \mathbb{R}^m - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{m^3-1} \quad (m \geq 3)$$

の例を与えているが, 符号の違いを除いて, 我々の以前に与えた例 [23] に一致している. さらに, $n = 4$ の場合の $u^{(4)}$ は, 符号の違いを除いて, Fujioka [8] で与えた例と一致していることが確かめられる.

定理 4.1.1 の証明のために, この章全体で重要な役割を果たす次の 2 つの量を定義しておく. ただし, $y = (y_i)$ は, 定理 4.1.1 (2) に, すでに現れている.

2 つの基本的量

$$y = (y_i)_{1 \leq i \leq m}, \quad y_i = \frac{x_i}{\|x\|} \\ a = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}, \quad a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^2} = \delta_{ij} - y_i y_j$$

これら 2 つの量 y_i および a_{ij} は, 以下のような基本的性質を満たす:

補題 4.1.3 (y_i および a_{ij} の基本的性質)

- (1) $\sum_{i=1}^m y_i^2 = 1$ (すなわち, $\|y\| = 1$)
- (2) $a_{ij} = a_{ji}$ (すなわち, a は symmetric)
- (3) $\sum_{j=1}^m a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$ (すなわち, $a^2 = a$)
- (4) $\sum_{i=1}^m a_{ii} = m - 1$ (すなわち, $\text{tr } a = m - 1$)
- (5) $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^2 = m - 1$ (すなわち, $\|a\|^2 = m - 1$)
- (6) $\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = 0$ (すなわち, $ay = 0$)
- (7) $D_i \|x\| = y_i$
- (8) $D_i y_j = \frac{1}{\|x\|} a_{ij}$ (すなわち, $Dy = \frac{1}{\|x\|} a$)
- (9) $\sum_{i=1}^m D_i y_i = \frac{m-1}{\|x\|}$ (すなわち, $\text{div } y = \frac{m-1}{\|x\|}$)
- (10) $\Delta \|x\| = \frac{m-1}{\|x\|}$
- (11) $D_k a_{ij} = -\frac{1}{\|x\|} (a_{ki} y_j + a_{kj} y_i)$
- (12) $\sum_{i=1}^m D_i a_{ij} = -\frac{m-1}{\|x\|} y_j$ (すなわち, $(\text{div } a)_j = -\frac{m-1}{\|x\|} y_j$)
- (13) $\Delta y_i = -\frac{m-1}{\|x\|^2} y_i$
- (14) $\Delta a_{ij} = \frac{2}{\|x\|^2} ((m-1)\delta_{ij} - m a_{ij})$

ただし, D_i は x_i についての偏微分, すなわち,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

とする.

証明 (1) および (2) はそれぞれ, y_i および a_{ij} の定義から明らかである.

(3):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m a_{ij} a_{jk} &= \sum_{j=1}^m (\delta_{ij} - y_i y_j) (\delta_{jk} - y_j y_k) \\
&= \sum_{j=1}^m (\delta_{ij} \delta_{jk} - \delta_{ij} y_j y_k - \delta_{jk} y_i y_j + y_i y_j^2 y_k) \\
&= \delta_{ik} - y_i y_k - y_i y_k + \|y\|^2 y_i y_k \\
&\stackrel{(1)}{=} \delta_{ik} - y_i y_k \\
&= a_{ik}
\end{aligned}$$

(4):

$$\sum_{i=1}^m a_{ii} = \sum_{j=1}^m (\delta_{ii} - y_i^2) = m - \|y\|^2 \stackrel{(1)}{=} m - 1$$

(5):

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^2 &= \sum_{i,j=1}^m (\delta_{ij} - y_i y_j)^2 = \sum_{i,j=1}^m (\delta_{ij}^2 - 2\delta_{ij} y_i y_j + y_i^2 y_j^2) \\
&= m - 2\|y\|^2 + \|y\|^2 \|y\|^2 \stackrel{(1)}{=} m - 2 + 1 = m - 1
\end{aligned}$$

(6):

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^m (\delta_{ij} - y_i y_j) y_j = y_i - y_i \|y\|^2 \stackrel{(1)}{=} 0$$

(7):

$$D_i \|x\| = D_i \left((\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} (\|x\|^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|} = y_i$$

(8):

$$\begin{aligned}
D_i y_j &= D_i \left(\frac{x_j}{\|x\|} \right) = \frac{D_i x_j \|x\| - x_j D_i \|x\|}{\|x\|^2} \\
&\stackrel{(7)}{=} \frac{\delta_{ij} \|x\| - x_j y_i}{\|x\|^2} = \frac{1}{\|x\|} (\delta_{ij} - y_i y_j) = \frac{1}{\|x\|} a_{ij}
\end{aligned}$$

(9):

$$\sum_{i=1}^m D_i y_i \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{\|x\|} \sum_{i=1}^m a_{ii} \stackrel{(4)}{=} \frac{m-1}{\|x\|}$$

(10):

$$\triangle \|x\| = \sum_{i=1}^m D_i D_i \|x\| \stackrel{(7)}{=} \sum_{i=1}^m D_i y_i \stackrel{(9)}{=} \frac{m-1}{\|x\|}$$

(11):

$$\begin{aligned}
D_k a_{ij} &= D_k \left(\delta_{ij} - y_i y_j \right) = - (D_k y_i) y_j - y_i D_k y_j \\
&\stackrel{(8)}{=} - \frac{1}{\|x\|} a_{ki} y_j - y_i \frac{1}{\|x\|} a_{kj} = - \frac{1}{\|x\|} (a_{ki} y_j + a_{kj} y_i)
\end{aligned}$$

(12):

$$\sum_{i=1}^m D_i a_{ij} \stackrel{(11)}{=} - \frac{1}{\|x\|} \sum_{i=1}^m (a_{ii} y_j + a_{ij} y_i) \stackrel{(2),(4),(6)}{=} - \frac{m-1}{\|x\|} y_j$$

(13):

$$\begin{aligned}
\Delta y_i &= \sum_{j=1}^m D_j D_j y_i \stackrel{(8)}{=} \sum_{j=1}^m D_j \left(\frac{1}{\|x\|} a_{ji} \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ D_j \left(\frac{1}{\|x\|} \right) a_{ji} + \frac{1}{\|x\|} D_j a_{ji} \right\} \\
&\stackrel{(7),(12)}{=} - \sum_{j=1}^m \frac{y_j}{\|x\|^2} a_{ji} - \frac{m-1}{\|x\|^2} y_i \stackrel{(2),(6)}{=} - \frac{m-1}{\|x\|^2} y_i
\end{aligned}$$

(14):

$$\begin{aligned}
\Delta a_{ij} &= \sum_{k=1}^m D_k D_k a_{ij} \\
&\stackrel{(11)}{=} - \sum_{k=1}^m D_k \left(\frac{1}{\|x\|} (a_{ki} y_j + a_{kj} y_i) \right) \\
&= - \sum_{k=1}^m D_k \left(\frac{1}{\|x\|} \right) (a_{ki} y_j + a_{kj} y_i) - \frac{1}{\|x\|} \sum_{k=1}^m D_k (a_{ki} y_j + a_{kj} y_i) \\
&\stackrel{(7)}{=} - \sum_{k=1}^m \frac{y_k}{\|x\|^2} (a_{ki} y_j + a_{kj} y_i) - \frac{1}{\|x\|} \sum_{k=1}^m (D_k a_{ki} y_j + a_{ki} D_k y_j + D_k a_{kj} y_i + a_{kj} D_k y_i) \\
&\stackrel{(2),(6),(8),(12)}{=} - \frac{1}{\|x\|} \left(- \frac{m-1}{\|x\|} y_i y_j + \sum_{k=1}^m a_{ki} \frac{1}{\|x\|} a_{kj} - \frac{m-1}{\|x\|} y_j y_i + \sum_{k=1}^m a_{kj} \frac{1}{\|x\|} a_{ki} \right) \\
&\stackrel{(2),(3)}{=} - \frac{2}{\|x\|} \left(- \frac{m-1}{\|x\|} y_i y_j + \frac{1}{\|x\|} a_{ij} \right) \\
&= \frac{2}{\|x\|^2} \left((m-1) \delta_{ij} - m a_{ij} \right) \\
&\quad \left(\because a_{ij} \text{ の定義より } y_i y_j = \delta_{ij} - a_{ij} \right)
\end{aligned}$$

以上で, 補題 4.1.3 の証明が終わった. $\square$

さて, 定理 4.1.1 の写像の family を構成しよう. 写像 $u^{(n)}$ (n は正の整数) を次のように帰納的に定義する.

定義 4.1.4 (recursive construction of maps) m を正の整数とする. 任意の正の整数 n に対して, 写像

$$\begin{array}{ccc} u^{(n)} : & \mathbb{R}^m - \{0\} & \longrightarrow \mathbb{S}^{m^n-1} \subset \mathbb{R}^{m^n} \\ & \cup & \cup \\ & x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto u^{(n)}(x) = \left(u_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(x) \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m} \end{array}$$

を以下のように, 帰納的に定義する:

$$(4.3) \quad u_{i_1}^{(1)}(x) = y_{i_1}$$

$$(4.4) \quad u_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(x) = C_{n,m} \left(y_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}(x) - \frac{1}{n+m-3} \|x\| D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}(x) \right) \quad (n \geq 2)$$

ただし, D_i は x_i についての偏微分, すなわち,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

とし, また

$$(4.5) \quad C_{n,m} = \sqrt{\frac{n+m-3}{2n+m-4}}$$

とおく.

まず, 次の性質が直ちに導かれる. これで, 定理 4.1.1 の (2) が示されたことになる.

補題 4.1.5 $u_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(x)$ は $y_{i_1}, \dots, y_{i_n}$ の n 次多項式である.

証明 n に関する数学的帰納法で証明する. まず, $n = 1$ のとき, 帰納的定義 (4.3) より

$$u_{i_1}(x) = y_{i_1}$$

であり,

$$u_{i_1}(x) \text{ は } y_{i_1} \text{ の } 1 \text{ 次式である}$$

ので, 成り立つ.

次に, $n = k - 1$ ($k \geq 2$) のとき

$$(4.6) \quad u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x) \text{ は } y_{i_1}, \dots, y_{i_{k-1}} \text{ の } k-1 \text{ 次多項式である}$$

と仮定すると, $n = k$ のとき, 帰納的定義 (4.4) より

$$(4.7) \quad u_{i_1 \dots i_k}^{(k)}(x) = C_{k,m} \left(y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x) - \frac{1}{k+m-3} \|x\| D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x) \right)$$

であるが

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & u_{i_1 \dots i_k}^{(k)}(x) \text{ の帰納的定義式 (4.7) の右辺の第 1 項は} \\ & k-1 \text{ 次多項式 } u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x) \text{ に} \\ & y_{i_k} \text{ をかけて, 多項式の次数を一つ上げている} \end{aligned}$$

ことがわかる. また, 補題 4.1.3 (8) によって,

$$\|x\| D_j y_i = a_{ij} = \delta_{ij} - y_i y_j$$

であるので

作用素 $\|x\| D_j$ は, 「次数 1 の多項式 y_i 」を
「 y_j を含んだ次数 2 の多項式」に対応させている

ことから

作用素 $\|x\| D_j$ は
 y_j を含んだ形で, 多項式の次数を一つ上げる作用

を与えている. よって

$$(4.9) \quad \begin{aligned} & u_{i_1 \dots i_k}^{(k)}(x) \text{ の帰納的定義式 (4.7) の右辺の第 2 項は} \\ & \|x\| D_{i_k} \text{ の作用で, } y_{i_k} \text{ を含んだ形で, 多項式の次数を一つ上げている} \end{aligned}$$

ことになる. したがって, (4.8) および (4.9) より

多項式 $u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x)$ に,
 y_{i_k} を含んだ形で, 次数を一つ上げた多項式 $u_{i_1 \dots i_k}^{(k)}$ を定義している

ことがわかるので, 数学的帰納法の仮定 (4.6) を用いると

$$u_{i_1 \dots i_k}^{(n)}(x) \text{ は } y_{i_1}, \dots, y_{i_k} \text{ の } k \text{ 次多項式である.}$$

ことが導かれ, $n = k$ のときも成り立つことが示された. 以上により, 数学的帰納法による証明が終わった. $\square$

ここで, 定理 4.1.1 の証明に必要なことがらを次の命題にまとめておく. これまでと同様に, 以降, この章では, 記号 D_i は x_i についての偏微分, すなわち,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

であるとする.

命題 4.1.6 以下の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{p=1}^m y_p D_p u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = 0 \\
 (2) \quad & \sum_{q=1}^m a_{pq} D_q u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = D_p u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \\
 (3) \quad & \sum_{p=1}^m y_p D_p D_q u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = -\frac{1}{\|x\|} D_q u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \\
 (4) \quad & \sum_{q=1}^m a_{pq} D_q D_r u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = \frac{1}{\|x\|} D_p \left(\|x\| D_r u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \right)
 \end{aligned}$$

証明 等式 (1) ～ (4) を, n についての数学的帰納法で証明する. まず (1) ～ (4) を $n = 1$ の場合に確かめる. $n = 1$ の場合, $u_{i_1}^{(1)}(x) = y_{i_1}$ である. 補題 4.1.3 (7), (8), (11) より,

$$(4.10) \quad D_p u_{i_1}^{(1)} = D_p y_{i_1} \stackrel{\text{補題 4.1.3 (8)}}{=} \frac{1}{\|x\|} a_{pi_1}$$

$$\begin{aligned}
 (4.11) \quad D_p D_q u_{i_1}^{(1)} & \stackrel{(4.10)}{=} D_p \left(\frac{1}{\|x\|} a_{qi_1} \right) \\
 & = D_p \left(\frac{1}{\|x\|} \right) a_{qi_1} + \frac{1}{\|x\|} D_p a_{qi_1} \\
 & \stackrel{\text{補題 4.1.3 (7), (11)}}{=} -\frac{y_p}{\|x\|^2} a_{qi_1} - \frac{1}{\|x\|^2} (a_{pq} y_{i_1} + a_{pi_1} y_q) \\
 & \stackrel{\text{補題 4.1.3 (2)}}{=} -\frac{1}{\|x\|^2} (a_{pq} y_{i_1} + a_{qi_1} y_p + a_{i_1 p} y_q) \\
 & \quad \quad \quad (\text{添え字 } p, q, i_1 \text{ が cyclic})
 \end{aligned}$$

である. したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^m y_p D_p u_{i_1}^{(1)} &\stackrel{(4.10)}{=} \frac{1}{\|x\|} \sum_{p=1}^m a_{pi_1} y_p \stackrel{\text{補題 4.1.3 (2),(6)}}{=} 0 \\
\sum_{q=1}^m a_{pq} D_q u_{i_1}^{(1)} &\stackrel{(4.10)}{=} \frac{1}{\|x\|} \sum_{p=1}^m a_{pq} a_{qi_1} \stackrel{\text{補題 4.1.3 (3)}}{=} \frac{1}{\|x\|} a_{pi_1} \stackrel{(4.10)}{=} D_p u_{i_1}^{(1)} \\
\sum_{p=1}^m y_p D_p D_q u_{i_1}^{(1)} &\stackrel{(4.11)}{=} -\frac{1}{\|x\|^2} \left(\sum_{p=1}^m a_{pq} y_p y_{i_1} + a_{qi_1} \sum_{p=1}^m y_p^2 + \sum_{p=1}^m a_{i_1 p} y_p y_q \right) \\
&\stackrel{\text{補題 4.1.3 (1),(2),(6)}}{=} -\frac{1}{\|x\|^2} a_{qi_1} \stackrel{(4.10)}{=} -\frac{1}{\|x\|} D_q u_{i_1}^{(1)} \\
\sum_{q=1}^m a_{pq} D_q D_r u_{i_1}^{(1)} &\stackrel{(4.11)}{=} -\frac{1}{\|x\|^2} \left(\sum_{q=1}^m a_{pq} a_{qr} y_{i_1} + \sum_{q=1}^m a_{pq} y_q a_{ri_1} + \sum_{q=1}^m a_{pq} a_{i_1 q} y_r \right) \\
&\stackrel{\text{補題 4.1.3 (2),(3),(6)}}{=} -\frac{1}{\|x\|^2} (a_{pr} y_{i_1} + a_{pi_1} y_r) \\
&\stackrel{\text{補題 4.1.3 (2)}}{=} -\frac{1}{\|x\|^2} (a_{pr} y_{i_1} + a_{ri_1} y_p + a_{i_1 p} y_r) + \frac{1}{\|x\|} y_p \frac{1}{\|x\|} a_{ri_1} \\
&\stackrel{(4.10),(4.11)}{=} D_p D_r u_{i_1}^{(1)} + \frac{1}{\|x\|} y_p D_r u_{i_1}^{(1)} \\
&\stackrel{\text{補題 4.1.3 (7)}}{=} \frac{1}{\|x\|} \left(\|x\| D_p D_r u_{i_1}^{(1)} + D_p \|x\| D_r u_{i_1}^{(1)} \right) \\
&= \frac{1}{\|x\|} D_p \left(\|x\| D_r u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_n} \right)
\end{aligned}$$

以上から, $n = 1$ の場合は, (1) ~ (4) が成り立つことが確かめられた.

$n = k - 1$ ($k \geq 2$) のときの帰納法の仮定 (1) ~ (4), すなわち,

$$(4.12) \quad \sum_{p=1}^m y_p D_p u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} = 0$$

$$(4.13) \quad \sum_{q=1}^m a_{pq} D_q u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} = D_p u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}$$

$$(4.14) \quad \sum_{p=1}^m y_p D_p D_q u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} = -\frac{1}{\|x\|} D_q u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}$$

$$(4.15) \quad \sum_{q=1}^m a_{pq} D_q D_r u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} = \frac{1}{\|x\|} D_p \left(\|x\| D_r u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right)$$

が成り立つと仮定する. この仮定のもとで, $n = k$ のときの (1) ~ (4) が成り立つことを示す. $n = k$ の場合の定義式 (4.4) は

$$(4.16) \quad u_{i_1 \dots i_n}^{(k)}(x) = C_{k,m} \left(y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x) - \frac{1}{k+m-3} \|x\| D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x) \right)$$

である. この等式 (4.16) の両辺を微分すると, 補題 4.1.3 (7), (8) より

$$\begin{aligned}
(4.17) \quad D_p u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} &= C_{k,m} \left[\frac{1}{\|x\|} a_{pi_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + y_{i_k} D_p u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{k+m-3} \left(y_p D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + \|x\| D_p D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right]
\end{aligned}$$

が得られる. このとき

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad & \sum_{p=1}^m y_p D_p u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\
 & \stackrel{(4.17)}{=} C_{k,m} \left[\frac{1}{\|x\|} \sum_{p=1}^m a_{pi_k} y_p u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + y_{i_k} \sum_{p=1}^m y_p D_p u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{k+m-3} \left(\sum_{p=1}^m y_p^2 D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + \|x\| \sum_{p=1}^m y_p D_p D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right] \\
 & \stackrel{(4.12), (4.14)}{\stackrel{\text{補題 4.1.3 (1), (2), (6)}}{=}} - \frac{C_{k,m}}{k+m-3} \left(D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + \|x\| \left(- \frac{1}{\|x\|} D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

となる. また

$$\begin{aligned}
 (4.19) \quad & \sum_{q=1}^m a_{pq} D_q u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\
 & \stackrel{(4.17)}{=} C_{k,m} \left[\frac{1}{\|x\|} \sum_{q=1}^m a_{pq} a_{qi_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + y_{i_k} \sum_{q=1}^m a_{pq} D_q u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{k+m-3} \left(\sum_{q=1}^m a_{pq} y_q D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \|x\| \sum_{q=1}^m a_{pq} D_q D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right] \\
 & \stackrel{(4.13), (4.15)}{\stackrel{\text{補題 4.1.3 (3), (6)}}{=}} C_{k,m} \left[\frac{1}{\|x\|} a_{pi_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + y_{i_k} D_p u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{k+m-3} D_p \left(\|x\| D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right] \\
 & \stackrel{\text{補題 4.1.3 (8)}}{=} C_{k,m} \left[D_p y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + y_{i_k} D_p u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{k+m-3} D_p \left(\|x\| D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right] \\
 & = C_{k,m} \left[D_p \left(y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) - \frac{1}{k+m-3} D_p \left(\|x\| D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right] \\
 & \stackrel{(4.16)}{=} D_p u_{i_1 \dots i_k}^{(k)}
 \end{aligned}$$

が得られる. 一方

$$\begin{aligned}
 (4.20) \quad \sum_{p=1}^m y_p D_p D_q u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} &= \sum_{p=1}^m y_p D_q D_p u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\
 &= D_q \left(\sum_{p=1}^m y_p D_p u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \right) - \sum_{p=1}^m D_q y_p D_p u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\
 &\stackrel{(4.18)}{=} \stackrel{\text{補題 4.1.3 (8)}}{=} - \frac{1}{\|x\|} \sum_{p=1}^m a_{qp} D_p u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\
 &\stackrel{(4.19)}{=} - \frac{1}{\|x\|} D_q u_{i_1 \dots i_k}^{(k)}
 \end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned}
 (4.21) \quad \sum_{q=1}^m a_{pq} D_q D_r u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} &= \sum_{q=1}^m a_{pq} D_r D_q u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\
 &= D_r \left(\sum_{q=1}^m a_{pq} D_q u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \right) - \sum_{q=1}^m D_r a_{pq} D_q u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\
 &\stackrel{(4.19)}{=} \stackrel{\text{補題 4.1.3 (11)}}{=} D_r D_p u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} + \frac{1}{\|x\|} \left(a_{rp} \sum_{q=1}^m y_q D_q u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} + y_p \sum_{q=1}^m a_{rq} D_q u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \right) \\
 &\stackrel{(4.18), (4.19)}{=} D_p D_r u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} + \frac{1}{\|x\|} y_p D_r u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\
 &\stackrel{\text{補題 4.1.3 (7)}}{=} \frac{1}{\|x\|} \left(\|x\| D_p D_r u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} + D_p \|x\| D_r u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \right) \\
 &= \frac{1}{\|x\|} D_p \left(\|x\| D_r u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \right)
 \end{aligned}$$

である. これら 4 つの等式 (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) は, $n = k$ のとき (1) ~ (4) が成り立つことを示している. 以上で, 数学的帰納法により, 命題 4.1.6 が証明された. $\square$

定理 4.1.1 について, (2) は, 補題 4.1.5 で示されたので, 残りの部分は, 以下の命題を示せば, 定理 4.1.1 の証明は終わる.

命題 4.1.7 $u^{(n)}$ は $\mathbb{R}^m - \{0\}$ 上で, 以下の 3 つの性質を満たす:

- (1) $\|u^{(n)}\| = 1$, すなわち, $u^{(n)}$ は, 球面に値をとる.
- (2) $\Delta u^{(n)} + \|Du^{(n)}\|^2 u^{(n)} = 0$
- (3) $\|Du^{(n)}\|^2 = \frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2}$

証明 n についての数学的帰納法を用いる. まず, 次の 2 つの補題を証明する. ただし, 以下の 2 つの補題における式番号は

- $(1)_{k-1}, (2)_{k-1}, (3)_{k-1}$ は, それぞれ, $n = k-1$ の場合の命題 4.1.7 の (1), (2), (3)
- $(1)_k, (2)_k, (3)_k$ は, それぞれ, $n = k$ の場合の命題 4.1.7 の (1), (2), (3)

に対応している.

補題 4.1.8 2つの仮定

$$(1)_{k-1} \quad \|u^{(k-1)}\| = 1$$

$$(3)_{k-1} \quad \|Du^{(k-1)}\|^2 = \frac{(k-1)(k+m-3)}{\|x\|^2}$$

から, 結論

$$(1)_k \quad \|u^{(k)}\| = 1$$

が導かれる.

補題 4.1.9 3つの仮定

$$(2)_{k-1} \quad \Delta u^{(k-1)} + \|Du^{(k-1)}\|^2 u^{(k-1)} = 0$$

$$(3)_{k-1} \quad \|Du^{(k-1)}\|^2 = \frac{(k-1)(k+m-3)}{\|x\|^2}$$

$$(1)_k \quad \|u^{(k)}\| = 1$$

から, 2つの結論

$$(2)_k \quad \Delta u^{(k)} + \|Du^{(k)}\|^2 u^{(k)} = 0$$

$$(3)_k \quad \|Du^{(k)}\|^2 = \frac{k(k+m-2)}{\|x\|^2}$$

が導かれる.

上記の2つの補題により,

命題 4.1.7 の3つの性質 (1), (2), (3) が
 $n = k - 1$ の場合に成り立てば, $n = k$ の場合にも成り立つこと

すなわち

$(1)_{k-1}, (2)_{k-1}, (3)_{k-1}$ から $(1)_k, (2)_k, (3)_k$ が導かれること

が容易にわかる. したがって, 数学的帰納法で証明を終えるには, 上記の2つの補題の証明とともに, $n = 1$ の場合に, この3つの性質 (1), (2), (3) が成り立つことを示せば十分である.

まず, $n = 1$ の場合に, 命題 4.1.7 の3つの性質 (1), (2), (3) が成り立つことを確かめよう. 定義式 (4.3) より $u_{i_1}^{(1)}(x) = y_{i_1}$ であり, したがって, 補題 4.1.3 (8) より $D_p u_{i_1}^{(1)}(x) = D_p y_{i_1} = \frac{1}{\|x\|} a_{pi_1}$ であ

る. このとき

$$\begin{aligned}\|u^{(1)}\|^2 &= \|y\|^2 = 1 \\ \|Du^{(1)}\|^2 &= \frac{1}{\|x\|^2} \|a\|^2 = \frac{m-1}{\|x\|^2} \\ \triangle u_{i_1}^{(1)} &= \triangle y_{i_1} \stackrel{\text{補題 4.1.3 (13)}}{=} -\frac{m-1}{\|x\|^2} y_{i_1} = -\|Du^{(1)}\|^2 u^{(1)}\end{aligned}$$

となる. 以上で, $n = 1$ の場合に, 命題 4.1.7 の 3 つの性質 (1), (2), (3) が確かめられた.

あとは, 補題 4.1.8, および, 補題 4.1.9 を確かめるだけである.

補題 4.1.8 の証明 定義式 (4.4) は, $n = k$ のとき

$$(4.22) \quad u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} = C_{k,m} \left(y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - \frac{1}{k+m-3} \|x\| D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right)$$

である. このとき

$$(4.23) \quad \|u^{(k)}\|^2 = C_{k,m}^2 \left(\|y\|^2 \|u^{(k-1)}\|^2 + \frac{1}{(k+m-3)^2} \|x\|^2 \|Du^{(k-1)}\|^2 \right),$$

となる. ここで, $u^{(k-1)}$ と $D_{i_k} u^{(k-1)}$ が直交すること, すなわち,

$$u^{(k-1)} \cdot D_{i_k} u^{(k-1)} = \frac{1}{2} D_{i_k} \|u^{(k-1)}\|^2 \stackrel{(1)_{k-1}}{=} 0$$

であることを用いた. このとき

$$\begin{aligned}\|u^{(k)}\|^2 &\stackrel{(4.23)}{=} C_{k,m}^2 \left(\|y\|^2 \|u^{(k-1)}\|^2 + \frac{1}{(k+m-3)^2} \|x\|^2 \|Du^{(k-1)}\|^2 \right) \\ &\stackrel{\substack{(4.5), \text{補題 4.1.3 (1)} \\ \text{仮定 (1)_{k-1}, (3)_{k-1}}}}{=} \left(\sqrt{\frac{k+m-3}{2k+m-4}} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{(k+m-3)^2} (k-1)(k+m-3) \right) \\ &= \frac{k+m-3}{2k+m-4} \left(1 + \frac{k-1}{k+m-3} \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

となり, 結論 (1)_k が得られる. $\square$

補題 4.1.9 の証明 まず, 上記の定義式 (4.22) を用いて $\Delta u_{i_1 \dots i_k}^{(k)}$ を計算する.

$$\begin{aligned}
\Delta u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} &= \sum_{p=1}^m D_p D_p u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\
&\stackrel{(4.22)}{=} C_{k,m} \left\{ (\Delta y_{i_k}) u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + 2 \sum_{p=1}^m D_p y_{i_k} D_p u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + y_{i_k} \Delta u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{k+m-3} \left((\Delta \|x\|) D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \sum_{p=1}^m D_p \|x\| D_p D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + \|x\| D_{i_k} \Delta u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right\} \\
&\stackrel{\substack{\text{補題 4.1.3 の} \\ (2),(7),(8),(10),(13) \\ \text{仮定 (2)}_{k-1}, (3)_{k-1}}}{=} C_{k,m} \left\{ - \frac{m-1}{\|x\|^2} y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + \frac{2}{\|x\|} \sum_{p=1}^m a_{i_k p} D_p u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(k-1)(k+m-3)}{\|x\|^2} y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{k+m-3} \left(\frac{m-1}{\|x\|} D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + 2 \sum_{p=1}^m y_p D_p D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (k-1)(k+m-3) \|x\| D_{i_k} \left(\frac{1}{\|x\|^2} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right) \right\} \\
&\stackrel{\substack{\text{補題 4.1.3 (7)} \\ \text{命題 4.1.6 (2),(3)}}}{=} C_{k,m} \left\{ - \frac{m-1}{\|x\|^2} y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + \frac{2}{\|x\|} D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(k-1)(k+m-3)}{\|x\|^2} y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{k+m-3} \left(\frac{m-1}{\|x\|} D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - \frac{2}{\|x\|} D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2(k-1)(k+m-3)}{\|x\|^2} y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(k-1)(k+m-3)}{\|x\|} D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right\} \\
&= C_{k,m} \left\{ - \frac{(m-1) + (k-1)(k+m-3) + 2(k-1)}{\|x\|^2} y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{k+m-3} \frac{2(k+m-3) - (m-1) + 2 + (k-1)(k+m-3)}{\|x\|} D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x) \right\} \\
&= C_{k,m} \left\{ - \frac{k(k+m-2)}{\|x\|^2} y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} + \frac{1}{k+m-3} \frac{k(k+m-2)}{\|x\|} D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x) \right\} \\
&= - \frac{k(k+m-2)}{\|x\|^2} C_{k,m} \left(y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - \frac{1}{k+m-3} \|x\| D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \\
&\stackrel{(4.22)}{=} - \frac{k(k+m-2)}{\|x\|^2} u^{(k)}
\end{aligned}$$

よって

$$(4.24) \quad \Delta u^{(k)} = -\frac{k(k+m-2)}{\|x\|^2} u^{(k)}$$

である. 一方, 仮定 $(1)_k$ により, $u^{(k)} \cdot D_j u^{(k)} = \frac{1}{2} D_j \|u^{(k)}\|^2 = 0$ となり, したがって

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^m D_j (u^{(k)} \cdot D_j u^{(k)}) = \sum_{j=1}^m D_j u^{(k)} \cdot D_j u^{(k)} + u^{(k)} \cdot \sum_{j=1}^m D_j D_j u^{(k)} \\ &= \|Du^{(k)}\|^2 + u^{(k)} \cdot \Delta u^{(k)} \end{aligned}$$

すなわち

$$(4.25) \quad \|Du^{(k)}\|^2 + u^{(k)} \cdot \Delta u^{(k)} = 0$$

である. ゆえに

$$\|Du^{(k)}\|^2 \stackrel{(4.25)}{=} -u^{(k)} \cdot \Delta u^{(k)} \stackrel{(4.24)}{=} \frac{k(k+m-2)}{\|x\|^2} \|u^{(k)}\|^2 \stackrel{\text{仮定}(1)_k}{=} \frac{k(k+m-2)}{\|x\|^2}$$

となり, 結論 $(3)_k$ が得られた. このとき, $(3)_k$ および (4.24) から結論 $(2)_k$ が導かれる. 以上で, 補題 4.1.9 の証明が終わった. $\square$

4.2 Harmonic maps としての不安定性

前節で構成された harmonic map $u^{(n)}$ は, $n = 1$ の場合は radial map であるが, $m \geq 3$ の場合 (写像の定義域の次元が 3 次元以上の場合) は,

the radial map $u^{(1)}$ は harmonic map として安定である

のみならず,

harmonic map のエネルギーの最小値を与える写像になっている

ことが知られている ([17]). 一方, $n \geq 2$ の場合は,

harmonic map $u^{(n)}$ ($n \geq 2$) は, ほとんどの場合, 不安定である

ことがわかる. 実際, この節では, 次のような不安定性の結果を与えよう.

定理 4.2.1 (harmonic maps としての不安定性 [34]) $m \geq 3$ かつ $n \geq 2$ であるとする. このとき $n \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}(m-1)$ であるならば, 写像 $u^{(n)}$ は harmonic map として不安定 (unstable) である.

定理 4.2.1 により, 原点に特異点をもつ, 球面への不安定な harmonic maps の多くの例が得られる. 実際, 定理 4.2.1 により, 例えば, $m = 3$ かつ $n = 2$ の場合, 写像

$$\begin{aligned} u^{(2)} : \quad \mathbb{R}^3 - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9 \\ \cup &\quad \cup \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto u^{(2)}(x) \end{aligned}$$

で

$$u^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{x_1^2}{\|x\|^2} - \frac{1}{3}, \frac{x_1x_2}{\|x\|^2}, \frac{x_1x_3}{\|x\|^2}, \frac{x_2x_1}{\|x\|^2}, \frac{x_2^2}{\|x\|^2} - \frac{1}{3}, \frac{x_2x_3}{\|x\|^2}, \frac{x_3x_1}{\|x\|^2}, \frac{x_3x_2}{\|x\|^2}, \frac{x_3^2}{\|x\|^2} - \frac{1}{3} \right)$$

により定まるものは, 不安定な harmonic map であることがわかる.

以下, この節では, 定理 4.2.1 を証明する. そのための準備として, まずは, harmonic maps についての基本事項, 特に, harmonic maps の安定性について, 思い起こそう.

多様体 M から多様体 N への smooth map u に対して, 微分写像 du の L^2 -ノルム

$$E(u) = \int_M \|du\|^2 dv_g$$

を考える. ここで, dv_g は, リーマン多様体 (M, g) の体積要素である. Harmonic map theory (調和写像論) では, $\|du\|^2$ をエネルギー密度 (energy density) とよび, この積分量 $E(u)$ をエネルギー (energy) とよんでいる. Smooth map u がエネルギー E について stationary であるとき, u は harmonic map とよばれる. ここで, u がエネルギー E について **stationary** であるとは, u におけるエネルギー E の第一変分

$$(\delta E)(u)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d}{dt} E(u_t) \right|_{t=0}$$

が, compact support をもつ u の任意の変分 u_t に対してゼロになっていることをいう. ただし, $u_t(x) = U(x, t)$ で, smooth map

$$U : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

は, compact support をもつ u の変分である, すなわち, $U(x, 0) = u(x)$ を満たす. また, $X = \left. dU \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right|_{t=0}$ は, 変分ベクトル場 (variation vector field) とよばれる. u が stationary であることは, エネルギー E に対する Euler-Lagrange 方程式, すなわち, **harmonic map** の方程式 (**harmonic map equation**)

$$\sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} du)(e_i) = 0 \quad \left(\text{すなわち, } \operatorname{tr}(\nabla du) = 0 \right)$$

を満たすことにほかならない. ここで, e_i ($i = 1, \dots, m$) は M 上の局所的な正規直交フレームであり, また ∇ は bundle $TM \otimes f^{-1}TN$ 上の connection であるとする.

Harmonic map u が **harmonic map** として安定 (stable) であるとは, compact support をもつすべての変分 u_t について, 第二変分

$$(\delta^2 E)(u)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2}{dt^2} E(u_t) \right|_{t=0}$$

が非負であることをいう. その否定として, Harmonic map u が **harmonic map** として不安定 (unstable) であるとは, compact support をもつある変分 u_t について, 第二変分

$$(\delta^2 E)(u)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2}{dt^2} E(u_t) \right|_{t=0}$$

が負になることをいう.

この節の状況設定としては, $M = \mathbb{R}^m - \{0\}$ であり, また $N = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ であるので, 写像 u は

$$x = (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow u(x) = (u_1(x), \dots, u_{n+1}(x))$$

と書けて, $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} u_i(x)^2 = 1$ を満たしている. そこで, compact support をもつ任意の関数 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m - \{0\}, \mathbb{R}^{n+1})$ をとり, u の変分 u_t を

$$u_t(x) = \frac{u(x) + t\varphi(x)}{\|u(x) + t\varphi(x)\|}$$

とおく. このとき

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u_t(x) \right|_{t=0} = \varphi(x) - (\varphi(x) \cdot u(x))u(x),$$

となる. ただし $\cdot$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の内積である. このとき, 第一変分は

$$\begin{aligned} (4.26) \quad (\delta E)(u)(\varphi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d}{dt} E(u_t) \right|_{t=0} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} (\langle Du, D\varphi \rangle - \|Du\|^2 u \cdot \varphi) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} (\Delta u + \|Du\|^2 u) \cdot \varphi dx \end{aligned}$$

となる (第一変分公式). ここで, $Du = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n+1}$ であり, また, $dx = dx_1 \cdots dx_m$ である. このとき, 第一変分公式 (4.26) により

$$u \text{ が harmonic map である} \iff \Delta u + \|Du\|^2 u = 0$$

(harmonic map の方程式)

となる. また, 直交条件

$$\varphi \cdot u = 0$$

を満たす変分 u_t に対して, 第二変分は

$$\begin{aligned} (4.27) \quad (\delta^2 E)(u)(\varphi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2}{dt^2} E(u_t) \right|_{t=0} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} (\|D\varphi\|^2 - \|Du\|^2 \|\varphi\|^2) dx \end{aligned}$$

となる (第二変分公式).

定理 4.2.1 の証明では, 特別な関数 φ (後に (4.36) で与える関数) をとり, この関数を用いた変分について, 第二変分 $(\delta^2 E)(u)(\varphi)$ を計算し, $n \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}(m-1)$ であれば, それが負になることを示す.

定理 4.2.1 の証明に必要な補題を準備しておく:

補題 4.2.2 $n \geq 2$ となる任意の正の整数 n について

$$(4.28) \quad \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = 0$$

である.

証明 数学的帰納法を用いる. まず, $n = 2$ の場合に (4.28) を示す. $n = 2$ の場合の定義式 (4.4) より

$$\begin{aligned} u_{i_1 i_2}^{(2)} &\stackrel{(4.4)}{=} C_{m,2} \left(y_{i_2} u_{i_1}^{(1)} - \frac{1}{m-1} \|x\| D_{i_2} u_{i_1}^{(1)} \right) \\ &\stackrel{(4.3), \text{補題 4.1.3 (8)}}{=} C_{m,2} \left(y_{i_1} y_{i_2} - \frac{1}{m-1} a_{i_1 i_2} \right) \end{aligned}$$

である. したがって

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 i_2}^{(2)} &= C_{m,2} \left(\|y\|^2 - \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m a_{ii} \right) \\ &\stackrel{\text{補題 4.1.3 (1), (4)}}{=} 0 \end{aligned}$$

となり, $n = 2$ の場合の式 (4.28) が得られた.

次に, 数学的帰納法の仮定として, $n = k-1$ ($k \geq 3$) の場合に (4.28) が成り立つ, すなわち,

$$(4.29) \quad \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} = 0$$

であると仮定する. $n = k$ の場合の定義式 (4.4) は

$$(4.30) \quad u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} = C_{k,m} \left(y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - \frac{1}{k+m-3} \|x\| D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)}(x) \right)$$

であるから

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \\ &\stackrel{(4.30)}{=} C_{k,m} \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} \left(y_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - \frac{1}{k+m-3} \|x\| D_{i_k} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \\ &= C_{k,m} \left\{ y_{i_k} \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - \frac{1}{k+m-3} \|x\| D_{i_k} \left(\sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \right) \right\} \\ &\stackrel{(4.29)}{=} 0 \end{aligned}$$

となり, $n = k$ の場合も (4.28) が成り立つ. 以上から, 数学的帰納法により, $n \geq 2$ であるすべての正の整数 n について (4.28) が成り立つことが示された. $\square$

さて, この節の目的である定理 4.2.1 の証明に入ろう. まずは記号から始める. 記号 $\mathbb{B}_r$ を m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ における, 原点が中心で, 半径が r の開球とする:

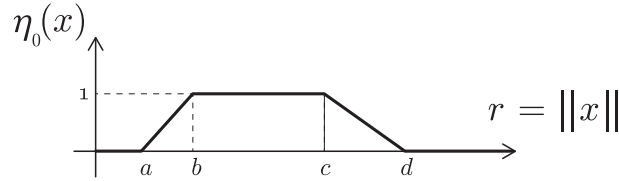
$$\mathbb{B}_r = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < r \}$$

正の実数 a, b, c, d を

$$0 < a < b < c < d$$

となるようにとっておく. $\mathbb{R}^m - \{0\}$ 上の連続関数 $\eta_0(x)$ を, 以下のように定める:

$$(4.31) \quad \eta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in \mathbb{B}_a - \{0\} \\ \frac{\|x\| - a}{(b - a)} & \text{for } x \in \mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a \\ 1 & \text{for } x \in \mathbb{B}_c - \mathbb{B}_b \\ \frac{d - \|x\|}{d - c} & \text{for } x \in \mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}^m - \mathbb{B}_d \end{cases}$$



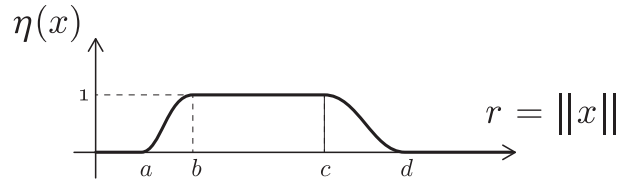
任意の正の実数 ε をとる. この ε は, 後で十分小さくとる. 連続関数 $\eta_0(x)$ を smooth な関数 $\eta(x)$ で近似する. くわしくは, smooth な関数 $\eta(x)$ を次の 4 つの条件を満たすようにとっておく:

$$(4.32) \quad \eta(x) \begin{cases} = 0 & \text{for } x \in \mathbb{B}_a - \{0\} \\ \in [0, 1] & \text{for } x \in \mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a \\ = 1 & \text{for } x \in \mathbb{B}_c - \mathbb{B}_b \\ \in [0, 1] & \text{for } x \in \mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c \\ = 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}^m - \mathbb{B}_d \end{cases}$$

$$(4.33) \quad |\eta(x) - \eta_0(x)| < \varepsilon \text{ for } x \in \mathbb{R}^m - \{0\}$$

$$(4.34) \quad \|D\eta\| \leq \frac{1 + \varepsilon}{(b - a)} \text{ for } x \in \mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a$$

$$(4.35) \quad \|D\eta\| \leq \frac{1 + \varepsilon}{(d - c)} \text{ for } x \in \mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c$$



関数 η は, η をかけることによって, $\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_a$ で cut する cut-off 関数である. 定義より $\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_a$ の外部では $\eta(x) = 0$ であるので, 関数 $\eta(x)$ の support は $\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_a$ の閉包に含まれ, したがって, 関数 $\eta(x)$ の support は compact であることに注意しておく.

記号の簡単のために $u := u^{(n)}$ とおく. $n \geq 2$ の場合に, compact support をもつ関数 $\varphi(x) = (\varphi_{i_1 \dots i_n}(x))_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m}$ を

$$(4.36) \quad \varphi_{i_1 \dots i_n}(x) = \eta(x) \delta_{i_1 i_2} \quad (x \in \mathbb{R}^m - \{0\})$$

と定義する. ここで

関数 φ の定義には, “ $n \geq 2$ ” という条件が必要である

ことに注意しておく. 実際, $\varphi_{i_1 \dots i_n}$ の定義において, $\delta_{i_1 i_2}$ は2つの添え字 i_1 および i_2 を必要とするからである.

関数 φ に関する基本的性質をあげておく:

補題 4.2.3

- (1) $\varphi \cdot u = 0$
- (2) $\|\varphi\|^2 = m^{n-1} \eta^2$
- (3) $\|D\varphi\|^2 = m^{n-1} \|D\eta\|^2$
- (4) $D_i u \cdot D_j \varphi = 0$
- (5) $D_i \varphi \cdot D_j \varphi = m^{n-1} D_i \eta D_j \eta$

証明

(1):

$$\begin{aligned}
 \varphi \cdot u &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m \varphi_{i_1 \dots i_n} u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \\
 &\stackrel{(4.36)}{=} \eta \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m \left(\sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \right) \\
 &\stackrel{\text{補題 4.2.2}}{=} 0
 \end{aligned}$$

(2):

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|^2 &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m (\varphi_{i_1 \dots i_n})^2 \\
 &\stackrel{(4.36)}{=} \eta^2 \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2}^2 \\
 &= m^{n-1} \eta^2
 \end{aligned}$$

(3): (4.36) により

$$(4.37) \quad D_i \varphi_{i_1 \dots i_n}(x) = D_i \eta(x) \delta_{i_1 i_2}$$

である. このとき

$$\begin{aligned}
 \|D\varphi\|^2 &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m (D_i \varphi_{i_1 \dots i_n})^2 \\
 &\stackrel{(4.37)}{=} \sum_{i=1}^m (D_i \eta)^2 \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2}^2 \\
 &= m^{n-1} \|D\eta\|^2
 \end{aligned}$$

となる.

(4): (4.37) により

$$\begin{aligned}
 D_i u \cdot D_j \varphi &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m D_i u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} D_j \varphi_{i_1 \dots i_n} \\
 &= \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m D_i \left(\sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \right) D_j \eta \\
 &\stackrel{\text{補題 4.2.2}}{=} 0
 \end{aligned}$$

となる.

(5): (4.37) により

$$\begin{aligned}
 D_i \varphi \cdot D_j \varphi &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m D_i \varphi_{i_1 \dots i_n} D_j \varphi_{i_1 \dots i_n} \\
 &= D_i \eta D_j \eta \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2}^2 \\
 &= m^{n-1} D_i \eta D_j \eta
 \end{aligned}$$

となる. 以上で, 補題 4.2.3 の証明が終わった. $\square$

変分

$$(4.38) \quad u_t(x) = \frac{u(x) + t\varphi(x)}{\|u(x) + t\varphi(x)\|}$$

に対する第二変分は

$$\begin{aligned}
 (4.39) \quad (\delta^2 E)(u)(\varphi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2}{dt^2} E(u_t) \right|_{t=0} \\
 &\stackrel{(4.27)}{=} \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left(\|D\varphi\|^2 - \|Du\|^2 \|\varphi\|^2 \right) dx_1 \dots dx_m \\
 &\stackrel{\text{定理 4.1.1 (3)} \atop \text{補題 4.2.3 (2), (3)}}{=} 2m^{n-1} \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left(\|D\eta\|^2 - \frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2} \eta^2 \right) dx_1 \dots dx_m \\
 &= 2m^{n-1} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \left(\|D\eta\|^2 - \frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2} \eta^2 \right) dx_1 \dots dx_m \\
 &\quad + 2m^{n-1} \int_{\mathbb{B}_c - \mathbb{B}_b} \left(\|D\eta\|^2 - \frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2} \eta^2 \right) dx_1 \dots dx_m \\
 &\quad + 2m^{n-1} \int_{\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c} \left(\|D\eta\|^2 - \frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2} \eta^2 \right) dx_1 \dots dx_m \\
 &=: I_1 + I_2 + I_3
 \end{aligned}$$

となる. 最後の等式では, 最右辺の 3 つの項をそれぞれ, I_1, I_2, I_3 とおいた. (4.32) より $\mathbb{B}_c - \mathbb{B}_b$ 上では $\eta = 1$ であることから

$$(4.40) \quad I_2 = -2m^{n-1} \int_{\mathbb{B}_c - \mathbb{B}_b} \frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2} dx_1 \dots dx_m < 0$$

となる. 次に I_1 を評価する. (4.33) により, $\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a$ 上で $\eta(x) \geq \eta_0(x) - \varepsilon$ であり, したがって

$$(4.41) \quad \eta(x)^2 \geq (\max\{\eta_0(x) - \varepsilon, 0\})^2$$

となる. $\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a$ 上では

$$\eta_0(x) \geq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\|x\| - a}{b - a} \geq \varepsilon \Leftrightarrow \|x\| \geq a + \varepsilon(b - a)$$

であるので

$$(4.42) \quad \eta_0(x) \geq \varepsilon \quad \text{for } x \in \mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}$$

$$(4.43) \quad \eta_0(x) \leq \varepsilon \quad \text{for } x \in \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))} - \mathbb{B}_a$$

であることがわかる.

このようにして (4.41), (4.42) および (4.43) により

$$(4.44) \quad \eta(x)^2 \geq (\eta_0(x) - \varepsilon)^2 \quad \text{for } x \in \mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}$$

$$(4.45) \quad \eta(x)^2 \geq 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))} - \mathbb{B}_a$$

となる. このとき

$$(4.46)$$

$$\begin{aligned} I_1 &\stackrel{(4.34)}{\leq} 2m^{n-1} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \frac{(1+\varepsilon)^2}{(b-a)^2} dx_1 \cdots dx_m - 2m^{n-1} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2} \eta^2 dx_1 \cdots dx_m \\ &\stackrel{(4.44), (4.45)}{\leq} \frac{2m^{n-1}(1+\varepsilon)^2}{(b-a)^2} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} dx_1 \cdots dx_m \\ &\quad - 2nm^{n-1}(n+m-2) \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}} \frac{1}{\|x\|^2} (\eta_0 - \varepsilon)^2 dx_1 \cdots dx_m \\ &\stackrel{(4.31)}{=} \frac{2m^{n-1}(1+\varepsilon)^2}{(b-a)^2} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} dx_1 \cdots dx_m \\ &\quad - 2nm^{n-1}(n+m-2) \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}} \frac{1}{\|x\|^2} \left(\frac{\|x\| - a}{b-a} - \varepsilon \right)^2 dx_1 \cdots dx_m \\ &= \frac{2m^{n-1}(1+\varepsilon)^2}{(b-a)^2} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} dx_1 \cdots dx_m \\ &\quad - \frac{2nm^{n-1}(n+m-2)}{(b-a)^2} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}} \frac{1}{\|x\|^2} \left(\|x\| - (a + \varepsilon(b-a)) \right)^2 dx_1 \cdots dx_m \end{aligned}$$

となる. ここで, $m \geq 3$ であることに注意しながら, $\mathbb{R}^m - \{0\}$ 上の極座標を用いて計算すると, $\text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1})$ を $m-1$ 次元球面 $\mathbb{S}^{m-1}$ の体積として

(4.47)

$$\begin{aligned}
& \text{(4.46) の最右辺} \\
= & \frac{2m^{n-1}(1+\varepsilon)^2}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \int_a^b \rho^{m-1} d\rho \\
& - \frac{2nm^{n-1}(n+m-2)}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \int_{(a+\varepsilon(b-a))}^b \frac{1}{\rho^2} \left(\rho - (a+\varepsilon(b-a)) \right)^2 \rho^{m-1} d\rho \\
= & \frac{2m^{n-1}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[(1+\varepsilon)^2 \int_a^b \rho^{m-1} d\rho \right. \\
& - n(n+m-2) \\
& \quad \times \left\{ \int_{(a+\varepsilon(b-a))}^b \rho^{m-1} d\rho - 2(a+\varepsilon(b-a)) \int_{(a+\varepsilon(b-a))}^b \rho^{m-2} d\rho \right. \\
& \quad \left. \left. + (a+\varepsilon(b-a))^2 \int_{(a+\varepsilon(b-a))}^b \rho^{m-3} d\rho \right\} \right] \\
= & \frac{2m^{n-1}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} (b^m - a^m) \right. \\
& - n(n+m-2) \left\{ \frac{1}{m} (b^m - (a+\varepsilon(b-a))^m) \right. \\
& \quad - \frac{2}{m-1} (a+\varepsilon(b-a)) (b^{m-1} - (a+\varepsilon(b-a))^{m-1}) \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{m-2} (a+\varepsilon(b-a))^2 (b^{m-2} - (a+\varepsilon(b-a))^{m-2}) \right\} \right] \\
= & \frac{2m^{n-1}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} (b^m - a^m) \right. \\
& - n(n+m-2) \left\{ \frac{1}{m} b^2 - \frac{2}{m-1} b(a+\varepsilon(b-a)) + \frac{1}{m-2} (a+\varepsilon(b-a))^2 \right\} b^{m-2} \\
& \quad \left. + n(n+m-2) \left(\frac{1}{m} - \frac{2}{m-1} + \frac{1}{m-2} \right) (a+\varepsilon(b-a))^m \right]
\end{aligned}$$

$A=b$ および
 $B=a+\varepsilon(b-a)$
 において
 後述の補題 4.2.4
 の (1), (2) より

$$\begin{aligned}
& \frac{2m^{n-1}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \\
& \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} (b^m - a^m) \right. \\
& \quad - \frac{n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} \left\{ m(m-1)(1-\varepsilon)^2(b-a)^2 \right. \\
& \quad \left. - 2mb(1-\varepsilon)(b-a) + 2b^2 \right\} b^{m-2} \\
& \quad \left. + \frac{2n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} (a+\varepsilon(b-a))^m \right]
\end{aligned}$$

となる. 上記の変形で, 最後の等式において, 後で出てくる補題 4.2.4 の (1), (2) を $A = b$ and $B = a + \varepsilon(b - a)$ として適用した. したがって, (4.46) および (4.47) より

$$(4.48) \quad I_1 \leq \frac{2m^{n-1}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \\ \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} (b^m - a^m) - \frac{n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} \left\{ (1-\varepsilon)^2 m(m-1)(b-a)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1-\varepsilon)mb(b-a) + 2b^2 \right\} b^{m-2} + \frac{2n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} (a + \varepsilon(b-a))^m \right]$$

となる. このとき, 十分大きい正の実数 α をとり, $b = (\alpha + 1)a$ とおく. まず, $b - a = \alpha a$, および, $(\alpha + 1)^m = \alpha^m + O(\alpha^{m-1})$ であることに注意しておく. ここで $O(\cdot)$ は Landau の記号, すなわち, $O(\alpha^\ell)$ は, $\frac{O(\alpha^\ell)}{\alpha^\ell}$ が $\alpha \rightarrow \infty$ のとき, 有界であるような項とする. このとき (4.48) より

$$(4.49) \quad I_1 \leq 2m^{n-1} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \\ \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} \frac{(\alpha+1)^m - 1}{\alpha^2} a^{m-2} - \frac{n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} \left\{ (1-\varepsilon)^2 m(m-1) \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1-\varepsilon)m \frac{\alpha+1}{\alpha} + \frac{2(\alpha+1)^2}{\alpha^2} \right\} (\alpha+1)^{m-2} a^{m-2} + \frac{2n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} \frac{(1+\varepsilon\alpha)^m}{\alpha^2} a^{m-2} \right] \\ = 2m^{n-1} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) a^{m-2} \\ \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} \alpha^{m-2} - \frac{n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} \left\{ (1-\varepsilon)^2 m(m-1) - 2(1-\varepsilon)m + 2 \right\} \alpha^{m-2} \right. \\ \left. + \frac{2n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} \frac{(1+\varepsilon\alpha)^m}{\alpha^2} + O(\alpha^{m-3}) \right]$$

となる. そこで, 正の実数 ε を

$$(4.50) \quad \varepsilon < \frac{1}{\alpha}$$

を満たすように, 十分小さくとる. このとき $\varepsilon\alpha^{m-2} = O(\alpha^{m-3})$ であり, また, $\varepsilon^2\alpha^{m-2} = O(\alpha^{m-4})$ である. さらに

$$\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} \alpha^{m-2} = \frac{1}{m} \alpha^{m-2} + O(\alpha^{m-3}),$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ (1-\varepsilon)^2 m(m-1) - 2(1-\varepsilon)m + 2 \right\} \alpha^{m-2} \\
&= \left\{ m(m-1) - 2m + 2 \right\} \alpha^{m-2} + O(\alpha^{m-3}) \\
&= (m-1)(m-2) \alpha^{m-2} + O(\alpha^{m-3})
\end{aligned}$$

であり

$$\frac{2n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} \frac{(1+\varepsilon\alpha)^m}{\alpha^2} = O(\alpha^{-2})$$

である. このとき, 十分大きい α に対して

$$\begin{aligned}
(4.51) \quad & I_1 \\
& \leq 2m^{n-1} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) a^{m-2} \left\{ \left(\frac{1}{m} - \frac{n(n+m-2)}{m} \right) \alpha^{m-2} + O(\alpha^{m-3}) \right\} \\
& = -2m^{n-2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) a^{m-2} \left\{ \left((n^2-1) + (m-2)n \right) \alpha^{m-2} + O(\alpha^{m-3}) \right\} \\
& < 0
\end{aligned}$$

となる. ここで, 仮定 $m \geq 3$ および $n \geq 2$ により $(n^2-1) + (m-2)n \geq 5 > 0$ であることを用いた.

同様に, $\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c$ 上で

$$\eta_0(x) \geq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{d - \|x\|}{d - c} \geq \varepsilon \Leftrightarrow \|x\| \leq d - \varepsilon(d - c)$$

であるので

$$(4.52) \quad \eta(x)^2 \geq (\eta_0(x) - \varepsilon)^2 \quad \text{for } x \in \mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))} - \mathbb{B}_c$$

$$(4.53) \quad \eta(x)^2 \geq 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{B}_d - \mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))}$$

となる. このとき

$$\begin{aligned}
(4.54) \quad I_3 & \stackrel{(4.35)}{=} \stackrel{(4.52)}{=} \stackrel{(4.53)}{\leq} 2m^{n-1} \int_{\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c} \frac{(1+\varepsilon)^2}{(d-c)^2} dx_1 \cdots dx_m \\
& \quad - 2m^{n-1} \int_{\mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))} - \mathbb{B}_c} \frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2} (\eta_0 - \varepsilon)^2 dx_1 \cdots dx_m \\
(4.31) \quad & \stackrel{=}{=} \frac{2m^{n-1}(1+\varepsilon)^2}{(d-c)^2} \int_{\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c} dx_1 \cdots dx_m \\
& \quad - 2nm^{n-1}(n+m-2) \int_{\mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))} - \mathbb{B}_c} \frac{1}{\|x\|^2} \left(\frac{d-\|x\|}{d-c} - \varepsilon \right)^2 dx_1 \cdots dx_m \\
& = \frac{2m^{n-1}(1+\varepsilon)^2}{(d-c)^2} \int_{\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c} dx_1 \cdots dx_m \\
& \quad - \frac{2nm^{n-1}(n+m-2)}{(d-c)^2} \int_{\mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))} - \mathbb{B}_c} \frac{1}{\|x\|^2} \left((d-\varepsilon(d-c)) - \|x\| \right)^2 dx_1 \cdots dx_m \\
& = \frac{2m^{n-1}(1+\varepsilon)^2}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \int_c^d \rho^{m-1} d\rho \\
& \quad - \frac{2nm^{n-1}(n+m-2)}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \int_c^{(d-\varepsilon(d-c))} \frac{1}{\rho^2} \left((d-\varepsilon(d-c)) - \rho \right)^2 \rho^{m-1} d\rho \\
& = \frac{2m^{n-1}}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \\
& \quad \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} (d^m - c^m) \right. \\
& \quad \quad - n(n+m-2) \left\{ \frac{1}{m} \left((d-\varepsilon(d-c))^m - c^m \right) \right. \\
& \quad \quad \quad - \frac{2}{m-1} \left((d-\varepsilon(d-c))^{m-1} - c^{m-1} \right) (d-\varepsilon(d-c)) \\
& \quad \quad \quad \left. + \frac{1}{m-2} \left((d-\varepsilon(d-c))^{m-2} - c^{m-2} \right) (d-\varepsilon(d-c))^2 \right\} \Big] \\
& = \frac{2m^{n-1}}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \\
& \quad \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} (d^m - c^m) \right. \\
& \quad \quad - n(n+m-2) \left(\frac{1}{m} - \frac{2}{m-1} + \frac{1}{m-2} \right) (d-\varepsilon(d-c))^m \\
& \quad \quad + n(n+m-2) \left\{ \frac{1}{m} c^2 - \frac{2}{m-1} c(d-\varepsilon(d-c)) \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. + \frac{1}{m-2} (d-\varepsilon(d-c))^2 \right\} c^{m-2} \right]
\end{aligned}$$

$A=c$ および
 $B=d-\varepsilon(d-c)$
 において
 後述の補題 4.2.4
 の (1), (2) より

$$\begin{aligned} & \frac{2m^{n-1}}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \\ & \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m} (d^m - c^m) - \frac{2n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} (d - \varepsilon(d-c))^m \right. \\ & \quad + \frac{n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} \left\{ (1-\varepsilon)^2 m(m-1)(d-c)^2 \right. \\ & \quad \left. \left. + 2(1-\varepsilon)mc(d-c) + 2c^2 \right\} c^{m-2} \right] \end{aligned}$$

となる. 十分大きい正の実数 β をとり, さらに, $\varepsilon < \frac{1}{\beta}$ を満たす十分小さい正の実数 ε をとる. また $d = (\beta+1)c$ とおく. このとき, $d-c = \beta c$ に注意すると, (4.54) により

$$\begin{aligned} I_3 & \leq 2m^{n-1} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) c^{m-2} \left\{ \frac{1}{m} \beta^{m-2} - \frac{2n(n+m-2)}{m(m-1)(m-2)} \beta^{m-2} + O(\beta^{m-3}) \right\} \\ & = - \frac{2m^{n-2}}{(m-1)(m-2)} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) c^{m-2} \\ & \quad \times \left\{ \left(2n^2 + 2(m-2)n - (m-1)(m-2) \right) \beta^{m-2} + O(\beta^{m-3}) \right\} \end{aligned}$$

となる. そこで, 後述の補題 4.2.5 を用いると, 十分大きい β に対して

$$(4.55) \quad n \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} (m-1) \quad \text{ならば} \quad I_3 < 0$$

となることがわかる. 以上から, (4.40), (4.51), (4.55) により, α および β を十分大きくとると, $n > \frac{\sqrt{3}-1}{2} (m-1)$ に対して

$$(\delta^2 E)(u)(\varphi) < 0$$

となるので, 定理 4.2.1 が示された. $\square$

ここで定理 4.2.1 の証明で用いられた次の 2 つの補題を与える. 補題 4.2.4 は, 単純な計算で確かめられるので, 証明は省略する. 補題 4.2.5 のみを証明する.

補題 4.2.4

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{m} - \frac{2}{m-1} + \frac{1}{m-2} = \frac{2}{m(m-1)(m-2)} \\ (2) \quad & \frac{1}{m} A^2 - \frac{2}{m-1} AB + \frac{1}{m-2} B^2 \\ & = \frac{1}{m(m-1)(m-2)} \left\{ m(m-1)(A-B)^2 - 2mA(A-B) + 2A^2 \right\} \end{aligned}$$

補題 4.2.5 $x \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}(m-1)$ であるならば

$$2x^2 + 2(m-2)x - (m-1)(m-2) > 0$$

が成り立つ.

補題 4.2.5 の証明 $\omega = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ とおく.

$$(4.56) \quad 2\omega^2 + 2\omega - 1 = 0.$$

であることに注意しておく. さらに

$$f(x) = 2x^2 + 2(m-2)x - (m-1)(m-2)$$

とおくと, $x > 0$ であるならば

$$f'(x) = 4x + 2(m-2) = 2(2x + m - 2) > 0$$

である. したがって, $f(x)$ は $\{x > 0\}$ において単調増加であり, 特に, $x \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}(m-1)$ であるならば

$$f(x) \geq f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(m-1)\right)$$

となる. この不等式の右辺は, 計算すると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(m-1)\right) &= f((m-1)\omega) \\ &= 2(m-1)^2\omega^2 + 2(m-1)(m-2)\omega - (m-1)(m-2) \\ &= (m-1)(m-2)(2\omega^2 + 2\omega - 1) + 2(m-1)\omega^2 \\ &\stackrel{(4.56)}{=} 2(m-1)\omega^2 > 0 \end{aligned}$$

であるから, $f(x) > 0$ であることがわかる. $\square$

この節の最後に, 定理 4.2.1 についての2つの注意を与えておく.

注意 4.2.6 定理 4.2.1 における写像 $u^{(n)}$ は $x = 0$ で特異点をもつが, $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$) からの **weakly harmonic map** である. ここで

$$\begin{aligned} u \text{ が } \mathbb{R}^m \text{ からの weakly harmonic map} &\stackrel{\text{定義}}{\iff} u \in L_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathbb{S}^{m^n-1}) \text{ であって} \\ &\int_{\mathbb{R}^m} (\langle Du, D\varphi \rangle - \|Du\| u \cdot \varphi) dx = 0 \\ &\text{compact support をもつ } \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n+1}) \\ &\text{(harmonic map の方程式の弱解)} \end{aligned}$$

記号 $L_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathbb{S}^{m-1})$ は, u および その弱微分 Du が $\mathbb{R}^m$ の任意の compact subset K において L^2 に属するような $\mathbb{S}^{m-1}$ に値をとる関数 u の Sobolev 空間である. また, $u^{(n)}$ が $\mathbb{R}^m$ からの *weakly harmonic map* ($m \geq 3$) であることは, $x = 0$ の近くでの local energy の有限性 (定理 4.1.1 (3) を参照せよ)

$$\int_{\mathbb{B}_r} \|Du^{(n)}\|^2 dx = n(n+m-2)\text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \int_0^r \rho^{m-3} d\rho < \infty \quad (r > 0)$$

から導かれる. したがって, 定理 4.2.1 より, $u^{(n)}$ は $\mathbb{R}^m$ からの 不安定な *weakly harmonic map* であることが導かれる. さらに, 原点からの動径方向に縮尺を変えることにより, $\mathbb{B}_1$ からの 不安定な *weakly harmonic map* $\tilde{u}^{(n)}$ も得られる. 実際, 十分大きい半径 $R > 0$ をとり, 定理 4.2.1 の証明のときに用いた関数 φ の support が $\mathbb{B}_R$ に含まれるようにして, $\tilde{u}^{(n)}(x) = u^{(n)}(Rx)$ とおくと, 写像

$$\tilde{u}^{(n)} : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$$

は 不安定な *weakly harmonic map* となる.

注意 4.2.7 すでに見たように, 定理 4.2.1 の証明に必要なのは, 補題 4.2.5 の結論である, n に関する 2 次不等式

$$(4.57) \quad 2n^2 + 2(m-2)n - (m-1)(m-2) \geq 0$$

である. したがって, 定理 4.2.1 の仮定 $n \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}(m-1)$ は, 2 次不等式 (4.57) の解 (のうち, $n > 0$ となる解)

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{-(m-2) + \sqrt{(m-2)^2 + 2(m-1)(m-2)}}{2} \\ &= \frac{(m-1)(m-2)}{\sqrt{(m-2)(3m-4)} + m-2} \end{aligned}$$

という条件に置きかえることができる.

4.3 p -harmonic map としての不安定性

The radial map $u^{(1)}$ は, 任意の正の整数 p に対して, p -harmonic map である, すなわち, p -harmonic map の方程式を満たすことが知られている. まずは, 定理 4.1.1 で構成された $u^{(n)}$ ($n \geq 2$) も p -harmonic map であることを示そう:

定理 4.3.1 (p -harmonicity [35]) $u^{(n)}$ (n は正の整数) は, 任意の正の実数 p に対して p -harmonic map である.

証明 計算すると

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m D_i \left(\|Du^{(n)}\|^{p-2} D_i u^{(n)} \right) + \|Du^{(n)}\|^{p-2} u^{(n)} \\
&= \sum_{i=1}^m D_i \left(\|Du^{(n)}\|^{p-2} \right) D_i u^{(n)} + \|Du^{(n)}\|^{p-2} \sum_{i=1}^m D_i D_i u^{(n)} + \|Du^{(n)}\|^{p-2} u^{(n)} \\
&\stackrel{\text{定理 4.1.1 (3)}}{=} \sum_{i=1}^m D_i \left(\frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2} \right)^{\frac{p-2}{2}} D_i u^{(n)} + \|Du^{(n)}\|^{p-2} \Delta u^{(n)} + \|Du^{(n)}\|^{p-2} u^{(n)} \\
&\stackrel{\text{補題 4.1.3 (7)}}{=} - \left(n(n+m-2) \right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{p-2}{\|x\|^{p-1}} \sum_{i=1}^m y_i D_i u^{(n)} + \|Du^{(n)}\|^{p-2} \left(\Delta u^{(n)} + \|Du^{(n)}\|^2 u^{(n)} \right) \\
&\stackrel{\text{命題 4.1.6 (1)}}{=} \|Du^{(n)}\|^{p-2} \left(\Delta u^{(n)} + \|Du^{(n)}\|^2 u^{(n)} \right) \\
&\stackrel{\text{定理 4.1.1 (1)}}{=} 0
\end{aligned}$$

となる. したがって $u^{(n)}$ は p -harmonic map の方程式 (後出の (4.61)) を満たす. ゆえに $u^{(n)}$ は p -harmonic map である. $\square$

The radial map $u^{(1)}$ は, 任意の正の実数 p に対して, p -harmonic map として安定であるのみならず, さらに, $1 < p < m$ を満たす任意の p についてエネルギーの最小値を与える写像になっている ([3], [10], [11], [17]).

一方, $u^{(n)}$ ($n \geq 2$) は, p -harmonic map として不安定であることが許される. 実際, 次の定理を示そう:

定理 4.3.2 (p -harmonic map としての不安定性 [35]) $n \geq 2$ かつ $m > p \geq 2$ であるとす
 る. このとき, $n \geq \frac{1}{2} \frac{m-p}{m-2} (m-p+1)$ であるならば, 写像 $u^{(n)}$ は **p -harmonic map** として
 不安定 (unstable) である.

定理 4.3.2 は, 仮定 $n \geq \frac{1}{2} \frac{m-p}{m-2} (m-p+1)$ の代わりに, 少し弱い仮定

$$n \geq \frac{(m-p)}{m-2 + \sqrt{(m-2)^2 + 2(m-p+1)(m-p)}} (m-p+1)$$

で証明することができる. これについては, 後述の注意 4.3.3 を参照せよ.

定理 4.3.2 により, 原点に特異点をもつ, 球面への不安定な **p -harmonic maps** の多くの例が得られる. 実際, 定理 4.3.2 により, 例えば, $m = 4$, $p = 3$, $n = 2$ の場合に, 写像

$$\begin{array}{ccc}
u^{(2)} : & \mathbb{R}^4 - \{0\} & \longrightarrow \mathbb{S}^{15} \subset \mathbb{R}^{16} \quad \text{で} \\
& \Downarrow & \Downarrow \\
& x = (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto u^{(2)}(x)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
u^{(2)}(x) = & \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\frac{x_1^2}{\|x\|^2} - \frac{1}{4}, \frac{x_1 x_2}{\|x\|^2}, \frac{x_1 x_3}{\|x\|^2}, \frac{x_1 x_4}{\|x\|^2}, \frac{x_2 x_1}{\|x\|^2}, \frac{x_2^2}{\|x\|^2} - \frac{1}{4}, \frac{x_2 x_3}{\|x\|^2}, \frac{x_2 x_4}{\|x\|^2}, \right. \\
& \left. \frac{x_3 x_1}{\|x\|^2}, \frac{x_3 x_2}{\|x\|^2}, \frac{x_3^2}{\|x\|^2} - \frac{1}{4}, \frac{x_3 x_4}{\|x\|^2}, \frac{x_4 x_1}{\|x\|^2}, \frac{x_4 x_2}{\|x\|^2}, \frac{x_4 x_3}{\|x\|^2}, \frac{x_4^2}{\|x\|^2} - \frac{1}{4} \right)
\end{aligned}$$

により定まるものが不安定な **3-harmonic map** であることがわかる.

定理の証明の前に, まずは p -harmonic maps についての基本事項, 特に, p -harmonic maps の安定性について思い起こそう.

リーマン多様体 (M, g) からリーマン多様体 (N, h) への smooth map u に対して, 微分写像 du の L^p -ノルム

$$E_p(u) = \int_M \|du\|^p dv_g$$

を考える. ここで dv_g は (M, g) の体積要素である. 関数 $\|du\|^p$ は **p -エネルギー密度 (p -energy density)** とよばれ, その積分量 E_p は **p -エネルギー (p -energy)** とよばれる. 写像 u が **p -harmonic map** であるとは, u が p -エネルギー E_p について **stationary** であることをいう. ここで u が p -エネルギー E_p について **stationary** であるとは, p -エネルギー E_p の第一変分

$$(4.58) \quad (\delta E_p)(u)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d}{dt} E_p(u_t) \right|_{t=0}$$

が, compact support をもつ, u の任意の変分 u_t of u に対してゼロになっていることをいう. ただし, $u_t(x) = U(x, t)$ で, smooth map

$$U : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

は, compact support をもつ u の変分である, すなわち, $U(x, 0) = u(x)$ を満たす. また, $X = \left. dU \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right|_{t=0}$ は, 変分ベクトル場 (**variation vector field**) とよばれる. u が p -エネルギー E_p について **stationary** である, すなわち, p -harmonic map であるならば, p -エネルギー E_p に対する Euler-Lagrange equation

$$(4.59) \quad \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} (\|du\|^{p-2} du)(e_i) = 0$$

を満たす. ここで, e_i ($i = 1, \dots, m$) は, (M, g) 上の局所的な正規直交フレームであり, また, ∇ は bundle $TM \otimes u^{-1}TN$ 上の connection である. Euler-Lagrange 方程式 (4.59) は **p -harmonic map の方程式 (p -harmonic map equation)** とよぶ.

p -harmonic map u が **p -harmonic map** として安定 (**stable**) であるとは, 第二変分

$$(\delta^2 E_p)(u)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2}{dt^2} E_p(u_t) \right|_{t=0}$$

が, compact support をもつ, u の任意の変分 u_t について非負であることをいう. この否定として, p -harmonic map u が **p -harmonic map** として不安定 (**unstable**) であるとは, 第二変分

$$(\delta^2 E_p)(u)(X) \stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2}{dt^2} E_p(u_t) \right|_{t=0}$$

が, compact support をもつ, u のある変分 u_t について負となることをいう.

この節の状況設定としては, $M = \mathbb{R}^m - \{0\}$ であり, また $N = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ であることになっているので, 写像 u は

$$x = (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow u(x) = (u_1(x), \dots, u_{n+1}(x))$$

と書けて, $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} u_i(x)^2 = 1$ を満たしている. そこで, compact support をもつ任意の関数 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m - \{0\}, \mathbb{R}^{n+1})$ をとり, u の変分 u_t を

$$u_t(x) = \frac{u(x) + t\varphi(x)}{\|u(x) + t\varphi(x)\|}$$

とおく. このとき

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u_t(x) \right|_{t=0} = \varphi(x) - (\varphi(x) \cdot u(x))u(x),$$

となる. ただし $\cdot$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の内積である. このとき, 第一変分は

$$\begin{aligned} (4.60) \quad (\delta E_p)(u)(\varphi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d}{dt} E_p(u_t) \right|_{t=0} \\ &= p \int_M \|Du\|^{p-2} (\langle Du, D\varphi \rangle - \|Du\|^2 u \cdot \varphi) dx \\ &= -p \int_M \left(\sum_{i=1}^m D_i (\|Du\|^{p-2} D_i u) + \|Du\|^p u \right) \cdot \varphi dx \end{aligned}$$

となる. ここで, $Du = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n+1}$ であり, また, $dx = dx_1 \cdots dx_m$ である. さらに, 第一変分 (4.60) より

$$(4.61) \quad u \text{ が } p\text{-harmonic map} \iff \sum_{i=1}^m D_i (\|Du\|^{p-2} D_i u) + \|Du\|^p u = 0$$

(p -harmonic map の方程式)

となる.

また, 直交条件

$$\varphi \cdot u = 0$$

を満たす変分 u_t に対して, 第二変分は

$$\begin{aligned} (4.62) \quad (\delta^2 E_p)(u)(\varphi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2}{dt^2} E_p(u_t) \right|_{t=0} \\ &= p \int_M \|Du\|^{p-2} (\|D\varphi\|^2 - \|Du\|^2 \|\varphi\|^2) dx + p(p-2) \int_M \|Du\|^{p-4} (Du \cdot D\varphi)^2 dx \end{aligned}$$

となる.

さて, この節の目的である定理 4.3.2 の証明に入ろう. 変分 $u_t(x)$ を構成するものとして, cut-off 関数 $\eta(x)$ および, それを用いた関数 $\varphi(x)$ は, 前節 (第 4.2 節) と同じものをとる. 具体的には,

- cut-off 関数 $\eta(x)$ は, 条件 (4.32) ~ (4.35) で定められている
- 関数 $\varphi(x)$ は, 定義式 (4.36) で定義されている

とする. 関数 $\varphi(x)$, および, $\eta(x)$ は, 補題 4.2.3 の基本的性質 (1) ~ (5) を満たすことが確認されている. このとき, 変分

$$u_t(x) = \frac{u(x) + t\varphi(x)}{\|u(x) + t\varphi(x)\|}$$

に対する第二変分は

$$\begin{aligned}
 (4.63) \quad & (\delta^2 E_p)(u)(\varphi) \\
 \stackrel{\text{定義}}{=} & \left. \frac{d^2}{dt^2} E_p(u_t) \right|_{t=0} \\
 \stackrel{(4.62)}{=} & p \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left(\|Du\|^{p-2} \|D\varphi\|^2 - \|Du\|^p \|\varphi\|^2 \right) dx_1 \cdots dx_m \\
 \stackrel{\text{補題 4.2.3 (1),(4)}}{=} & pm^{n-1} \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left(\|Du\|^{p-2} \|D\eta\|^2 - \|Du\|^p \eta^2 \right) dx_1 \cdots dx_m \\
 \stackrel{\text{定理 4.1.1 (3)}}{=} & pm^{n-1} \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left\{ \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{\|x\|^{p-2}} \|D\eta\|^2 - \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}}}{\|x\|^p} \eta^2 \right\} dx_1 \cdots dx_m \\
 = & pm^{n-1} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \left\{ \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{\|x\|^{p-2}} \|D\eta\|^2 - \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}}}{\|x\|^p} \eta^2 \right\} dx_1 \cdots dx_m \\
 & + pm^{n-1} \int_{\mathbb{B}_c - \mathbb{B}_b} \left\{ \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{\|x\|^{p-2}} \|D\eta\|^2 - \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}}}{\|x\|^p} \eta^2 \right\} dx_1 \cdots dx_m \\
 & + pm^{n-1} \int_{\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c} \left\{ \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{\|x\|^{p-2}} \|D\eta\|^2 - \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}}}{\|x\|^p} \eta^2 \right\} dx_1 \cdots dx_m \\
 = : & I_1 + I_2 + I_3
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 最後の等式では, 最右辺の 3 つの項をそれぞれ, I_1, I_2, I_3 とおいた. (4.32) より $\mathbb{B}_c - \mathbb{B}_b$ 上では $\eta(x) = 1$ であるので $D\eta = 0$ となり, したがって

$$(4.64) \quad I_2 = - pm^{n-1} \int_{\mathbb{B}_c - \mathbb{B}_b} \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}}}{\|x\|^p} dx_1 \cdots dx_m < 0$$

となる. また, (4.33) により $\eta(x) \geq \eta_0(x) - \varepsilon$ であることから

$$(4.65) \quad \eta(x)^2 \geq (\max\{\eta_0(x) - \varepsilon, 0\})^2$$

である. また, (4.31) により, $\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a$ 上では

$$\eta_0(x) \geq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\|x\| - a}{b - a} \geq \varepsilon \Leftrightarrow \|x\| \geq a + \varepsilon(b - a)$$

であるので

$$(4.66) \quad \eta_0(x) \geq \varepsilon \quad \text{on} \quad \mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}$$

$$(4.67) \quad \eta_0(x) \leq \varepsilon \quad \text{on} \quad \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))} - \mathbb{B}_a$$

となる. 以上から, (4.65), (4.66), (4.67) により,

$$(4.68) \quad \eta(x)^2 \geq (\eta_0(x) - \varepsilon)^2 \quad \text{on} \quad \mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}$$

$$(4.69) \quad \eta(x)^2 \geq 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))} - \mathbb{B}_a$$

となる. ゆえに

$$\begin{aligned}
(4.70) \quad & I_1 \\
& \stackrel{(4.34)}{\leq} pm^{n-1} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \frac{(1+\varepsilon)^2 (n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2 \|x\|^{p-2}} dx_1 \cdots dx_m \\
& \quad - pm^{n-1} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}}}{\|x\|^p} \eta^2 dx_1 \cdots dx_m \\
& \stackrel{(4.68)}{=} \frac{pm^{n-1}(1+\varepsilon)^2(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \frac{1}{\|x\|^{p-2}} dx_1 \cdots dx_m \\
& \quad - pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}} \frac{1}{\|x\|^p} (\eta_0 - \varepsilon)^2 dx_1 \cdots dx_m \\
& \stackrel{(4.69)}{=} \frac{pm^{n-1}(1+\varepsilon)^2(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \frac{1}{\|x\|^{p-2}} dx_1 \cdots dx_m \\
& \quad - pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}} \frac{1}{\|x\|^p} \left(\frac{\|x\| - a}{b-a} - \varepsilon \right)^2 dx_1 \cdots dx_m \\
& \stackrel{(4.31)}{=} \frac{pm^{n-1}(1+\varepsilon)^2(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \frac{1}{\|x\|^{p-2}} dx_1 \cdots dx_m \\
& \quad - pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}} \frac{1}{\|x\|^p} \left(\frac{\|x\| - a}{b-a} - \varepsilon \right)^2 dx_1 \cdots dx_m \\
& = \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \left[(1+\varepsilon)^2 \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_a} \frac{1}{\|x\|^{p-2}} dx_1 \cdots dx_m \right. \\
& \quad \left. - n(n+m-2) \int_{\mathbb{B}_b - \mathbb{B}_{(a+\varepsilon(b-a))}} \frac{1}{\|x\|^p} \left(\|x\| - (a + \varepsilon(b-a)) \right)^2 dx_1 \cdots dx_m \right] \\
& =: J
\end{aligned}$$

となる. ただし, 最後の等式では, 最右辺を J とおいた. ここで, $m-p-1 \geq 0$ であることに注意しながら, $\mathbb{R}^m - \{0\}$ 上の極座標を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}
(4.71) \quad & J \\
& = \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[(1+\varepsilon)^2 \int_a^b \frac{1}{\rho^{p-2}} \rho^{m-1} d\rho \right. \\
& \quad \left. - n(n+m-2) \int_{(a+\varepsilon(b-a))}^b \frac{1}{\rho^p} \left(\rho - (a + \varepsilon(b-a)) \right)^2 \rho^{m-1} d\rho \right] \\
& = \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[(1+\varepsilon)^2 \int_a^b \rho^{m-p+1} d\rho \right. \\
& \quad - n(n+m-2) \\
& \quad \times \left\{ \int_{(a+\varepsilon(b-a))}^b \rho^{m-p+1} d\rho - 2(a + \varepsilon(b-a)) \int_{(a+\varepsilon(b-a))}^b \rho^{m-p} d\rho \right. \\
& \quad \left. \left. + (a + \varepsilon(b-a))^2 \int_{(a+\varepsilon(b-a))}^b \rho^{m-p-1} d\rho \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{p \leq m}{=} \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} (b^{m-p+2} - a^{m-p+2}) \right. \\
& \quad - n(n+m-2) \left\{ \frac{1}{m-p+2} (b^{m-p+2} - (a+\varepsilon(b-a))^{m-p+2}) \right. \\
& \quad \quad - \frac{2}{m-p+1} (a+\varepsilon(b-a)) (b^{m-p+1} - (a+\varepsilon(b-a))^{m-p+1}) \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{1}{m-p} (a+\varepsilon(b-a))^2 (b^{m-p} - (a+\varepsilon(b-a))^{m-p}) \right\} \right] \\
& = \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} (b^{m-p+2} - a^{m-p+2}) \right. \\
& \quad - n(n+m-2) \left\{ \frac{1}{m-p+2} b^2 - \frac{2}{m-p+1} b(a+\varepsilon(b-a)) \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{1}{m-p} (a+\varepsilon(b-a))^2 \right\} b^{m-p} \right. \\
& \quad \left. + n(n+m-2) \left(\frac{1}{m-p+2} - \frac{2}{m-p+1} + \frac{1}{m-p} \right) (a+\varepsilon(b-a))^{m-p+2} \right] \\
& = \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} (b^{m-p+2} - a^{m-p+2}) \right. \\
& \quad - \frac{n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \\
& \quad \quad \times \left\{ (1-\varepsilon)^2(m-p+2)(m-p+1)(b-a)^2 \right. \\
& \quad \quad \left. - 2(1-\varepsilon)(m-p+2)b(b-a) + 2b^2 \right\} b^{m-p} \\
& \quad \left. + \frac{2n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} (a+\varepsilon(b-a))^{m-p+2} \right]
\end{aligned}$$

となる. この最後の等式では, $A = b$ および $B = a + \varepsilon(b-a)$ に対して, 次の一般的な不等式を用いた:

$$(4.72) \quad \frac{1}{m-p+2} - \frac{2}{m-p+1} + \frac{1}{m-p} = \frac{2}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)}$$

$$\begin{aligned}
(4.73) \quad & \frac{1}{m-p+2} A^2 - \frac{2}{m-p+1} AB + \frac{1}{m-p} B^2 \\
& = \frac{1}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \\
& \quad \times \left\{ (m-p+2)(m-p+1)(A-B)^2 - 2(m-p+2)A(A-B) + 2A^2 \right\}
\end{aligned}$$

したがって, (4.70) および (4.71) より

$$\begin{aligned}
 (4.74) \quad I_1 \leq & \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(b-a)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} (b^{m-p+2} - a^{m-p+2}) \right. \\
 & - \frac{n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \\
 & \times \left\{ (1-\varepsilon)^2(m-p+2)(m-p+1)(b-a)^2 \right. \\
 & \left. \left. - 2(1-\varepsilon)(m-p+2)b(b-a) + 2b^2 \right\} b^{m-p} \right. \\
 & \left. + \frac{2n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} (a+\varepsilon(b-a))^{m-p+2} \right]
 \end{aligned}$$

が得られた. ここで α を十分大きくとり, また, $b = (\alpha+1)a$ とおく. このとき, $b-a = \alpha a$, および, $(\alpha+1)^m = \alpha^m + O(\alpha^{m-1})$ である. ただし, $O(\cdot)$ は Landau の記号, すなわち, $O(\alpha^\ell)$ は, $\alpha \rightarrow \infty$ のとき $\frac{O(\alpha^\ell)}{\alpha^\ell}$ が有界であるような項とする. このとき, (4.74) により

$$\begin{aligned}
 (4.75) \quad I_1 \leq & pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} \frac{(\alpha+1)^{m-p+2} - 1}{\alpha^2} a^{m-p} \right. \\
 & - \frac{n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \left\{ (1-\varepsilon)^2(m-p+2)(m-p+1) \right. \\
 & \left. - 2(1-\varepsilon)(m-p+2) \frac{\alpha+1}{\alpha} + \frac{2(\alpha+1)^2}{\alpha^2} \right\} (\alpha+1)^{m-p} a^{m-p} \\
 & \left. + \frac{2n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \frac{(1+\varepsilon\alpha)^{m-p+2}}{\alpha^2} a^{m-p} \right] \\
 = & pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) a^{m-p} \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} \alpha^{m-p} \right. \\
 & - \frac{n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \left\{ (1-\varepsilon)^2(m-p+2)(m-p+1) \right. \\
 & \left. \left. - 2(1-\varepsilon)(m-p+2) + 2 \right\} \alpha^{m-p} \right. \\
 & \left. + \frac{2n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \frac{(1+\varepsilon\alpha)^{m-p+2}}{\alpha^2} \alpha^{m-p} \right. \\
 & \left. + O(\alpha^{m-p-1}) \right]
 \end{aligned}$$

となる. そこで, 正の実数 ε を

$$(4.76) \quad \varepsilon < \frac{1}{\alpha}$$

を満たすように, 十分小さくとる. このとき, $\varepsilon\alpha^{m-p} = O(\alpha^{m-p-1})$ であり, また, $\varepsilon^2\alpha^{m-p} = O(\alpha^{m-p-2})$ である. さらに

$$\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} \alpha^{m-p} = \frac{1}{m-p+2} \alpha^{m-p} + O(\alpha^{m-p-1}),$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ (1-\varepsilon)^2(m-p+2)(m-p+1) - 2(1-\varepsilon)(m-p+2) + 2 \right\} \alpha^{m-p} \\
&= \left\{ (m-p+2)(m-p+1) - 2(m-p+2) + 2 \right\} \alpha^{m-p} + O(\alpha^{m-p-1}) \\
&= (m-p+1)(m-p) \alpha^{m-p} + O(\alpha^{m-p-1})
\end{aligned}$$

であり,

$$\frac{2n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \frac{(1+\varepsilon\alpha)^{m-p+2}}{\alpha^2} a^{m-p} = O(\alpha^{-2})$$

である. したがって, α を十分大きくとると

$$\begin{aligned}
(4.77) \quad I_1 &\leq pm^{n-1} (n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) a^{m-p} \\
&\quad \times \left\{ \left(\frac{1}{m-p+2} - \frac{n(n+m-2)}{m-p+2} \right) \alpha^{m-p} + O(\alpha^{m-p-1}) \right\} \\
&= \frac{pm^{n-1} (n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{m-p+2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) a^{m-p} \\
&\quad \times \left\{ - \left((n^2-1) + (m-2)n \right) \alpha^{m-p} + O(\alpha^{m-p-1}) \right\} \\
&< 0,
\end{aligned}$$

となる. ここで, 仮定 $m > p \geq 2$ および $n \geq 2$ より $(n^2-1) + (m-2)n \geq 5 > 0$ が成り立つことを用いた.

同様にして, $\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c$ 上で

$$\eta_0(x) \geq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{d - \|x\|}{d - c} \geq \varepsilon \Leftrightarrow \|x\| \leq d - \varepsilon(d - c)$$

であり,

$$(4.78) \quad \eta(x)^2 \geq (\eta_0(x) - \varepsilon)^2 \quad \text{on } \mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))} - \mathbb{B}_c$$

$$(4.79) \quad \eta(x)^2 \geq 0 \quad \text{on } \mathbb{B}_d - \mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))}$$

となるので

$$\begin{aligned}
(4.80) \quad I_3 &\stackrel{(4.35)}{=} \stackrel{(4.78)}{=} \stackrel{(4.79)}{\leq} pm^{n-1} \int_{\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c} \frac{(1+\varepsilon)^2 (n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(d-c)^2 \|x\|^{p-2}} dx_1 \cdots dx_m \\
&\quad - pm^{n-1} \int_{\mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))} - \mathbb{B}_c} \frac{(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}}}{\|x\|^p} (\eta_0 - \varepsilon)^2 dx_1 \cdots dx_m \\
&\stackrel{(4.31)}{=} \frac{pm^{n-1} (n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}} (1+\varepsilon)^2}{(d-c)^2} \int_{\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c} \frac{1}{\|x\|^{p-2}} dx_1 \cdots dx_m \\
&\quad - pm^{n-1} (n(n+m-2))^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))} - \mathbb{B}_c} \frac{1}{\|x\|^p} \left(\frac{d - \|x\|}{d - c} - \varepsilon \right)^2 dx_1 \cdots dx_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}(1+\varepsilon)^2}{(d-c)^2} \int_{\mathbb{B}_d - \mathbb{B}_c} \frac{1}{\|x\|^{p-2}} dx_1 \cdots dx_m \\
&\quad - \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}}}{(d-c)^2} \int_{\mathbb{B}_{(d-\varepsilon(d-c))} - \mathbb{B}_c} \frac{1}{\|x\|^p} \left((d-\varepsilon(d-c)) - \|x\| \right)^2 dx_1 \cdots dx_m \\
&= \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}(1+\varepsilon)^2}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \int_c^d \frac{1}{\rho^{p-2}} \rho^{m-1} d\rho \\
&\quad - \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p}{2}}}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \int_c^{(d-\varepsilon(d-c))} \frac{1}{\rho^p} \left((d-\varepsilon(d-c)) - \rho \right)^2 \rho^{m-1} d\rho \\
&= \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \left[(1+\varepsilon)^2 \int_d^c \rho^{m-p+1} d\rho \right. \\
&\quad - n(n+m-2) \times \left\{ \int_c^{(d-\varepsilon(d-c))} \rho^{m-p+1} d\rho - 2(d-\varepsilon(d-c)) \int_c^{(d-\varepsilon(d-c))} \rho^{m-p} d\rho \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + (d-\varepsilon(d-c))^2 \int_c^{(d-\varepsilon(d-c))} \rho^{m-p-1} d\rho \right\} \right] \\
&= \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \\
&\quad \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} (d^{m-p+2} - c^{m-p+2}) \right. \\
&\quad \quad - n(n+m-2) \left\{ \frac{1}{m-p+2} \left((d-\varepsilon(d-c))^{m-p+2} - c^{m-p+2} \right) \right. \\
&\quad \quad \quad - \frac{2}{m-p+1} \left((d-\varepsilon(d-c))^{m-p+1} - c^{m-p+1} \right) (d-\varepsilon(d-c)) \\
&\quad \quad \quad \left. + \frac{1}{m-p} \left((d-\varepsilon(d-c))^{m-p} - c^{m-p} \right) (d-\varepsilon(d-c))^2 \right\} \Big] \\
&= \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \\
&\quad \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} (d^{m-p+2} - c^{m-p+2}) \right. \\
&\quad \quad - n(n+m-2) \left(\frac{1}{m-p+2} - \frac{2}{m-p+1} + \frac{1}{m-p} \right) (d-\varepsilon(d-c))^{m-p+2} \\
&\quad \quad + n(n+m-2) \left\{ \frac{1}{m-p+2} c^2 - \frac{2}{m-p+1} c(d-\varepsilon(d-c)) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \frac{1}{m-p} (d-\varepsilon(d-c))^2 \right\} c^{m-p} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{l} A=c, B=d-\varepsilon(d-c) \\ \text{と} \text{おいて} \\ (4.72), (4.73) \text{ より} \end{array} \quad \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(d-c)^2} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \\
& \times \left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{m-p+2} (d^{m-p+2} - c^{m-p+2}) - \frac{2n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} (d-\varepsilon(d-c))^{m-p+2} \right. \\
& \quad + \frac{n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \left\{ (1-\varepsilon)^2(m-p+2)(m-p+1)(d-c)^2 \right. \\
& \quad \left. \left. + 2(1-\varepsilon)(m-p+2)c(d-c) + 2c^2 \right\} c^{m-p} \right]
\end{aligned}$$

である. ここで, β を十分大きくとり, さらに, 正の実数 ε を $\varepsilon < \frac{1}{\beta}$ を満たしながら, 十分小さくとり, $d = (\beta+1)c$ とおくと, (4.54) によって

$$\begin{aligned}
I_3 & \leq pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) c^{m-2} \\
& \times \left\{ \frac{1}{m-p+2} \beta^{m-p} - \frac{2n(n+m-2)}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \beta^{m-p} + O(\beta^{m-p-1}) \right\} \\
& = \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) c^{m-2} \\
& \times \left\{ - \left(2n^2 + 2(m-2)n - (m-p+1)(m-p) \right) \beta^{m-p} + O(\beta^{m-p-1}) \right\} \\
& = \frac{pm^{n-1}(n(n+m-2))^{\frac{p-2}{2}}}{(m-p+2)(m-p+1)(m-p)} \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) c^{m-2} \\
& \times \left[- \left\{ 2n^2 + 2(m-2) \left(n - \frac{1}{2} \frac{m-p}{m-2} (m-p+1) \right) \right\} \beta^{m-p} + O(\beta^{m-p-1}) \right]
\end{aligned}$$

となる. したがって, 十分大きい β に対して, $n \geq \frac{1}{2} \frac{m-p}{m-2} (m-p+1)$ となる任意の正の整数 n については

$$(4.81) \quad I_3 < 0$$

となる. ここで, 条件 $n \geq \frac{1}{2} \frac{m-p}{m-2} (m-p+1)$ の代わりに, より弱い条件で $I_3 < 0$ とできることを注意しておく. これについては, 後出の注意 4.3.3 を参照せよ.

以上から, (4.64), (4.77), (4.81) により, α および β を十分大きくとると, $n \geq \frac{1}{2} \frac{m-p}{m-2} (m-p+1)$ ならば

$$(\delta^2 E_p)(u)(\varphi) < 0$$

であることがわかった. 以上で, 定理 4.3.2 の証明が終わった.

注意 4.3.3 上記の証明で見たように, 定理 4.3.2 の証明に必要なのは, n に関する 2 次不等式

$$(4.82) \quad 2n^2 + 2(m-2)n - (m-p)(m-p+1) \geq 0$$

である. したがって, 定理 4.3.2 の仮定 $n \geq \frac{1}{2} \frac{m-p}{m-2} (m-p+1)$ は, 2 次不等式 (4.82) の解 ($n > 0$ を満たす解)

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{-(m-2) + \sqrt{(m-2)^2 + 2(m-p+1)(m-p)}}{2} \\ &= \frac{(m-p)}{m-2 + \sqrt{(m-2)^2 + 2(m-p+1)(m-p)}} (m-p+1) \end{aligned}$$

という条件に置きかえることができる.

4.4 Symphonic map としての不安定性

この節での目的は, 以下の 2 つの定理を証明することにある.

定理 4.4.1 (symphonicity [36]) $u^{(n)}$ (n は正の整数) は symphonic map である.

定理 4.4.2 (symphonic map としての不安定性 [36]) $u^{(n)}$ は $n \geq 2$ のとき, symphonic map として不安定 (unstable) である.

定理 4.4.2 により, 原点に特異点をもつ, 球面への不安定な symphonic maps の多くの例が得られる. 実際, 定理 4.4.2 により, 例えば, $m = 2$ かつ $n = 2$ の場合, 写像

$$\begin{array}{ccc} u^{(2)} : & \mathbb{R}^2 - \{0\} & \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & x = (x_1, x_2) & \longmapsto u^{(2)}(x) \end{array}$$

で

$$u^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2x_1^2}{\|x\|^2} - 1, \frac{2x_1x_2}{\|x\|^2}, \frac{2x_2x_1}{\|x\|^2}, \frac{2x_2^2}{\|x\|^2} - 1 \right)$$

により定まるものが不安定な symphonic map であることがわかる.

定理 4.4.1 および, 定理 4.4.2 の証明のカギとなるのは後述の命題 4.4.3 である.

この節の状況設定としては, $M = \mathbb{R}^m - \{0\}$ であり, また $N = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ であるので, 写像 u は

$$x = (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow u(x) = (u_1(x), \dots, u_{n+1}(x))$$

と書けて, $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} u_i(x)^2 = 1$ を満たしている. そこで, compact support をもつ任意の関数 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m - \{0\}, \mathbb{R}^{n+1})$ をとり, u の変分 u_t を

$$u_t(x) = \frac{u(x) + t\varphi(x)}{\|u(x) + t\varphi(x)\|}$$

とおく. このとき

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u_t(x) \right|_{t=0} = \varphi(x) - (\varphi(x) \cdot u(x))u(x),$$

となる. ただし $\cdot$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の内積である. このとき, 第一変分は

$$\begin{aligned}
 (4.83) \quad (\delta E_{sym})(u)(\varphi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d}{dt} E_{sym}(u_t) \right|_{t=0} \\
 &= 4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left\{ (D_i u \cdot D_j u) (D_j u \cdot D_i \varphi) - \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u)^2 u \cdot \varphi \right\} dx \\
 &= -4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left(\sum_{i,j=1}^m D_i ((D_i u \cdot D_j u) D_j u) + \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u)^2 u \right) \cdot \varphi dx
 \end{aligned}$$

となる. ここで, $D_i u = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i} \right)$ for $i = 1, \dots, m$ であり, また, $dx = dx_1 \cdots dx_m$ である. さらに, (4.83) により

$$(4.84) \quad u \text{ が symphonic map} \iff \sum_{i,j=1}^m D_i ((D_i u \cdot D_j u) D_j u) + \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u)^2 u = 0$$

(symphonic map の方程式)

となる. また, 直交条件

$$\varphi \cdot u = 0$$

を満たす変分 u_t に対して, 第二変分は

$$\begin{aligned}
 (4.85) \quad (\delta^2 E_{sym})(u)(\varphi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2}{dt^2} E_{sym}(u_t) \right|_{t=0} \\
 &= 4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left\{ \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u) (D_i \varphi \cdot D_j \varphi) + \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j \varphi) (D_i u \cdot D_j \varphi) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^m (D_i \varphi \cdot D_j u) (D_i u \cdot D_j \varphi) - \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u)^2 \|\varphi\|^2 \right\} dx
 \end{aligned}$$

となることが確かめられる.

さて, この節での証明のカギとなるのが, 次の命題である.

命題 4.4.3

$$(4.86) \quad D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} = \frac{n(n+m-2)}{m-1} \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij}$$

命題 4.4.3 は, この節の目的である 2 つの定理 — 定理 4.4.1 と定理 4.4.2 — の証明において, 重要な役割を果たす. 具体的には

- (1) 定理 4.4.1 の証明において
命題 4.4.3 を用いると, $u^{(n)}$ が後出の (??) において symphonic map の方程式を満たすことが示される.
- (2) 定理 4.4.2 の証明において
命題 4.4.3 を用いると, 後出の式 (4.107) が得られ, 第二変分 (4.106) が負になることがわかる. (式 (4.108) を参照せよ.)

さらに, 命題 4.4.3 を用いると symphonic エネルギー密度が, 以下のように計算される.

命題 4.4.4

$$(4.87) \quad \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)})^2 = \frac{n^2(n+m-2)^2}{m-1} \frac{1}{\|x\|^4}$$

証明

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)})^2 &\stackrel{\text{命題 4.4.3}}{=} \frac{n^2(n+m-2)^2}{(m-1)^2} \frac{1}{\|x\|^4} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^2 \\ &\stackrel{\text{補題 4.1.3 (5)}}{=} \frac{n^2(n+m-2)^2}{m-1} \frac{1}{\|x\|^4} \end{aligned}$$

と確かめることができる. $\square$

それでは, この重要な命題 4.4.3 の証明に取りかかろう.

命題 4.4.3 の証明 数学的帰納法を用いる. 議論は単純だが, 計算が少し煩雑である. 具体的には, 証明の途中で使用される補題 4.4.5 (recurrence formula) の証明が, 少し長い計算を必要としている.

まず, $u_i^{(1)} = y_i$ であり, また, $D_i u_k^{(1)} = D_i y_k = \frac{1}{\|x\|} a_{ik}$ であることに注意すると, $n = 1$ の場合

$$D_i u^{(1)} \cdot D_j u^{(1)} = \sum_{k=1}^m D_i u_k^{(1)} D_j u_k^{(1)} = \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{k=1}^m a_{ik} a_{jk} \stackrel{\text{補題 4.1.3 (2),(3)}}{=} \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij}$$

となるが, これは $n = 1$ のときに, 命題 4.4.3 が成り立つことを示している.

ここで, 数学的帰納法の仮定として, $n - 1$ の場合に, 命題 4.4.3 が成り立つと仮定する, すなわち,

$$(4.88) \quad D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} = \frac{(n-1)(n+m-3)}{m-1} \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij}$$

が成り立つとする. ここで, $D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}$ という量について, 次の補題を与えておく.

補題 4.4.5 (recurrence formula)

$$\begin{aligned} (4.89) \quad D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} &= \frac{1}{2(2n+m-4)(n+m-3)} \|x\|^2 \triangle (D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)}) \\ &\quad + \frac{2n+m}{2n+m-4} D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} + \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} - \frac{n-1}{2n+m-4} \frac{1}{\|x\|^2} \delta_{ij} \end{aligned}$$

ここで, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である, すなわち,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である.

補題 4.4.5 の証明は後で行うことにして、まずは、補題 4.4.5 を用いて、命題 4.4.3 の証明を続けよう。recurrence formula (4.89) に (4.88) を代入すると

$$(4.90) \quad \begin{aligned} D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} &= \frac{n-1}{2(m-1)(2n+m-4)} \|x\|^2 \Delta \left(\frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} \right) \\ &\quad + \frac{(n-1)(2n+m)(n+m-3)}{(m-1)(2n+m-4)} \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} + \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} - \frac{n-1}{2n+m-4} \frac{1}{\|x\|^2} \delta_{ij} \end{aligned}$$

が得られる。補題 4.1.3 (1), (7), (9) を用いて計算すると

$$(4.91) \quad D_k \left(\frac{1}{\|x\|^2} \right) = - \frac{2y_k}{\|x\|^3}$$

$$(4.92) \quad \Delta \left(\frac{1}{\|x\|^2} \right) = - \frac{2(m-4)}{\|x\|^4}$$

となるので、

$$(4.93) \quad \begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} \right) &= \sum_{k=1}^m D_k D_k \left(\frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} \right) \\ &= \Delta \left(\frac{1}{\|x\|^2} \right) a_{ij} + 2 \sum_{k=1}^m D_k \left(\frac{1}{\|x\|^2} \right) D_k a_{ij} + \frac{1}{\|x\|^2} \Delta a_{ij} \\ &\stackrel{(4.91), (4.92)}{=} - \frac{2(m-4)}{\|x\|^4} a_{ij} + \frac{4}{\|x\|^4} \sum_{k=1}^m y_k (a_{ki} y_j + a_{kj} y_i) \\ &\quad + \frac{2}{\|x\|^4} \left((m-1) \delta_{ij} - m a_{ij} \right) \\ &\stackrel{\text{補題 4.1.3 (2), (6)}}{=} - \frac{4(m-2)}{\|x\|^4} a_{ij} + \frac{2(m-1)}{\|x\|^4} \delta_{ij} \end{aligned}$$

であることが導かれる。したがって (4.90) に (4.93) を代入すると

$$(4.94) \quad \begin{aligned} D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} &= \left\{ - \frac{2(m-2)(n-1)}{(m-1)(2n+m-4)} + \frac{(n-1)(2n+m)(n+m-3)}{(m-1)(2n+m-4)} + 1 \right\} \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} \\ &= \frac{n(n+m-2)}{m-1} \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} \end{aligned}$$

となる。上記の計算で δ_{ij} を含む項が相殺して無くなったことに注意せよ。等式 (4.94) は、命題 4.4.3 が n の場合に成り立つことを示しており、数学的帰納法による、命題 4.4.3 の証明が終わった。□

あとは、補題 4.4.5 を証明すればよい。

補題 4.4.5 の証明 (4.4) により

$$u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = C_{m,n} \left(y_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} - \frac{1}{n+m-3} \|x\| D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \right)$$

であるから, 補題 4.1.3 (7), (8) より

$$(4.95) \quad D_i u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = C_{m,n} \left(\frac{1}{\|x\|} a_{ii_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} + y_{i_n} D_i u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \right. \\ \left. - \frac{1}{n+m-3} y_i D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} - \frac{1}{n+m-3} \|x\| D_i D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \right)$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m D_i u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \cdot D_j u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \\ &= C_{m,n}^2 \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m \left(\frac{1}{\|x\|} a_{ii_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} + y_{i_n} D_i u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n+m-3} y_i D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} - \frac{1}{n+m-3} \|x\| D_i D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\|x\|} a_{ji_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} + y_{i_n} D_j u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n+m-3} y_j D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} - \frac{1}{n+m-3} \|x\| D_j D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \right) \end{aligned}$$

である. そこで

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^m u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} D_j u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} &= \frac{1}{2} D_j \left(\sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^m (u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)})^2 \right) = \frac{1}{2} D_j \|u^{(n-1)}\|^2 \\ \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} D_j D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} &= \frac{1}{2} D_j \left(\sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m (D_{i_n} u_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)})^2 \right) = \frac{1}{2} D_j \|Du^{(n-1)}\|^2 \end{aligned}$$

であることなどに注意して, 上記の等式の右辺を展開すると

$$\begin{aligned} &D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} \\ &= C_{m,n}^2 \left\{ \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i_n=1}^m a_{ii_n} a_{ji_n} \|u^{(n-1)}\|^2 + \frac{1}{\|x\|} \sum_{i_n=1}^m a_{ii_n} y_{i_n} \frac{1}{2} D_j \|u^{(n-1)}\|^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{n+m-3} \frac{y_j}{\|x\|} \sum_{i_n=1}^m a_{ii_n} \frac{1}{2} D_{i_n} \|u^{(n-1)}\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{n+m-3} \sum_{i_n=1}^m a_{ii_n} D_{i_n} D_j u^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)} \\ &\quad + \frac{1}{\|x\|} \sum_{i_n=1}^m a_{ji_n} y_{i_n} \frac{1}{2} D_i \|u^{(n-1)}\|^2 + \|y\|^2 D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} \\ &\quad - \frac{1}{n+m-3} y_j \sum_{i_n=1}^m y_{i_n} D_{i_n} u^{(n-1)} \cdot D_i u^{(n-1)} \\ &\quad \left. - \frac{1}{n+m-3} \|x\| \sum_{i_n=1}^m y_{i_n} D_{i_n} D_j u^{(n-1)} \cdot D_i u^{(n-1)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{n+m-3} \frac{y_i}{\|x\|} \sum_{i_n=1}^m a_{ji_n} \frac{1}{2} D_{i_n} \|u^{(n-1)}\|^2 - \frac{1}{n+m-3} y_i \sum_{i_n=1}^m y_{i_n} D_{i_n} u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} \\
& + \frac{1}{(n+m-3)^2} y_i y_j \|Du^{(n-1)}\|^2 \\
& + \frac{1}{(n+m-3)^2} \|x\| y_i \frac{1}{2} D_j \|Du^{(n-1)}\|^2 \\
& - \frac{1}{n+m-3} \sum_{i_n=1}^m a_{ji_n} D_{i_n} D_i u^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)} \\
& - \frac{1}{n+m-3} \|x\| \sum_{i_n=1}^m y_{i_n} D_{i_n} D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} \\
& + \frac{1}{(n+m-3)^2} \|x\| y_j \frac{1}{2} D_i \|Du^{(n-1)}\|^2 \\
& + \frac{1}{(n+m-3)^2} \|x\|^2 \sum_{i_n=1}^m D_i D_{i_n} u^{(n-1)} \cdot D_j D_{i_n} u^{(n-1)} \Big\}
\end{aligned}$$

補題 4.1.3 (1),(3),(6)
 補題 4.1.6 (1),(3),(4)
 定理 4.1.1 (3)
 $\|u^{(n-1)}\| \equiv 1$

$$\begin{aligned}
C_{m,n}^2 & \Big\{ \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} + 0 \\
& - 0 - \frac{1}{n+m-3} \frac{1}{\|x\|} D_i \Big(\|x\| D_j u^{(n-1)} \Big) \cdot u^{(n-1)} \\
& + 0 + D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} \\
& - 0 - \frac{1}{n+m-3} \|x\| \Big(- \frac{1}{\|x\|} D_j u^{(n-1)} \Big) \cdot D_i u^{(n-1)} \\
& - 0 - 0 \\
& + \frac{1}{(n+m-3)^2} \frac{(n-1)(n+m-3)}{\|x\|^2} y_i y_j \\
& + \frac{1}{2(n+m-3)^2} \|x\| y_i D_j \Big(\frac{(n-1)(n+m-3)}{\|x\|^2} \Big) \\
& - \frac{1}{n+m-3} \frac{1}{\|x\|} D_j \Big(\|x\| D_i u^{(n-1)} \Big) \cdot u^{(n-1)} \\
& - \frac{1}{n+m-3} \|x\| \Big(- \frac{1}{\|x\|} D_i u^{(n-1)} \Big) \cdot D_j u^{(n-1)} \\
& + \frac{1}{2(n+m-3)^2} \|x\| y_j D_i \Big(\frac{(n-1)(n+m-3)}{\|x\|^2} \Big) \\
& + \frac{1}{(n+m-3)^2} \|x\|^2 \sum_{i_n=1}^m D_{i_n} D_i u^{(n-1)} \cdot D_{i_n} D_j u^{(n-1)} \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & C_{m,n}^2 \left\{ \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} - \frac{1}{n+m-3} \frac{1}{\|x\|} D_i \left(\|x\| D_j u^{(n-1)} \right) \cdot u^{(n-1)} \right. \\
& \quad - \frac{1}{n+m-3} \frac{1}{\|x\|} D_j \left(\|x\| D_i u^{(n-1)} \right) \cdot u^{(n-1)} \\
& \quad + \frac{n+m-1}{n+m-3} D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} + \frac{n-1}{n+m-3} \frac{1}{\|x\|^2} y_i y_j \\
& \quad + \frac{n-1}{2(n+m-3)} \|x\| y_i D_j \left(\frac{1}{\|x\|^2} \right) + \frac{n-1}{2(n+m-3)} \|x\| y_j D_i \left(\frac{1}{\|x\|^2} \right) \\
& \quad \left. + \frac{1}{(n+m-3)^2} \|x\|^2 \sum_{k=1}^m D_k D_i u^{(n-1)} \cdot D_k D_j u^{(n-1)} \right\}
\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\|x\| y_i D_j \left(\frac{1}{\|x\|^2} \right) = \|x\| y_i \left(-\frac{2y_j}{\|x\|^3} \right) = -\frac{2}{\|x\|^2} y_i y_j$$

および, 同様に

$$\|x\| y_j D_i \left(\frac{1}{\|x\|^2} \right) = -\frac{2}{\|x\|^2} y_i y_j$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}
(4.96) \quad & D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} \\
= & C_{m,n}^2 \left\{ \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} - \frac{1}{n+m-3} \frac{1}{\|x\|} D_i \left(\|x\| D_j u^{(n-1)} \right) \cdot u^{(n-1)} \right. \\
& \quad - \frac{1}{n+m-3} \frac{1}{\|x\|} D_j \left(\|x\| D_i u^{(n-1)} \right) \cdot u^{(n-1)} \\
& \quad + \frac{n+m-1}{n+m-3} D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} - \frac{n-1}{n+m-3} \frac{1}{\|x\|^2} y_i y_j \\
& \quad \left. + \frac{1}{(n+m-3)^2} \|x\|^2 \sum_{k=1}^m D_k D_i u^{(n-1)} \cdot D_k D_j u^{(n-1)} \right\}
\end{aligned}$$

が得られる. さらに

$$(4.97) \quad D_j u^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)} = \frac{1}{2} D_j \|u^{(n-1)}\|^2 = 0 \quad (\because \|u^{(n-1)}\| = 1)$$

であり, また

$$\begin{aligned}
(4.98) \quad 0 &= D_i \left(u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} \right) \\
&= D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} + u^{(n)} \cdot D_i D_j u^{(n)},
\end{aligned}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}
(4.99) \quad & D_i \left(\|x\| D_j u^{(n-1)} \right) \cdot u^{(n-1)} \\
&= D_i \|x\| D_j u^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)} + \|x\| D_i D_j u^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)} \\
&\stackrel{(4.97)}{=} \|x\| D_i D_j u^{(n-1)} \cdot u^{(n-1)} \\
&\stackrel{(4.98)}{=} -\|x\| D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)}
\end{aligned}$$

となり, この式で i と j の役割を入れかえることにより

$$(4.100) \quad D_j \left(\|x\| D_i u^{(n-1)} \right) \cdot u^{(n-1)} = -\|x\| D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)}$$

となる. 一方

$$\begin{aligned} & \triangle \left(D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} \right) \\ = & D_i \triangle u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} + 2 \sum_{k=1}^m D_k D_i u^{(n-1)} \cdot D_k D_j u^{(n-1)} \\ & + D_i u^{(n-1)} \cdot D_j \triangle u^{(n-1)} \\ \stackrel{\text{定理 4.1.1 (1),(3)}}{=} & D_i \left(-\frac{(n-1)(n+m-3)}{\|x\|^2} u^{(n-1)} \right) \cdot D_j u^{(n-1)} \\ & + 2 \sum_{k=1}^m D_k D_i u^{(n-1)} \cdot D_k D_j u^{(n-1)} \\ & + D_i u^{(n-1)} \cdot D_j \left(-\frac{(n-1)(n+m-3)}{\|x\|^2} u^{(n-1)} \right) \\ = & -2 \frac{(n-1)(n+m-3)}{\|x\|^2} D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} + 2 \sum_{k=1}^m D_k D_i u^{(n-1)} \cdot D_k D_j u^{(n-1)} \\ & \left(\because u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} = \frac{1}{2} D_j \|u^{(n-1)}\|^2 = 0 \right), \end{aligned}$$

である, すなわち,

$$(4.101) \quad \begin{aligned} & \sum_{k=1}^m D_k D_i u^{(n-1)} \cdot D_k D_j u^{(n-1)} \\ = & \frac{1}{2} \triangle \left(D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} \right) + \frac{(n-1)(n+m-3)}{\|x\|^2} D_i u^{(n-1)} \cdot D_j u^{(n-1)} \end{aligned}$$

となる. 以上から, (4.5), (4.96), (4.99), (4.100), (4.101) および $y_i y_j = \delta_{ij} - a_{ij}$ であること (a_{ij} の定義より) を用いると, (4.89) が得られる. これで, 補題 4.4.5 の証明が終わった. $\square$

定理 4.4.1 の証明を与える. そのために, $u^{(n)}$ に対して, 以下のように, symphonic operator の作用がより単純になることを示しておく.

命題 4.4.6 (symphonic operator の作用)

$$\sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_j u^{(n)} \right) = \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_i D_j u^{(n)}$$

命題 4.4.6 の証明の前に, 命題 4.4.6 を用いて, 定理 4.4.1 を証明する.

定理 4.4.1 の証明 簡単な計算で

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_j u^{(n)} \right) \\
\stackrel{\text{命題 4.4.6}}{=} & \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_i D_j u^{(n)} \\
\stackrel{\text{命題 4.4.3}}{=} & \frac{n(n+m-2)}{m-1} \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} D_i D_j u^{(n)} \\
= & \frac{n(n+m-2)}{m-1} \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} D_j D_i u^{(n)} \\
\stackrel{\text{命題 4.1.6 (4)}}{=} & \frac{n(n+m-2)}{m-1} \frac{1}{\|x\|^3} \sum_{i=1}^m D_i \left(\|x\| D_i u^{(n)} \right) \\
= & \frac{n(n+m-2)}{m-1} \frac{1}{\|x\|^3} \sum_{i=1}^m \left\{ D_i \|x\| D_i u^{(n)} + \|x\| D_i D_i u^{(n)} \right\} \\
\stackrel{\text{補題 4.1.3 (7)}}{=} & \frac{n(n+m-2)}{m-1} \frac{1}{\|x\|^3} \left\{ \sum_{i=1}^m y_i D_i u^{(n)} + \|x\| \Delta u^{(n)} \right\} \\
\stackrel{\text{補題 4.1.6 (1)}}{=} & \frac{n(n+m-2)}{m-1} \frac{1}{\|x\|^2} \Delta u^{(n)} \\
\stackrel{\text{定理 4.1.1 (1),(3)}}{=} & - \frac{n^2(n+m-2)^2}{m-1} \frac{1}{\|x\|^4} u^{(n)} \\
\stackrel{\text{命題 4.4.4}}{=} & - \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)})^2 u^{(n)}
\end{aligned}$$

すなわち

$$\sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_j u^{(n)} \right) + \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)})^2 u^{(n)} = 0$$

となり, $u^{(n)}$ が symphonic map の方程式 (4.84) を満たすことが確かめられた. $\square$

では, 命題 4.4.6 を証明しよう.

命題 4.4.6 の証明 $\|u^{(n)}\| = 1$ であるので, $u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} = \frac{1}{2} D_j \|u^{(n)}\|^2 = 0$ である. したがって

$$(4.102) \quad \Delta u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} \stackrel{\text{定理 4.1.1 (1)}}{=} - \|Du^{(n)}\|^2 u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)} = 0$$

であり

$$\begin{aligned}
(4.103) \quad \sum_{j=1}^m D_j \|Du^{(n)}\| D_j u^{(n)} & \stackrel{\text{定理 4.1.1 (3)}}{=} \sum_{j=1}^m D_j \left(\frac{n(n+m-2)}{\|x\|^2} \right) D_j u^{(n)} \\
& \stackrel{\text{補題 4.1.3 (7)}}{=} - \frac{2n(n+m-2)}{\|x\|^3} \sum_{j=1}^m y_j D_j u^{(n)} \\
& \stackrel{\text{補題 4.1.6 (1)}}{=} 0
\end{aligned}$$

である. このとき

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^m D_i \left((D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_j u^{(n)} \right) \\
= & \sum_{i,j=1}^m \left\{ (D_i D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_j u^{(n)} + (D_i u^{(n)} \cdot D_i D_j u^{(n)}) D_j u^{(n)} \right. \\
& \quad \left. + (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_i D_j u^{(n)} \right\} \\
= & \sum_{j=1}^m (\Delta u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_j u^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m D_j \|Du^{(n)}\| D_j u^{(n)} \\
& \quad + \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_i D_j u^{(n)} \\
\stackrel{(4.102)}{=} & \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_i D_j u^{(n)} \\
\stackrel{(4.103)}{=} & \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)}) D_i D_j u^{(n)}
\end{aligned}$$

となる. $\square$

以上で, 命題 4.4.6 の証明が終わり, ひいては, 命題 4.4.6 の証明を用いた, 定理 4.4.1 の証明が完結した. 次に, 定理 4.4.2 の証明を与えよう. 記号の簡単のために $u := u^{(n)}$ とおく. 変分 $u_t(x)$ を構成するものとして, ここで用いられる cut-off 関数 η は, 第 4.2 節や第 4.3 節で使用されたような条件 (4.32) ~ (4.35) は必要なくて,

原点を中心とした回転対称であることが重要

となってくる. そこで, compact support をもつ $(0, \infty)$ 上の非負値関数 $\eta(r)$ を任意にとる. (記号 η は, 第 4.2 節や第 4.3 節で使用したものと異なることに注意せよ.) $n \geq 2$ の場合に, compact support をもつ関数 $\varphi(x) = (\varphi_{i_1 \dots i_n}(x))_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m}$ を

$$(4.104) \quad \varphi_{i_1 \dots i_n}(x) = \eta(\|x\|) \delta_{i_1 i_2} \quad (x \in \mathbb{R}^m - \{0\})$$

と定義する. ここで, これまでと同様に

関数 φ の定義には, “ $n \geq 2$ ” という条件が必要である

ことに注意しておく. 実際, $\varphi_{i_1 \dots i_n}$ の定義において, $\delta_{i_1 i_2}$ は 2 つの添え字 i_1 および i_2 を必要とするからである.

関数 φ に関する基本的性質をあげておく:

補題 4.4.7

- (1) $\varphi \cdot u = 0$
- (2) $\|\varphi\|^2 = m^{n-1} \eta^2$
- (3) $\|D\varphi\|^2 = m^{n-1} (\eta')^2$
- (4) $D_i u \cdot D_j \varphi = 0$
- (5) $D_i \varphi \cdot D_j \varphi = m^{n-1} (\eta')^2 y_i y_j$

ここで $\eta = \eta(\|x\|)$ および $\eta' = \eta'(\|x\|)$ とする.

証明.

(1):

$$\begin{aligned}
 \varphi \cdot u &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m \varphi_{i_1 \dots i_n} u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \\
 &\stackrel{(4.104)}{=} \eta \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m \left(\sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \right) \\
 &\stackrel{\text{補題 4.2.2}}{=} 0.
 \end{aligned}$$

(2):

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|^2 &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m (\varphi_{i_1 \dots i_n})^2 \\
 &\stackrel{(4.104)}{=} \eta^2 \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2}^2 \\
 &= m^{n-1} \eta^2.
 \end{aligned}$$

(3):

$$\begin{aligned}
 (4.105) \quad D_i \varphi_{i_1 \dots i_n}(x) &\stackrel{(4.104)}{=} D_i \left(\eta(\|x\|) \right) \delta_{i_1 i_2} \\
 &= \eta' D_i \|x\| \delta_{i_1 i_2} \\
 &\stackrel{\text{補題 4.1.3 (7)}}{=} \eta' y_i \delta_{i_1 i_2}
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 \|D\varphi\|^2 &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m (D_i \varphi_{i_1 \dots i_n})^2 \\
 &\stackrel{(4.105)}{=} (\eta')^2 \sum_{i=1}^m y_i^2 \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2}^2 \\
 &\stackrel{\text{補題 4.1.3 (1)}}{=} m^{n-1} (\eta')^2.
 \end{aligned}$$

(4):

$$\begin{aligned}
D_i u \cdot D_j \varphi &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m D_i u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} D_j \varphi_{i_1 \dots i_n} \\
&\stackrel{(4.105)}{=} \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m D_i \left(\sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2} u_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \right) \eta' y_j \\
&\stackrel{\text{補題 4.2.2}}{=} 0.
\end{aligned}$$

(5):

$$\begin{aligned}
D_i \varphi \cdot D_j \varphi &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m D_i \varphi_{i_1 \dots i_n} D_j \varphi_{i_1 \dots i_n} \\
&\stackrel{(4.105)}{=} (\eta')^2 y_i y_j \sum_{i_3, \dots, i_n=1}^m \sum_{i_1, i_2=1}^m \delta_{i_1 i_2}^2 \\
&= m^{n-1} (\eta')^2 y_i y_j.
\end{aligned}$$

以上で, 補題 4.4.7 の証明が終わった. $\square$

補題 4.4.7 を考慮すれば, 変分

$$u_t(x) = \frac{u(x) + t\varphi(x)}{\|u(x) + t\varphi(x)\|}$$

に対する第二変分は

$$\begin{aligned}
(4.106) \quad (\delta^2 E_{\text{Sym}})(u)(\varphi) &\stackrel{\text{定義}}{=} \left. \frac{d^2}{dt^2} E_{\text{Sym}}(u_t) \right|_{t=0} \\
&\stackrel{\text{補題 4.4.7 (1), (4)}}{\stackrel{(4.85)}{=}} 4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left\{ \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u) (D_i \varphi \cdot D_j \varphi) - \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u)^2 \|\varphi\|^2 \right\} dx_1 \cdots dx_m
\end{aligned}$$

であるが

$$\begin{aligned}
(4.107) \quad \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u) (D_i \varphi \cdot D_j \varphi) \\
&\stackrel{\text{補題 4.4.7 (5)}}{\stackrel{\text{命題 4.4.3}}{=}} \frac{m^{n-1} n(n+m-2)}{m-1} (\eta')^2 \sum_{i,j=1}^m \frac{1}{\|x\|^2} a_{ij} y_i y_j \\
&\stackrel{\text{補題 4.1.3 (6)}}{=} 0
\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}
(4.108) \quad (\delta^2 E_{\text{Sym}})(u)(\varphi) &\stackrel{(4.106)}{\stackrel{(4.107)}{=}} - 4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u)^2 \|\varphi\|^2 dx_1 \cdots dx_m \\
&\stackrel{\text{命題 4.4.4}}{\stackrel{\text{補題 4.2.3 (2)}}{=}} - \frac{4m^{n-1} n^2 (n+m-2)^2}{m-1} \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \frac{1}{\|x\|^4} \eta^2 dx_1 \cdots dx_m \\
&< 0
\end{aligned}$$

となる. ここで, 関数 $\eta(r)$ を $(0, \infty)$ 内の開区間上で $\eta(r)^2 > 0$ となるようにとることにより, cut-off 関数 $\eta = \eta(\|x\|)$ も $\mathbb{R}^m - \{0\}$ の開集合上で $\eta^2 > 0$ となり, 上記の最右辺が負となった. 以上から $u = u^{(n)}$ が不安定であることがわかり, 定理 4.4.2 の証明が終わった. $\square$

4.5 C-stationary map としての不安定性

この節での目的は, 以下の2つの定理を証明することにある.

定理 4.5.1 (C-stationarity) $u^{(n)}$ (n は正の整数) は C-stationary map である.

定理 4.5.2 (C-stationary map としての不安定性 [37]) $u^{(n)}$ は $n \geq 2$ のとき, C-stationary map として不安定 (unstable) である.

定理 4.5.2 により, 原点に特異点をもつ, 球面への不安定な C-stationary maps の多くの例が得られる. 実際, 定理 4.5.2 により, 例えば, $m = 2$ and $n = 2$ の場合, 写像

$$\begin{array}{ccc} u^{(2)} : & \mathbb{R}^2 - \{0\} & \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & x = (x_1, x_2) & \longmapsto u^{(2)}(x) \end{array}$$

で

$$u^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2x_1^2}{\|x\|^2} - 1, \frac{2x_1x_2}{\|x\|^2}, \frac{2x_2x_1}{\|x\|^2}, \frac{2x_2^2}{\|x\|^2} - 1 \right)$$

により定まるものが不安定な C-stationary map であることがわかる.

定理 4.5.1 の証明は, 定理 4.4.1 および, 定理 4.3.1 を考慮すると, 次の命題から直ちに導かれる. 実際, 定理 4.4.1 より, f は symphonic map であり, また, $p = 4$ の場合の定理 4.3.1 より, f は 4-harmonic map でもあるので, 以下の命題 4.5.3 より, f は C-stationary map であることが結論される.

命題 4.5.3 写像 f が symphonic map であり, かつ, 4-harmonic map であるならば, C-stationary map である.

証明 まず, f が symphonic map であることから, 命題 3.2.5 より, f は **symphonic map** の方程式

$$(4.109) \quad \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \sigma_f)(e_i) = 0$$

を満たす. 一方, u は 4-harmonic map でもあるので, u は **4-harmonic map** の方程式

$$(4.110) \quad \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} (\|df\|^2 df)(e_i) = 0$$

を満たす. そこで $(4.109) - (4.110) \times \frac{1}{m}$ を考えると

$$(4.111) \quad \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} \left(\sigma_f - \frac{1}{m} \|df\|^2 df \right)(e_i) = 0$$

を満たすことがわかる. ここで

$$\begin{aligned}
\left(\sigma_f - \frac{1}{m} \|df\|^2 df \right)(X) &= \sigma_f(X) - \frac{1}{m} \|df\|^2 df(X) \\
&\stackrel{\sigma_f \text{ の定義 (3.1)}}{=} \sum_{j=1}^m (f^*h)(X, e_j) df(e_j) - \frac{1}{m} \|df\|^2 df(X) \\
&= \sum_{j=1}^m (f^*h)(X, e_j) df(e_j) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \|df\|^2 g(X, e_j) df(e_j) \\
&\quad \left(\because \sum_{j=1}^m g(X, e_j) df(e_j) = df \left(\sum_{j=1}^m g(X, e_j) e_j \right) = df(X) \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ (f^*h)(X, e_j) - \frac{1}{m} \|df\|^2 g(X, e_j) \right\} df(e_j) \\
&\stackrel{T_f \text{ の定義 (1.4)}}{=} \sum_{j=1}^m T_f(X, e_j) df(e_j) \\
&\stackrel{\xi_f \text{ の定義 (1.11)}}{=} \xi_f(X)
\end{aligned}$$

となるので, 等式 (4.111) は

$$\sum_{j=1}^m (\nabla_{e_j} \xi_f)(e_j) = 0, \quad \text{すなわち} \quad \operatorname{div}_g \xi_f = 0$$

となる. 命題 1.5.7 により, これは **C-stationary map** の方程式 (1.20) にほかならない. ゆえに u は C-stationary map である. 以上で, 命題 4.5.3 の証明が終わった. $\square$

命題 4.5.3 の証明が終わったことにより, 定理 4.5.1 の証明も済んだことになる.

ここで, 今の状況で, conformality エネルギー E_{con} の第二変分を求めておこう. 設定としては

$$M = \mathbb{R}^m - \{0\} \quad \text{および} \quad N = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

であるので, 写像 u は

$$x = (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow u(x) = (u_1(x), \dots, u_{n+1}(x))$$

と書けて, $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} u_i(x)^2 = 1$ を満たしている. 任意の関数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m - \{0\}, \mathbb{R}^{n+1})$ に対して, u の変分 u_t は

$$u_t(x) = \frac{u(x) + t\varphi(x)}{\|u(x) + t\varphi(x)\|}$$

と定められる. このとき, 簡単な計算で

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u_t(x) \right|_{t=0} = \varphi(x) - (\varphi(x) \cdot u(x))u(x)$$

であることが確かめられる. ここで, $\cdot$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の内積である. また, conformality テンソル T_u は

$$(4.112) \quad (T_u)_{ij} = D_i u \cdot D_j u - \frac{1}{m} \|Du\|^2 \delta_{ij},$$

となる. ここで, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である, すなわち,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

である. また

$$\begin{aligned} (4.113) \quad \|T_u\|^2 &= \sum_{i,j=1}^m ((T_u)_{ij})^2 \\ &\stackrel{(4.112)}{=} \sum_{i,j=1}^m \left(D_i u \cdot D_j u - \frac{1}{m} \|Du\|^2 \delta_{ij} \right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u)^2 - \frac{2}{m} \|Du\|^4 + \frac{1}{m^2} m \|Du\|^4 \\ &= \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u)^2 - \frac{1}{m} \|Du\|^4, \end{aligned}$$

であり, したがって

$$E_{con}(u) = \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \|T_u\|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left\{ \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u)^2 - \frac{1}{m} \|Du\|^4 \right\} dx$$

である. ここで $dx = dx_1 \cdots dx_m$ とする.

Conformality エネルギー E_{con} の第一変分は, 次のようになる (第一変分公式):

$$\begin{aligned} (4.114) \quad (\delta E_{con})(u)(\varphi) &= \left. \frac{d}{dt} E_{con}(u_t) \right|_{t=0} \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left\{ \sum_{i,j=1}^m (T_u)_{ij} (D_i u \cdot D_j \varphi) - \|T_u\|^2 u \cdot \varphi \right\} dx \\ &= -4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left(\sum_{i,j=1}^m D_j ((T_u)_{ij} D_i u) + \|T_u\|^2 u \right) \cdot \varphi dx \end{aligned}$$

ここで, $D_i u = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i} \right)$ for $i = 1, \dots, m$ および $dx = dx_1 \cdots dx_m$ である. さらに, (4.114) により

$$(4.115) \quad u \text{ が C-stationary map} \iff \sum_{i,j=1}^m D_i ((T_u)_{ij} D_j u) + \sum_{i,j=1}^m \|T_u\|^2 u = 0$$

(C-stationary map の方程式)

となる. また, 直交条件

$$\varphi \cdot u = 0$$

を満たし, compact な support をもつ関数 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m - \{0\}, \mathbb{R}^{n+1})$ に対して, 第二変分は

$$\begin{aligned}
 (4.116) \quad (\delta^2 E_{con})(u)(\varphi) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} E_{con}(u_t) \right|_{t=0} \\
 &= 4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left[\left\{ \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u) (D_i \varphi \cdot D_j \varphi) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j \varphi)^2 + \sum_{i,j=1}^m (D_i \varphi \cdot D_j u) (D_i u \cdot D_j \varphi) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{m} \|Du\|^2 \|D\varphi\|^2 - \frac{2}{m} \left(\sum_{i=1}^m (D_i u \cdot D_i \varphi) \right)^2 - \|T_u\|^2 \|\varphi\|^2 \right] dx
 \end{aligned}$$

となる (第二変分公式).

定理 4.5.2 の証明 記号の簡単のために $u := u^{(n)}$ とおく. 変分 $u_t(x)$ を構成するものとして, cut-off 関数, および, それを用いた関数 $\varphi(x)$ は, 前節 (第 4.4 節) と同じものをとる. 具体的には,

- compact support をもつ $(0, \infty)$ 上の非負値関数 $\eta(r)$ を任意にとり, cut-off 関数として $\eta(\|x\|)$ を考える.
- 関数 $\varphi(x)$ は, 定義式 (4.104) で定義されている

とする. 関数 φ , および, η は, 補題 4.4.7 の基本的性質 (1) ~ (5) を満たすことが確認されている. このとき, (4.116), および, 補題 4.2.3 (1), (4) より, 第二変分は

$$\begin{aligned}
 (4.117) \quad (\delta^2 E_{con})(u)(\varphi) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} E_{con}(u_t) \right|_{t=0} \\
 &= 4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left[\left\{ \sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u) (D_i \varphi \cdot D_j \varphi) - m^{n-2} \|Du\|^2 \|D\eta\|^2 - m^{n-1} \|T_u\|^2 \eta^2 \right\} \right] dx
 \end{aligned}$$

であるが

$$\begin{aligned}
 (4.118) \quad &\sum_{i,j=1}^m (D_i u \cdot D_j u) (D_i \varphi \cdot D_j \varphi) \\
 &\stackrel{\text{補題 4.4.7 (5)}}{\stackrel{\text{命題 4.4.3}}{=}} \frac{m^{n-1} n(n+m-2)}{m-1} \|D\eta\|^2 \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} y_i y_j \\
 &\stackrel{\text{補題 4.1.3 (6)}}{=} 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.119) \quad \|T_u\|^2 &= \sum_{i,j=1}^m (D_i u^{(n)} \cdot D_j u^{(n)})^2 - \frac{1}{m} \|Du\|^4 \\
 &\stackrel{\text{定理 4.1.1 (3)}}{\stackrel{(\text{??})}{=}} \frac{n^2(n+m-2)^2}{m-1} \frac{1}{\|x\|^4} - \frac{1}{m} \frac{n^2(n+m-2)^2}{\|x\|^4} \\
 &= \frac{n^2(n+m-2)^2}{m(m-1)} \frac{1}{\|x\|^4}
 \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}
& (\delta^2 E_{con})(u)(\varphi) \\
& \stackrel{(4.117)}{=} \stackrel{(4.118)}{=} -4 \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \left\{ m^{n-2} \|Du\|^2 \|D\eta\|^2 + m^{n-1} \|T_u\|^2 \eta^2 \right\} dx \\
& \stackrel{(4.119)}{=} \stackrel{\text{定理 4.1.1 (3)}}{=} -4m^{n-2}n(n+m-2) \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \frac{1}{\|x\|^2} \|D\eta\|^2 dx \\
& \quad - \frac{4m^{n-2}n^2(n+m-2)^2}{m-1} \int_{\mathbb{R}^m - \{0\}} \frac{1}{\|x\|^4} \eta^2 dx \\
& < 0
\end{aligned}$$

となる. ここで, 関数 $\eta(r)$ を $(0, \infty)$ 内の開区間上で $\eta(r)^2 > 0$ となるようにとることにより, cut-off 関数 $\eta = \eta(\|x\|)$ も $\mathbb{R}^m - \{0\}$ の開集合上で $\eta^2 > 0$ となり, 上記の最右辺が負となった. ゆえに $u = u^{(n)}$ は C-stationary map として不安定である. 以上で, 定理 4.5.2 の証明が終わった. $\square$

記号表

[1] 一般的記号

Kronecker の δ 記号 $\delta_{ij}, \delta^{ij}, \delta_j^i$ など

$\text{tr } A$ 行列 A のトレース (trace)

$\|A\|$ 行列 A のノルム (norm)

(α, β) テンソル α と β のペアリング (pairing)

$\|\alpha\|$ テンソル α のノルム (norm)

[2] 大前提

$M = (M, g)$ 境界をもたない m 次元 Riemann 多様体

$N = (N, h)$ 境界をもたない Riemann 多様体

$e_1, \dots, e_m$ M 上の局所的な正規直交フレーム

$f : M \rightarrow N$ smooth map

$T_x M$ M の $x \in M$ における接空間 (tangent space)

$T_y N$ N の $y \in N$ における接空間 (tangent space)

$X_x, Y_x, Z_x, \dots$ $x \in M$ における M の接ベクトル (tangent vector)

$X, Y, Z, \dots$ M の接ベクトル場 (tangent vector field)

$(df)_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ 微分写像 (differential map)

$f^* h$ h の f による引き戻し (pullback)

$\text{tr}(f^* h) = \|df\|^2$ 引き戻しのトレース (trace)

$\|f^* h\|$ 引き戻しのノルム (norm)

[3] 主要な量と概念

T_f conformality テンソル (tensor of conformality)

E_{con} copnformality エネルギー (energy of conformality)

E_{sym} symphonic エネルギー (symphonic energy)

E_{sym}^p p -symphonic エネルギー (p -symphonic energy)

E_{sym}^m m -symphonic エネルギー (m -symphonic energy) $\leftarrow$ $p = m$

E エネルギー (energy)

E_p p -エネルギー (p -energy)

E_4 4-エネルギー (4-energy) $\leftarrow$ $p = 4$

C-stationary map E_{con} の stationary point

C-stationary map equation $\operatorname{div}_g \xi_f = 0$

$$\xi_f(X) = \sum_{i=1}^m T_f(X, e_i) df(e_i)$$

symphonic map E_{sym} の stationary point

symphonic map equation $\operatorname{div}_g \sigma_f = 0$

$$\sigma_f(X) = \sum_{i=1}^m (f^* h)(X, e_i) df(e_i)$$

harmonic map E の stationary point

harmonic map equation $\tau_f = 0$

$$\tau_f = \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} df)(e_i) \quad (\text{tension field})$$

p -harmonic map E_p の stationary point

p -harmonic map equation $\tau_f^p = 0$

$$\tau_f^p = \sum_{i=1}^m \left(\nabla_{e_i} (\|df\|^{p-2} df) \right) (e_i) \quad (p\text{-tension field})$$

参考文献

- [1] Brezis, H., Coron, J.M. and Lieb, E., Harmonic maps with defects, Comm. Math. Phys. 107 (1986), 649-705.
- [2] Baird, P. and Eells, J., A conservation law for harmonic maps, In: Geometry Symposium Utrecht 1980, Lecture Note in Math. 894, Springer-Verlag, 1981, 1-25.
- [3] Coron, J.-M. and Gulliver, R., Minimizing p -harmonic maps into the spheres, J. Reine Angew. Math. 401 (1989), 82-100.
- [4] Eells, J. and Lemaire, L., A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10 (1978), 1-68.
- [5] Eells, J. and Lemaire, L., Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385-524.
- [6] Eells, J. and Lemaire, L., Selected Topics in Harmonic Maps, Amer. Math. Soc., Providence, 1983.
- [7] Eells, J. and Sampson, J.H., Harmonic mapping of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160.
- [8] Fujioka, H., An example of harmonic map into the spheres with the singularity of order 4, J. of Geometry and Physics 156 (2020), 103810.
- [9] Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., Riemannian Geometry, 3rd Edition, Springer-Verlag, 2004.
- [10] Hong, M.-C., On the minimality of the p -harmonic map $\frac{x}{\|x\|}, \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$, Calculus of Variations and 13 (2001), 459-468.
- [11] Hardt, S., Lin, F.-H. and Wang, C.-Y., The p -energy minimality of $\frac{x}{\|x\|}$, Communications of Analysis and Geometry 6 (1998), 141-152.
- [12] Jäger, W. and Kaul, H., Rotationally symmetric harmonic maps from a ball into a sphere and the regularity problem for weak solutions of elliptic systems, J. Reine Angew. Math. 343 (1983), 146-161.
- [13] Kawai, S. and Nakauchi, N., Some results for stationary maps of a functional related to pullback metrics, Nonlinear Analysis 74 (2011), 2284-2295.
- [14] Kawai, S. and Nakauchi, N., Weak conformality of stable stationary maps for a functional related to conformality, Differential Geometry and its Applications 31 (2013), 151-165.

- [15] Kawai, S. and Nakauchi, N., Stability of stationary maps of a functional related to pullbacks of metrics, *Differential Geometry and its Applications* 44 (2016) 161-177.
- [16] Kawai, S. and Nakauchi, N., Results of Liouville type for symphonic maps, *Differential Geometry and its Applications* 65 (2019), 147-159.
- [17] Lin, F.-H., Une remarque sur l'application $x/|x|$, *C.R.Acad. Sci. Paris* 305 (1987), 529-531.
- [18] Misawa, M. and Nakauchi, N., A Hölder continuity of minimizing symphonic maps, *Nonlinear Analysis* 75 (2012), 5971-5974.
- [19] Misawa, M. and Nakauchi, N., A Hölder continuity of symphonic maps into the spheres, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 55 (2016), 1-20.
- [20] Misawa, M. and Nakauchi, N., Global existence for the heat flow of symphonic maps into spheres, *Advances in Differential Equations* 23 (2018), 693-724.
- [21] Misawa, M. and Nakauchi, N., Remarks on weakly stationary maps into spheres characterized by wedge product, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 68 (2019), 227-236.
- [22] Misawa, M. and Nakauchi, N., Regularity of the m -symphonic map, *Partial Differential Equations and Applications* 2 (2021), Article 19.
- [23] Misawa, M. and Nakauchi, N., Two examples of harmonic maps into the spheres, *Advances in Geometry* 22 (2022), 23-31.
- [24] Misawa, M. and Nakauchi, N., On the finite-time blow-up of symphonic map flows, *Differential and Integral Equations* 36 (2023), 93-131.
- [25] Nakajima, T., Stability of the energy minimizing map $x/|x|$, *Comm. Partial Differential Equations* 26 (2001), 1175-1181.
- [26] Nakauchi, N., A variational problem related to conformal maps, *Osaka Journal of Mathematics* 48 (2011), 719-741.
- [27] Nakauchi, N., Stress energy tensor for symphonic maps, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* 12 (2019), 431-440.
- [28] Nakauchi, N., Stress energy tensor of C-stationary maps, *Journal of Geometry and Physics* 137 (2019), 217-227.
- [29] Nakauchi, N., Rotationally symmetric symphonic maps, *Annals of Global Analysis and Geometry* 62 (2022), 83-92.
- [30] Nakauchi, N., Conformality of rotationally symmetric maps, *Journal of Geometry and Physics* 179 (2022), article 104575.
- [31] Nakauchi, N., Two results for symphonic maps under assumptions on m -symphonic energy, *Results in Mathematics* 77 (2022), article 216.

- [32] Nakauchi, N., A family of examples of harmonic maps into the spheres with one point singularities, *Examples and Counterexamples* 3 (2023), article 100107.
- [33] Nakauchi, N., A new approach from the calculus of variations to the Lichnerowicz theorem, *Journal of Geometry and Physics* 200 (2024), article 105178.
- [34] Nakauchi, N., Instability of a family of examples of harmonic maps, *Ann. Global Analysis and Geometry* 65 (2024), article number 10.
- [35] Nakauchi, N., Instability as p -harmonic maps for a family of examples, *Nonlinear Analysis* 246 (2024), 113585.
- [36] Nakauchi, N., Instability as symphonic maps for a family of examples, preprint.
- [37] Nakauchi, N., Instability as C-stationary maps for a family of examples, preprint.
- [38] Nakauchi, N. and Takenaka, Y., A variational problem for pullback metrics, *Ricerche di Matematica* 60 (2011), 219-235.
- [39] Price, P., A monotonicity formula for Yang-Mills fields, *Manuscripta Math.* 43 (1983), 131-166.
- [40] Saloff-Coste, Laurent, *Aspects of Sobolev-Type Inequalities*, London Mathematical Society Lecture Note Series 289, Cambridge University Press, 2002.
- [41] Schoen, R. and Yau, S.-T., Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with non-negative Ricci curvature, *Comment. Math. Helv.* 39 (1976), 333-341.
- [42] Schoen, R. and Yau, S.-T., *Lectures on Differential Geometry*, International Press, Massachusetts, 1994.

索引

- D , 62, 72
 δ_{ij} , 11, 16, 36, 39, 70, 80, 130, 171, 182
 δ^{ij} , 39
 δ_j^i , 39
 δE , 144
 δE_p , 159
 δE_{con} , 19
 δE_{sym} , 90
 $\delta^2 E$, 144
 $\delta^2 E_p$, 159
 $\delta^2 E_{con}$, 24
 $\delta^2 E_{sym}$, 92
 df , 8
 $(df)_x$, 8
 $\|df\|$, 13
 E , 144
 E_4 , 87
 E_p , 159
 E_{con} , 17
 E_{sym} , 87
 E_{sym}^m , 110
 E_{sym}^p , 110
 η , 119, 147, 160, 177, 183
 f , 7
 f^*h , 8
 g , 7
 h , 7
 h_y , 8
 M , 7
 (M, g) , 7
 N , 7
 (N, h) , 7
 ξ_f , 20
 σ_f , 91
 $T_x M$, 8
 $T_y N$, 8
 τ_f , 94
 X , 8
 X_x , 8
 Y , 8
 Y_x , 8
 Z , 8
 Z_x , 8
 1 パラメーターの族, 38
 4-energy, 87
 4-harmonic map のエネルギー, 87
 4-harmonic map の方程式, 180
 4-エネルギー, 3, 87
 Bernstein, 109
 Bernstein の定理, 109
 C^r 級, 7
 C^∞ 級, 7
 conformal, 1
 conformal deformation, 2
 conformal field, 2
 conformal gauge, 2
 conformal geometry, 2
 conformal invariant, 2
 conformal map, 2, 8, 13
 conformal transformation, 2
 conformality エネルギー, 2, 17
 conformality エネルギーの分解, 3
 conformality エネルギー密度, 17
 conformality エネルギー密度の分解, 88
 conformality テンソル, 14
 C-stationary map, 18
 C-stationary map, 2, 19
 C-stationary map equation, 23
 C-stationary map として安定, 30
 C-stationary map として不安定, 30, 180

C-stationary map の方程式, 23, 181, 182
cut-off 関数, 119, 147, 160, 177, 183

differential map, 8

divergence, 33

divergence free, 33

energy, 144

energy density, 144

energy density of conformality, 17

energy of conformality, 2, 17

equator map, 128

Euler-Lagrange equation, 23, 92

Euler-Lagrange 方程式, 144

functional, 42

harmonic, 90

harmonic map, 2, 4, 16, 90

harmonic map equation, 144

harmonic map として安定, 144

harmonic map として不安定, 143, 144

harmonic map の方程式, 144

harmonic map の方程式の弱解, 157

Hessian, 21, 35

isometry, 12

Kronecker のデルタ記号, 11, 16, 36, 39, 70, 80,
130, 171, 182

Liouville, 107

Liouville type theorem, 107

Liouville の定理, 107

lower semi-continuity, 43

L^p -積分量, 3

metric, 7

minimizer, 2

m -symphonic, 110

m -symphonic energy, 110

m -symphonic エネルギー, 110

normal coordinate, 95, 122

one parameter family, 38

p -energy, 159

p -energy density, 159

p -harmonic map equation, 159

p -harmonic map として安定, 159

p -harmonic map として不安定, 158, 159

p -harmonic map の方程式, 159

p -symphonic, 110

p -symphonic energy, 110

p -symphonic エネルギー, 110

pull back, 8

pullback, 8

pullback のトレース, 89

pullback のノルム, 89

p -エネルギー, 3, 159

p -エネルギー密度, 159

radial map, 2, 4, 127

Ricci flow, 88

Riemannian manifold, 7

Riemannian metric, 7

$\mathbb{R}^{m+1}$ の標準的な接続, 62, 72

sectional curvature, 103

smooth, 7

smooth manifold, 7

stable, 3, 30, 52, 61, 74, 94, 144, 159

stable C-stationary map, 3, 61, 74

stationary, 144

stationary solution, 2

stress energy tensor, 31

symphonic, 90

symphonic energy, 2, 87

symphonic energy density, 87

symphonic map, 2, 3, 90

symphonic map equation, 92

symphonic map として安定, 94

symphonic map として不安定, 94, 168

symphonic map の方程式, 92, 169, 180

symphonic エネルギー, 2, 3, 87

symphonic エネルギー密度, 87

tangent space, 8

tangent vector, 8

tangent vector field, 8
 tension field, 94
 tensor of conformality, 14
 total scalar curvature, 88
 total scalar curvature の gradient flow, 88
 trace, 33
 trace free, 33

 unstable, 30, 94, 143, 144, 158, 159, 168, 180

 variation, 18, 90
 variation vector field, 19, 90, 144, 159
 vector, 8
 vector field, 8

 weakly conformal map, 3, 12, 13, 61, 74
 weakly harmonic map, 157

 Yamabe flow, 88

 安定, 3, 4, 30, 52, 61, 74, 94, 144, 159
 安定な C-stationary map, 3, 61, 74

 エネルギー, 144
 エネルギー密度, 144

 オイラー・ラグランジュ方程式, 23, 92

 ガウス写像, 109
 拡大・縮小写像, 10
 下半連続性, 43

 境界をもたない, 7
 共形, 1
 共形写像, 2
 協和, 90
 協和写像, 90
 局所的な正規直交フレーム, 13
 局所的な正規直交フレームのとり方によらない,
 20

 計量, 7
 計量を保つ, 12
 原点に特異点, 4

 最小解, 2

弱解, 124, 157
 弱解の正則性, 124
 弱解の存在, 124

 正規座標, 48, 95, 122
 正規直交フレーム, 13
 正則性, 124
 接空間, 8
 接空間のレベルで, 本質的に, 拡大・縮小写像,
 1, 12
 接ベクトル, 8
 接ベクトル場, 8
 線形写像, 10
 線形代数, 9
 線形変換, 10

 第一変分, 18, 19, 90, 144
 第一変分公式, 20, 91
 第二変分, 18, 24, 92
 第二変分公式, 24, 93
 多様体, 7
 多様体の次元, 7
 断面曲率, 103

 調和, 90
 調和写像, 16, 90

 停留解, 2

 等角, 1
 等角写像, 2
 等長写像, 12
 特異点, 4
 トレース, 89

 内積を保つ, 10
 なめらかな, 7
 なめらかな多様体, 7

 ノルム, 89

 発散, 33
 汎関数, 42

 引き戻し, 8

引き戻す, 8

微分写像, 8

微分写像のノルム, 13

不安定, 4, 30, 94, 143, 144, 158, 159, 168, 180

不安定性, 2

不安定な解の族, 4

部分的正則性, 125, 126

ベクトル, 8

ベクトル場, 8

変分, 18, 90, 144

変分学, 18

変分ベクトル場, 19, 90, 144, 159

変分問題, 18

本質的に, 拡大・縮小写像, 1, 11, 12

リーマン計量, 7

リーマン多様体, 7

山口大学数理科学レクチャーノート No.5

中内伸光 著

conformal maps に関連する変分問題とその周辺

2025 年 3 月
