山口大学教育学部附属教育実践総合センター研究紀要第57号（2024.3）

命題論理からみた大学入試問題の解法

北本　卓也

How to Solve University Entrance Examination Problem from the Viewpoint of Propositional Logic

KITAMOTO Takuya

（Received December 14, 2023）

キーワード：命題論理、大学入試問題、Quantifier Elimination

はじめに

数学の教育において、命題論理はその厳密さと抽象性から、問題解決における重要な役割を果たしている。命題論理は、論理学の基本的な構造を提供し、数学的思考力の養成に寄与する枠組みとなっている。この研究は、命題論理を通じた数学の問題解決における学習効果に焦点を当て、具体的には数式処理の技法である Quantifier Elimination（以下、QE と略記する）がいかにその促進に寄与するかを探究するものである。

QE は、数学の問題を命題論理で表現する際に欠かせない手法である。この技法を用いることで、数学の問題を含む複雑な命題論理をよりシンプルで直感的な形に変換できる。具体的な手順としては、まず数学の問題を∀や∃を含む命題論理で表現する。その後、QE を用いて∀や∃を含まない形の命題論理に変換する。最終的には、QE によって得られた∀や∃を含まない命題論理を数学的に表現し直すことで、問題の解答を導き出すことが可能となる。

本研究では、QE が数学問題解決に及ぼす影響を探究し、その教育的有用性や実践的な応用に焦点を当てる。特に、数学問題を QE を用いて解く際の手法やその適用範囲、そして数学的思考力や問題解決能力に与える具体的な影響について掘り下げる。

この研究は、数学問題解決における QE の有効性を明らかにし、教育現場における数学教育の改善や数式処理の発展に寄与することを目指している。その結果が、数学教育における学生の理解と応用能力の向上に資することを期待している。

１．命題論理について

１－１　命題論理の概要

命題論理とは、数理論理学の一分野であり、命題の真偽に関する法則を研究する学問である。命題とは、真か偽のいずれかの値をとる言明のことである。命題論理では、命題を論理記号を用いて記号化し、それらの真偽の関係を論理演算を用いて表す。

命題論理の基本的な論理演算は、論理積（AND）、論理和（OR）、否定（NOT）、含意（IMPLIES）、双含意（EQUIVALENCE）の５つである。

- 論理積（AND）は、両方の命題が真であるときのみ真となる論理演算である。
- 論理和（OR）は、いずれかの命題が真であるとき、または両方の命題が真であるときに真となる論理演算である。
- 否定（NOT）は、命題が偽であるときに真となる論理演算である。
- 含意（IMPLIES）は、前提が真であるとき、結論も真となる論理演算である。
- 双含意（EQUIVALENCE）は、前提と結論がどちらも真であるとき、またはどちらも偽であるときに真

となる論理演算である。

命題論理は、数学やコンピュータサイエンス、哲学など、さまざまな分野で応用されている。数学においては、命題論理は証明や推論の基礎となる。コンピュータサイエンスにおいては、命題論理はプログラミング言語の論理演算や、形式手法の基礎となる。哲学においては、命題論理は論理学や認識論の基礎となる。

１－２　命題論理における∀、∃の記法と意味

命題論理における∀、∃の記法は、以下のとおりである。

① ∀：すべてのという意味の記号

② ∃：存在するという意味の記号

∀、∃は、命題変数に量化子を表す記号である。∀は、命題変数の範囲をすべての命題変数に限定する。∃は、命題変数の範囲を少なくとも 1 つの命題変数に限定する。例えば、

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

という記号は、すべての実数 x について、x^2 は 0 以上であるという意味を表す。また、

$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$

という記号は、少なくとも 1 つの実数 x が存在して、x^2 は 2 であるという意味を表すが、これは x が $\sqrt{2}$ または $-\sqrt{2}$ であるとき、x^2 は 2 であるという意味と同義である。このように、∀、∃を用いることで、命題の真偽をより広い範囲で論じることが可能である。

２．QE と命題論理

２－１　QE の概要

QE（Quantifier Elimination）とは、命題論理における限量記号（∀、∃）を消去する手法である。命題論理においては、∀（すべての）と∃（存在する）という量化子が用いられる。量化子は、命題の真偽を判じる際に重要な役割を果たす。

QE は、与えられた形式理論（formal theory）について、「限量記号付きの式（一階述語論理式）」を入力とし、「等価で限量記号無しの式」を出力する。より具体的には、∀、∃を含む命題述語論理を、∀、∃を含まないものに変換するアルゴリズムである。例えば、

$\exists x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = 0$

が与えられたとき（これは 2 次多項式が実根を持つという条件）、これと同値である

$b^2 - 4ac \geq 0$

を出力してくれる。

QE の適用可能範囲は非常に広い。大学入試問題においても、量化子を含む不等式や方程式を解く問題がしばしば出題される。これらの問題を解くためには、QE を用いると有効である。

２－２　QE と命題論理の関連

QE と命題論理は、密接に関連している。QE は、命題論理における限量記号を消去する手法である。つまり、QE は、命題論理における限量記号を扱うための手法である。QE は、命題論理の応用として開発された。QE を用いることで、命題論理における証明や推論を自動化することができる。

２－３　QE の応用例

QE は、以下のようなものに応用されている。

- 証明の自動化
- 不等式の解の求解
- 最適化問題の解

２－４　QE の課題

QE の課題としては、以下のようなものが挙げられる。

- アルゴリズムの複雑性
- 解の表現形式

QE のアルゴリズムは、一般に複雑であるため、問題に応じて適切なアルゴリズムを選択する必要がある。また、QE によって求めた解は、人間の目には分かりにくい複雑な形を取ることがあり、その場合は表現形式を変換してわかりやすい形式にする必要がある。

２－５　QE の教育への応用

QE は、数学教育においても活用できる可能性がある。QE を用いることで、限量記号を含む問題を解くための思考力を養うことができる。また、QE を用いた証明の自動化を学ぶことで、論理的な思考力を養うことができる。

２－６　QE の今後の展望

QE は、今後もさらに研究が進んでいくと予想される。QE のアルゴリズムの複雑性や精度が向上することで、QE の適用範囲がさらに広がっていくと期待される。

３．Wolfram Cloud での QE の計算

Wolfram cloud では、命題 $\exists x(p(x)), q(x)$ に QE を適用するには

Resolve[Exists[x, $p(x)$, $q(x)$], Reals]

を用いる。また命題 $\forall x(p(x)), q(x)$ に QE を適用するには

Resolve[ForAll[x, $p(x)$, $q(x)$], Reals]

を用いる。よって、

問題１：$x^2+bx+c=0$となる実数 x が存在するための条件を求めなさい。

の計算には

```
Resolve[Exists[x, Element[x,Reals], x^2+b*x+c==0], Reals]
```

と入力すれば良い。

問題２：不等式 $x^2-2ax+a>6>0$（a は実数）について次の問いに答えなさい。
(a)　全ての実数 x について上の不等式が成り立つためには、a がどのような範囲にあればよいか？
(b)　$4<x<6$ を満たす全ての x について上の不等式が成り立つように、a の範囲を定めよ。

の問題２(a) の計算には

```
Resolve[ForAll[x, Element[x,Reals], x^2+b*x+c>0], Reals]
```

問題２(b) の計算には

```
Resolve[ForAll[x, Element[x,Reals]&&4<x<6, x^2+b*x+c>0], Reals]
```

と入力すれば良い。

４．大学入試問題の QE を用いた解法

４－１　パラメータを含む不等式

問題１：

a を実数の定数として、実数 x についての条件

$p(x): x^2 + a^2 < 15$

$q(x): x^2 + 6x + a^2 - 2a < 5$

を考える。

(1)　$p(x)$ を満たす x が存在するための実数 a の条件を求めよ。

(2)　$p(x)$ ， $q(x)$を満たす x が存在するための実数 a の条件を求めよ。

解答：

上の問題１－(1) を「QE での解法ステップ」に従って解いてみる。

1. 問題の命題論理は $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + a^2 < 15$ となる。
2. 上の命題を Wolfram Cloud の QE が受け入れる形に変換すると
   ```
   Resolve[Exists[x, Element[x,Reals], x^2+a^2<15], Reals]
   ```
   となる。
3. 上を QE で解かせると
   $$-\sqrt{15} < a < \sqrt{15}$$
   を得る。
4. これより解答は $-\sqrt{15} < a < \sqrt{15}$ である。

同様にして、上の問題１－(2) を「QE での解法ステップ」に従って解いてみる。

1. 問題の命題論理は $\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 + a^2 < 15) \wedge (x^2 + 6x + a^2 - 2a < 5)$ となる。
2. 上の命題を Wolfram Cloud の QE が受け入れる形に変換すると
   ```
   Resolve[Exists[x, Element[x,Reals], (x^2+a^2<15)&&(x^2+6*x+a^2-2*a<5)], Reals]
   ```
   となる。
3. 上を QE で解かせると
   $$\frac{1}{2}(1-3\sqrt{5}) < a < \frac{1}{2}(1+3\sqrt{5})$$
   を得る。
4. これより解答は $\frac{1-3\sqrt{5}}{2} < a < \frac{1+3\sqrt{5}}{2}$ である。

４－２　限量子（∀、∃）が２重になる問題

問題２：

実数 x, y についての条件

$p(x,y): y > -x^2 + (a-2)x + a - 4$ かつ $y < x^2 - (a-4)x + 3$

について、次のおのおのが成立するための a の範囲を求めよ。

(1)　どんな x に対しても、それぞれ適当な y を取れば、$p(x,y)$ が成り立つ。

(2)　適当な y を取れば、 どんな x に対しても $p(x,y)$ が成り立つ。

解答：

上の問題２-(1) を「QE での解法ステップ」に従って解いてみる。

1. 問題の命題論理は $\forall x \in \mathbb{R}, \{\exists y \in \mathbb{R}, p(x,y)\}$ となる。
2. 上の命題を Wolfram Cloud の QE が受け入れる形に変換すると
   ```
   Reolve[ForAll[x,Element[x,Reals],Exists[y,Element[y,Reals],pxy]],Reals]
   ```

となる。ただし、上の式の変数 pxy はあらかじめ次の式を代入している。

```
y>-x^2+(a-2)x+a-4&&y<x^2-(a-4)x+3
```

3. 上を QE で解かせると

$$-1 < a < 5$$

を得る。

4. これより解答は $-1 < a < 5$ である。

上の問題２-(2) を「QE での解法ステップ」に従って解いてみる。

1. 問題の命題論理は $\exists y \in \mathbb{R}, \{\forall x \in \mathbb{R}, p(x,y)\}$ となる。
2. 上の命題を Wolfram Cloud の QE が受け入れる形に変換すると

```
Resolve[Exists[y,Element[y,Reals],ForAll[x,Element[x,Reals],pxy]],Reals]
```

となる。ただし、上の式の変数 pxy には上の同じ値が代入されているとする。

3. 上を QE で解かせると

$$-4 - 4\,a + a^2 < 0$$

を得る。

4. これより解答は $2 - 2\sqrt{2} < a < 2 + 2\sqrt{2}$ である。

４－３　拘束条件の元で最大値を求める問題

問題３：

区間 $0 \le x \le 1$ における２次関数 $y = -x^2 - ax + a^2$（ a は定数）の最大値 M を求めよ。

解答：

上の問題３を「QE での解法ステップ」に従って解いてみる。

1. 問題の命題論理は

$$\forall x(0 \le x \le 1), -x^2 - ax + a^2 \le M \text{ かつ } \exists x(0 \le x \le 1), -x^2 - ax + a^2 = M$$

となる。

2. 上の命題を Wolfram Cloud の QE が受け入れる形に変換すると、前半の命題は

```
Resolve[ForAll[x,Element[x,Reals]&&0<=x<=1,-x^2-a*x+a^2<=M],Reals]
```

後半の命題は

```
Resolve[Exists[x,Element[x,Reals]&&0<=x<=1,-x^2-a*x+a^2==M],Reals]
```

となる。よって、実際に計算を行うときには

```
c1=Resolve[ForAll[x,Element[x,Reals]&&0<=x<=1,-x^2-a*x+a^2<=M],Reals]
c2=Resolve[Exists[x,Element[x,Reals]&&0<=x<=1,-x^2-a*x+a^2==M],Reals]
Reduce[c1&&c2]
```

として、前半と後半に分けて計算を行い、最後にそれらを合わせた最終解答を計算する。

3. 実際に上の計算を QE でやらせると

$$(a \le -2 \ \&\& \ M == -1 - a + a^2) \ || \ \left(-2 < a \le 0 \ \&\& \ M == \frac{5\,a^2}{4}\right) \ || \ (a > 0 \ \&\& \ M == a^2)$$

を得る。

4. これより解答は次のようになる。 $a \le -2$ のとき、最大値 $M = a^2 - a - 1$。 $-2 < a \le 0$ のとき、最大値 $M = \frac{5a^2}{4}$。 $0 < a$ のとき、最大値 $M = a^2$。

４－４　座標平面上の問題

問題４：

放物線 $y = ax^2 - 1$ 上に、直線 $x + y = 0$ に関して対称になる異なる２点が存在するような a の範囲を求めよ。

解答：
上の問題４を「QE での解法ステップ」に従って解いてみる。

1. 曲線 $y = ax^2 - 1$ 上の２点 $(u, au^2 - 1)$、$(v, av^2 - 1)$ が直線 $x + y = 0$ であるための必要十分条件は、この２点を結ぶ線分の中点が直線 $x + y = 0$ 上にあり、かつこの２点を結ぶ線分が直線 $x + y = 0$ と直行することである。よって、

$$\frac{u+v}{2} + \frac{(au^2-1)+(av^2-1)}{2} = 0$$

$$(au^2 - 1) - (av^2 - 1) = u - v$$

の２式が成り立つことである。また、２点が異なるという条件から $u \neq v$ という式が出てくる。
よって、問題を表す命題論理は次のようになる。

$$\exists u \in \mathbb{R}, \exists v \in \mathbb{R},$$
$$\left\{\frac{u+v}{2} + \frac{(au^2-1)+(av^2-1)}{2} = 0\right\} \wedge \{(au^2 - 1) - (av^2 - 1) = u - v\} \wedge \{u \neq v\}$$

2. 上の命題を Wolfram Cloud の QE が受け入れる形に変換すると

```
Resolve[Exists[{u,v},Element[{u,v},Reals],(u+v)/2+((a*u^2-1)+(a*v^2-1))/2==0&&
  (a*u^2-1)-(a*v^2-1)==u-v&&u!=v],Reals]
```

となる。

3. 上を QE で解かせると

$$a > \frac{3}{4}$$

を得る。

4. これより、解答は $a > \frac{3}{4}$ となる。

５．考察

５－１　問題１についての考察

この問題は命題の形も簡単であり、QE から見ても非常にシンプルで解きやすい問題であるが、入試問題等によく出てくる形式である。命題論理に慣れていない学生にとってはこの問題でも難しく感じると思われるので、初めはこのような問題からやっていくのが適当と思われる。

５－２　問題２についての考察

問題２は限量子（∀、∃）が２重になっており、かなり難しい部類に入ると思われる問題である。特に $\forall x \in \mathbb{R}, \{\exists y \in \mathbb{R}, p(x, y)\}$ と $\exists y \in \mathbb{R}, \{\forall x \in \mathbb{R}, p(x, y)\}$ の限量子の順序の違いによる命題論理の違いがわからない学生が多いようである。この問題２のような例題を考えさせることが、限量子の順序の違いを理解することに繋がると期待される。

５－３　問題３についての考察

問題３は拘束条件付きの最大値を求める問題であるが、このように命題論理を用いれば最大化・最小化の問題を解くことができることを知らない学生は多い。学生に命題論理の応用の幅広さを知ってもらうためにも学生にこのような問題を解かせることは重要であり、このような問題の価値は高い。

５－４　問題４についての考察

この問題は幾何の問題であるが、座標を用いれば、幾何の問題を数式の計算問題として捉えることが可能であり、命題論理で取り扱うことが可能である。この問題も命題論理の応用の幅広さを示しており、命題論理の応用の幅広さを知ってもらうためにも、学生にこのような問題を解かせる意義は大きい。

おわりに

本論文は命題論理と QE を用いた数学の入試問題の解法に焦点を当て、命題論理と QE について解説し、その重要性を指摘した。また、大学入試レベルの問題をいくつか取り上げ、それらが命題論理と QE を用いて解けることを示した。このとき取り上げた問題では限量子の順序や拘束条件付きの最大最小値の計算が取り扱われ、これらの問題に関する考察から、命題論理と QE を用いた数学問題解決の適用範囲と教育的有用性が明らかになった。

命題論理と QE を使った数学問題解決は、数学教育を向上させる可能性がある。特に限量子や拘束条件を含む問題を分析することで、教育現場で新しい問題解決のアプローチや教育内容の改善策が示唆され、数学教育に新しい指針や戦略が生み出される可能性がある。今後、QE を活用した数学問題解決の教育プログラムの改善や、限量子を含む問題の積極的な取り入れを検討して行きたい。

参考文献

長岡亮介（2017）：「総合的研究 論理学で学ぶ数学 – 思考ツールとしてのロジック」, 旺文社.

Bob F. Caviness・Jeremy R. Johnson（1998）：「Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition」, Springer.