

Ⅲ 研究ノート Ⅲ

確率的マクロ均衡モデルにおける生産性の分布の導出過程〔Ⅰ〕¹⁾

—経済物理学を用いたマクロ経済学研究—

山口大学経済学部 加藤 真也

KATO, Shinya

山口大学大学院創成科学研究科 鳴海 孝之

NARUMI, Takayuki

1 はじめに

本稿は、吉川（2020）第3章に記載されている生産性の分布の導出過程について解説していくことを目的としている。吉川（2020）では、生産性の分布の存在こそがケインズ経済学の核心である有効需要の原理の裏付けであるとし、統計物理学の手法を用いて生産性の分布の導出を行っている。本節では、吉川（2020）第3章の流れと本稿との対応関係について説明していく。

吉川（2020）第3章では、最初に生産性の分布の意義について解説している。生産性の分布が存在することは企業間の生産性に格差があることを意味するが、この生産性格差こそがケインズ経済学（特に、有効需要の原理）の基礎であることを、新古典派経済学と対比しながら解説している（本稿第2節）。次に、独占的競争市場を前提とし、屈折個別需要曲線を想定することで、需要の増加が生産量や雇用のみに影響を与え、価格には影響を与えないことを説明している（第3節）。最後に、統計物理学の手法を用いて生産性の分布を導出している（第4節）。生産性の分布は左側が指数分布に従い、右側がベキ分布に従うことが示されるが、本稿では生産性の分布（の左側）が指数分布に従うところまでを解説することとする。第5節では上記を踏まえた若干の覚書を記載しておく。

2 生産性の分布の意義

新古典派経済学では、労働の価値限界生産性は名目賃金と等しくなる。労働市場が1つである場合、名目賃金はすべての企業で等しくなり、また、すべての企業で労働の価値限界生産性（以降、労働生産性や単に生産性と表記する）が等しくなる。つまり、新古典派経済学では労働生産性は「分布」ではなく「点」として存在することになる。しかし、現実経済では、労働生産性の分布が存在し（これにより名目賃金も分布として存在する）、この分布が存在するということは、労働生産性が高い企業と低い企業が存在する、つまり、生産性格差（人的資本の格差）が存在することを意味している。また、本節で説明するように、企業間の生産性格差はケインズ経済学の核心である「有効需要の原理」が成立するこ

1) 本稿は、2023年11月17日に吉川洋氏（東京大学名誉教授）を山口大学経済学部にお招きして開催された研究会において、著者によって報告された「吉川洋氏の研究報告に対するコメントと質問」に基づいている。また、本稿の大部分は、吉川洋（2020）『マクロ経済学の再構築—ケインズとシュンペーター』岩波書店の第3章「ケインズ経済学のミクロ的基礎づけ—確率的マクロ均衡」で紹介されている生産性の分布の導出過程を丁寧に記載し、若干の発展的な議論を付記している。本号〔Ⅰ〕では、指数分布の導出までを扱い、次号〔Ⅱ〕では、ベキ分布の導出までを扱う。

との裏付けとなる。そのため、生産性の分布の導出はケインズ経済学において本質的に重要であると考えられる。また、生産性の分布導出のミクロ的基礎付けとしては、統計物理学をベースとした確率的マクロ均衡モデルを用いることとする。

経済全体に異なる労働生産性をもつセクター²⁾が K 種類あり、セクター i ($i=1, 2, \dots, K$) の生産量を y_i 、労働者数を n_i 、労働生産性³⁾を c_i ($c_1 < c_2 < \dots < c_K$) とする。ただし、労働生産性 c_i は

$$c_i = \frac{y_i}{n_i} \quad (1)$$

であり、生産要素は労働のみと仮定している。

また、吉川 (1992) により、現実には企業は季節変動に伴う生産の平準化を行っておらず、企業の限界費用はほぼ一定であることが示されているため、本稿でも各セクターの限界費用は一定、つまり、線形の生産関数

$$y_i = c_i n_i \quad (c_i > 0) \quad (2)$$

とし、労働生産性 c_i は一定と仮定する。

第 i 財の名目価格を P_i とし、セクター i の労働の価値限界生産性 $P_i c_i$ を

$$P_1 c_1 < P_2 c_2 < \dots < P_K c_K \quad (3)$$

といったように並べるとする⁴⁾。第1財を基準財とし、(3)式を P_1 で割ると

$$c_1 < p_2 c_2 < \dots < p_K c_K \quad (4)$$

となる。ただし、 $p_i = P_i / P_1$ であり、 p_i は第1財で測った第 i 財の相対価格 (実質価格) である。

また、各セクターにおける労働者数 n_i の総和が労働供給 N に等しいとすると

$$\sum_{i=1}^K n_i = N \quad (5)$$

となる⁵⁾。

ここで、各セクターの生産量 (供給量) y_i と各セクターが直面する需要量 (個別需要量) D_i が等しいとし、第1財で測った実質 GDP を Y とすると、

$$\begin{aligned} Y &= y_1 + \sum_{i=2}^K p_i y_i = c_1 n_1 + \sum_{i=2}^K p_i D_i = c_1 \left(N - \sum_{i=2}^K n_i \right) + \sum_{i=2}^K p_i D_i = c_1 \left(N - \sum_{i=2}^K \frac{y_i}{c_i} \right) + \sum_{i=2}^K p_i D_i \\ &= c_1 N + \sum_{i=2}^K \frac{1}{c_i} (p_i c_i - c_1) D_i \end{aligned} \quad (6)$$

となる⁶⁾。

2) 労働生産性が異なる企業は異なるセクターに属しており、労働生産性が同じ企業は同じ財・サービスを生産していると仮定する。また、職探し (失業)、余暇及び家庭内生産もある種の生産活動を行っているとしてセクターに含んでいる。そのため、 n_i を「労働」者数と表記するには若干の誤解がある。

3) ここで、 c_i は労働の価値限界生産性ではなく、労働の限界生産性 (平均生産性) である。

4) すでに、 $c_1 < c_2 < \dots < c_K$ とする仮定を置いていたが、(3)式はさらに追加の仮定である。また、セクターである失業や余暇、家庭内生産については P_i が存在しないため、それらの P_i は影の価格 (シャドウプライス) である。

5) セクターには失業や余暇、家庭内生産も含まれるため、 N には就業者、失業者、非労働力人口を含んでいる。そのため、 N は労働供給 (労働力人口) よりも、労働力人口と非労働力人口を合わせた15歳以上人口に近い概念である。

6) (6)式では、労働市場の均衡条件である(5)式も成立していることに注意である。

完全競争市場を前提とする新古典派経済学では、すべてのセクターで労働の限界価値生産性 $P_i c_i$ が等しくなる。つまり、

$$P_1 c_1 = P_2 c_2 = \dots = P_K c_K \quad (7)$$

より、

$$c_1 = p_2 c_2 = \dots = p_K c_K \quad (8)$$

が成立するので、(6)式より、

$$Y = c_1 N + \sum_{i=2}^K \frac{1}{c_i} \underbrace{(p_i c_i - c_1)}_{=0} D_i = c_1 N \quad (9)$$

となり、実質 GDP が労働の限界生産性 c_1 (テクノロジー) と労働供給 N (生産要素の賦存量) で決まることとなる。これはまさに新古典派経済学の特徴である。

それに対して、(4)式のように労働に関する生産性格差が存在する場合⁷⁾、 $p_i c_i - c_1 > 0$ ($i=2, 3, \dots, K$) と(6)式より、個別需要量 D_i ($i=1, 2, \dots, K$) が増加すれば、実質 GDP が増加することが分かる。これはケインズ経済学における有効需要の原理であり、セクター間での労働の価値限界生産性の格差がケインズ経済学の基礎になることを意味している。

3 屈折個別需要曲線

各セクターが直面する個別需要曲線として、Sweezy (1939), Negishi (1979) に従い、屈折個別需要曲線を想定する(図1)。図1のように、各セクターは独占的競争下にあり、それぞれの個別需要曲線 D_i は右下がり、かつ、現時点の価格 \bar{p}_i と生産量 \bar{y}_i の組において屈折しているとする。このとき、各セクターは最適行動の結果、価格は \bar{p}_i 、生産量は \bar{y}_i を選択することとなる。また、このセクターが直面する個別需要量が増加した場合、図1のように個別需要曲線 D_i と限界収入曲線 MR_i は右上方にシフトするが、セクターの最適行動の結果、実現する価格は \bar{p}_i のまま変わらず、生産量のみ \bar{y}_i' まで増加することとなる⁸⁾。さらに、名目賃金 w_i の上昇は限界費用曲線 MC_i を上方へシフトさせるが、(そのシフト幅が小さい場合) 価格と生産量の組は変化しないことも図1から分かる⁹⁾。このように、屈折個別需要曲線を想定することで、セクターは最適行動の結果、需要の増加に対し、価格を変えずに生産量と雇用を増加させるという特徴をもつことになる。

また、当初、屈折個別需要曲線が価格 \bar{p}_i 、生産量 \bar{y}_i で屈折していると外生的に与えているが、これらの値がどのように決まるかはここまでで明らかでない。次節では、総需要がどのようにセクター間で分

7) 完全競争市場では、

$$P_1 c_1 = P_2 c_2 = \dots = P_K c_K = w$$

が成立する。ただし、 w は名目賃金である。また、(3)式が成立する(生産性格差が存在する)下では、セクター間の名目賃金は一致しないため、第 i セクターにおける名目賃金を w_i と記載する必要がある。

さらに、次節で述べるように本稿では独占的競争市場を考えるため、各財・サービスは差別化されているものとして扱う。

8) 本モデルは生産要素として労働のみを想定しているため、生産量の増加は雇用(労働需要)の増加を表している。

9) 当該セクターが生産する財に対する需要が増加した際、生産量を増加させるために労働需要が高まり、労働市場の逼迫し、名目賃金が増加することが考えられる。しかし、ここで説明されている通り、名目賃金の多少の上昇では価格や生産量に影響を及ぼさない。

配され、その結果、各セクターでどのような生産量が実現するのかについて、統計物理学を用いてミクロ的基礎付けを行う¹⁰⁾。

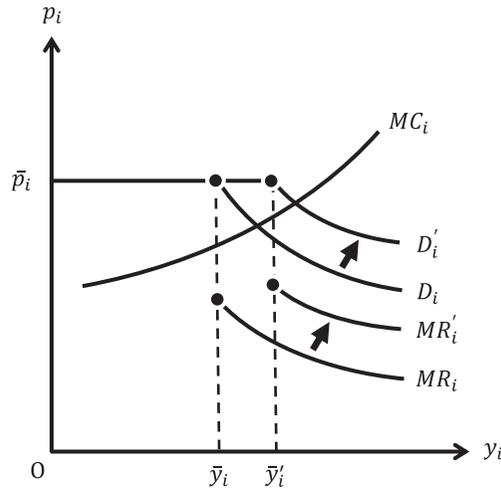


図1 独占的競争をする企業の屈折個別需要曲線

出典) Negishi (1979), 吉川 (2020)

注) D : 個別需要曲線, MR : 限界収入曲線, MC : 限界費用曲線, プライム (') は需要増加後を示す。

4 生産性の分布の導出 (指数分布まで)

本節では、統計物理学の手法を用いて、指数分布に従う生産性の分布を導出する。

ここでは、労働供給 N を所与と仮定し、労働の配分を $n = (n_1, n_2, \dots, n_K)$ とする。これは N 人の労働者の各セクターへの配分を表している。労働の配分 n が実現する場合の数を W_n とすると、これは n が実現するように N 人を並び替える問題であるので、 W_n は

$$W_n = \frac{N!}{\prod_{i=1}^K n_i!} \tag{10}$$

となる。

また、 N 人を異なる K 種類の生産性に振り分ける場合の数は K^N であるから、特定の配分 $n = (n_1, n_2, \dots, n_K)$ が得られる確率 P_n は

$$P_n = \frac{W_n}{K^N} = \frac{1}{K^N} \frac{N!}{\prod_{i=1}^K n_i!} \tag{11}$$

となる。付録 A ではこの数値例を示している。

次に、確率 P_n が最大化された配分 n が現実に観察されているはずであるので、 P_n の最大化問題を考える。ただし、ここでは以下2本のマクロ的制約式の下での P_n の最大化を考える。

制約式の1本目は、労働の供給制約式(5)であり、各セクターにおける労働者数 (労働需要) n_i の総和が労働供給 N になるという制約式である。

10) これは屈折個別需要曲線が生産量 \bar{y}_i で屈折していることのミクロ的基礎付けになっている。

制約式の2本目は、財市場における有効需要の制約（有効需要の原理）

$$\sum_{\substack{i=1 \\ =Y}}^K c_i n_i = D \quad (12)$$

であり、 Y は総供給であり、 D は総需要である。また、本節では D を所与とする。労働生産性 c_i も所与であることに注意すると、(12)式は所与である総需要 D が実現するように、 n_i が調整されて総供給 Y が実現することとなる。これはKeynes（1936）の有効需要の原理を意味している。

これら(5)式と(12)式の2本のマクロの制約式の下で、 P_n が最大化される労働の配分 n を求める。まず、(11)式に自然対数をとった上で N で割り、スターリングの公式

$$\ln x! \approx x \ln x - x \quad (13)$$

を用いることで、

$$\frac{\ln P_n}{N} = -\ln K - \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} \quad (14)$$

が得られる。付録Bではこの導出を示している。

次に、

$$S = -\sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} \quad (15)$$

とおくが、 S の最大化は P_n の最大化と同値である。さらに、 S は（シャノンの）エントロピー¹¹⁾であり、これは生産性の分布におけるセクター間での労働者数のばらつきに対応している。

次に、 S の最大化のために、ラグランジアン L を

$$L = -\sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} + \alpha \left(N - \sum_{i=1}^K n_i \right) + \beta \left(D - \sum_{i=1}^K c_i n_i \right) \quad (16)$$

とおく。ただし、 α, β はラグランジュ乗数である。ここで、 n_i を実数として、

$$\frac{\partial L}{\partial n_i} = 0 \quad (17)$$

と(16)式を用いることで、

$$\frac{n_i}{N} = \frac{e^{-\beta N c_i}}{\sum_{j=1}^K e^{-\beta N c_j}} \quad (18)$$

を導出することができる。付録Cではこの導出を示している。

(18)式が生産性の分布であり、統計物理学では指数分布（ボルツマン分布）と呼ばれる分布に対応している。図2は(18)式から得られる分布であり、 $\beta = -1/5000$ と $\beta = -1/7500$ の2通りのグラフを描いている¹²⁾。図2の生産性の分布が右上がりである理由は、生産性が高いセクター（企業）は労働者に対してより魅力的な職を提供するため、労働者は可能な限り生産性の高いセクターへ移動しようとすると考えられるからである¹³⁾。

11) シャノンのエントロピーとは、情報理論における情報量の期待値を表したものであり、情報エントロピーとも呼ばれる。

12) 図2は $N=100$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_{100}) = (1, 2, \dots, 100)$ として得られる。

13) 後述するが、この仮定は労働者の質を考慮しておらず、雇用のミスマッチを無視していると考えられる。

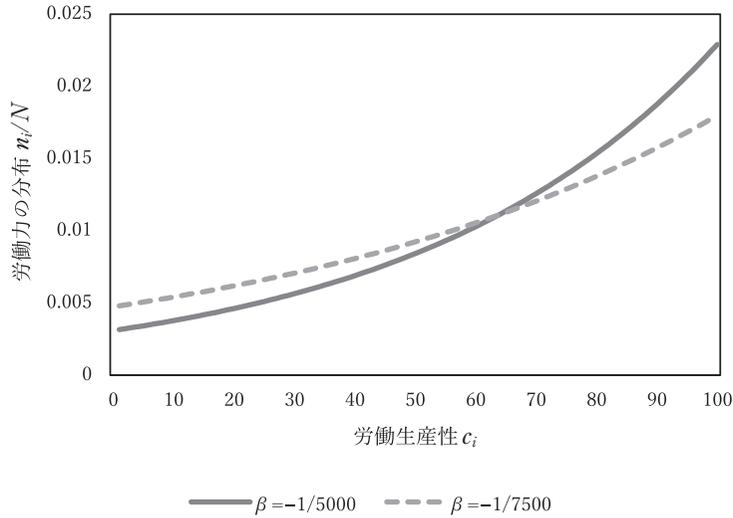


図2 生産性の分布 (指数分布)
出典) 吉川 (2020) より, 著者ら作成

次に, 図3は総需要 D とエントロピー S の関係を示している¹⁴⁾。エントロピー S は生産性の分布におけるセクター間での労働者数のばらつきを表していたが, これを決める究極の要因が総需要 D であることを図3は意味している。

さて, 最も高い生産性 c_K にすべての労働者が雇用されている状況が, 総需要の最大値 D_{max} に対応しているとする, D_{max} におけるエントロピー S は, $n_K/N=1, n_i/N=0 (i \neq K)$ より,

$$S = - \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} = - \left(\frac{n_1}{N} \ln \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} \ln \frac{n_2}{N} + \dots + \frac{n_K}{N} \ln \frac{n_K}{N} \right) = - (0 + 0 + \dots + 1 \cdot \ln 1) = 0 \quad (19)$$

と計算することができる¹⁵⁾。これは図3において, グラフと横軸の交点に対応している。

また, すべてのセクターに労働者が均等に分配される ($n_i = N/K$), つまり, エントロピーが最大化されている状況が, 総需要の最小値 D_{min} に対応しているとする, D_{min} におけるエントロピー S は

$$S = - \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} = - \sum_{i=1}^K \frac{N/K}{N} \ln \frac{N/K}{N} = - \sum_{i=1}^K \frac{1}{K} \ln \frac{1}{K} = - \frac{1}{K} \cdot K \ln K^{-1} = \ln K \quad (20)$$

となる¹⁶⁾。これは図3において, グラフの最も左上の点に対応している。

さらに, ここではラグランジュ乗数 β について言及しておく。ラグランジュ乗数 β は, (16)式で表現されるラグランジアン L のラグランジュ乗数であるため, ラグランジュ乗数の特徴から

14) 図3は図2と同じ設定の下でシミュレーションして得られた結果である。この数値例では, $D_{max} = 10000, D_{min} = 5050, \ln K \approx 4.61$ であり, 例えば, $\beta = -1/5000$ のとき, $D \approx 6615, s \approx 4.45$ である。

15) D_{max} を超える総需要の場合は, 財価格が上昇することが考えられる。

16) D_{min} と表記しているが, 総需要がこの値より小さくなることも考えられる。この状況では生産性の分布が右下がりになることから本稿の仮定 (生産性の分布は右上がり) に反することとなる。しかし, 総需要が D_{min} よりも小さくなるような極端な不況下では, 生産性の分布が右下がりになり, 生産性が低いセクターに労働者が集まると考えることもある程度正当化できると考えられる (付録D)。さらに, 総需要がほとんど0に近いような状況では, 最も生産性が低いセクター (例えば, 失業) にすべての労働者が分配されることとなる。

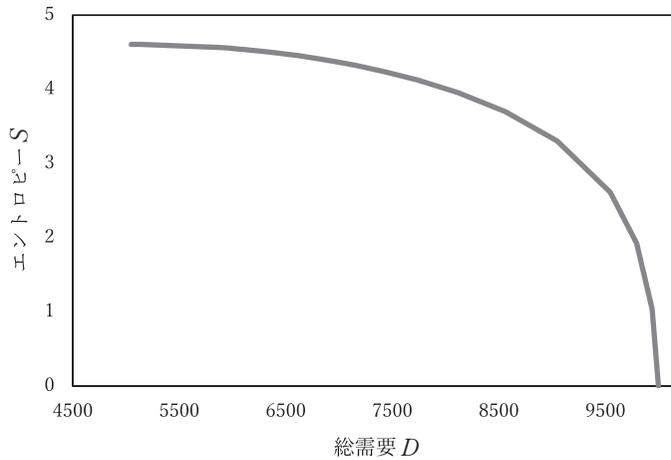


図3 総需要とエントロピーの関係
出典) 吉川 (2020) より, 著者ら作成

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial D} \quad (21)$$

が成立する¹⁷⁾。つまり、図3のグラフの接線の傾きが β である。そのため、 β は負の値であることも分かり、 β が絶対値で大きいときには高い総需要に対応していることも分かる。また、図2において、絶対値で大きい $\beta = -1/5000$ は高い総需要に対応しており、 $\beta = -1/7500$ は低い総需要に対応していることが分かる。さらに、図2からは高い総需要 ($\beta = -1/5000$) のとき、生産性の低いセクターに雇用される労働者は比較的少なく、生産性の高いセクターに雇用される労働者は比較的多くなることが読み取れる。

5 覚書

ここまでの議論で、本モデルで考慮されていないことについて触れておく。

まず、ここまで財価格 P_i 、賃金 w_i の決定に関して議論されていないことに注意をしなければならない。セクターが最適行動を採っていれば、

$$P_1 c_1 = w_1, \quad P_2 c_2 = w_2, \quad \dots, \quad P_K c_K = w_K \quad (22)$$

が成立するはずである。本モデルでは、 c_i が所与であるため、 P_i と w_i のいずれかが決定すれば、もう一方も決定することになる。また、名目賃金 w_i の大小に関して、 c_i が大きいセクターであっても P_i が小さければ、 w_i も小さい可能性があることにも注意をしなければならない。

また、労働者は生産性が高いセクターに移動していくという仮定であるが、この仮定は、労働者の生産性はそのセクターの生産性の高さを決めることや、労働者とセクターのミスマッチが考慮されていないと考えられる。特に後者に関して、生産性の低い労働者は生産性の高い企業に移りたくても移れない

17) 統計物理学において、 β は逆温度 (つまり、 β の逆数が温度) であり、 D はエネルギーである。物理学では、温度は非負の値をとり、 β と D には正の関係があるが、本稿では β が負の値をとると考えているため、 β (の逆数) が「負の温度」を意味することとなる。

ことが考えられるので、労働者の質の分布を考慮したモデルに修正することが考えられる。

さらに、本モデルでは生産要素を労働のみに限定しており、資本を考慮していない。そのため、資本の使用が明示的でないため、設備投資が考慮できないことも本モデルの課題であると言えよう。

最後に、総需要 D が外生的に与えられており、 D がどのように決定されるかが明らかでない。総需要 D は所得に依存するため、内生的に決まる側面もあるはずであるが、この辺りも考慮したモデルに修正することが望まれると考えられる。

以上は本モデルの今後の展望でもあり、本モデルを拡張することで解消できると考えられる。我々に残された課題としてこれを覚書としておく。

参考文献

吉川洋 (1992) 『日本経済とマクロ経済学』 東洋経済新報社

吉川洋 (2020) 『マクロ経済学の再構築—ケインズとシュンペーター』 岩波書店

Keynes, J. M. (1936), "*The General Theory of Employment, Interest, and Money*," London: Macmillan (問宮陽介 (2008) 『雇用、利子および貨幣の一般理論 (全2巻)』 岩波文庫)

Negishi, T. (1979), "*Microeconomic Foundation of Keynesian Macroeconomics*," Amsterdam: North-Holland. terdam: North-Holland.

Sweezy, P. M. (1939), "Demand under condition of oligopoly," *Journal of Political Economy*, 47(4), pp. 568-573.

付録

A P_n の数値例

労働の配分 $n = (n_1, n_2, n_3) = (1, 3, 2)$ が実現する場合の数 W_n は、 n が実現するように6人を並べ替える問題であるので、

$$W_n = \frac{N!}{\prod_{i=1}^K n_i!} = \frac{6!}{1! \cdot 3! \cdot 2!} = 60 \quad (\text{A-1})$$

より、60通りとなる。ここで、 $\sum_{i=1}^K n_i = N$ はすでに成立していることに注意である。

また、6人を異なる3種類の生産性に振り分ける場合の数は、 $3^6 = 729$ 通りであるから、特定の配分 $n = (1, 3, 2)$ が得られる確率 P_n は

$$P_n = \frac{W_n}{K^N} = \frac{60}{729} \doteq 0.08 \quad (\text{A-2})$$

となる。他の例として、 $n = (2, 2, 2)$ 、 $N=6$ であれば、 $P_n \doteq 0.12$ である。何も制約がなければ、 n の各要素の値が均等に近いほど、 n が実現する確率 P_n が大きくなる。

B (14)式の導出

ここでは、(14)式の導出過程について記載しておく。

まず、(11)式の両辺に自然対数をとると、

$$\ln P_n = \ln \frac{1}{K^N} + \ln N! - \ln \prod_{i=1}^K n_i! = -N \ln K + \ln N! - \sum_{i=1}^K \ln n_i! \quad (\text{B-1})$$

となる。ここで、スターリングの公式(13)を用いることで、(B-1)式は

$$\begin{aligned} \ln P_n &\doteq -N \ln K + (N \ln N - N) - \sum_{i=1}^K (n_i \ln n_i - n_i) \\ &= -N \ln K + N \ln N - N - \sum_{i=1}^K n_i \ln n_i + \sum_{i=1}^K n_i \\ &= -N \ln K + N \ln N - N - \sum_{i=1}^K n_i \ln n_i + N \\ &= -N \ln K + N \ln N - \sum_{i=1}^K n_i \ln n_i \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

と変形できる。(B-2)式の両辺を N で割ることで、

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln P_n}{N} &\doteq -\ln K + \ln N - \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln n_i \\
 &= -\ln K + \ln N - \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln \left(\frac{n_i}{N} \cdot N \right) \\
 &= -\ln K + \ln N - \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \left(\ln \frac{n_i}{N} + \ln N \right) \\
 &= -\ln K + \ln N - \left(\sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} + \ln N \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \right) \\
 &= -\ln K + \ln N - \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} - \ln N \\
 &= -\ln K - \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N}
 \end{aligned}$$

となり, (14)式が得られる。

C (18)式の導出

ここでは, (18)式を導出する。

(16)式と(17)式より,

$$\frac{\partial L}{\partial n_i} = -\left(\frac{1}{N} \ln \frac{n_i}{N} + \frac{n_i}{N} \cdot \frac{1/N}{n_i/N} \right) - \alpha - \beta c_i = -\frac{1}{N} \ln \frac{n_i}{N} - \frac{1}{N} - \alpha - \beta c_i = 0 \tag{C-1}$$

となり, (C-1)式はさらに,

$$-\frac{1}{N} \ln \frac{n_i}{N} - \frac{1}{N} - \alpha - \beta c_i = 0$$

$$-\ln \frac{n_i}{N} - 1 - \alpha N - \beta N c_i = 0$$

$$\ln \frac{n_i}{N} = -1 - \alpha N - \beta N c_i$$

$$\frac{n_i}{N} = e^{-1 - \alpha N - \beta N c_i} \tag{C-2}$$

となる。(C-2)式の両辺に総和をとると,

$$\sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^K e^{-1 - \alpha N - \beta N c_i}$$

となり, $\sum_{i=1}^K n_i/N = 1$ より,

$$\sum_{i=1}^K e^{-1 - \alpha N - \beta N c_i} = 1$$

$$e^{-1-aN} \sum_{i=1}^K e^{-\beta N c_i} = 1$$

$$\sum_{i=1}^K e^{-\beta N c_i} = e^{1+aN} \quad (\text{C-3})$$

となるので、(C-2)式と(C-3)式から

$$\frac{n_i}{N} = e^{-1-aN-\beta N c_i} = \frac{e^{-\beta N c_i}}{e^{1+aN}} = \frac{e^{-\beta N c_i}}{\sum_{j=1}^K e^{-\beta N c_j}}$$

となり、(18)式を導出することができた。

D 総需要が D_{min} より低いケース（極端な不況）

脚注16で議論したような、生産性の分布が右下がりになるような極端な不況（総需要が D_{min} よりも小さい）のケースについて言及しておく。シミュレーション結果は図4の通りである。

図4において、実線が $\beta=1/5000$ 、点線が $\beta=1/7500$ の場合である。それぞれの場合について、(12)式を用いて総需要 D を求めると、 $\beta=1/5000$ のとき、 $D \approx 3485$ となり、 $\beta=1/7500$ のとき、 $D \approx 3970$ となる。つまり、 β の値が大きくなるほど、総需要 D が小さい状況に対応していることが読み取れる。

また、総需要 D がより小さい $\beta=1/5000$ のときには、労働生産性 c_i が低いセクターでより労働者数が多くなっており、労働生産性 c_i が高いセクターでより労働者数が少なくなっていることが分かる。このケースは、極端な不況下に対応していると考えられるであろう。ただし、本稿での仮定である、生産性の分布が右上がりであるとの仮定を満たしていないことには注意しなければならない。

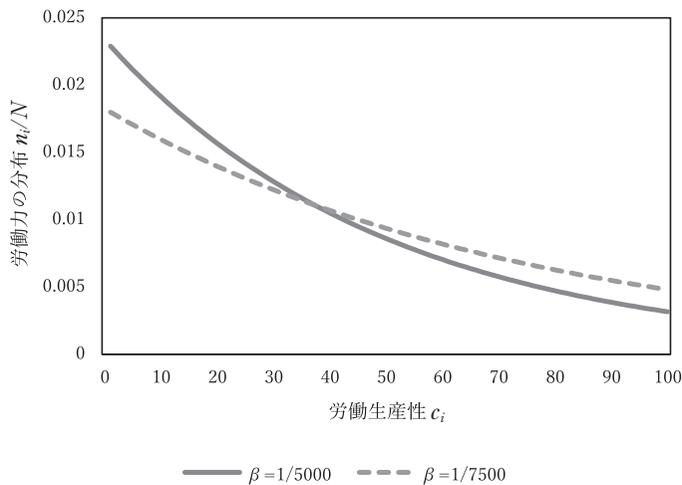


図4 生産性の分布（極端な不況のケース）