Julia の補題に関する歪曲評価

The sharp distortion estimate concerning Julia's lemma

山口大学大学院
創成科学研究科
星長 翔太

目次

第 1 章

研究の歴史

1.1 Schwarz の補題と Julia の補題

本論文にて用いられる重要な定理である Schwraz の補題と Julia の補題，それらの周辺の歴史について述べる．この章では重要な定理を紹介だけし証明は後の章にまわすことにする．

$\mathbb{C}$ で複素平面を，$\mathbb{D}(c,r)$ で中心 c，半径 r の開円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z-c| < r\}$ を，$\overline{\mathbb{D}}(c,r)$ で中心 c，半径 r の閉円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z-c| \leq r\}$ を表す．特に $\mathbb{D}(0,1), \overline{\mathbb{D}}(0,1)$ をそれぞれ $\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}}$ で表す．$\mathcal{H}(\mathbb{D})$ を $\mathbb{D}$ 上の正則函数全体の族に広義一様収束の位相を入れたものとする．このとき，$\mathcal{H}(\mathbb{D})$ は距離空間になる．(Ahlfors [2, §5.2] を参照) さらに $\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}\}$ とおく．

まずは Schwarz の補題について述べる．Schwarz の補題はドイツの数学者 Karl Hermann Amandus Schwarz にちなむ複素函数論における正則函数の性質に関する定理である．複素函数論における重要な定理を証明するときなどに使われる．

定理 1.1.1 (Schwarz's lemma)**.** $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ が $f(0)=0$ を満たすならば,

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D}$$

かつ

$$|f'(0)| \leq 1$$

が成り立つ．また，等号が成立するのは,

$$f(z) = e^{i\theta} z, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

のときに限る．

$\zeta \in \mathbb{D}$ が $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ の不動点のとき,

$$m_\zeta(z) := \frac{\zeta - z}{1 - \overline{\zeta} z}$$

に対して，$g := m_\zeta \circ f \circ m_\zeta \in \mathbb{D}$ となるので，定理 1.1.1 から

$$|g(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D} \quad , \quad |g'(0)| \leq 1$$

を満たす.

Schwarz's lemma という名前は，the Cauchy-Schwarz inequality, the Schwarz-Christoffel fomula, the Schwarz derivative, Schwarz reflection principle など様々な功績を残した Hermann Amandus Schwarz に敬意を示し，Constantin Carathéodory により名付けられた．Schwarz 自身はこの補題を schlicht function の研究において提唱し，その函数の場合にのみ証明した．現在よく知られてる標準的な証明は，1907 年に Carathéodory により [6] によって証明された．さらに Lindelöf によって次が示された.

系 1.1.2 (Lindelöf's inequality)**.** $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ は

$$|f(z)| \leq \frac{|z|+|f(0)|}{1+|z||f(0)|}, \quad z \in \mathbb{D}$$

を満たす.

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ とし，函数 $f \circ m_\zeta$ に系 1.1.2 を適用することで，任意の $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ について

$$|f(z)| \leq \frac{|f(\zeta)+|m_\zeta(z)|}{1+|f(\zeta)||m_\zeta(z)|}, \quad z,\zeta \in \mathbb{D}$$

が成り立つ.

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ と任意の $\zeta \in \mathbb{D}$ について（f の不動点である必要はない），函数 $m_{f(\zeta)} \circ f \circ m_\zeta$ を考える．この函数に定理 1.1.1 を適用することで，

$$|m_{f(\zeta)} \circ f \circ m_\zeta(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D}$$

を得る．$m_\zeta(m_\zeta(z)) = z$ であることが簡単な計算によりわかるので，上の不等式と合わせて次の The Schwarz-Pick Lemma を得る.

定理 1.1.3 (The Schwarz-Pick Lemma)**.** $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ と任意の $\zeta \in \mathbb{D}$ について

$$|m_{f(\zeta)} \circ f(z)| \leq |m_\zeta(z)|, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.1.1}$$

$$|f'(\zeta)| \leq \frac{1-|f(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}$$

が成り立つ．また，等号成立は f が恒等写像または ζ を固定する自己同型写像のときに限る.

Carathéodory は [6] において $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への合成写像について研究した．(1.1.1) が最初に出たのは Gaston Julia による [16] の preliminary section においてである．(1.1.1) は Georg Alexander Pick に敬意を示し，'Schwarz-Pick Lemma' と呼ばれている．Pick は Julia が [16] を出した 2 年前にこのテーマについて重要な論文 [19] を書いている.

The Schwarz-Pick Lemma は $\mathbb{D}$ の内点を固定する函数 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ に関する定理であった．ここで次のような疑問が出てくる.

- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ が $\mathbb{D}$ の内点で不動点を持たず，$\mathbb{D}$ の境界 $\partial\mathbb{D}$ 上の点を不動点に持つならばどうなるか.

この疑問に答えを与えるものが後に紹介する Julia-Wolff-Carthéodory Theorem である．これは 1920 年に Julia によって [16] において証明された定理，1926 年に Wolff によって [22] におい証明された境界版

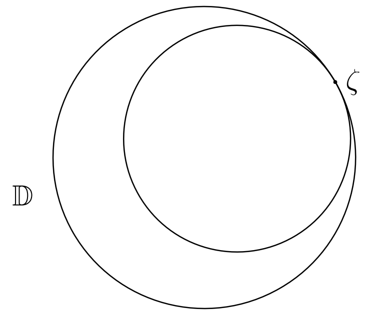


図 1.1.1

Schwarz の補題，1929 年に Carathéodory によって [7] において証明された定理を合わせた結果となっている．

Julia はまず上半平面 $\mathbb{H} = \{w : \mathrm{Im}\, w > 0\}$ について考えた．

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ と $t_0, t_1 \in \partial\mathbb{H}$ で $f(t_0) = t_1$ を満たすものについて

$$\mathrm{Im}\, \frac{1}{f(w) - t_1} < \mathrm{Im}\, \frac{1}{(w - t_0)f'(t_0)}, \quad w \in \mathbb{H}$$

が成り立つことを示した．これを単位円板 $\mathbb{D}$ の形に書き直したものが次の定理である．

定理 1.1.4 (Julia's lemma)**.** $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ とする．また点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ で点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ に収束するものが存在し，$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \eta \in \partial\mathbb{D}$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \alpha < \infty$$

を満たすものが存在するとする．このとき，

$$\frac{|1 - f(z)\overline{\eta}|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1 - z\overline{\zeta}|^2}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D} \tag{1.1.2}$$

が成り立つ．また，等号成立は f が $\mathbb{D}$ 上の自己同型であるときに限る．さらに

$$\lim_{r\to 1-0} f(r\zeta) = \eta$$

が成り立つ．

点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ と $k > 0$ に対して集合

$$D(\zeta, k) := \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - z\overline{\zeta}|^2}{1 - |z|^2} < k \right\}$$

は点 ζ に接する円板で horodisk と呼ばれている．図 1.1.1 を参照．このことから (1.1.2) は幾何学的には $f(D(\zeta, k)) \subset D(\eta, \alpha k)$ となることを表している．

Julius Wolff は f が $\mathbb{D}$ の内点で固定点を持たない場合に境界上で固定点を持つことを示した．

定理 1.1.5 (Wolff's Theorem)**.** $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ が $\mathbb{D}$ 内で固定点を持たないとする．このとき

$$\frac{|1 - f(z)\overline{\eta}|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{|1 - z\overline{\zeta}|^2}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D} \tag{1.1.3}$$

を満たす固定点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ がただ 1 つ存在する．

定義 1.1.6. $\mathbb{D}$ 上の函数 $f(z)$ が点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ において nontangential limit(非正接極限) A を持つとは，任意の $M \in (1, \infty)$ について

$$\lim_{\Gamma_M(\zeta) \ni z \to \zeta} f(z) = A$$

が成り立つときをいう．但し，

$$\Gamma_M(\zeta) = \{z \in \mathbb{D} : |\zeta - z| < M(1 - |z|)\}$$

であり，下図のような ζ に頂点を持つ角領域の先端を含んだ集合である．f が ζ において nontangential limit A を持つとき，

$$\angle \lim_{z \to \zeta} f(z) = A$$

と表す．

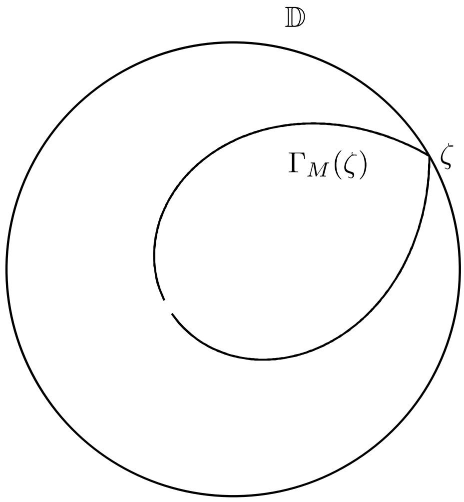


図 1.1.2

最後に Julia と Carathéodory によって証明された定理を紹介する．

定理 1.1.7 (Julia-Carathéodory Theorem)**.** $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ と $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ について次は同値.

(i) $\liminf_{\mathbb{D} \ni z \to \zeta} \frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \alpha < \infty$
(ii) $\angle \lim_{z \to \zeta} \frac{f(z) - \eta}{z - \zeta} =: f'(\zeta)$ となる $\eta \in \partial\mathbb{D}$ が存在する．
(iii) $\angle \lim_{z \to \zeta} f'(z) = f'(\zeta)$ が存在し，$\angle \lim_{z \to \zeta} f(z) = \eta \in \partial\mathbb{D}$ を満たす．

さらに，$\alpha > 0$ であり，(ii) と (iii) における η は同じものであり，$f'(\zeta) = \alpha\zeta\overline{\eta}$ が成り立つ．

第 2 章

平面の部分集合の幾何

$\mathbb{C}$ で複素平面を，$\mathbb{D}(c,r)$ で中心 c 半径 r の開円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z-c| < r\}$ を，$\overline{\mathbb{D}}(c,r)$ で中心 c 半径 r の閉円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z-c| \leq r\}$ を表す．特に $\mathbb{D}(0,1), \overline{\mathbb{D}}(0,1)$ をそれぞれ $\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}}$ で表す．

$\mathbb{C}$ 上の連続曲線 C のパラメータ表示が

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

で与えられているとする．このとき，閉区間 $[a,b]$ の 1 つの分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ およびそれに対応する C の点 $z(t_0), z(t_1), \cdots, z(t_n)$ を順次線分で結んだ折れ線を考え，その長さを

$$L(\Delta) := \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|, \quad z_k = z(t_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

と表す．$[a,b]$ のあらゆる分割を考えたときの上限

$$L := \sup_{\Delta} L(\Delta) \in (0, \infty]$$

が有限値であるとき，C を長さ有限の曲線といい，L をその長さという．

この章では今後出てくる定理の証明に必要な知識の準備をする．

2.1 円周間の同相写像

位相空間論の基本事項で本論文で使われる事項を紹介していく．まずは位相空間の連結性から始めよう．

定義 2.1.1. 位相空間 X の部分集合 A が連結でないとは次の (i) – (iii) を満たす開集合 V_1, V_2 が存在するときをいう．

(i) $V_1 \cap A \neq \emptyset$ かつ $V_2 \cap A \neq \emptyset$
(ii) $V_1 \cap V_2 \cap A = \emptyset$
(iii) $A \subset V_1 \cup V_2$

上の条件を満たす開集合 V_1, V_2 が存在しないとき A は連結であるという．

定理 2.1.2. 位相空間 X の部分集合 A が連結でないとし，定義 *2.1.1* における V_1, V_2 を取ったとする．$F_1 = X\backslash V_1, F_2 = X\backslash V_2$ とおくとき，次が成り立つ．

(a) $F_1 \cap A \neq \emptyset$ かつ $F_2 \cap A \neq \emptyset$

(b) $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$

(c) $A \subset F_1 \cup F_2$

(d) $V_1 \cap A = F_2 \cap A, V_2 \cap A = F_1 \cap A$

証明. (iii) $A \subset V_1 \cup V_2$ より

$$\emptyset = A\backslash(V_1 \cup V_2) = A \cap (V_1^c \cap V_2^2) = A \cap F_1 \cap F_2$$

となり (b) が成り立つ．また (ii) $V_1 \cap V_2 \cap A = \emptyset$ より $V_2 \cap A \subset V_1^c = F_1$ が成り立つ．同様に $V_1 \cap A \subset V_2^c = F_2$ が成り立つ．これらの式の両辺と A の共通部分を取ると

$$V_2 \cap A \subset F_1 \cap A, \quad V_1 \cap A \subset F_2 \cap A$$

が成り立つ. これと (i) を合わせると (a) が従う. (a) と (b) より (c) が従う. また同様に (b) $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$ より

$$F_2 \cap A \subset V_1 \cap A, \quad F_1 \cap A \subset V_2 \cap A$$

となるので (d) が成り立つ. □

以上の議論により次の定理が成り立つ.

定理 2.1.3. 位相空間 X の部分集合 A が連結でないための必要十分条件は A が X より導入される相対位相のもとで，互いに交わらない *2* つの空でない閉集合 $H_2 = A \cap F_1, H_1 = A \cap F_2$ に分解されることである．また，空でない A の真部分集合で A の相対位相に関して開かつ閉集合であるものが存在することとも同値である.

連結集合と連続写像について次が成り立つ.

定理 2.1.4. 位相空間 X, Y について写像 $f : X \to Y$ が連続であるとする．このとき，X が連結ならば $f(X)$ も連結である.

証明. $f(X)$ が連結でないと仮定する．このとき，Y の開集合 U_1, U_2 で

$$f(X) \subset U_1 \cup U_2, \quad f(X) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

かつ

$$(f(X) \cap U_1) \neq \emptyset, \quad (f(X) \cap U_2) \neq \emptyset$$

を満たすものが存在する．このとき，

$$X \subset f^{-1}(U_1 \cup U_2) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$$

が成り立つ．また

$$f^{-1}(f(X) \cap U_1 \cap U_2) = f^{-1}(\emptyset)$$

なので，

$$X \cap f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$$

が成り立つ．これは X が連結であることに反する．よって $f(X)$ は連結である．　□

$\mathbb{R}$ の連結部分集合について次が成り立つ．

補題 2.1.5. $a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ となるものをとる．このとき閉区間 $[a, b]$ は連結である．

証明. $a \in [a, b]$ であるから $[a, b]$ は空でない．$[a, b]$ が連結でないと仮定する．つまり $[a, b]$ の空でない閉部分集合 F, H で

$$F \cap H = [a, b] \quad \text{かつ} \quad F \cap H = \emptyset$$

を満たすものが存在したとして矛盾を導く．$[a, b] \subset \mathbb{R}$ から F, H も $\mathbb{R}$ の部分集合であることに注意する．$a \in F$ または $a \in H$ であるが，$a \in F$ であるとする．$a \in H$ のときも同様に示せる．$\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ より $c := \inf H$ が存在する．a は H の下界の 1 つなので，$a \leq c$ である．また $H \subset [a, b]$ であるから，b より大きい数は H の下界にはなりえないが c が H の下界であることから $c \leq b$ が成り立つ．よって $c \in [a, b]$ である．$c \in H$ であることを示す．c の定義から，任意の $\varepsilon > 0$ について $u \in H$ で $c \leq u < c + \varepsilon$ となるものが存在する．よって $[c, c+\varepsilon) \cap H \neq \emptyset$ であるから $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap H \neq \emptyset$ である．これが任意の $\varepsilon > 0$ について成り立つので $c \in \overline{H}$ である．H が閉集合であることより $c \in H$ である．次に $c \in F$ であることを示そう．$c = a$ ならば $c = a \in F$ であるから $a < c \leq b$ であるとする．$c \in H$ であるから $[a, c) \cap H = \emptyset$ である．よって $[a, c) \subset [a, b] \backslash H = F$ となる．F が閉集合であることから $[a, c] \in \overline{F} = F$ となり $c \in F$ である．故に $c \in F \cap H$ となり $F \cap H = \emptyset$ に矛盾．よって $[a, b]$ は連結である．　□

命題 2.1.6. X を位相空間とし，$\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を X の連結部分集合からなる族とする．このとき，

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \emptyset$$

ならば

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

は連結である．

証明. A が連結でないと仮定する．このとき，ある開集合 V_1 と V_2 で

$$A \subset V_1 \cup V_2, \quad A \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

かつ

$$A \cap V_1 = \emptyset, \quad A \cap V_2 = \emptyset$$

を満たすものが存在する．$\lambda_0 \in \Lambda$ を 1 つ取り固定する．このとき

$$A_{\lambda_0} \subset A \subset V_1 \cup V_2$$

かつ

$$A_{\lambda_0} \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset \subset A \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

となるので，A_{λ_0} は連結である．よって

$$A_{\lambda_0} \subset V_1 \text{または} A_{\lambda_0} \subset V_2$$

が成り立つ．$A_{\lambda_0} \subset V_1$ と仮定する．任意の $\lambda_1 \in \Lambda$ に対して上と同じ議論により，

$$A_{\lambda_1} \subset V_1 \text{または} A_{\lambda_1} \subset V_2$$

が成り立つ．もし $A_{\lambda_1} \subset V_2$ であったならば，$p \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ に対して

$$p \in A_{\lambda_0} \subset V_1, \quad p \in A_{\lambda_1} \subset V_2$$

となるが，これは $A \cap V_1 = \emptyset, \quad A \cap V_2 = \emptyset$ であることにに矛盾する．よって $A_{\lambda_1} \subset V_1$ である．これは $A \subset V_1$ であることを表す．しかし

$$\emptyset = A \cap V_2 \subset A \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

となり矛盾である．$A_{\lambda_0} \subset V_2$ と仮定しても同様．よって A は連結である．□

定理 2.1.7. $\mathbb{R}$ の連結部分集合は区間に限る．つまり，$\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して次は同値．

(1) A は連結．

(2) A は次のうちの (i) – (iv) のいずれかである．

(i) $[a, b], (-\infty < a \leq b < \infty)$

(ii) $[a, b), (-\infty < a < b \leq \infty)$

(iii) $(a, b], (-\infty \leq a < b < \infty)$

(iv) $(a, b), (-\infty \leq a < b \leq \infty)$

但し (i) においては $[a, a] = \{a\}$ とする．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す．A を $\mathbb{R}$ の連結な部分集合とする．連結性の定義から $A \neq \emptyset$ である．$a = \inf A, b = \sup A$ とすると $a \leq b$ である．但し，A が下に有界でないときは $a = -\infty$，A が上に有界でないときは $b = \infty$ とする．ことのき，上限と下限の定義から $A \subset [a, b]$ である．$a = b$ のときは $A = \{a\}$ となるから (i) の場合となる．$a < b$ のとき，$c \in (a, b)$ で $c \notin A$ なるものが存在したとする。このとき $U := A \cap (-\infty, c), V := A \cap (c, \infty)$ は A の空でない開集合で $A = U \cup V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たす．これは A の連結性に反する．よって $(a, b) \subset A$ である．$a, b \in A$ ならば (i) の場合，$a \in A, b \notin A$ の場合は (ii)，$a \notin A, b \in A$ の場合は (iii)，$a, b \notin A$ の場合は (iv) となる．

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．(i) の場合は補題 2.1.5 から A は連結である．(ii) の場合，各 $c \in (a, b)$ に対して補題 2.1.5 から $[a, c]$ は連結であって，$a \in \bigcap_{c \in (a,b)} [a, c] \neq \emptyset, [a, b) = \bigcup_{c \in (a,b)} [a, c]$ なので，命題 2.1.6 から $A = [a, b)$ は連結である．(iii) の場合も同様に補題 2.1.5 と命題 2.1.6 から $A = (a, b]$ は連結である．(iv) の場合は $c_0 \in (a, b)$ を 1 つ選べば，

$$(a, b) = \bigcup_{c \in (a, c_0), c' \in (c_0, b)} [c, c']$$

となるので，やはり命題 2.1.6 から $A = (a, b)$ は連結である．□

定理 2.1.4 と 定理 2.1.7 から次を得る．

系 2.1.8. 単位円周 $\partial\mathbb{D}$ の連結部分集合は円弧か $\partial\mathbb{D}$ に限る．

証明. $\partial\mathbb{D}$ の連結部分集合を A とおく．$A = \partial\mathbb{D}$ のときは自明ゆえ，$A \neq \partial\mathbb{D}$ とする．このとき，ある c について $e^{ic} \notin A$ である．必要ならば平行移動することにより $c = 0$，つまり $1 \notin A$ としてよい．$\varphi : (0, 2\pi) \to \partial\mathbb{D}\backslash\{1\}$ を $\varphi(t) = e^{it}$ と定義すれば，φ は同相写像ゆえ $\varphi^{-1}(A)$ は $(0, 2\pi)$ の連結集合なので区間である．よって $A = \varphi(\varphi^{-1}(A))$ は円弧である． □

定理 2.1.9. 空でない開区間 (a, b) に対して写像 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が単射かつ連続ならば，$(\alpha, \beta) = f((a, b))$ となる開区間 (α, β) が存在し，$f : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ は同相写像である．

以下 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，

$$x \wedge y = \min\{x, y\}, \quad x \vee y \max\{x, y\}$$

とおく．

証明. まずは任意の $c, d \in (a, b)$ $(c < d)$ について

$$f([c, d]) = [f(c) \wedge f(d), f(c) \vee f(d)]$$

が成り立つこと及び $f(c) < f(d)$ ならば f は $[c, d]$ で狭義単調増加，$f(c) > f(d)$ ならば f は $[c, d]$ で狭義単調減少であることを示す．$f([c, d]) \supset [f(c) \wedge f(d), f(c) \vee f(d)]$ を示す．$f(c) < f(d)$ のときから考える．f は $[c, d]$ 上連続なので，中間値の定理から任意の $k \in (f(c), f(d))$ について $f(p) = k$ となる $p \in (c, d)$ が存在する．これは $k = f(p) \in f((c, d)) \subset f([c, d])$ を表す．$f(c) > f(d)$ のときも同様に示せるので $f([c, d]) \supset [f(c) \wedge f(d), f(c) \vee f(d)]$ である．次に $f([c, d]) \subset [f(c) \wedge f(d), f(c) \vee f(d)]$ を示す．まずは $f(c) < f(d)$ のときから考える．$f(x_0) \notin [f(c), f(d)]$ を満たす $x_0 \in (c, d)$ が存在すると仮定する．$f(x_0) < f(c)$ を満たす $x_0 \in (c, d)$ が存在すれば，上の議論より

$$f([c, x_0]) \supset [f(x_0), f(c)] \quad \text{かつ} \quad f([x_0, d]) \supset [f(x_0), f(d)]$$

となるので，$f(c) < f(d)$ であることから $y \in (f(x_0), f(c))$ について原像が (c, x_0) と (x_0, d) 内に少なくとも 1 つずつ存在することになり，f が単射であることに反する．$f(x_0) > f(d)$ のときも同様に矛盾を導ける．よって $x_0 \in (c, d)$ について $f(x_0) \in (f(c), f(d)) \subset [f(c), f(d)]$ が成り立つ．$f(c) > f(d)$ のときも同様に示せる．よって $f([c, d]) \subset [f(c) \wedge f(d), f(c) \vee f(d)]$ となるから $f([c, d]) = [f(c) \wedge f(d), f(c) \vee f(d)]$ である．続いて，$f(c) < f(d)$ のときに f が $[c, d]$ で狭義単調増加であることを示す．狭義単調増加ないと仮定して矛盾を導く．$c \leq x_0 < x_1 \leq d$ かつ $f(x_0) \geq f(x_1)$ となる x_0, x_1 が存在したとすると，$y \in [f(x_1), f(x_0)]$ について $[c, x_0]$ と $[x_0, d]$ に少なくとも 1 つずつ存在することになり，f が単射であることに反する．$f(x_0) > f(d)$ のときも同様に矛盾を導ける．よって $f(c) < f(d)$ ならば f は $[c, d]$ で狭義単調増加，$f(c) > f(d)$ ならば f は $[c, d]$ で狭義単調減少である．以上の議論より f は (a, b) で狭義単調増加または狭義単調減少である．$\alpha = \inf_{a<x<b} f(x), \beta = \sup_{a<x<b} f(x)$ とおくと，f が狭義単調増加のときは $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim_{x\to b} f(x) = \beta$，狭義単調減少のときは $\lim_{x\to a} f(x) = \beta, \lim_{x\to b} f(x) = \alpha$ となる．つまり $f((a, b)) = (\alpha, \beta)$ となる．このことから f が全射であることがわかる．実際に $k \in (\alpha, \beta)$ で $f(x) \neq k, x \in (a, b)$ となるものが存在したとすると，f の連続性より中間値の定理から $f(x_2) = k$ となる $x_2 \in (a, b)$ が存在することになり矛盾．つまり f は全射となる． □

系 2.1.8 と定理 2.1.9 から次を得る．

系 2.1.10. 写像 $f : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ が単射かつ連続ならば，f は全射である．

2.2 凸集合

定義 2.2.1. 複素数平面 $\mathbb{C}$ 内の集合 E が凸であるとは，任意の $w_0, w_1 \in E$ について，w_0 と w_1 を結ぶ線分 $[w_0, w_1] := \{(1-t)w_0 + tw_1 : t \in [0,1]\}$ が $[w_0, w_1] \subset E$ を満たすことである．

定理 2.2.2. $\mathbb{C}$ 内の部分集合 C がコンパクトかつ凸であり $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$ を満たすとする．このとき ∂C は単純閉曲線であり，C は ∂C で囲まれた *Jordan* 領域である

証明. z_0 を C の内点とし，閉円板 $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset C$ を取る．必要ならば，平行移動と拡大・縮小を行うことにより $z_0 = 0, r = 1$ と仮定してよい．このとき，次の補題より ∂C のパラメータ表示が得られ，Jordan 曲線であることがわかり，C が ∂C で囲まれた Jordan 閉領域であることが従う． □

補題 2.2.3. C を $\mathbb{C}$ コンパクトかつ凸な部分集合で $\overline{\mathbb{D}} \subset C$ を満たすとする．このとき $r(\theta) = \max\{r > 0 : re^{i\theta} \in C\}$, $\theta \in \mathbb{R}$ は周期 2π の連続函数である．

証明. C はコンパクトなので，任意の $\theta_0 \in \mathbb{R}$ に対して，$\limsup_{\theta\to\theta_0} r(\theta) \leq r(\theta_0)$ である．C は凸 $\overline{\mathbb{D}} \cup \{r(\theta_0)e^{i\theta_0}\}$ を含むので，簡単な幾何学的考察から $\liminf_{\theta\to\theta_0} r(\theta) \geq r(\theta_0)$ である．図 2.2.1 を参照． □

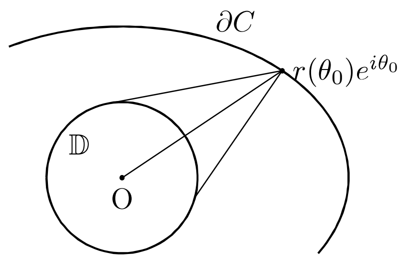


図 2.2.1

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ でユークリッド内積を表すものとする．$\mathbb{R}^2$ の凸部分集合について以下が成り立つ．

補題 2.2.4. K を $\mathbb{R}^2$ の空でない閉凸部分集合とする．このとき，集合 K について，K 上の最小ノルムを持つベクトルが一意に存在する．

証明. ベクトル $x \in K$ のノルムを $|x|$ とする．このとき

$$\delta = \inf_{x\in K} |x|$$

とおく．$|x_n| \to \delta$ となる K 上の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，K の凸性より

$$\frac{|x_i + x_j|}{2} \in K$$

が成り立つ．また，

$$\left|\frac{|x_i + x_j|}{2}\right| \geq \delta$$

であることから，

$$|x_i - x_j|^2 = 2|x_i|^2 + 2|x_j|^2 - |x_i + x_j|^2 \leq 2|x_i|^2 + 2|x_j|^2 - 4\delta^2$$

を得る．両辺で $i, j \to \infty$ とすれば右辺は 0 に近づく．よって $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることがわかる．K は完備であるからその極限値は K に含まれる．よって δ は $x \in K$ の最小ノルムである．次に一意性を示そう．$x, y \in K$ が最小ノルム δ を持つとする．このとき

$$|x - y|^2 \leq 2|x|^2 + 2|y|^2 - 4\delta^2 = 0$$

となるから $x = y$ である．□

定理 2.2.5 (分離超平面定理)**.** A と B を $\mathbb{R}^2$ の互いに素な空でない凸部分集合する．そのような集合について，すべての $x \in A$ と $y \in B$ の組に対して，

$$\langle x, v\rangle \geq c \quad \text{かつ} \quad \langle y, v\rangle \leq c$$

を満たす零でない $v \in \mathbb{R}^2$ と $c \in \mathbb{R}$ が存在する．つまり，v を法線ベクトルとする直線 $\langle \cdot, v\rangle = c$ によって A と B を分離できる．

証明. 互いに素な凸集合 A と B に対して

$$K = A + (-B) = \{x - y : x \in A, y \in B\}$$

とおく．B は凸なので $-B$ もまた凸である．A と B の凸性から K も凸である．さらに K の閉包 $\overline{K}$ も凸なので，補題 2.2.4 から $\overline{K}$ について最小ノルムを持つベクトル v が一意に存在する．$\overline{K}$ の凸性から，任意のベクトル $u \in K$ について，線分

$$tu + (1-t)v = v + t(u - v), \quad t \in [0, 1]$$

上の点はすべて $\overline{K}$ に含まれる．よって閉包 $\overline{K}$ のベクトルのノルムについて

$$|v|^2 \leq |v + t(u - v)|^2 = |v|^2 + 2t\langle v, u - v\rangle + t^2|u - v|^2, \quad t \in [0, 1]$$

が成り立つ．よって

$$0 \leq 2\langle v, u\rangle - 2|v|^2 + |u - v|^2, \quad t \in [0, 1]$$

を得る．さらに t について $t \to 0$ とすると，

$$\langle v, u\rangle \geq |v|^2$$

となる．よって任意の $x \in A$ と $y \in B$ について，

$$\langle v, x - y\rangle \geq |v|^2$$

が成り立つ．v が零ベクトルでないならば，この関係より

$$\inf_{x \in A} \langle x, v\rangle \geq |v|^2 + \sup_{y \in B} \langle y, v\rangle$$

を得る．□

第 3 章

複素解析学からの準備

3.1 一致の定理，最大絶対値の原理

正則函数の性質を用いて一致の定理，次に最大絶対値の原理を紹介する．

定理 3.1.1. D を $\mathbb{C}$ 上の領域とし，$f(z)$ は D 上の正則函数とする．D の 1 点 a において

$$f^{(n)}(a) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

ならば，D において $f = 0$ である．

証明. z_0 と ∂D との距離を $R(a)$ とする．べき級数展開の一意性より，$|z-a| < R(a)$ では $f = 0$ である．次に D の任意の 1 点を b とする．D は領域なので，a と b とを D 内にある折れ線 L で結ぶことができる．L と ∂D との距離を d とすると，$d > 0$ である．L 上に有限個の点

$$a = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$$

を $|z_k - z_{k-1}| \leq \frac{d}{2}, (k = 1, 2, \cdots, n)$ となるように取る．$|z - z_0| < d$ において $f = 0$ であるから $|z - z_1| \leq \frac{d}{2}$ においても $f = 0$ である．よって $f^{(n)}(z_1) = 0, n \in \mathbb{N}$ となるから，$|z - z_1| < d$ において $f = 0$ である．以下これを繰り返すことにより $|z - z_{n-1}| < d$ において $f = 0$ を得る．故に $f(b) = 0$ となるが，$b \in D$ は任意なので，D において $f = 0$ となる． □

定理 3.1.2. D を $\mathbb{C}$ 上の領域とし，$h(z)$ は D 上の正則函数とする．また，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 内の点列とし，$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n \in D$ とする．このとき $h(z_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ ならば D 上で $h = 0$ である．

証明. $h(z)$ の点 z_0 まわりのテイラー展開を

$$h(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

とする．$h(z)$ は $z = z_0$ で連続なので，

$$a_0 = h(z_0) = \lim_{n\to\infty} h(z_n) = 0$$

である．よって $h(z)$ は

$$h(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = (z - z_0)h_1(z)$$

と表せる．但し，

$$h_1(z) = a_1 + a_2(z - z_0) + \cdots$$

である．$h(z_n) = 0$ より $h_1(z_n) = 0$ である．($z_n \neq z_0$ と仮定しても一般性を失わない．) さらに $h(z)$ と $h_1(z)$ の収束半径は同じなので，$h_1(z)$ は z_0 で正則であることに注意すれば

$$a_1 = h_1(z_0) = \lim_{n \to \infty} h_1(z_n) = 0$$

を得る．以下同様にして，$a_n = 0, n \in \mathbb{N}$ を得る．従って定理 3.1.1 より $h = 0$ である．　□

定理 3.1.3 (一致の定理)**.** D を $\mathbb{C}$ 上の領域とし，f, g は D 上の正則函数とする．また，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 内の点列とし，$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n \in D$ とする．このとき $f(z_n) = g(z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ ならば D 上で $f = g$ である．

証明. $h(z) = f(z) - g(z)$ として定理 3.1.2 を適用すればよい．　□

定理 3.1.4. D を $\mathbb{C}$ 上の領域とする．正則函数 $f : D \to \mathbb{C}$ は定数函数でないとする．$M = \sup_{z\in D} |f(z)|$ とすると

$$|f(z)| < M, \quad z \in D$$

が成り立つ．特に D が有界で $f(x)$ が $\overline{D}$ 上で連続ならば，

$$\max_{z \in \partial D} |f(z)| = M$$

が成り立つ．

証明. 背理法により $|f(z)|$ が $z_0 \in D$ で最大値 M とると仮定し矛盾を導く．つまり $|f(z_0)| = M$ と仮定する．$\rho > 0$ に対して $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho)$ を考えると，コーシーの積分公式と積分の性質から $0 < r \leq \rho$ に対して

$$\begin{aligned}
M &= |f(z_0)| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta = M
\end{aligned}$$

であるから

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

が成り立つ．よって $f(z)$ の連続性より $|f(z)|$ も連続であり，$|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$ であるから，等号が成り立つのは，$|f(z_0 + re^{i\theta})| = M$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ となるときに限る．r は $0 < r \leq \rho$ の範囲で任意なので，$|z - z_0| \leq \rho$ において $|f(z)| = M$ となる．

$f(z)$ が定数函数となることを示そう．$M=0$ のときは明らかであるから $M>0$ と仮定する．$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z=x+iy$ と分解すると $|f(z)|^2=u(x,y)^2+v(x,y)^2\equiv M^2$ より

$$\begin{cases} u_x(x,y)u(x,y)+v_x(x,y)v(x,y)=0 \\ u_y(x,y)u(x,y)+v_y(x,y)v(x,y)=0 \end{cases}$$

となる．Cauchy-Riemann の方程式より

$$\begin{cases} u_x(x,y)u(x,y)-u_y(x,y)v(x,y)=0 \\ u_y(x,y)u(x,y)+u_x(x,y)v(x,y)=0 \end{cases}$$

となる．これは

$$\begin{pmatrix} u(x,y) & -v(x,y) \\ v(x,y) & u(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書き直せる．左辺の行列式は $u(x,y)^2+v(x,y)^2=M^2>0$ ゆえ逆行列を持つ．よって $u_x(x,y)\equiv 0, u_y(x,y)\equiv 0$ を得るので，$u(x,y)$ は $\mathbb{D}(z_0,r)$ 上定数であり，同様に $v(x,y)$ もそうであるから $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ は $\mathbb{D}(z_0,r)$ 上定数である．一致の定理より $f(z)$ は D において定数函数となり仮定に反する．よって $|f(z)|$ は内点で最大値をとることはない．また，$|f(z)|$ はコンパクト集合 $\overline{D}$ 上で連続なので，$\overline{D}$ で最大値をとる．前半の議論により最大値をとる点は ∂D 上の点でなければならない．よって後半の主張が示された． □

正則函数 $f(z)$ で $\frac{1}{f(z)}$ について定理 3.1.4 を適用することで最小値についても同様に論じることができる．またこの定理から次の系が直ちに導かれる．

系 3.1.5. D を有界閉領域とし，$f: D\to\mathbb{C}$ が $\overline{D}$ で連続，D で正則とするとき，$M=\max_{\zeta\in\partial D}|f(\zeta)|$ とすると，

$$|f(z)|<M,\quad z\in D$$

または，$f(z)$ は定数函数である．

最大絶対値の原理を応用して次の Schwarz の補題を紹介する．

定理 3.1.6 (Schwarz)**.** $R>0, M>0$ とし，$\mathbb{D}(0,R)$ 上の正則函数 $f(z)$ が $f(0)=0$ かつ $|f(z)|\le M, z\in\mathbb{D}(0,R)$ ならば，

$$|f(z)|\le\frac{M}{R}|z|,\quad z\in\mathbb{D}(0,R)$$

かつ

$$|f'(0)|\le\frac{M}{R}$$

が成り立つ．また，等号が成立するのは，

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{M}{R}z,\quad \theta\in\mathbb{R}$$

のときに限る．

証明. $f(0)=0$ から $f(z)$ は

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots=z\varphi(z)$$

と表せる．但し，

$$\varphi(z) = a_1 + a_2 z + \cdots$$

である．このとき $f(z)$ と $\varphi(z)$ の収束半径は同じなので，$\varphi(z)$ は $\mathbb{D}(0,R)$ で正則である．$r < R$ をとり $\mathbb{D}(0,r)$ で最大絶対値の原理を用いると，

$$|\varphi(z)| \le \max_{|\zeta|=r} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \le \frac{M}{r}, \quad z \in \mathbb{D}(0,r)$$

となる．$r \to R$ とすれば

$$|\varphi(z)| \le \frac{M}{R}, \quad z \in \mathbb{D}(0,R)$$

であるから，$\varphi(z)$ の定義より

$$|f(z)| \le |z\varphi(z)| \le \frac{M}{R}|z|$$

を得る．また，$f'(0) = a_1 = \varphi(0)$ であることから

$$|f'(0)| \le \frac{M}{R}$$

を得る．最後に等号成立について考えよう．$z_0 \in \mathbb{D}(0,R) \backslash \{0\}$ を任意にとり $|f(z_0)| = \frac{M}{R}|z_0|$ が成り立つとすれば，$|\varphi(z_0)| = \frac{M}{R}$ であるから，最大絶対値の原理から $\varphi(z)$ は定数函数となる．このとき，φ の絶対値は $\frac{M}{R}$ なので，ある $\theta \in \mathbb{R}$ により

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R}$$

と表せるから

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R}z, \quad z \in \mathbb{D}(0,R)\ , \theta \in \mathbb{R}$$

を得る．$z_0 = 0$ のときも $|\varphi(0)| = \frac{M}{R}$ となることから同じ結果を得る．逆は明らかである．□

定理 3.1.6 において $R = M = 1$ とすることでよく使われる次の形を得る．

系 3.1.7. 正則函数 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が $f(0) = 0$ を満たすならば，

$$|f(z)| \le |z|, \quad z \in \mathbb{D}$$

かつ

$$|f'(0)| \le 1$$

が成り立つ．また，等号が成立するのは，

$$f(z) = e^{i\theta}z, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

のときに限る．

3.2　単位円板の自己同型

前節までの話を踏まえて次が成り立つ．

定理 3.2.1. 単位円板から単位円板への正則な全単射 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ で $\alpha\in\mathbb{D}$ に対して $f(\alpha)=0$ を満たすものは

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},\quad \theta\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{D}$$

の形に限る．

証明. 条件を満たす 1 次変換を

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,,b,c,d\in\mathbb{C}, z\in\mathbb{D}$$

とする．$w=0, w=\infty$ にはそれぞれ $z=-\frac{b}{a}, z=-\frac{d}{c}$ が対応する．$w=0, w=\infty$ は単位円 $|w|=1$ に関して鏡像の位置にあるので，$z=-\frac{b}{a}, z=-\frac{d}{c}$ は単位円 $|z|=1$ に関して鏡像の位置にある．故に $-\frac{b}{a}=\frac{1}{\alpha}$ とすると $-\frac{d}{c}=\frac{1}{\alpha}$ である．よって $\frac{a}{c}=k$ とおくと，

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\overline{\alpha}z}}==k\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

の形となる．$z=1$ に対しては，$w_0=1$ が対応する．よって

$$1=|w_0|=|k|\left|\frac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}\right|=|k|$$

となるから $k=e^{i\theta}, \theta\in\mathbb{R}$ の形に書ける．従って，

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},\quad \alpha\in\mathbb{D}$$

となる．$w=f(z)$ とすると $f(\alpha)=0$ である．逆にこの形の 1 次変換は条件を満たすことを確認しておこう．

$$\begin{aligned}
1-|w|^2&=1-\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|^2\\
&=\frac{|1-\overline{\alpha}z|^2-|z-\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2}\\
&=\frac{(1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})-(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})}{|1-\overline{\alpha}z|^2}\\
&=\frac{1-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+|\alpha z|^2-|z|^2+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2}\\
&=\frac{1+|\alpha|^2|z|^2-|z|^2-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2}\\
&=\frac{(1-|\alpha|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{\alpha}z|^2}
\end{aligned}$$

となるから，$z \in \mathbb{D}$ ならば $w \in \mathbb{D}$，$z \in \partial\mathbb{D}$ ならば $w \in \partial\mathbb{D}$ となり条件を満たすことがわかる．また，$w = f(z)$ を z について解くと

$$z = \frac{w - e^{i\theta}\alpha}{e^{i\theta} + \overline{\alpha}w}$$

となる．よって逆函数 $f^{-1}(w)$ が存在することになるので $f(z)$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上で全単射である．$f(z)$ は定数函数ではないので，最大絶対値の原理 (定理 3.1.4) から $\mathbb{D}$ を $\mathbb{D}$ にうつす全単射であることがわかる．□

定理 3.2.2 (Schwarz-Pick)**.** $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$，正則函数 $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ に対して

$$\frac{|\omega(z_0) - \omega(z_1)|}{|1 - \overline{\omega(z_1)}\omega(z_0)|} \leq \frac{|z_0 - z_1|}{|1 - \overline{z_1}z_0|}$$

が成り立つ．

証明. $z_1 \in \mathbb{D}$ に対して，

$$\varphi_{z_1}(z) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}z}$$

とおく．また，

$$\psi_{z_1}(z) = \frac{z + z_1}{1 + \overline{z_1}z}$$

とおくと $\varphi_{z_1}(z), \psi_{z_1}(z)$ は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への全単射で

$$\psi_{z_1}^{-1}(\varphi_{z_1}(z)) = \varphi_{z_1}(\psi_{z_1}(z)) = z$$

となる．このとき

$$\Psi(z) := \varphi_{\omega(z_1)}(\omega(\psi_{z_1}(z))) = \frac{\omega(\psi_{z_1}(z)) - \omega(z_1)}{1 - \overline{\omega(z_1)}\omega(\psi_{z_1}(z))}$$

は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への全単射な正則函数で $\Psi(0) = 0$ を満たす．よって系 3.1.7 から

$$|\Psi(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D} \tag{3.2.1}$$

が成り立つ．また，φ_{z_1} の全単射性より任意の $z_0 \in \mathbb{D}$ に対して $z_0 = \varphi_{z_1}(z')$ となる $z' \in \mathbb{D}$ が唯一つ存在する．(3.2.1) において $z = z'$ とすることで

$$\frac{|\omega(z_0) - \omega(z_1)|}{|1 - \overline{\omega(z_1)}\omega(z_0)|} \leq \frac{|z_0 - z_1|}{|1 - \overline{z_1}z_0|}$$

を得る．□

3.3 正規族

次に正規族とそれに関連する定理をいくつか紹介する．

定義 3.3.1. $f_n(z), n \in \mathbb{N}$ を領域 D で定義された函数とする．任意の $z \in D$ に対しある定数 K が存在し，

$$|f_n(z)| \leq K, \quad n \in \mathbb{N}$$

が成り立つとき，$f_n(z)$ は D で一様有界であるという．

定義 3.3.2. $f_n(z), n \in \mathbb{N}$ を領域 D で定義された函数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し，任意の $z_1, z_2 \in D$ に対し $|z_1 - z_2| < \delta$ ならば，

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}$$

が成り立つとき，$f_n(z)$ は D で同程度連続であるという．

定理 3.3.3 (Arzelà-Ascoli)**.** $\mathbb{C}$ 上のコンパクト集合 D 上で定義された函数列 $\mathfrak{F} = \{f(z)\}$ が一様有界かつ同程度連続ならば，$\mathfrak{F}$ は D で一様収束する部分列を含む．

証明. D 上いたるところ稠密な可算個の点 $\{a_k\}, k \in \mathbb{N}$ をとる．函数列 $\{f_n(z)\}$ は一様有界ゆえ $\{f_n(a_1)\}$ は有界となるから，Bolzano – Weierstrass の定理より収束する部分列をもつ．その部分列を $\{f_{1n}(a_1)\}$ とすると，$\{f_{1n}(z)\}$ は $\{f_n(z)\}$ の部分列ゆえ $\{f_{1n}(a_2)\}$ は有界．従って再び Bolzano – Weierstrass の定理より $\{f_{1n}(a_2)\}$ は収束する部分列をもつ．その部分列を $\{f_{2n}(a_2)\}$ とすると，$\{f_{2n}(z)\}$ は $\{f_{1n}(z)\}$ の部分列なので，$z = a_1$ 及び $z = a_2$ で収束する．これを繰り返して，函数列

$$\begin{cases} f_{11}(z), f_{12}(z), \cdots f_{1n}(z), \cdots \\ f_{21}(z), f_{22}(z), \cdots f_{2n}(z), \cdots \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ f_{n1}(z), f_{n2}(z), \cdots f_{nn}(z), \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{cases}$$

を得る．定義より各 k 行 $\{f_{kn}(z)\}$ は $\{f_{(k-1)n}(z)\}$ の部分列であり，かつそれぞれは $z = a_1, a_2, \cdots a_k$ で収束する．このとき，対角列 $\{f_{nn}(z)\}$ が求める収束列である．実際にそれを示そう．

$$\varphi_n(z) = f_{nn}(z)$$

とおくと，$\{\varphi_n(z)\}$ はその定義より $\{a_k\}$ で収束する．また，$\mathfrak{F}$ は同程度連続なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し，任意の $z_1, z_2 \in D$ に対し $|z_1 - z_2| < \delta$ ならば，

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.3.1}$$

である．さらに $\{a_k\}$ は D 上いたるところ稠密なので，a_k の δ 近傍 $U_k, k \in \mathbb{N}$ は D の開被覆になる．D はコンパクトなので，U_k の中から有限個選ぶことで覆うことができる．この際選んだ有限個に改めて番号を振りなおしてそれらを $U_1, U_2, \cdots U_N$ としておく．$z \in D$ を任意にとると，ある j $(1 \leq j \leq N)$ に対して $z \in U_j$ である．よって $\{\varphi_n(z)\} \subset \mathfrak{F}$ と (3.3.1) より任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|\varphi_m(z) - \varphi_m(a_j)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\varphi_n(z) - \varphi_n(a_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．さらに任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\{\varphi_n(a_j)\}$ は収束するので ε に対して十分大きな $n_j \in \mathbb{N}$ をとれば，$m > n > n_j$ のとき

$$|\varphi_m(a_j) - \varphi_n(a_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる．$n_0 = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_N\}$ とするとき，任意の $z \in D$ に対して，$m > n > n_0$ のとき

$$\begin{aligned} |\varphi_m(z) - \varphi_n(z)| &= |\varphi_m(z) + \varphi_m(a_j) - \varphi_n(a_j) - \varphi_m(a_j) + \varphi_n(a_j) - \varphi_n(z)| \\ &\leq |\varphi_m(z) - \varphi_m(a_j)| + |\varphi_m(a_j) - \varphi_n(a_j)| + |\varphi_n(z) - \varphi_n(a_j)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

を得る．つまり $\{\varphi_n(z)\}$ は D で一様収束する． □

定義 3.3.4. $\mathbb{C}$ 上の領域 D で定義された正則函数の集合を $\mathfrak{F}=\{f(z)\}$ とする．$\mathfrak{F}$ の可算個の函数からなる任意の列 $\{f_n(z)\}$ が D で広義一様収束する部分列を含むとき，$\mathfrak{F}$ は D で正規族であるという．

次のモンテルの定理が成り立つ．

定理 3.3.5 (モンテルの定理)**.** $\mathbb{C}$ 上の有界な領域 D 上で正則な函数族 $\mathfrak{F}=\{f(z)\}$ が局所一様有界ならば，$\mathfrak{F}$ は D で正規族をなす．

証明. $\mathfrak{F}=\{f(z)\}$ は局所一様有界なので，D の各点 a に対し a に依存するある正数 r_a, M_a が存在し，$\overline{\mathbb{D}}(a,r_a)$ において $|f(z)|\le M_a$ となる．

領域 D の近似列を $\{D_\nu\}$ とする．$\overline{D_\nu}=D_\nu\bigcap\partial D_\nu$ はコンパクトゆえ円板 $\mathbb{D}(a,r_a),(a\in\overline{D_\nu})$ のうち有限個で被覆できる．それらを $U_{a_1},U_{a_2},\cdots,U_{a_k}$ とすると，任意の $f\in\mathfrak{F}$ に対し，

$$|f(z)|\le M_\nu:=\max\left(M_{a_1},M_{a_2},\cdots,M_{a_k}\right),\quad z\in\overline{\mathbb{D}_\nu}$$

が成り立つ．さらに $L_{\nu+1}$ を $\partial D_{\nu+1}$ の長さ，$d_\nu>0$ を ∂D_ν と $D_{\nu+1}$ との距離とすると，任意の $z,z'\in\overline{D_\nu}$ に対してコーシーの積分公式から

$$\begin{aligned}|f(z)-f(z')| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\nu+1}} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z'}\right]d\zeta\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\nu+1}}\frac{f(\zeta)(z-z')}{(\zeta-z)(\zeta-z')}d\zeta\right| \\ &\le \frac{M_{\nu+1}|z-z'|}{2\pi d_\nu^2}L_{\nu+1}\end{aligned}$$

となる．これは $\mathfrak{F}$ がコンパクト集合 $\overline{D_\nu}$ 上で同程度連続であることを示している．定理 3.3.3 から $\mathfrak{F}$ の任意の函数列 $\{f_n(z)\}$ は $\overline{D_\nu}$ で一様収束する部分列

$$f_{\nu_1}(z),f_{\nu_2}(z),\cdots,f_{\nu_n}(z),\cdots,$$

をもつ．ただし $\{f_{(\nu+1)_n}(z)\}$ は $\{f_{\nu_n}(z)\}$ の部分列とする．このとき対角列 $\{f_{n_n}(z)\}$ について考えよう．D 内の任意のコンパクト集合 E をとるとき，十分大きな ν に対して $E\subset\overline{D_\nu}$ が成り立つ．このとき $\{f_{n_n}(z)\}$ は $\{f_{\nu_n}(z)\},(n\in\mathbb{N})$ の部分列なので $E\subset\overline{D_\nu}$ で一様収束する．つまり $\{f_{n_n}(z)\}$ が D 上で広義一様収束する．これは $\mathfrak{F}$ が正規族をなすことを示している． □

3.4　広義一様収束の位相

$\mathcal{H}(\mathbb{D})$ を $\mathbb{D}$ 上の正則函数全体の族とする．$\mathcal{H}(\mathbb{D})$ に次のように距離を導入し，位相空間とみなす．$\mathbb{D}$ の開集合の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$D_1\subset\overline{D_1}\subset D_2\subset\overline{D_2}\subset\cdots\subset\mathbb{D},\quad\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=\mathbb{D}$$

かつ，各 $n\in\mathbb{N}$ について $\overline{D_n}$ が $\mathbb{D}$ のコンパクト集合になるようにとる．$f,g\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ について

$$\rho_k(f,g)=\sup_{z\in\overline{D_k}}\frac{|f(z)-g(z)|}{1+|f(z)-g(z)|}$$

と置いて

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_k(f,g)}{2^k}$$

とおく．このとき $d(f,g)$ は距離になる．このとき $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 内の函数列 $\{f_n\}$ の収束を $f_n, f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}), n\in\mathbb{N}$ について $d(f_n,f)\to 0$ と定義する．これは f_n が $\mathbb{D}$ において f に広義一様収束することと同値である．実際，$d(f_n,f)\to 0$ のとき，つまり任意の $\varepsilon>0$ についてある $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ が存在し，$n\geq N(\varepsilon)$ の任意の n について

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_k(f_n,f)}{2^k}<\varepsilon$$

が成り立つときを考える．これは $n\geq N(\varepsilon)$ の任意の n と各 k について

$$\rho_k(f_n,f)<\varepsilon$$

が成り立つということである．$\rho_k(f_n,f)$ の定義から $\overline{D_k}$ にて f_n が f に広義一様収束することを表す．$\{D_n\}$ の定義から $\mathbb{D}$ の任意のコンパクト集合 D についてある n が存在し $D\subset D_n$ となることから，f_n が $\mathbb{D}$ で f に広義一様収束することを表す．逆に f_n が $\mathbb{D}$ で f に広義一様収束するとき，各 k について $\rho_k(f_n,f)\to 0$ となることから $d(f_n,f)\to 0$ となる．$d(f,g)$ を導入した $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ の位相は $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方によらない．これを $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ の広義一様収束の位相という．

3.5 Helly の選出定理

定理 3.5.1 (Helly の選出定理)**.** $\mathcal{F}$ を有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の非減少函数からなる族とし，$\mathcal{F}$ は一様有界，つまり，ある定数 $M>0$ について

$$|f(x)|\leq M \quad \forall f\in\mathcal{F} \quad \text{かつ} \quad x\in I$$

が成り立つとする．このとき列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$ で，任意の $x\in I$ について $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ が存在するものが取れる．

証明. $Z=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を I の可算かつ稠密な部分集合とする．ただし $a,b\in Z$ とする．函数族 $\mathcal{F}$ は一様有界ゆえ $\{f(x_1):f\in\mathcal{F}\}$ は有界となるから，Bolzano – Weierstrass の定理より収束する列をもつ．その列を $\{f_{1n}(x_1)\}$ とすると，$\{f_{1n}(x_2)\}$ は有界．従って再び Bolzano – Weierstrass の定理より $\{f_{1n}(x_2)\}$ は収束する部分列をもつ．その部分列を $\{f_{2n}(x_2)\}$ とすると，$\{f_{2n}(x)\}$ は $\{f_{1n}(x)\}$ の部分列なので，$x=x_1$ 及び $x=x_2$ で収束する．これを繰り返して，函数列

$$\begin{cases} f_{11}(x), f_{12}(x), \cdots f_{1n}(x), \cdots \\ f_{21}(x), f_{22}(x), \cdots f_{2n}(x), \cdots \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ f_{n1}(x), f_{n2}(x), \cdots f_{nn}(x), \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{cases}$$

を得る．ここで k 番目の列 $\{f_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ は $k-1$ 番目の列 $\{f_{(k-1)n}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であるから x_{k-1} においても収束する．また $k-2$ 番目の列 $\{f_{(k-2)n}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列でもあるから x_{k-2} においても収束する．同様な理由から $x_1,\ldots,x_k$ において収束することが分かる．

ここで対角列 $\{f_{nn}(z)\}$ は任意の k について x_k において収束する．実際 $\{f_{nn}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の k 番目以降からなる列は $\{f_{kn}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列なので $\lim_{n\to\infty} f_{nn}(x_k)$ が存在するからである．そこで

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_{nn}(x), \quad x \in Z$$

とおく．f_{nn} は非減少だから, φ も Z 上の函数として非減少である．$x \in [a,b]\backslash Z$ については

$$\varphi(x) = \sup_{s<x,\, s\in Z} \varphi(s)$$

とおく．このときも φ は I 上の函数として, 明らかに非減少である．従って φ の不連続点は高々加算個である．そこで先に示した対角線論法による部分列のとり方を Z の代わりに $C = \{x : x\text{は}\varphi\text{の不連続点}\}$, $\mathcal{F}$ の代わりに $\{f_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ に適用すれば, $\{f_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で

$$\text{任意の } x \in Z \cup C \text{ について } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ が存在する}$$

を満たすものを取ることができる．

このとき $n \to \infty$ で,

$$f_n(x_0) \to \varphi(x_0), \qquad x_0 \in I\backslash Z \cup C \tag{3.5.1}$$

が成り立つことを示そう．

$x_0 \in I\backslash Z \cup C$ は φ の連続点であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ について $x_k, x_\ell \in Z$ を

$$x_k < x_0 < x_\ell, \quad \phi(x_\ell) - \phi(x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように取ることができる．$n \to \infty$ のとき $f_n(x_k) \to \varphi(x_k)$ かつ $f_n(x_\ell) \to \varphi(x_\ell)$ であるから $n_0 \in \mathbb{N}$ で $n \geq n_0$ ならば

$$|f_n(x_k) - \varphi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_n(x_\ell) - \varphi(x_\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

が成り立つように取ることができる．従って $n \geq n_0$ ならば $\varphi(x_k) \leq \varphi(x_0) \leq \varphi(x_\ell)$ と合わせて

$$\phi(x_0) - \varepsilon \leq \phi(x_\ell) - \varepsilon < \phi(x_k) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f_n(x_k) \leq f_n(x_0) \leq f_n(x_\ell) < \varphi(x_\ell) + \frac{\varepsilon}{2} < \varphi(x_k) + \varepsilon \leq \varphi(x_0) + \varepsilon$$

となるので (3.5.1) が示された．よっ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I の全ての点で収束することになり証明が完了する． □

定理 3.5.2. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を有界閉区間 $I = [a,b]$ 上の非減少函数の列とし, Z は a, b を含む $[a,b]$ の稠密な部分集合とする．このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[a,b]$ 上の連続な非減少函数 f に Z 上の各点で収束するならば, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[a,b]$ 上 f に一様収束する．

証明. f は有界閉区間 $[a,b]$ 上で連続であるから一様連続である．従って任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta > 0$ を任意の $x', x \in [a,b]$ について,

$$|x' - x| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるように取ることができる．これと Z の稠密性より $[a,b]$ の分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

を $x_1, \dots x_{n-1} \in Z$ かつ $x_k - x_{k-1} < \delta, (k = 1, \dots, n)$ を満たすように取ることができる．また $\lim_{n\to\infty} f_n(x_j) = f(x_j)$ より $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば $j = 0, 1, \dots, k$ $|f_n(x_j) - f(x_j)| < 2^{-1}\varepsilon$ が成り立つように取ることができる．このとき任意の $x \in [a, b]$ について $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ となる j を取れば $n \geq N$ のとき

$$f_n(x) \leq f_n(x_j) \leq f(x_j) + \frac{\varepsilon}{2} < \left(f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = f(x) + \varepsilon$$
$$f_n(x) \geq f_n(x_{j-1}) \leq f(x_{j-1}) - \frac{\varepsilon}{2} > \left(f(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = f(x) - \varepsilon$$

となる．よって $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ． □

定理 3.5.3 (Helly の第 2 定理)**.** g を有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続函数とする．また $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上の非減少函数列であり I の各点で f に収束するとする．このとき *Riemann-Stieltjes* 積分の意味で

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x) df_n(x) = \int_a^b g(x) df(x)$$

が成り立つ．

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ について I の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ を

$$|g(x) - g(x')| < \varepsilon \quad \forall x, x' \in [x_{j-1}, x_j],\ j = 1, \dots, p$$

が成り立ち, かつ付随する任意の点列 $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, p$ に対し

$$\left| \int_a^b g(x) df(x) - \sum_{j=1}^{p} g(\xi_j) \left(f(x_j) - f(x_{j-1})\right) \right| < \varepsilon$$

が成り立つように取る．さらに

$$|g(x)| \leq M, \quad x \in I \text{ かつ, 任意の } n \in \mathbb{N} \text{ について} f_n(b) - f_n(a) \leq M$$

を満たす $M > 0$ を取り $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば

$$|f_n(x_j) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2p}, \quad j = 0, \dots, p$$

が成り立つように取る．このとき $n \geq N$ ならば

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b g(x)df_n(x) - \int_a^b g(x)df(x)\right| \\
=&\left|\sum_{j=1}^{p}\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)df_n(x) - \sum_{j=1}^{p} g(\xi_j)\left(f(x_j)-f(x_{j-1})\right) + \sum_{j=1}^{p} g(\xi_j)\left(f(x_j)-f(x_{j-1})\right) - \int_a^b g(x)df(x)\right| \\
\leq&\left|\sum_{j=1}^{p}\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)df_n(x) - \sum_{j=1}^{p} g(\xi_j)\left(f(x_j)-f(x_{j-1})\right)\right| + \left|\sum_{j=1}^{p} g(\xi_j)\left(f(x_j)-f(x_{j-1})\right) - \int_a^b g(x)df(x)\right| \\
\leq&\left|\sum_{j=1}^{p}\left\{\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)df_n(x) - \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(\xi_j)df(x)\right\}\right| + \varepsilon \\
\leq&\sum_{j=1}^{p}\left|\int_{x_{j-1}}^{x_j} (g(x)-g(\xi_j))df_n(x) + \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(\xi_j)d(f_n(x)-f(x))\right| + \varepsilon \\
\leq&\sum_{j=1}^{p}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varepsilon\, df_n(x) + \sum_{j=1}^{p}|g(\xi_j)|\left|\{f_n(x_j)-f(x_j)-f_n(x_{j-1})+f(x_{j-1})\}\right| + \varepsilon \\
\leq&\sum_{j=1}^{p}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varepsilon\, df_n(x) + \sum_{j=1}^{p}|g(\xi_j)|\{|f_n(x_j)-f(x_j)| + |f_n(x_{j-1})-f(x_{j-1})|\} + \varepsilon \\
\leq&\varepsilon\ (f_n(b)-f_n(a)) + \sum_{j=1}^{p} M\frac{2\varepsilon}{2p} + \varepsilon \\
\leq&\varepsilon\, M + \sum_{j=1}^{p} M\frac{\varepsilon}{p} + \varepsilon \\
<&(2M+1)\varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって $\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)df_n(x) = \int_a^b g(x)df(x)$ が成り立つ． □

3.6　Riesz の表現定理

位相空間 X 上の Borel 集合体 を $\mathcal{B}(X)$ と表す．

定義 3.6.1. X を 位相空間とする．任意の $x \in X$ と任意の x の近傍 U について，ある x の近傍 V で $\overline{V}$ がコンパクトかつ $\overline{V} \subset U$ が成り立つように取れるとき，X を局所コンパクト空間という．

局所コンパクトな Hausdorff 空間 X について $C(X)$ を X 上の複素数値連続函数 f の全体とし，$C_b(X)$ を X 上の有界複素数値連続函数 f の全体とする．また $f \in C_b(X)$ の一様ノルムを

$$\|f\|_u = \sup_{x\in X}|f(x)|$$

で定義する．このとき $C_b(X)$ は $\|\cdot\|_u$ のもとで Banach 空間となる．$C_b(X)$ の部分空間を

$$C_0(X) := \left\{f \in C_b(X) : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\right\} \tag{3.6.1}$$

とおく．ただし $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ とは, 任意の $\varepsilon>0$ について，あるコンパクト集合 $K\subset X$ が存在し, $X\backslash K$ 上で $|f(x)|\le\varepsilon$ が成り立つことと定義する．

Riesz の表現定理 ([21] と [13] を参照) によれば，$C_0(X)$ の双対空間は $\mathcal{B}(X)$ 上の正則な複素測度全体がなす線形空間と同一視できる．

定義 3.6.2. (X,T) を Hausdorff 空間とし，Σ を位相 T を含む X 上の $\sigma-algebra$ であるとする．このとき可測空間 (X,Σ) 上の測度 μ が任意の $A\in\Sigma$ について

$$\mu(A)=\inf\{\mu(V):V\text{は}A\text{を含む開集合}\}$$

を満たすとき外正則であるという．また,

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K):K\subset A, K\text{はコンパクト集合}\}$$

を満たすとき内正則であるという．

定義 3.6.3. 函数 $\mu:\mathcal{B}(X)\to\mathbb{C}$ で, 互いに素な和 $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$, $E,E_1,E_2\ldots\in\mathcal{B}(X)$ に関し加算加法性 $\mu(E)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)$ が成り立つものを $\mathcal{B}(X)$ 上の複素測度 という．

複素測度 μ について

$$|\mu|(E)=\sup\sum_{j=1}^{\infty}|\mu(E_j)|,\qquad E\in\mathcal{B}(X) \tag{3.6.2}$$

とおく．ただし sup は $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$, 互いに素な和, $E_j\in\mathcal{B}(X)$ を満たすあらゆる分割に関する上限を意味する．このとき $|\mu|$ は $\mathcal{B}(X)$ 上の測度であり, $|\mu|$ を総変動量測度と呼ぶ．$|\mu|$ は任意の $E\in\mathcal{B}(X)$ について $|\mu(E)|\le|\mu|(E)$ を満たす．

複素測度は条件 $\mu:\mathcal{B}(X)\to\mathbb{C}$ から全ての $E\in\mathcal{B}(X)$ について $\mu(E)$ は有限値であり, さらに加算加法性の仮定 $\mu(E)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)$ において右辺が和の順番をどのように換えても不変であることから, 必然的に級数は絶対収束となる．よって $|\mu|(X)<\infty$ となるから, $|\mu|$ は有限測度である．特に複素測度 μ の総変動量測度に関しては $|\mu|$ について Radon 測度 (任意のコンパクト集合上で有限値, 全ての Borel 集合に関し外正則かつ, 全ての開集合に関し内正則) であることと, 正則 (全ての Borel 集合に関し, 外正則かつ内正則) であることは同値である．

定理 3.6.4. *X を 局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $\Lambda:C_0(X)\to\mathbb{C}$ を一様ノルム $\|\cdot\|_u$ に関して有界な線形汎函数とする．このとき複素 Borel 測度 μ で, 総変動測度 $|\mu|$ が正則であり*

$$\Lambda f=\int_X f\,d\mu,\quad f\in C_0(X)$$

を満たすものが一意的に存在する．逆に 総変動測度 $|\mu|$ が正則な複素 Borel 測度 μ により $\Lambda f=\int_X f\,d\mu$ と置けば Λ は $C_0(X)$ 上の有界線形汎函数である．さらに，このとき Λ の作用素ノルムと μ の総変動量は一致する, つまり

$$\|\Lambda\|:=\sup_{\|f\|_u\le1}|\Lambda f|=|\mu|(X)$$

が成り立つ．

複素測度 μ は総変動量測度 $|\mu|$ に関する密度函数 h を持つ．つまり Borel 可測函数 h で

$$\mu(E) = \int_E h\, d|\mu|, \quad E \in \mathcal{B}(X)$$

を満たすものが存在する．このとき

$$\Lambda g = \int_X g\, d\mu = \int_X gh\, d|\mu|, \quad g \in C_0(X) \tag{3.6.3}$$

が成り立つ．

X が有界閉区間, つまり $X = [a, b]$ の場合を考える．

系 3.6.5. f を有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の非減少函数とする．このとき $\mathcal{B}(I)$ 上の有限な正則測度 μ で

$$\int_a^b g(x)\, df(x) = \int_I g\, d\mu, \quad \forall g \in C(I)$$

を満たすものが存在する．ただし左辺は *Riemann-Stieltjes* 積分であり, 右辺は測度 μ に関する積分である．

証明. I がコンパクト集合なので $C_0(I) = C(I)$ であることに注意する．写像

$$C_0(I) = C(I) \ni g \mapsto \int_a^b g(x)\, df(x)$$

が有界であることは Riemann-Stieltjes 積分の定義

$$\int_a^b g(x)\, df(x) = \lim_{|\Delta| \searrow 0} \sum_{j=1}^n g(\xi_j)\,(f(x_j) - f(x_{j-1}))\,,$$

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $(j = 1, \ldots, n)$ と $|\Delta| = \max\{x_j - x_{j-1}; j = 1, \ldots, n\}$ より

$$\left| \int_a^b g(x)\, df(x) \right| \le \|g\|_u\, (f(b) - f(a))$$

が直ちに従うことにより分かる．従って $|\mu|$ が正則な複素 Borel 測度 μ により $\int_a^b g(x)\, df(x) = \int_I g\, d\mu$ と表すことができる．

ここで非負な函数 $g \ge 0$ について $\int_a^b g(x)\, df(x) \ge 0$ であるから (3.6.3) より

$$\int_I ghd|\mu| \ge 0 \quad \forall g \in C(I), g \ge 0$$

が成り立つ．これより $h \ge 0$ $|\mu|$-a.e. が成り立ち, μ は非負であるから, (正) 測度である． □

3.7 Herglotz の表現定理

定理 3.7.1 (Herglotz の表現定理)**.** u を $\mathbb{D}$ 上の正値調和函数で $u(0) = 1$ を満たすとする．このとき ある $\partial\mathbb{D}$ 上の *Borel* 確率測度 μ で

$$u(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \mathrm{Re}\left\{ \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right\} d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}$$

を満たすものが一意的に存在する．

証明. $r \in (0,1)$ について

$$\alpha_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t u(re^{i\theta})\, d\theta$$

とおくと α_r は $0 \le t \le 2\pi$ で非減少であり, $\alpha_r(0) = 0$ を満たす．また調和函数に関する平均値の定理より $\alpha_r(2\pi) = u(0) = 1$ が成り立つ．定理 3.5.1 より各点で $\alpha_{r_n}(t) \to \alpha(t)$ を満たす非減少函数 α が存在する．このとき $\alpha(0) = 0$, $\alpha(2\pi) = 1$ に注意する．Poisson の積分公式より

$$u(r_n z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\} u(r_n e^{it})\, dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\} d\alpha_{r_n}(t)$$

が成り立つ．ここで $n \to \infty$ とすれば定理 3.5.3 より

$$u(z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\} d\alpha(t)$$

が成り立つ．系 3.6.5 により $[0, 2\pi]$ 上の正則測度 $\hat{\mu}$ により

$$u(z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\} d\alpha(t) = \int_{[0,2\pi]} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\} d\hat{\mu}(t)$$

と表すことが出来る． $z = 0$ を代入すると $\hat{\mu}$ が確率測度であることが直ちに分かる． ここで写像 $\psi : [0, 2\pi] \to \partial\mathbb{D}$ による $\hat{\mu}$ の像測度を μ とおく．つまり

$$\mu(E) = \hat{\mu}(\psi^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{B}(\partial\mathbb{D})$$

を用いて $\mathcal{B}(\partial\mathbb{D})$ 上の測度を定義する．μ も確率測度であり

$$\int_{[0,2\pi]} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\} d\hat{\mu}(t) = \int_{\partial\mathbb{D}} \mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right\} d\mu(\zeta)$$

が成り立つ．これで Borel 確率測度 μ の存在が示された．

最後に一意性を示そう．これには $\mathcal{B}(\partial\mathbb{D})$ 上の符号付き測度 μ について

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right\} d\mu(\zeta) = 0, \quad z \in \mathbb{D}$$

ならば $\mu = 0$ を示せばよい．これは

$$f(z) := \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}$$

とおくとき, $\mathrm{Re}\, f(z) \equiv 0$ と $f(0) = \mu(\partial\mathbb{D}) = 1$ より $f(z) \equiv i\gamma, (\gamma \in \mathbb{R})$ が従う．

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\zeta^n} z^n$$

より

$$\int_{\partial\mathbb{D}} e^{int}\, d\mu(\zeta) = 0, n \in \mathbb{Z}$$

を得る．Weierstrass の多項式近似定理 (cf. [17]) により $\partial\mathbb{D}$ 上の連続函数は e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$ の有限級数で近似が出来ることを考慮すれば, 任意の連続函数 $g \in C(\partial\mathbb{D})$ について $\int_{\partial\mathbb{D}} g(\zeta)\, d\mu(\zeta) = 0$ が成り立つ．よって $\mu = 0$ である． □

系 3.7.2. $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ を $\mathrm{Re}\, f(z)>0$ を満たす正則函数とする．このとき，ある正値をとる $\partial\mathbb{D}$ 上の有限測度 μ とある実定数 C がただ *1* つ存在し

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)+iC,\quad z\in\mathbb{D}$$

を満たす.

3.8　nontangential limit

定義 3.8.1. $\mathbb{D}$ 上の函数 $f(z)$ が点 $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ において nontangential limit(非正接極限) A を持つとは，任意の $M\in(1,\infty)$ について

$$\lim_{\Gamma_M(\zeta)\ni z\to\zeta}f(z)=A$$

が成り立つときをいう．但し，

$$\Gamma_M(\zeta)=\{z\in\mathbb{D}:|\zeta-z|<M(1-|z|)\}$$

であり，下図のような ζ に頂点を持つ角領域の先端を含んだ集合である．f が ζ において nontangential limit A を持つとき，

$$\angle\lim_{z\to\zeta}f(z)=A$$

と表す.

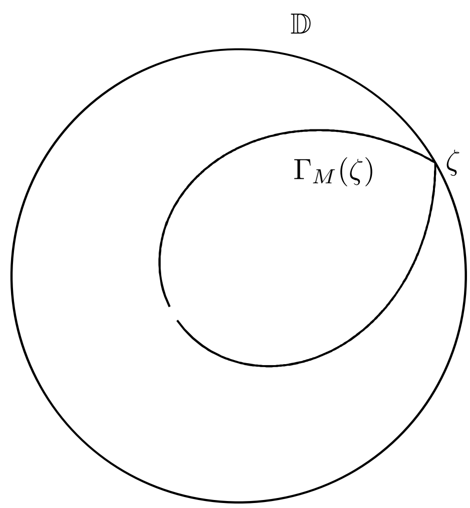


図 3.8.1

H^p またはもっと広く Nevanlinna 族に属する函数 f について，殆どすべての $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ において nontangential limit が存在することが知られている．詳しくは [11] を参照のこと.

第 4 章

主要定理

この節では本論文の直接的基礎である Julia の補題を証明し，その後主要な結果を解説する．

4.1 Julia の補題

前章のように $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ を $\mathbb{D}$ 上の正則函数全体の族に広義一様収束の位相を入れたものとする．単位円板 $\mathbb{D}$ から自身の中への正則写像の全体を $\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})=\{f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}): f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}\}$ とおく．

h を $\mathbb{D}\cup\{1\}$ を含むある領域上の正則函数とし，$h(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ を満たすとする．このとき古典的な Julia の補題とは $h'(1)>0$ であり，$\frac{|1-h(z)|^2}{1-|h(z)|^2}\leq h'(1)\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$ on $\mathbb{D}$ となることを主張するものである．この補題は，点 1 で正則とは限らない $\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ の函数にまで次のように拡張される．

定理 4.1.1 (Julia's lemma)**.** $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ に対し

$$\alpha_f=\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\in(0,\infty] \tag{4.1.1}$$

とおく．このとき

$$\angle\lim_{z\to1}\frac{f(z)-1}{z-1}=\alpha_f$$

が成り立つ．但し $\angle\lim_{z\to1}$ は点 $1\in\partial\mathbb{D}$ における *nontangential limit* を表す．

$\alpha_f<\infty$ のとき $\angle\lim_{z\to1}\frac{f(z)-1}{z-1}=\alpha_f$ より $\angle\lim_{z\to1}f(z)=1$ が成り立つ．従って $\alpha_f=\angle\lim_{z\to1}\frac{f(z)-1}{z-1}$ を函数 f の一般化された 1 における微分係数とみなすことができる．α_f は $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ の 1 における角微係数と呼ばれる．

証明の中で使う記号を導入しておく．$a\in\mathbb{D}$ に対して

$$k(z)=\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2},\qquad z\in\mathbb{D} \tag{4.1.2}$$

とおく．このとき，(4.1.1) は

$$\alpha_f=\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{k(f(z))}{k(z)}$$

と書くことができる．

証明. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ について

$$F(z) = \frac{1+f(z)}{1-f(z)}, \quad z \in \mathbb{D}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} F(z) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1+f(z)}{1-f(z)} + \frac{1+\overline{f(z)}}{1-\overline{f(z)}}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-\overline{f(z)}+f(z)-\overline{f(z)}f(z)+1+\overline{f(z)}-f(z)-\overline{f(z)}f(z)}{(1-f(z))(1-\overline{f(z)})} \\ &= \frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2} > 0\end{aligned}$$

を満たす．

よって Herglotz の表現定理（定理 3.7.1）より，ある $\partial\mathbb{D}$ 上の Borel 測度 μ により

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+f(z)}{1-f(z)}\right) = \operatorname{Re} F(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu(\zeta)$$

と表せる．一方

$$\tilde{F}(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta)$$

とおくと，$\tilde{F}(z)$ は $\mathbb{D}$ で正則であり，同様の計算により

$$\operatorname{Re} \tilde{F}(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu(\zeta)$$

が成り立つ．よって $\operatorname{Re} F(z) = \operatorname{Re} \tilde{F}(z)$ であるから $F - \tilde{F}$ は純虚数の定数である．以上より，ある $C \in \mathbb{R}$ により

$$\frac{1+f(z)}{1-f(z)} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu(\zeta) + iC$$

と表せる．ここで $\mu(\{1\}) = \beta \geq 0$ とおき $\mu_0 = \mu - \delta(1)$ とおく．ただし，$\delta(1)$ は点 $\zeta = 1$ に単位質量を持つ Dirac 測度とする．このとき

$$\frac{1+f(z)}{1-f(z)} = \beta\frac{1+z}{1-z} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu_0(\zeta) + iC$$

を得る．両辺の実部を取ると

$$\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2} = \beta\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu_0(\zeta) \tag{4.1.3}$$

となり，これより

$$\frac{1}{k(f(z))} = \frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2} \geq \beta\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{\beta}{k(z)}$$

を得る．$\beta > 0$ のとき

$$\frac{k(f(z))}{k(z)} \leq \frac{1}{\beta}$$

である．

一方 (4.1.3) より

$$\frac{k(z)}{k(f(z))} = \beta + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{|1-z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_0(\zeta)$$

が成り立つ．ここで

$$\angle \lim_{z\to 1} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{|1-z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_0(\zeta) = 0 \tag{4.1.4}$$

が成立することを示そう．

これは，任意の $\varepsilon > 0$ について $\mu_0(\{e^{i\theta} : |\theta| \le \delta\}) < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ を取り，$\partial\mathbb{D}$ を $T_1 = \{e^{i\theta} : |\theta| \le \delta\}$ と $T_2 = \partial\mathbb{D} \backslash T1$ に分解し，

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{|1-z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_0(\zeta) = \int_{T_1} \frac{|1-z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_0(\zeta) + \int_{T_2} \frac{|1-z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_0(\zeta)$$

において $|1-z| \le M(1-|z|), (M > 1)$ のもとで $z \to 1$ とするとき $\zeta \in T_2$ について $|1-\zeta| \ge |1-e^{i\delta}| > 0$ より

$$\int_{T_2} \frac{|1-z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_0(\zeta) \to 0$$

となる．一方

$$\int_{T_1} \frac{|1-z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_0(\zeta) \le \int_{T_1} \frac{(M(1-|z|))^2}{(1-|z|)^2} d\mu_0(\zeta) \le M^2 \mu_0(T_1) \le M^2 \varepsilon$$

である．これで (4.1.4) が示された．よって

$$\angle \lim_{z\to 1} \frac{k(z)}{k(f(z))} = \beta$$

が成り立つ．よって

$$\angle \lim_{z\to 1} \frac{k(f(z))}{k(z)} = \frac{1}{\beta}$$

となり

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{k(f(z))}{k(z)} = \frac{1}{\beta}$$

が従う．

$\beta = 0$ のときは (4.1.3) より

$$\frac{1}{k(f(z))} = \frac{1}{k(z)} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{|1-z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_0(\zeta),$$

$$\frac{k(z)}{k(f(z))} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{|1-z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_0(\zeta)$$

となるが，(4.1.4) より

$$\angle \lim_{z\to 1} \frac{k(z)}{k(f(z))} = 0$$

となる．よって

$$\angle \lim_{z\to 1} \frac{k(f(z))}{k(z)} = \infty$$

となり，

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{k(f(z))}{k(z)}=\infty$$

を得る．以上より $\beta\in[0,\infty)$ について

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{k(f(z))}{k(z)}=\frac{1}{\beta}$$

が示された．

次に

$$(1-z)\frac{1+f(z)}{1-f(z)}=\beta(1+z)+\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{(1-z)(1+\zeta)}{(\zeta-z)}d\mu_0(\zeta)+iC(1-z)$$

を考える．(4.1.4) を示したのと同じ評価の仕方により

$$\angle\lim_{z\to1}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{(1-z)(1+\zeta)}{(\zeta-z)}d\mu_0(\zeta)=0$$

が成り立つ．これより

$$\angle\lim_{z\to1}\frac{1-z}{1-f(z)}(1+f(z))=2\beta$$

が成り立つ．そこで

$$\frac{1-z}{1-f(z)}(1+f(z))=2\beta+g(z)$$

を用いて $g(z),z\in\mathbb{D}$ を定義すれば，$\angle\lim_{z\to1}g(z)=0$ が成り立つ．

$$\frac{1+f(z)}{1-f(z)}=\frac{2\beta+g(z)}{1-z}$$

より

$$f(z)=\frac{2\beta+g(z)-1+z}{1-z+2\beta+g(z)}$$

を得る．これより $\beta>0$ のとき $\angle\lim_{z\to1}f(z)=1$ が従う．また

$$\frac{1-f(z)}{1-z}=\frac{2}{1-z+2\beta+g(z)}$$

より

$$\angle\lim_{z\to1}\frac{1-f(z)}{1-z}=\frac{1}{\beta}$$

が成り立つ．

$\beta=0$ のとき

$$f(z)=\frac{g(z)-1+z}{1-z+2\beta+g(z)}$$

より $\angle\lim_{z\to1}f(z)=1$ が成り立つかどうかはわからないが

$$\frac{1-f(z)}{1-z}=\frac{2}{1-z+g(z)}$$

より

$$\angle\lim_{z\to1}\frac{1-f(z)}{1-z}=\infty$$

が成り立つ．以上で

$$\angle \lim_{z\to 1} \frac{1-f(z)}{1-z} = \frac{1}{\beta} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{k(f(z))}{k(z)}$$

が示された. □

4.2　函数族 J_αとその閉包

いくつか記号を導入する.

$$\sigma_a(z) = \frac{1-\overline{a}}{1-a}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad z\in\mathbb{D} \tag{4.2.1}$$

とおく．このとき σ_a は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への等角写像であり，a を 0 にうつし，1 を固定する.

$\alpha>0$ について J_α を $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ で $1\in\partial\mathbb{D}$ における角微分係数が α となるもの全体，つまり

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \left\{ f\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D}) : \alpha_f \left(= \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{k(f(z))}{k(z)} \right) = \alpha \right\} \\ &= \left\{ f\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D}) : \angle \lim_{z\to 1} \frac{f(z)-1}{z-1} = \alpha \right\}, \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

$$V_0(z_0,\alpha) = \{f(z_0) : f\in J_\alpha\}. \tag{4.2.3}$$

で定義する．このとき明らかに J_α は $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ の凸な部分族であり，$V_0(z_0,\alpha)$ は $\mathbb{C}$ の凸な部分集合である. $V_0(z_0,\alpha)$ について次が成り立つ.

命題 4.2.1. $\alpha>0$，$z_0\in\mathbb{D}$ に対して

$$V_0(z_0,\alpha) = \{w\in\mathbb{D} : k(w)\le \alpha k(z_0)\} = \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1} \right) \setminus \{1\}.$$

さらに $w_0\in\partial\mathbb{D}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)\setminus\{1\}$ と $f\in J_\alpha$ で $f(z_0)=w_0$ を満たすならば $f=\sigma_{w_0}^{-1}\circ\sigma_{z_0}$ となる.

命題 4.2.2. $\alpha>0$ とする. J_α の閉包 $\bar{J}_\alpha$ は $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ のコンパクトで凸な部分集合であり $\left\{\bigcup_{0<\beta\le\alpha} J_\beta\right\}\cup\{1\}$ の形で表される．但し 1 は $\mathbb{D}$ 上の定数函数である.

4.3　歪曲評価

$\alpha>0$ と $z_0\in\mathbb{D}$ を固定する．f が J_α 上を変化したときの $f'(z_0)$ の変化域

$$V_1(z_0,\alpha) := \{f'(z_0) : f\in J_\alpha\} \tag{4.3.1}$$

を求める．J_α は $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ の部分集合で凸であるがコンパクトではないことに注意する．そこで広義一様収束の位相における J_α の閉包 $\bar{J}_\alpha$ を考える．§3 において $\bar{J}_\alpha = \bigcup_{0<\beta\le\alpha} J_\beta\cup\{1\}$(1 は $\mathbb{D}$ 上の定数函数) であることを示す．明らかに $\bar{J}_\alpha$ は $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ のコンパクトで凸な部分集合であるので

$$\overline{V}_1(z_0,\alpha) := \{f'(z_0) : f\in \bar{J}_\alpha\} \tag{4.3.2}$$

も $\mathbb{C}$ のコンパクトで凸な部分集合である．任意の $w_0 \in \mathbb{D}$ で $k(w_0) \le \alpha k(z_0)$ を満たすものに対して，函数 $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0}$ は $J_{k(w_0)/k(z_0)} \subset \bar{J}_\alpha$ の元である．このことより，$\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ は内点を持つので，定理 2.2.2 と補題 2.2.3 より $\partial \overline{V}_1(z_0, \alpha)$ は単純閉曲線になり $\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ は $\partial \overline{V}_1(z_0, \alpha)$ でかこまれた Jordan 領域になる．よって $\partial \overline{V}_1(z_0, \alpha)$ を決めることで $\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ を求めることができる．

メインの結果を述べる前に次の記号を導入する．$\rho > 0$ について

$$D_\rho = \mathbb{D}\left(-\frac{1}{\rho(\rho+2)}, \frac{\rho+1}{\rho(\rho+2)}\right) \tag{4.3.3}$$

とおく．このとき，D_ρ は $\left[-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho+2}\right]$ を直径とする円板であり，$0 < \rho_1 < \rho_2$ のとき $\overline{D_{\rho_2}} \subset D_{\rho_1}$ となる．$\rho \ge 1$ のときは $\overline{D_\rho} \subset \overline{\mathbb{D}}$. となる．$0 < \rho < 1$ のとき $\Gamma_\rho = \partial D_\rho \cap \mathbb{D}$，$\Delta_\rho = \partial \mathbb{D} \cap \overline{D_\rho}$ とおく．このとき Γ_ρ と Δ_ρ は $\partial\mathbb{D}$ の点 $\xi_\rho^\pm := e^{\pm i \arccos(1-2^{-1}(\rho+1)^2)}$ を端点とする円弧である．図 1.1 を参照.

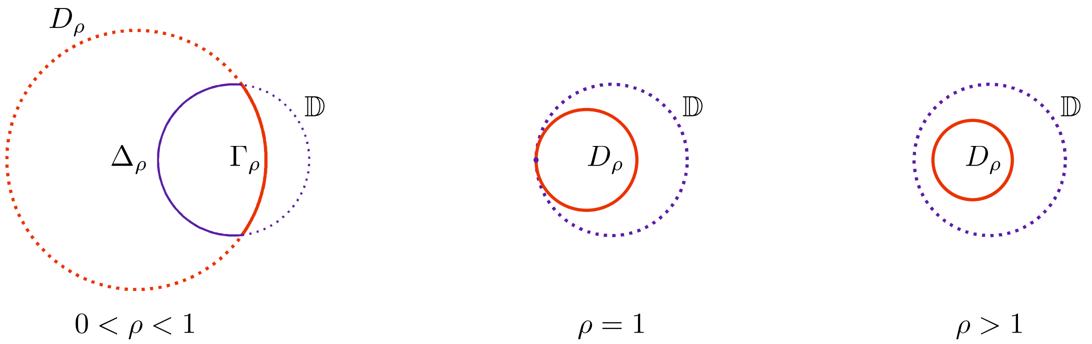


図 4.3.1

定理 4.3.1. $\alpha > 0$ と $z_0 \in \mathbb{D}$ に対して，$\partial\overline{V_1}(z_0, \alpha)$ は単純閉曲線であり，$\overline{V_1}(z_0, \alpha)$ は $\partial\overline{V_1}(z_0, \alpha)$ で囲まれた *Jordan* 領域である．

(i) $\alpha k(z_0) \ge 1$ のときは $\partial\overline{V_1}(z_0, \alpha)$ は

$$\partial D_{\alpha k(z_0)} \ni \zeta \mapsto v(\zeta) := -\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\zeta \in \partial\overline{V_1}(z_0, \alpha).$$

の形で与えられる円である．

(ii) $\alpha k(z_0) < 1$ のとき $\partial\overline{V_1}(z_0, \alpha)$ は

$$\Gamma_{\alpha k(z_0)} \ni \zeta \mapsto v(\zeta) := -\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\zeta \in \partial\overline{V_1}(z_0, \alpha),$$

と

$$\Delta_{\alpha k(z_0)} \ni \zeta \mapsto v(\zeta) := \frac{\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2(1-z_0)^2}(1-\zeta)^2 \in \partial\overline{V_1}(z_0, \alpha).$$

の *2* つの単純弧の合併で与えられる．

さらに，任意の $w_1 \in \partial\overline{V_1}(z_0, \alpha)$ について $f'(z_0) = w_1$ となる $f \in \bar{J}_\alpha$ 函数がただ 1 つ存在する．つまりそのような極値函数がすべて決まる．

定理 4.3.2. $\alpha > 0$，$z_0 \in \mathbb{D}$ と $f \in \bar{J}_\alpha$ に対して，

(a) $\alpha k(z_0) \geq 1$ で $\zeta \in \partial D_{\alpha k(z_0)} \setminus \left\{-\frac{1}{\alpha k(z_0)}\right\}$ のとき，$f'(z_0) = -\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\zeta$ となる f は

$$f = \sigma_{w_0}^{-1}(\sigma_{z_0} \cdot \sigma_{\tilde{w}_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0}) \in J_\alpha, \tag{4.3.4}$$

となる．ここで $w_0 = \frac{1+\alpha k(z_0)\zeta}{\alpha k(z_0)+1}$，$\tilde{w}_0 = -\frac{\alpha k(z_0)k(w_0)}{(1-w_0)^2}\zeta$ である．同様に $f'(z_0) = \frac{k(z_0)}{(1-z_0)^2}$ となる f は $f = \sigma_{z_0} \in J_{\frac{1}{k(z_0)}}$ となる．

(b) $\alpha k(z_0) < 1$ で $\zeta \in \Gamma_{\alpha k(z_0)}$ のとき，$f'(z_0) = -\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\zeta$ となる f は (4.3.4) と同じ形で与えられる．同様に $\zeta \in \Delta_{\alpha k(z_0)}$ のとき，$f'(z_0) = \frac{\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2(1-z_0)^2}(1-\zeta)^2$ となる f は

$$f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_\alpha, \tag{4.3.5}$$

となる．ここで，$w_0 = \frac{1+\alpha k(z_0)\zeta}{\alpha k(z_0)+1}$ である．

定理 4.3.1 と定理 4.3.2 の結果から直ちに次がわかる．

系 4.3.3. $\alpha > 0$ と $z_0 \in \mathbb{D}$ に対して，$\alpha k(z_0) > 1$ のとき，$V_1(z_0, \alpha)$ は円板 $\overline{V}_1(z_0, \alpha) = -\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\overline{D}_{\alpha k(z_0)}$ から *1* 点 $\frac{k(z_0)}{(1-z_0)^2}$ を除いたものになる．$\alpha k(z_0) \leq 1$ のとき，$V_1(z_0, \alpha)$ は定理 *4.3.1* で与えられた $\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ と一致する．

系 4.3.4. $\alpha > 0$ と $z_0 \in \mathbb{D}$ に対して，

(i) $\alpha k(z_0) \geq 1$ のとき，$f \in \bar{J}_\alpha$ について

$$|f'(z_0)| \leq \frac{k(z_0)}{|1-z_0|^2}$$

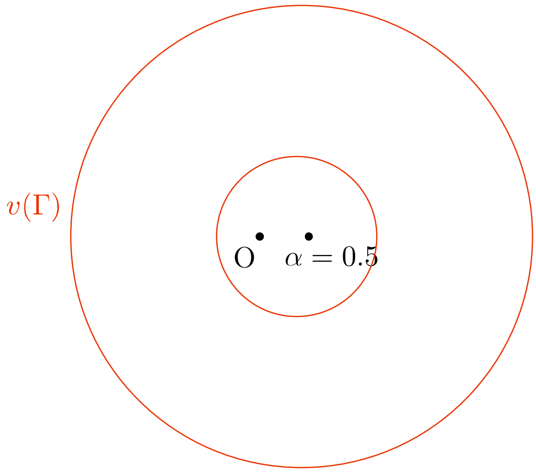
となる．等号成立は $f = \sigma_{z_0} \in J_{\frac{1}{k(z_0)}}$ となるときである．

(ii) $\alpha k(z_0) < 1$ のとき $f \in \bar{J}_\alpha$ について

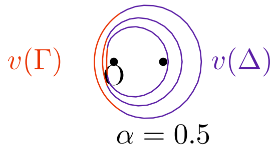
$$|f'(z_0)| \leq \frac{4\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2|1-z_0|^2}$$

となる．等号成立は $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_\alpha$ となるときである．ここで，$w_0 = \frac{1-\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}$.

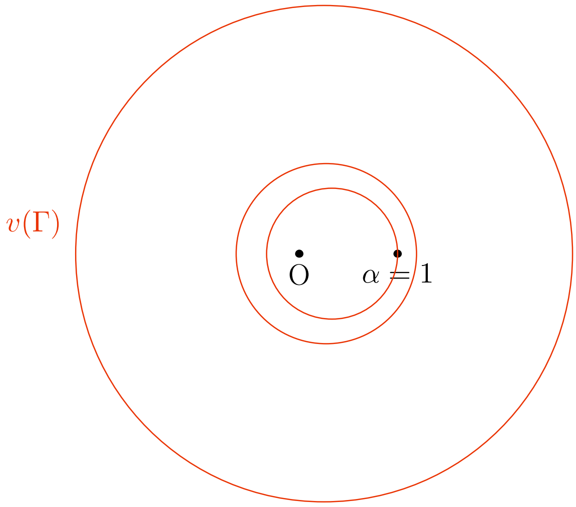
この結果からわかることとして，$\alpha k(z_0) > 1$ のとき，$|f'(z_0)| = \frac{k(z_0)}{|1-z_0|^2}$ を満たす $f \in J_\alpha$ は存在しないということである．



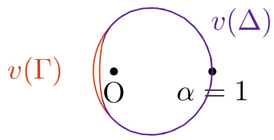
$\partial\overline{V}_1(x, 0.5),\ x = -0.8, -0.4$



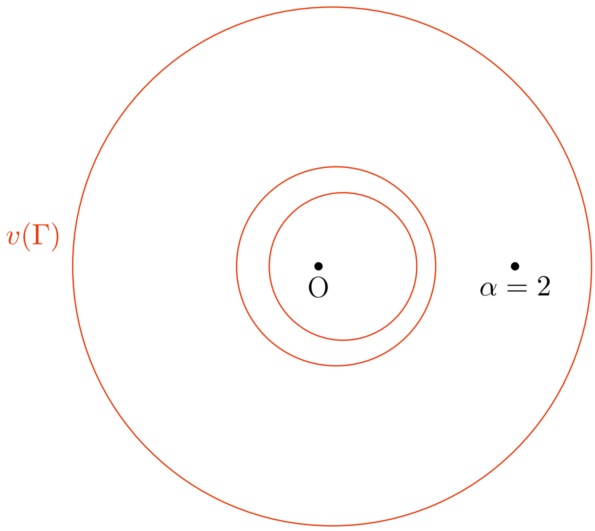
$\partial\overline{V}_1(x, 0.5),\ x = 0, 0.4, 0.8$



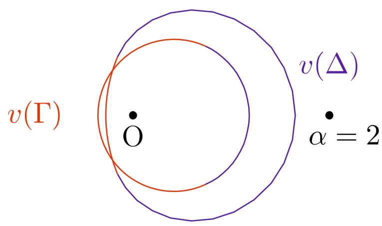
$\partial\overline{V}_1(x, 1),\ x = -0.8, -0.4, 0$



$\partial\overline{V}_1(x, 1),\ x = 0.4, 0.8$



$\partial\overline{V}_1(x, 2),\ x = -0.8, -0.4, 0$



$\partial\overline{V}_1(x, 2),\ x = 0.4, 0.8$

図 4.3.2　The images of $\partial\bar{V}_1(z_0, \alpha)$.

第 5 章

函数族 J_α の閉包とその構造

5.1 J_α の極値函数

$\bar{J}_\alpha$ を求めるためにいくつかの準備をする．

補題 5.1.1. $a, z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ とする．

(i) 任意の $z \in \mathbb{D}$ について，$k(\sigma_a(z)) = \frac{k(z)}{k(a)}$ が成り立つ．

(ii) $\alpha_0 = \frac{k(w_0)}{k(z_0)}$ とおく．$f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0}$ は $\mathbb{D}$ 上で $k(f(z)) = \alpha_0 k(z)$，$f(z_0) = w_0$ を満たし $f \in J_{\alpha_0}$ となる．

証明. (i) (4.1.2) と (4.2.1) から直ちに

$$
\begin{aligned}
k(\sigma_a(z)) &= \frac{\left|1 - \frac{1-\overline{a}}{1-a}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2}{1 - \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2} \\
&= \frac{|(1-a)(1-\overline{a}z) - (1-\overline{a})(z-a)|^2}{|1-a|^2\{|1-\overline{a}z|^2 - |z-a|^2\}} \\
&= \frac{(1-|a|^2)^2|1-z|^2}{|1-a|^2(1-|a|^2)(1-|z|^2)} = \frac{k(z)}{k(a)}.
\end{aligned}
$$

を得る．(ii) $\sigma_{w_0}(f(z)) = \sigma_{z_0}(z)$ であることと (i) から

$$
\frac{k(f(z))}{k(w_0)} = k(\sigma_{w_0}(f(z)) = k(\sigma_{z_0}(z)) = \frac{k(z)}{k(z_0)},
$$

となる．これは (ii) の結果を示す． □

命題 *4.2.1* の証明．始めに，簡単な計算により $k(w) \leq \alpha k(z_0)$, $w \in \mathbb{D}$ であることと

$$
\left|w - \frac{1}{\alpha k(z_0) + 1}\right| \leq \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0) + 1} \quad \text{with} \quad w \neq 1.
$$

が同値であることがわかる．Julia の補題と合わせることにより，$V_0(z_0, \alpha) \subset \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right) \setminus \{1\}$ を得る．

$w_0 \in \partial\overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)$ で $w_0 \neq 1$ とする．$k(w_0) = \alpha k(z_0)$ と補題 5.1.1 から $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0}$ は $f \in J_\alpha$ で $f(z_0) = w_0$ を満たす．従って，$\partial\overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right) \setminus \{1\} \subset V_0(z_0, \alpha)$ となる．$V_0(z_0, \alpha)$ の凸性から $\overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right) \setminus \{1\} \subset V_0(z_0, \alpha)$ であることもすぐにわかる．

最後に唯一性を示す．$w_0 \in \partial\mathbb{D}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right) \setminus \{1\}$ で $f \in J_\alpha$ with $f(z_0) = w_0$ であると仮定する．$\mathbb{D}$ 上で $\mathrm{Re}(1+f)/(1-f) > 0$ であることから定理 3.7.1 より

$$\frac{1+f(z)}{1-f(z)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1+z}{1-z} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu(\zeta) + iC,$$

を得る．ここで $C \in \mathbb{R}$ であり μ は $\partial\mathbb{D}$ 上の正値 Borel 測度で $\mu(\{1\}) = 0$ を満たすものである．両辺の実部をとると

$$\frac{1}{k(f(z))} = \frac{1}{\alpha k(z)} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} d\mu(\zeta)$$

を得る．従って $f(z_0) = w_0$ と $k(w_0) = \alpha k(z_0)$ から

$$0 = \frac{1}{k(f(z_0))} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{k(z_0)} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z_0|^2}{|\zeta-z_0|^2} d\mu(\zeta)$$

となるので $\mu = 0$ であることがわかる．よって

$$\frac{1+f(z)}{1-f(z)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1+z}{1-z} + iC \tag{5.1.1}$$

を得る．$f(z_0) = w_0$ であるから

$$\frac{1+w_0}{1-w_0} = \frac{1}{\alpha}\frac{1+z_0}{1-z_0} + iC \quad \text{and} \quad \frac{1+\overline{w_0}}{1-\overline{w_0}} = \frac{1}{\alpha}\frac{1+\overline{z_0}}{1-\overline{z_0}} - iC. \tag{5.1.2}$$

となり，(5.1.1), (5.1.2) と合わせることにより，

$$\sigma_{w_0}(f(z)) = \frac{\frac{1+f(z)}{1-f(z)} - \frac{1+w_0}{1-w_0}}{\frac{1+f(z)}{1-f(z)} + \frac{1+\overline{w_0}}{1-\overline{w_0}}} = \frac{\frac{1+z}{1-z} - \frac{1+z_0}{1-z_0}}{\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\overline{z_0}}{1-\overline{z_0}}} = \sigma_{z_0}(z).$$

を得る．□

定理 4.2.2 の証明.

$$\widehat{J}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})\colon \frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \text{ on } \mathbb{D} \right\}$$

とおく．このとき

$$\widehat{J}_\alpha = \bigcup_{0<\beta\leq\alpha} J_\beta \tag{5.1.3}$$

であることがわかる．

$f \in \bar{J}_\alpha$ について，$\mathbb{D}$ 上で f に広義一様収束する列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ in J_α が存在する．最大絶対値の原理より $\mathbb{D}$ 上で $|f(z)| < 1$ となるか $f = \eta \in \partial\mathbb{D}$ である．

$\mathbb{D}$ 上で $|f(z)| < 1$ のとき，定理 4.1.1 から

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-f_n(z)|^2}{1-|f_n(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D} \tag{5.1.4}$$

となる．これは $f \in \widehat{J}_\alpha$ を示している．$f = \eta \in \partial\mathbb{D}$ のとき，任意の $z \in \mathbb{D}$ について

$$\eta = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \in \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z)+1}, \frac{\alpha k(z)}{\alpha k(z)+1}\right) \cap \partial\mathbb{D} = \{1\}$$

であるから $\eta = 1$ となる．従って，

$$\bar{J}_\alpha \subset \widehat{J}_\alpha \cup \{1\} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f(z) \in \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z)+1}, \frac{\alpha k(z)}{\alpha k(z)+1}\right) \text{ for all } z \in \mathbb{D} \right\}.$$

を得る．

$\widehat{J}_\alpha \cup \{1\} \subset \bar{J}_\alpha$ を示そう．$f \in J_\beta$ ($0 < \beta \leq \alpha)$ をとる．このとき，命題 4.2.1 の証明と同じように

$$\frac{1+f(z)}{1-f(z)} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1+z}{1-z} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu(\zeta) + iC \tag{5.1.5}$$

を得る．ここで $C \in \mathbb{R}$, μ は $\partial\mathbb{D}$ 上の正値の Borel 測度で $\mu(\{1\}) = 0$ を満たす．$\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ を $\partial\mathbb{D}\backslash\{1\}$ 上でで $\zeta_n \to 1$ となる列とし，

$$\mu_n = \mu + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\delta_{\zeta_n}, \tag{5.1.6}$$

とおく．ここで δ_ζ は ζ における Dirac 測度である．$f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ を

$$\begin{aligned}\frac{1+f_n(z)}{1-f_n(z)} =& \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1+z}{1-z} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu_n(\zeta) + iC \\ =& \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1+z}{1-z} + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\zeta_n+z}{\zeta_n-z} + \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu(\zeta) + iC.\end{aligned}$$

によって定義すると，$f_n \in J_\alpha$ となる．$n \to \infty$ とすると，(5.1.5) から

$$\frac{1+f_n(z)}{1-f_n(z)} \to \frac{1+f(z)}{1-f(z)}$$

locally uniformly on $\mathbb{D}$ を得る．これは $f_n(z) \to f(z)$ locally uniformly on $\mathbb{D}$ であることを表している．よって $f \in \bar{J}_\alpha$.

次に $1 \in \bar{J}_\alpha$ を示す．$n \in \mathbb{N}$ について，$f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ を

$$\frac{1+f_n(z)}{1-f_n(z)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1+z}{1-z} + in, \quad z \in \mathbb{D}.$$

により定義する．このとき $f_n \in J_\alpha$ であり，

$$\frac{1+f_n(z)}{1-f_n(z)} \to \infty$$

locally uniformly on $\mathbb{D}$ となるので，$f_n(z) \to 1$ locally uniformly on $\mathbb{D}$ となる．

最後に $\bar{J}_\alpha$ がコンパクトであることをことを示す．$\bar{J}_\alpha$ は一様有界なので $\bar{J}_\alpha$ は正規族をなす．このとき任意の $\bar{J}_\alpha$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{D}$ 上 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ に広義一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ をもつ．従って $\bar{J}_\alpha$ は閉集合であるから $f \in \bar{J}_\alpha$ である．よって $\bar{J}_\alpha$ は距離空間 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 上点列コンパクトなので，$\bar{J}_\alpha$ はコンパクトである． □

5.2　歪曲評価

命題 5.2.1 ([23])**.** $z_0 \in \mathbb{D}$, $f \in J_\alpha$, $\alpha > 0$ について

$$\tilde{f}(z) = \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}\frac{1-\overline{f(z_0)}}{1-f(z_0)}\frac{1-\overline{z_0}z}{z-z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)} = \frac{\sigma_{f(z_0)}(f(z))}{\sigma_{z_0}(z)}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{5.2.1}$$

,

$$\tilde{\alpha} = \alpha\frac{1-|f(z_0)|^2}{|1-f(z_0)|^2} - \frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2} = \frac{\alpha}{k(f(z_0))} - \frac{1}{k(z_0)} \geq 0 \tag{5.2.2}$$

とおく．このとき次が成り立つ.

(i) $\tilde{\alpha} > 0$ であることと $\tilde{f}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ であることは同値．さらにこの場合 $\tilde{f} \in J_{\tilde{\alpha}}$ となる.
(ii) $\tilde{\alpha} = 0$ であることと $\tilde{f} = 1$ であることは同値.

特に,

$$\tilde{w_0} := \tilde{f}(z_0) = \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}\frac{1-\overline{f(z_0)}}{1-f(z_0)}\frac{1-|z_0|^2}{1-|f(z_0)|^2}f'(z_0) = \frac{(1-z_0)^2}{(1-f(z_0))^2}\frac{k(f(z_0))}{k(z_0)}f'(z_0) \in \mathbb{D}\cup\{1\} \tag{5.2.3}$$

である.

証明. (5.2.1) において極限 $z \to z_0$ を考えることで (5.2.3) を得る. 最大絶対値の原理から $\mathbb{D}$ 上で $|\tilde{f}(z)| < 1$ であるか $\tilde{f} = \eta \in \partial\mathbb{D}$ である．$\tilde{f} = \eta \in \partial\mathbb{D}$ と仮定する．$\angle\lim_{z\to1} f(z) = 1$ であるから $\angle\lim_{z\to1} \tilde{f}(z) = 1$ を得る．よって $\eta = 1$ と $f = \sigma_{f(z_0)}^{-1} \circ \sigma_{z_0}$ を得る．補題 5.1.1 から $k(f(z_0)) = \alpha k(z_0)$ であり $\tilde{\alpha} = 0$ であることもわかる．このとき特に $\tilde{w_0} = 1$ である.

$\mathbb{D}$ 上で $|\tilde{f}(z)| < 1$ であると仮定する．$\tilde{f}$ の角微分を計算する．まず

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_{z_0}(z)} = \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}\cdot\frac{1-\overline{z_0}z}{z-z_0}\\
=&\frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}\cdot\frac{1-\overline{z_0}-\overline{z_0}(z-1)}{1-z_0+z-1}\\
=&1-\frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2}(z-1)+\mathrm{o}(z-1) = 1-\frac{1}{k(z_0)}(z-1)+\mathrm{o}(z-1) \quad z\to1
\end{aligned}$$

を得る．同様に Stolz 領域 $\Gamma_M(1) := \left\{z \in \mathbb{D} : \frac{|1-z|}{1-|z|} < M\right\}$ with $M > 1$ において

$$\begin{aligned}
\sigma_{f(z_0)}(f(z)) &= \frac{1-\overline{f(z_0)}}{1-f(z_0)}\cdot\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\\
&= \frac{1-\overline{f(z_0)}}{1-f(z_0)}\cdot\frac{1-f(z_0)+\alpha(z-1)+\mathrm{o}(z-1)}{1-\overline{f(z_0)}-\alpha\overline{f(z_0)}(z-1)+\mathrm{o}(z-1)}\\
&= 1+\alpha\frac{1-|f(z_0)|^2}{|1-f(z_0)|^2}(z-1)+\mathrm{o}(z-1)\\
&= 1+\alpha\frac{1}{k(f(z_0))}(z-1)+\mathrm{o}(z-1), \quad \Gamma_M(1) \ni z \to 1
\end{aligned}$$

となるから，これら 2 つの漸近展開を合わせることで，

$$\tilde{f}(z) = 1 + \left(\alpha\frac{1}{k(f(z_0))} - \frac{1}{k(z_0)}\right)(z-1) + \mathrm{o}(z-1), \quad \Gamma_M(1) \ni z \to 1$$

を得る．従って

$$\alpha_{\tilde{f}} = \angle\lim_{z\to 1}\frac{\tilde{f}(z)-1}{z-1} = \alpha\frac{1}{k(f(z_0))} - \frac{1}{k(z_0)} = \tilde{\alpha}$$

を得る．また，$\tilde{f}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ であるから $\tilde{\alpha} = \alpha_{\tilde{f}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} k(f(z))/k(z) > 0$ と $\tilde{w}_0 \in \mathbb{D}$ を得る． □

命題 5.2.2. $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ と $\alpha > 0$ について

$$\tilde{\alpha} = \alpha\frac{1-|w_0|^2}{|1-w_0|^2} - \frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2} = \frac{\alpha}{k(w_0)} - \frac{1}{k(z_0)} > 0. \tag{5.2.4}$$

とおく．$\tilde{f} \in J_{\tilde{\alpha}}$ について

$$f(z) = \sigma_{w_0}^{-1}\left(\sigma_{z_0}(z)\tilde{f}(z)\right). \tag{5.2.5}$$

とおくと，$f \in J_\alpha$ で $f(z_0) = w_0$ となる．

証明. 明らかに $f(z_0) = w_0$ である．$\angle\lim_{z\to 1}\frac{\tilde{f}(z)-1}{z-1} = \tilde{\alpha}$ であるから任意の $M > 1$ に対して

$$\tilde{f}(z) = 1 + \tilde{\alpha}(z-1) + \mathrm{o}(z-1), \quad \Gamma_M(1) \ni z \to 1$$

を得る．これと

$$\begin{aligned}\sigma_{z_0}(z) &= 1 + \frac{1}{k(z_0)}(z-1) + \mathrm{o}(z-1),\\ \sigma_{w_0}^{-1}(w) &= 1 + k(w_0)(w-1) + \mathrm{o}(w-1),\end{aligned}$$

を合わせることで，任意の $M > 1$ に対して，

$$\begin{aligned}f(z) = \sigma_{w_0}^{-1}\left(\sigma_{z_0}(z)\tilde{f}(z)\right) &= 1 + k(w_0)\left(\tilde{\alpha} + \frac{1}{k(z_0)}\right)(z-1) + \mathrm{o}(z-1)\\ &= 1 + \alpha(z-1) + \mathrm{o}(z-1), \quad \Gamma_M(1) \ni z \to 1\end{aligned}$$

を得る．従って $\angle\lim_{z\to 1}\frac{f(z)-1}{z-1} = \alpha$ である． □

$z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ と $\alpha > 0$ に対し $k(w_0) \le \alpha k(z_0)$ であるとする．最初に $k(w_0) < \alpha k(z_0)$ であると仮定する．$f(z_0) = w_0$ を満たす $f \in J_\alpha$ について 命題 5.2.1 から $\tilde{f} = \sigma_{w_0} \circ f/\sigma_{z_0} \in J_{\tilde{\alpha}}$ を得る．従って Julia の補題から

$$\frac{|1-\tilde{f}(z)|^2}{1-|\tilde{f}(z)|^2} \le \tilde{\alpha}\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

となり，これは

$$\tilde{f}(z) \in \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}k(z)+1}, \frac{\tilde{\alpha}k(z)}{\tilde{\alpha}k(z)+1}\right)\setminus\{1\}$$

と同値である．極限 $z \to z_0$ を考えると 命題 5.2.1 から

$$f'(z_0) = \frac{(1-w_0)^2}{(1-z_0)^2}\frac{k(z_0)}{k(w_0)}\tilde{f}(z_0) \in \frac{(1-w_0)^2}{(1-z_0)^2}\frac{k(z_0)}{k(w_0)}\left\{\overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1}, \frac{\tilde{\alpha}k(z_0)}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1}\right)\setminus\{1\}\right\}$$

を得る．また

$$\tilde{\alpha}k(z_0) = \left(\alpha\frac{1}{k(w_0)} - \frac{1}{k(z_0)}\right)k(z_0) = \alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1,$$

であるから

$$\frac{k(z_0)}{k(w_0)}\frac{1}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1} = \frac{k(z_0)}{k(w_0)}\frac{k(w_0)}{\alpha k(z_0)} = \frac{1}{\alpha} \tag{5.2.6}$$

と

$$\frac{k(z_0)}{k(w_0)}\frac{\tilde{\alpha}k(z_0)}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1} = \frac{k(z_0)}{k(w_0)}\left(\alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right)\frac{k(w_0)}{\alpha k(z_0)} = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right) \tag{5.2.7}$$

を得る．従って

$$f'(z_0) \in \frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\left\{\overline{\mathbb{D}}\left(1, \alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right) \setminus \left\{\frac{\alpha k(z_0)}{k(w_0)}\right\}\right\} \tag{5.2.8}$$

を得る．これは Mercer の不等式 [18]

$$\left| f'(z_0) - \frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2} \right| \le \frac{1-|w_0|^2}{1-|z_0|^2} - \frac{|1-w_0|^2}{\alpha|1-z_0|^2} \tag{5.2.9}$$

を表している．

定理 5.2.3. $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ と $\alpha > 0$ に対して $k(w_0) \le \alpha k(z_0)$ を満たすとする．$k(w_0) = \alpha k(z_0)$ のとき，$f(z_0) = w_0$ となる $f \in \bar{J}_\alpha$ について $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_\alpha$ となる．特に，

$$\{f'(z_0) : f \in \bar{J}_\alpha \ \mathit{with}\ f(z_0) = w_0\} = \left\{\frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\right\}$$

となる．$k(w_0) < \alpha k(z_0)$ のとき，

$$\{f'(z_0) : f \in \bar{J}_\alpha \ \mathit{with}\ f(z_0) = w_0\} = \frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\overline{\mathbb{D}}\left(1, \alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right)$$

となる．さらに $f \in \bar{J}_\alpha$ について

$$f'(z_0) \in \frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\partial\mathbb{D}\left(1, \alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right) \setminus \left\{\frac{(1-w_0)^2}{(1-z_0)^2}\frac{k(z_0)}{k(w_0)}\right\}$$

となること $f = \sigma_{w_0}^{-1}(\sigma_{z_0} \cdot \sigma_{\tilde{w}_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0}) \in J_\alpha$ となることは同値．ここで

$$\tilde{w_0} = \frac{(1-z_0)^2}{(1-w_0)^2}\frac{k(w_0)}{k(z_0)}f'(z_0)$$

である．同様に

$$f'(z_0) = \frac{(1-w_0)^2}{(1-z_0)^2}\frac{k(z_0)}{k(w_0)}$$

となることと $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_{k(w_0)/k(z_0)} \subsetneq \bar{J}_\alpha \backslash J_\alpha$ となることは同値.

証明. $f \in \bar{J}_\alpha$ をとり $f(z_0) = w_0$ を満たすとする．まず $k(w_0) = \alpha k(z_0)$ を仮定する．このとき，

$$\alpha = \frac{k(w_0)}{k(z_0)} = \frac{k(f(z_0))}{k(z_0)} \leq \alpha_f = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{k(f(z))}{k(z)} \leq \alpha,$$

であることから $\alpha_f = \alpha$ と $f \in J_\alpha$. を得る．よって命題 4.2.1 から $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0}$ と

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \frac{\sigma'_{z_0}(z_0)}{\sigma'_{w_0}(\sigma_{w_0}^{-1}(\sigma_{z_0}(z_0)))} &= \frac{\sigma'_{z_0}(z_0)}{\sigma'_{w_0}(w_0)} \\ &= \frac{1-|w_0|^2}{1-|z_0|^2} \frac{1-\overline{z_0}}{1-z_0} \frac{1-w_0}{1-\overline{w_0}} = \frac{k(z_0)}{k(w_0)} \frac{(1-w_0)^2}{(1-z_0)^2} = \frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2} \end{aligned}$$

を得る．

$k(w_0) < \alpha k(z_0)$ と仮定する．このとき $f \neq 1$, $f \in \hat{J}_\alpha = \bigcup_{0<\beta\leq\alpha} J_\beta$ であることから

$$\alpha_0 := \frac{k(w_0)}{k(z_0)} \leq \alpha_f = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{k(f(z))}{k(z)} \leq \alpha$$

となる．命題 5.2.1 と

$$\tilde{f}(z) = \frac{\sigma_{w_0}(f(z))}{\sigma_{z_0}(z)} \quad \text{and} \quad \widetilde{\alpha_f} = \frac{\alpha_f}{k(w_0)} - \frac{1}{k(z_0)} \geq 0,$$

とおく．$\widetilde{\alpha_f} = 0$ のとき，命題 5.2.1 (ii) から $\tilde{f} = 1$ となり，命題 4.2.1 から $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_{\alpha_f} = J_{k(w_0)/k(z_0)} \subsetneq \bar{J}_\alpha \backslash J_\alpha$ を得る．

$\widetilde{\alpha_f} > 0$ のとき，命題 5.2.1 (i) から $\tilde{f} \in J_{\widetilde{\alpha_f}}$ を得る．これは $\tilde{f}(z_0) \in \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\widetilde{\alpha_f}k(z_0)+1}, \frac{\widetilde{\alpha_f}k(z_0)}{\widetilde{\alpha_f}k(z_0)+1}\right) \backslash \{1\}$ であることを示している．

$$\widetilde{\alpha_f} = \frac{\alpha_f}{k(w_0)} - \frac{1}{k(z_0)} \leq \frac{\alpha}{k(w_0)} - \frac{1}{k(z_0)} = \tilde{\alpha}$$

であること，$0 < \rho_1 < \rho_2$ のとき

$$\overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\rho_1+1}, \frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right) \backslash \{1\} \subset \mathbb{D}\left(\frac{1}{\rho_2+1}, \frac{\rho_2}{\rho_2+1}\right), \tag{5.2.10}$$

であることに注意すると，(5.2.3), (5.2.6) と (5.2.7) から

$$\begin{aligned} f'(z_0) &\in \frac{(1-w_0)^2}{(1-z_0)^2} \frac{k(z_0)}{k(w_0)} \left\{ \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\widetilde{\alpha_f}k(z_0)+1}, \frac{\widetilde{\alpha_f}k(z_0)}{\widetilde{\alpha_f}k(z_0)+1}\right) \backslash \{1\} \right\} \\ &\subset \frac{(1-w_0)^2}{(1-z_0)^2} \frac{k(z_0)}{k(w_0)} \left\{ \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1}, \frac{\tilde{\alpha}k(z_0)}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1}\right) \backslash \{1\} \right\} \\ &= \frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2} \left\{ \overline{\mathbb{D}}\left(1, \alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right) \backslash \left\{ \frac{\alpha k(z_0)}{k(w_0)} \right\} \right\} \end{aligned}$$

となる．

$$f'(z_0) \in \frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2} \left\{ \partial\mathbb{D}\left(1, \alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right) \backslash \left\{ \frac{\alpha k(z_0)}{k(w_0)} \right\} \right\}$$

と仮定する．(5.2.10) から $\widetilde{\alpha_f} = \tilde{\alpha}$ となる．従って

$$\tilde{w_0} = \frac{(1-z_0)^2}{(1-w_0)^2} \frac{k(w_0)}{k(z_0)} f'(z_0) \in \partial\mathbb{D}\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1}, \frac{\tilde{\alpha}k(z_0)}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1}\right) \backslash \{1\} \tag{5.2.11}$$

である．これは $k(\tilde{w}_0) = \tilde{\alpha}k(z_0)$ であることを示している．$\tilde{f}(z_0) = \tilde{w}_0$ だから命題 4.2.1 より $\tilde{f} = \sigma_{\tilde{w}_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_{\tilde{\alpha}}$ を得る．故に 命題 5.2.2 から

$$f(z) = \sigma_{w_0}^{-1}\left(\sigma_{z_0}(z)\tilde{f}(z)\right) = \sigma_{w_0}^{-1}\left(\sigma_{z_0}(z) \cdot \sigma_{\tilde{w}_0}^{-1}(\sigma_{z_0}(z))\right) \in J_\alpha \tag{5.2.12}$$

で $f(z_0) = w_0$ となる．

逆に任意の $\tilde{w}_0 \in \mathbb{D}$ で $k(\tilde{w}_0) = \tilde{\alpha}k(z_0)$ を満たすものに対して，$\tilde{f} = \sigma_{\tilde{w}_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0}$ と (5.2.12) の形で f を定義すると，簡単な計算により，$\tilde{w}_0 = \tilde{f}(z_0)$, $f'(z_0) = \frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\frac{k(z_0)}{k(w_0)}\tilde{w}_0$ と $f \in J_\alpha$ で $f(z_0) = w_0$ を満たすことがわかる．

$f'(z_0) = \frac{(1-w_0)^2}{(1-z_0)^2}\frac{k(z_0)}{k(w_0)}$ であると仮定する．この場合は $\widetilde{\alpha_f} = 0$ かつ $\tilde{f} = 1$ となる．従って $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_{k(w_0)/k(z_0)} \subsetneq \bar{J}_\alpha \backslash J_\alpha$ となる．逆に $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0}$ は $f'(z_0) = \frac{(1-w_0)^2}{(1-z_0)^2}\frac{k(z_0)}{k(w_0)}$ と $f \in \bar{J}_\alpha$ を満たす．

ここまでで $\frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\partial\mathbb{D}\left(1, \alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right) \subset \{f'(z_0) : f \in \bar{J}_\alpha \text{ with } f(z_0) = w_0\}$ であることを示した．よって $\bar{J}_\alpha$ の凸性より $\frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\overline{\mathbb{D}}\left(1, \alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right) \subset \{f'(z_0) : f \in \bar{J}_\alpha \text{ with } f(z_0) = w_0\}$ であることがわかる． □

以上より次の定理を得る．

定理 5.2.4. $\alpha > 0$, $z_0 \in \mathbb{D}$ とする．このとき $\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ は

$$\overline{V}_1(z_0, \alpha) = \frac{1}{\alpha(1-z_0)^2} \bigcup_{w_0 \in \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)} \overline{\mathbb{D}}\left((1-w_0)^2, \alpha k(z_0)(1-|w_0|^2) - |1-w_0|^2\right)$$

と閉円板の和集合の形で表される．

証明. $f \in \bar{J}_\alpha = \left(\bigcup_{0<\beta\le\alpha} J_\beta\right) \cup \{1\}$ に対して $w_0 = f(z_0)$ となるとする．このとき $w_0 \in \mathbb{D}$ で $k(w_0) \le \alpha k(z_0)$ となるか，または $w_0 = 1$ となる．$w_0 = 1$ のときは $f'(z_0) = 0$ となるので $f = 1$ となる．逆に任意の $w_0 \in \mathbb{D}$ で $k(w_0) \le \alpha k(z_0)$ または $w_0 = 1$ となるものに対して，ある函数 $f \in \bar{J}_\alpha$ で $f(z_0) = w_0$ を満たすものが存在する．よって 定理 5.2.3 と

$$|1-w_0|^2\left(\frac{\alpha k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right) = \alpha k(z_0)(1-|w_0|^2) - |1-w_0|^2$$

から

$$\begin{aligned}
\overline{V}_1(z_0, \alpha) &= \left(\bigcup_{\substack{w_0 \in \mathbb{D} \text{ with} \\ k(w_0) \le \alpha k(z_0)}} \{f'(z_0) : f \in \bar{J}_\alpha \text{ with } f(z_0) = w_0\}\right) \cup \{0\} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha(1-z_0)^2} \bigcup_{\substack{w_0 \in \mathbb{D} \text{ with} \\ k(w_0) \le \alpha k(z_0)}} \overline{\mathbb{D}}\left((1-w_0)^2, \alpha k(z_0)(1-|w_0|^2) - |1-w_0|^2\right)\right) \cup \{0\} \\
&= \frac{1}{\alpha(1-z_0)^2} \bigcup_{w_0 \in \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)} \overline{\mathbb{D}}\left((1-w_0)^2, \alpha k(z_0)(1-|w_0|^2) - |1-w_0|^2\right)
\end{aligned}$$

を得る． □

命題 5.2.5. $z_0 \in \mathbb{D}$, $\alpha > 0$ に対して $\overline{V}_1(z_0, \alpha) = \{f'(z_0) : f \in \bar{J}_\alpha\}$ は内点を持ち，凸かつコンパクトである．従って $\partial\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ は単純閉曲線であり $\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ は $\partial\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ によって囲まれた *Jordan* 領域である．

証明. $\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ が凸かつコンパクトであることは明らかである．定理 5.2.3 から $\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ が内点を持つことも簡単にわかる．最後の主張も補題 2.2.3 より明らか．([4, Corollary 11.3.4] も参照) □

命題 5.2.5 から $\overline{V}_1(\alpha, z_0)$ を求めるには単純閉曲線 $\partial\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ を求めれば十分であることがわかる．

第 6 章

主要定理の証明

6.1 最大値問題と境界曲線の決定

定理 5.2.4 から

$$\overline{V}_1(z_0,\alpha)=\frac{1}{\alpha(1-z_0)^2}\bigcup_{w_0\in\overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1},\frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)}\overline{\mathbb{D}}\left((1-w_0)^2,\alpha k(z_0)(1-|w_0|^2)-|1-w_0|^2\right) \tag{6.1.1}$$

となることがわかった．$\overline{V}_1(z_0,\alpha)$ を求めるために新しいパラメータ

$$\overline{\mathbb{D}}\ni\zeta\mapsto\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}+\frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\zeta=w_0\in\overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1},\frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right) \tag{6.1.2}$$

を導入する．

$$(1-w_0)^2=\left(\frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)^2\cdot(1-\zeta)^2 \tag{6.1.3}$$

であり，さらに

$$\alpha k(z_0)(1-|w_0|^2)-|1-w_0|^2=\left(\frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)^2(\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2), \tag{6.1.4}$$

であることから

$$\overline{V}_1(z_0,\alpha)=\frac{1}{\alpha(1-z_0)^2}\cdot\left(\frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)^2\tilde{V}_1(z_0,\alpha), \tag{6.1.5}$$

を得る．ここで

$$\tilde{V}_1(z_0,\alpha)=\bigcup_{\zeta\in\overline{\mathbb{D}}}\overline{\mathbb{D}}((1-\zeta)^2,(\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)) \tag{6.1.6}$$

である．従って $\overline{V}_1(z_0,\alpha)$ を求めるには $\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ によって囲まれた凸かつコンパクトな Jordan 領域 $\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ を求めればよいことになる．

$\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ を決定するために次の函数 $\mathrm{Re}\{ve^{-i\varphi}\}$, $(v\in\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$, $\varphi\in(-\pi,\pi])$ の最大値問題を考える．そのための準備としていくつか補題と命題を紹介する．

補題 6.1.1. 任意の $\varphi \in (-\pi, \pi)$ について，函数

$$F_\varphi(x) := \frac{|1+(x+1)e^{i\varphi}|}{x(x+2)} = \frac{\sqrt{x^2+2(1+\cos\varphi)x+2(1+\cos\varphi)}}{x(x+2)}, \quad x>0 \tag{6.1.7}$$

は連続かつ狭義単調減少である．さらに $\lim_{x\to 0} F_\varphi(x) = \infty$ かつ $\lim_{x\to\infty} F_\varphi(x) = 0$ となる．

証明. $F_\varphi(x) > 0$ であるから $\frac{d}{dx}(\log F_\varphi(x)) = \frac{F'_\varphi(x)}{F_\varphi(x)} < 0.$ を示せば十分である．実際に計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{F'_\varphi(x)}{F_\varphi(x)} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2(1+\cos\varphi)}{x^2+2(1+\cos\varphi)x+2(1+\cos\varphi)} - \frac{2(x+1)}{x(x+2)} \\
&= \frac{x(x+2)\{2x+2(1+\cos\varphi)\} - 2(x+1)\{x^2+2(1+\cos\varphi)x+2(1+\cos\varphi)\}}{x(x+2)\{x^2+2(1+\cos\varphi)x+2(1+\cos\varphi)\}} \\
&= -\frac{x^3+3(1+\cos\varphi)x^2+6(1+\cos\varphi)x+4(1+\cos\varphi)}{x(x+2)\{x^2+2(1+\cos\varphi)x+2(1+\cos\varphi)\}} < 0
\end{aligned}$$

となる． □

任意の $\varphi \in (-\pi, \pi]$ について

$$\zeta^*_\varphi = -\frac{1+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}}{\alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)} \in \mathbb{C} \tag{6.1.8}$$

とおく．$|1+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}| \le \alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)$ のとき $\zeta^*_\varphi \in \overline{\mathbb{D}}$ であり，

$$\zeta_\varphi = \zeta^*_\varphi \in \overline{\mathbb{D}} \tag{6.1.9}$$

とおく．このとき $\zeta_\pi = \zeta^*_\pi = \frac{1}{\alpha k(z_0)+2}$ であることに注意しよう．$|1+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}| > \alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)$ のとき，補題 6.1.1 から

$$|1+(\alpha k(z_0)+\eta_\varphi+1)e^{i\varphi}| = (\alpha k(z_0)+\eta_\varphi)(\alpha k(z_0)+\eta_\varphi+2) \tag{6.1.10}$$

を満たす $\eta_\varphi > 0$ がただ 1 つ存在する．この場合に

$$\zeta_\varphi = -\frac{1+(\alpha k(z_0)+\eta_\varphi+1)e^{i\varphi}}{(\alpha k(z_0)+\eta_\varphi)(\alpha k(z_0)+\eta_\varphi+2)} \in \partial\mathbb{D} \tag{6.1.11}$$

とおく．このとき，さらに

$$v_\varphi = (1-\zeta_\varphi)^2 + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta_\varphi|^2)e^{i\varphi} \tag{6.1.12}$$

とおく．

命題 6.1.2. $z_0 \in \mathbb{D}$, $\alpha > 0$ とする．このとき，任意の $\varphi \in (-\pi, \pi]$ について $v_\varphi \in \partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ がただ 1 つ決まり，函数 $\mathrm{Re}\{ve^{-i\varphi}\}$, $v \in \tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ は $v = v_\varphi$ においてのみ最大値を取る．さらに

$$v_\varphi \in \partial\mathbb{D}\left((1-\zeta_\varphi)^2, (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta_\varphi|^2)\right), \tag{6.1.13}$$

$$v_\varphi \notin \overline{\mathbb{D}}\left((1-\zeta)^2, (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\right) \quad \textit{for all } \zeta \in \overline{\mathbb{D}}\backslash\{\zeta_\varphi\} \tag{6.1.14}$$

が成り立つ．

証明. $\varphi \in (-\pi, \pi]$ を 1 つ固定する．最初に $v \in \tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ はある $\zeta, \varepsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ を用いて

$$v = (1-\zeta)^2 + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\varepsilon$$

と表せることに注意しよう．$\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ はコンパクトであり，$\mathrm{Re}\{ve^{-i\varphi}\}$ は v の連続函数であるから，ある $v_0 \in \tilde{V}_1(z_0,\alpha), \zeta_0, \varepsilon_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ で $v_0 = (1-\zeta_0)^2 + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta_0|^2)\varepsilon_0$ となるものが存在し，

$$\max_{v \in \tilde{V}_1(z_0,\alpha)} \mathrm{Re}\{ve^{-i\varphi}\} = \mathrm{Re}\{v_0 e^{-i\varphi}\} \tag{6.1.15}$$

を満たす．このとき任意の $\zeta, \varepsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ について

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\{(1-\zeta)^2 e^{-i\varphi}\} + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\,\mathrm{Re}\{\varepsilon e^{-i\varphi}\} \\ \le\ &\mathrm{Re}\{(1-\zeta_0)^2 e^{-i\varphi}\} + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta_0|^2)\,\mathrm{Re}\{\varepsilon_0 e^{-i\varphi}\} \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

が成り立つ．$\zeta = \zeta_0$ を代入することで，任意の $\varepsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ について

$$(1-|\zeta_0|^2)\,\mathrm{Re}\{\varepsilon e^{-i\varphi}\} \le (1-|\zeta_0|^2)\,\mathrm{Re}\{\varepsilon_0 e^{-i\varphi}\}$$

となる．$|\zeta_0| < 1$ であると仮定する．このとき上の不等式において $\varepsilon_0 = e^{i\varphi}$ となる．$\varepsilon = e^{i\varphi}$ を (6.1.16) に代入すると，任意の $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ について

$$\mathrm{Re}\{(1-\zeta)^2 e^{-i\varphi}\} + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2) \le \mathrm{Re}\{(1-\zeta_0)^2 e^{-i\varphi}\} + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta_0|^2)$$

となる．このとき上の不等式は $|\zeta_0| = 1$ のときにも成り立つことに注意しておこう．

$$\begin{aligned} H_\varphi(\zeta) =& \mathrm{Re}\{(1-\zeta)^2 e^{-i\varphi}\} + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2) \\ =& \frac{1}{2}\{(1-\zeta)^2 e^{-i\varphi} + (1-\overline{\zeta})^2 e^{i\varphi}\} + (\alpha k(z_0)+1)(1-\zeta\overline{\zeta}), \quad \zeta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

とおく．既に $H_\varphi(\zeta)$ が $\overline{\mathbb{D}}$ 上で ζ_0 において最大値を取ることは述べた．また $H_\varphi(\zeta)$ は $\mathrm{Re}\,\zeta$ と $\mathrm{Im}\,\zeta$ の多項式で $\deg H_\varphi(\zeta) = 2$ である．さらに $\lim_{\zeta\to\infty} H_\varphi(\zeta) = -\infty$ を満たす．よって $H_\varphi(\zeta)$ は $\mathbb{C}$ においてある点 ζ_0^* で最大値を取る．ζ_0^* が (6.1.8) の ζ_φ^* と一致することを示す．順に計算することにより

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}(\zeta_0^*) =& \{(\zeta_0^* - 1)e^{-i\varphi} - (\alpha k(z_0)+1)\overline{\zeta_0^*}\} = 0, \\ \overline{\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}(\zeta_0^*)} =& \{(\overline{\zeta_0^*} - 1)e^{i\varphi} - (\alpha k(z_0)+1)\zeta_0^*\} = 0, \\ \zeta_0^* =& -\frac{1+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}}{\alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)} = \zeta_\varphi^* \end{aligned}$$

を得る．$|1+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}| \le \alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)$, のとき，明らかに函数 $H_\varphi(\zeta)$ は $\overline{\mathbb{D}}$ において ζ_φ^* でのみ最大値を取る．よって $\zeta_0 = \zeta_\varphi^* = \zeta_\varphi \in \overline{\mathbb{D}}$, $v_0 = v_\varphi$ となり 函数 $\mathrm{Re}\{ve^{-i\varphi}\}$, $(v \in \tilde{V}_1(z_0,\alpha))$ は $v = v_\varphi$ においてのみ最大値を取る．

$|1+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}| > \alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)$ のとき $\zeta_\varphi^* \notin \overline{\mathbb{D}}$ である．この場合 $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ となる．$\zeta_0 \in \mathbb{D}$ であると仮定すると，$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}(\zeta_0) = 0$ でありこのとき $\zeta_0 = \zeta_\varphi^* \notin \overline{\mathbb{D}}$ となるから $\zeta_0 \in \mathbb{D}$ に矛盾するからである．

$\zeta = se^{it}$, $(s \in [0,1],\ t \in (-\pi, \pi])$ とおく．このとき

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{H_\varphi(se^{it})\right\}\Big|_{\zeta=\zeta_0} = \left\{\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \overline{\zeta}}\frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial t}\right\}\Big|_{\zeta=\zeta_0} \tag{6.1.17}$$
$$= \left\{\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left(\overline{\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}}\right)\left(\overline{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}\right)\right\}\Big|_{\zeta=\zeta_0}$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta} i\zeta\right\}\Big|_{\zeta=\zeta_0}$$
$$= -2\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}\zeta\right\}\Big|_{\zeta=\zeta_0} = 0$$

となる．同様の計算をすることで $\frac{\partial}{\partial s}\left\{H_\varphi(se^{it})\right\}\big|_{\zeta=\zeta_0} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}(\zeta)\zeta\right\}\big|_{\zeta=\zeta_0} \geq 0$ を得る．よって，ある $\eta_0 \geq 0$ が存在し $\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}(\zeta_0)\zeta_0 = \eta_0$ を満たす．$\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ であるから，順に計算することで

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}(\zeta_0) = \{(\zeta_0 - 1)e^{-i\varphi} - (\alpha k(z_0)+1)\overline{\zeta_0}\} = \frac{\eta_0}{\zeta_0} = \eta_0\overline{\zeta_0},$$
$$\overline{\frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta}}(\zeta_0) = \{(\overline{\zeta_0} - 1)e^{i\varphi} - (\alpha k(z_0)+1)\zeta_0\} = \frac{\eta_\varphi}{\overline{\zeta_0}} = \eta_0\zeta_0,$$
$$\zeta_0 = -\frac{1 + (\alpha k(z_0) + \eta_0 + 1)e^{i\varphi}}{(\alpha k(z_0) + \eta_0)(\alpha k(z_0) + \eta_0 + 2)} \tag{6.1.18}$$

を得る．$|\zeta_0| = 1$ だから補題 6.1.1 により $\eta_0 = \eta_\varphi$ となる．従って $\zeta_0 = \zeta_\varphi$ であり，函数 $H_\varphi(\zeta)$ は $\overline{\mathbb{D}}$ において ζ_φ でのみ最大値を取る．このことから $\mathrm{Re}\{ve^{-i\varphi}\}$, $v \in \tilde{V}_1(z_0, \alpha)$, は $v = v_\varphi$ においてのみ最大値を取ることがわかる．

(6.1.13) となることは (6.1.12) からすぐにわかる．(6.1.14) を示す．ある $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}\backslash\{\zeta_\varphi\}$ において $v_\varphi \in \overline{\mathbb{D}}\left((1-\zeta)^2, (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\right)$ であると仮定する．このときある $\varepsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ が存在し $v_\varphi = (1-\zeta)^2 + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\varepsilon$ を満たす．よって H_φ は $\overline{\mathbb{D}}$ において ζ_φ においてのみ最大値を取る．故に

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{v_\varphi e^{-i\varphi}\} &= \mathrm{Re}\{(1-\zeta)^2 e^{-i\varphi}\} + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\,\mathrm{Re}\{\varepsilon e^{-i\varphi}\} \\ &\leq \mathrm{Re}\{(1-\zeta)^2 e^{-i\varphi}\} + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2) \\ &= H_\varphi(\zeta) \\ &< H_\varphi(\zeta_\varphi) = \mathrm{Re}\{v_\varphi e^{-i\varphi}\}\end{aligned}$$

となるがこれは矛盾である．□

単純閉曲線 $\partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ の表示を 2 つ与えることにする．定理 4.3.1 の結果は次の定理と (6.1.5) から導かれる．

定理 6.1.3. $\alpha > 0$ と $z_0 \in \mathbb{D}$ に対して，写像 $(-\pi, \pi] \ni \varphi \mapsto v_\varphi \in \partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ 連続かつ単射であり $\lim_{\varphi \searrow -\pi} v_\varphi = v_\pi$ を満たす．さらに以下のような表示ができる．

(i) $\alpha k(z_0) \geq 1$ のとき $\partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ は円板

$$\partial D_{\alpha k(z_0)} \ni \zeta \mapsto -(\alpha k(z_0)+1)^2\zeta \in \partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$$

で与えられる．

(ii) $\alpha k(z_0) < 1$ のとき $\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ は次の 2 つの単純弧

$$\Gamma_{\alpha k(z_0)} \ni \zeta \mapsto -(\alpha k(z_0)+1)^2\zeta \in \partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha),$$

と

$$\Delta_{\alpha k(z_0)} \ni \zeta \mapsto (1-\zeta)^2 \in \partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$$

からなる．

証明. $\overline{V}_1(z_0,\alpha)$ は閉集合でかつ凸なので，$\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ も閉集合でかつ凸である．明らかに $\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ 内点をもつ．従って $\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ は単純閉曲線であり $\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ は $\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ で囲まれた凸かつ閉な Jordan 領域である．$\varphi \in (-\pi,\pi]$ について v_φ と ζ_φ, ζ_φ^* を命題 6.1.2 の証明のときと同じ形でおく．このとき

$$\frac{1}{\alpha k(z_0)+2} \le |\zeta_\varphi^*| = \left|\frac{1+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}}{\alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)}\right| \le \frac{1}{\alpha k(z_0)}$$

である．

(i) $\alpha k(z_0) \ge 1$ と仮定する．このとき任意の $\varphi \in (-\pi,\pi]$ について $\zeta_\varphi^* \in \partial D_{\alpha k(z_0)} \subset \overline{\mathbb{D}}$ であるから $\zeta_\varphi = \zeta_\varphi^*$ となる．(6.1.8) から ζ_φ は連続であり φ が $(-\pi,\pi]$ 全体を動くとき $\partial D_{\alpha k(z_0)}$ 全体を動き $\lim_{\varphi\searrow-\pi}\zeta_\varphi = \zeta_\pi$ を満たす．この場合は

$$\begin{aligned}
v_\varphi &= (1-\zeta_\varphi)^2 + (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta_\varphi|^2)e^{i\varphi} \\
&= \left\{1+\frac{1+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}}{\alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)}\right\}^2 \\
&\quad + (\alpha k(z_0)+1)\left\{1-\frac{(\alpha k(z_0)+1)^2+2(\alpha k(z_0)+1)(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})+1}{(\alpha k(z_0))^2(\alpha k(z_0)+2)^2}\right\}e^{i\varphi} \\
&= \frac{(\alpha k(z_0)+1)^2}{\alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)}\left[(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}+1\right] \\
&= -(\alpha k(z_0)+1)^2\zeta_\varphi \in \partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)
\end{aligned} \tag{6.1.19}$$

となる．明らかに写像 $\partial D_{\alpha k(z_0)} \ni \zeta \mapsto -(\alpha k(z_0)+1)^2\zeta \in \partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ は連続で単射である．$\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ は単純閉曲線なので（つまり円周と位相同型なので），全射であることがわかる．

(ii) $\alpha k(z_0) < 1$ と仮定する．この場合，$\zeta_\varphi^* \notin \mathbb{D}$ であり，$|\varphi| < \varphi_0$ のとき ζ_φ が (6.1.18) の形で与えられ，$\varphi_0 < |\varphi| \le \pi$ のとき $\zeta_\varphi^* \in \mathbb{D}$ かつ $\zeta_\varphi = \zeta_\varphi^*$ となるような $\varphi_0 \in (0,\pi)$ が存在する．そこで $|1+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi_0}| = \alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)$ を満たすような $\varphi_0 \in (0,\pi)$ を見つけよう．これは

$$(\alpha k(z_0)+1)(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}) = (\alpha k(z_0)+1)((\alpha k(z_0))^3+3(\alpha k(z_0))^2-2)$$

となるような $\varphi_0 \in (0,\pi)$ なので

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{(\alpha k(z_0))^3+3(\alpha k(z_0))^2-2}{2}\right)$$

となる．さらに $\xi^\pm_{\alpha k(z_0)} = \zeta_{\pm\varphi_0}$ である．$\varphi_0 < |\varphi| \le \pi$ のとき φ が $(-\pi,-\varphi_0)\cup(\varphi_0,\pi]$ 全体を動けば ζ_φ が $\Gamma_{\alpha k(z_0)}$ 全体を動くことがわかる．よって写像 $\Gamma_{\alpha k(z_0)} \ni \zeta_\varphi \mapsto -(\alpha k(z_0)+1)^2\zeta_\varphi \in \partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ は連続かつ単射である．

次に φ が $[-\varphi_0,\varphi_0]$ 全体を動くとき，ζ_φ が連続的に $\Delta_{\alpha k(z_0)}$ 全体を動くこと，つまり写像 $[-\varphi_0,\varphi_0]\ni\varphi\mapsto\zeta_\varphi\in\Delta_{\alpha k(z_0)}$ が連続かつ単射であることを示す．$\eta_\varphi+\alpha k(z_0)$ が方程式 $F_\varphi(x)=1$ $(\varphi\in(-\pi,\pi))$ のただ 1 つの解であることに注意すると，陰函数定理と補題 6.1.1 から η_φ は $\varphi\in(-\pi,\pi)$ の連続函数である．よって ζ_φ も $\varphi\in[-\varphi_0,\varphi_0]$ の連続函数である．

ζ_φ が単射でないと仮定する．このとき，ある $\varphi_1,\varphi_2\in(-\varphi_0,\varphi_0)$ で $\zeta_{\varphi_1}=\zeta_{\varphi_2}$ を満たすものが存在する．$\eta_{-\varphi}=\eta_\varphi$, $\zeta_{-\varphi}=\overline{\zeta_\varphi}$ であるから $0<\varphi_1<\varphi_2\le\varphi_0$ と仮定してよい．(6.1.12) と $|\zeta_{\varphi_j}|=1$, $j=1,2$ から $v_{\varphi_1}=(1-\zeta_{\varphi_1})^2=(1-\zeta_{\varphi_2})^2=v_{\varphi_2}$ となる．簡単な幾何学的考察から $v_0=v_{\varphi_1}\,(=v_{\varphi_2})$ は $\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ の corner point であり区間 $[\varphi_1,\varphi_2]$ において $v_\varphi\equiv v_0$ であることがわかる．図 6.1.1 と [3, §7] を参照．より正確述べると，$j=1,2$ に対して 半平面 H_j を $H_j=\{w\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(we^{-i\varphi_j})\le\mathrm{Re}(v_0e^{-i\varphi_j})\}$ により定義する．このとき，$v_0\in\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)\subset\tilde{V}_1(z_0,\alpha)\subset H_1\cap H_2$, $v_0\in\partial H_1\cap\partial H_2$ であり，$H_1\cap H_2$ のなす角 Φ は π より小さくなる．しかしながら，曲線 $(-\pi,\pi]\ni\theta\mapsto\gamma(\theta):=(1-e^{i\theta})^2\in\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ は微分可能であり，$\theta_1:=\arg\zeta_{\varphi_1}$ において v_0 を通る．$0<\varphi_1<\pi$ なので $-\pi<\theta_1<0$，$\gamma'(\theta_1)\neq0$ であることがわかるが，それは $\Phi<\pi$ に矛盾する．

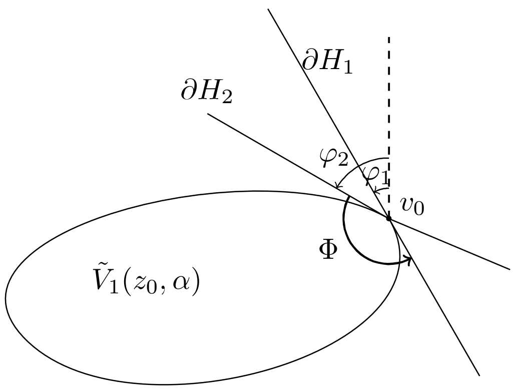


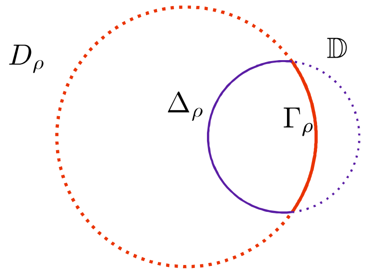
図 6.1.1

ここまでで，写像 $[-\varphi_0,\varphi_0]\ni\varphi\mapsto\zeta_\varphi\in\partial\mathbb{D}$ が連続かつ単射であることを示した．$\xi^{\pm}_{\alpha k(z_0)}(\in\partial\mathbb{D}\cap\partial D_{\alpha k(z_0)})$ が $\Delta_{\alpha k(z_0)}$ の端点であることと $\zeta_0=-1\in\Delta_{\alpha k(z_0)}$ であることに注意しておこう．従って，写像 $[-\varphi_0,\varphi_0]\ni\varphi\mapsto\Delta_{\alpha k(z_0)}$ は全射である．よって写像 $(-\pi,\pi]\ni\varphi\mapsto\zeta_\varphi\in\Gamma_{\alpha k(z_0)}\cup\Delta_{\alpha k(z_0)}$ はパラメータ表示になっている．

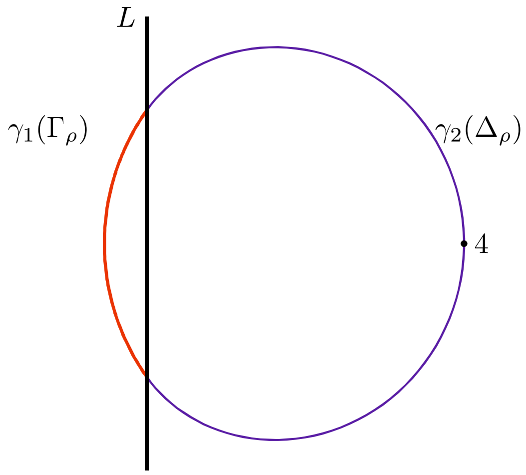
最後に，円弧 $\Gamma_{\alpha k(z_0)}\ni\zeta\mapsto\gamma_1(\zeta):=-(\alpha k(z_0)+1)^2\zeta\in\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ が $\Delta_{\alpha k(z_0)}\ni\zeta\mapsto\gamma_2(\zeta):=(1-\zeta)^2\in\partial\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ と端点 $\gamma_1(\xi^{\pm}_{\alpha k(z_0)})=\gamma_2(\xi^{\pm}_{\alpha k(z_0)})$ を除いて交わらないことを示す．L を端点 $\gamma_2(\xi^{+}_{\alpha k(z_0)})$ と $\gamma_2(\xi^{-}_{\alpha k(z_0)})$ を通る垂直方向の直線とする．γ_1 の像は L の左側にあることは簡単にわかる．$4=\{1-(-1)\}^2\in\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ であり 0 が $\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ の内点なので，1 も $\tilde{V}_1(z_0,\alpha)$ の内点である．ここで，$\arg(\gamma_2(e^{i\theta})-1)$ が狭義単調増加であることを示す．$h(z)=(1-z)^2-1$, $z\in\overline{\mathbb{D}}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left\{\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\}=&\mathrm{Re}\left\{\frac{2(1-z)}{2-z}\right\}\\=&\frac{2}{|2-z|^2}\left\{\left|z-\frac{3}{2}\right|^2-\frac{1}{4}\right\}>0,\quad z\in\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\}\end{aligned}$$

となる．従って γ_2 の像は L の右側にある．



$0 < \rho = \alpha k(z_0) < 1$



ここまでで $(-\pi, \pi] \ni \varphi \mapsto \zeta_\varphi \in \Gamma_{\alpha k(z_0)} \cup \Delta_{\alpha k(z_0)}$ がパラメータ表示になっていることを示した．

$$\gamma(\zeta) = \begin{cases} \gamma_1(\zeta), & \zeta \in \Gamma_{\alpha k(z_0)} \\ \gamma_2(\zeta), & \zeta \in \Delta_{\alpha k(z_0)} \end{cases}$$

とおく．また γ が $\Gamma_{\alpha k(z_0)} \cup \Delta_{\alpha k(z_0)}$ から $\gamma\left(\Gamma_{\alpha k(z_0)} \cup \Delta_{\alpha k(z_0)}\right)$ への同相写像であることと $v_\varphi = \gamma(\zeta_\varphi) \in \partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ であることも示した．従って，写像 $(-\pi, \pi] \ni \varphi \mapsto v_\varphi \in \partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ 連続かつ単射となる．よって，全射であり，これもまたパラメータ表示となる．さらに $\gamma\left(\Gamma_{\alpha k(z_0)} \cup \Delta_{\alpha k(z_0)}\right)$ は $\partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ と一致し γ は $\Gamma_{\alpha k(z_0)} \cup \Delta_{\alpha k(z_0)}$ から $\partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ への同相写像である． □

6.2　極値函数

定理 *4.3.2* の証明．$f \in \bar{J}_\alpha$ で $w_0 = f(z_0)$ を満たすものを取る．$w_0 \neq 1$ のとき $\tilde{f}, \tilde{\alpha}$ と $\tilde{w}_0$ を命題 5.2.1 と同じ形のものとする．

最初に $\alpha k(z_0) \geq 1$ の場合を考える．$\zeta \in \partial D_{\alpha k(z_0)}$ によって $f'(z_0) = -\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\zeta$ となると仮定する．$0 \in D_{\alpha k(z_0)}$ だから，$\zeta \neq 0$ と $f \neq 1$ を得る．よって $w_0 = f(z_0) \in \mathbb{D}$ である．$\tilde{v} \in \tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ と w を

$$\tilde{v} = \frac{(1-z_0)^2}{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha k(z_0) + 1}{k(z_0)}\right)^2 f'(z_0) = -(\alpha k(z_0) + 1)^2 \zeta, \tag{6.2.1}$$

$$w = \frac{1 + \alpha k(z_0)\zeta}{\alpha k(z_0) + 1} \tag{6.2.2}$$

によって定義する．$w = w_0 (= f(z_0))$ であることを示す．$\zeta \in \partial D_{\alpha k(z_0)}$ なので，定理 6.1.3 から $\tilde{v} \in \partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha)$ となる．従って命題 6.1.2 と 定理 6.1.3 からある $\varphi \in (-\pi, \pi]$ で

$$\tilde{v} = v_\varphi = (1 - \zeta_\varphi)^2 + (\alpha k(z_0) + 1)(1 - |\zeta_\varphi|^2)e^{i\varphi}. \tag{6.2.3}$$

となるものがただ 1 つ存在する．$\alpha k(z_0) \geq 1$ であるから $\zeta_\varphi = -\frac{1 + (\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}}{\alpha k(z_0)(\alpha k(z_0)+2)} \in \overline{\mathbb{D}}$ であり，(6.1.19) から

$$-(\alpha k(z_0) + 1)^2 \zeta = \tilde{v} = -(\alpha k(z_0) + 1)^2 \zeta_\varphi$$

となる．よって $\zeta=\zeta_\varphi$ である．命題 6.1.2 から

$$\tilde{v}\in\partial\mathbb{D}\left((1-\zeta)^2,(\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\right),$$
$$\tilde{v}\notin\overline{\mathbb{D}}\left((1-\zeta')^2,(\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta'|^2)\right)$$

が 任意の $\zeta'\in\overline{\mathbb{D}}\backslash\{\zeta\}$ について成り立つ．(6.2.1) と (6.2.2) からこれらの関係は

$$f'(z_0)\in\frac{(1-w)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\partial\mathbb{D}\left(1,\alpha\frac{k(z_0)}{k(w)}-1\right),$$
$$f'(z_0)\notin\frac{(1-w')^2}{\alpha(1-z_0)^2}\overline{\mathbb{D}}\left(1,\alpha\frac{k(z_0)}{k(w')}-1\right)$$

が 任意の $w'\in\overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1},\frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)\backslash\{w\}$ について成り立つと言い換えることができる．よって (5.2.8) から

$$f'(z_0)\in\frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\overline{\mathbb{D}}\left(1,\alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)}-1\right)$$

となる．従って $w_0=w=\frac{1+\alpha k(z_0)\zeta}{\alpha k(z_0)+1}$ であり，また簡単な計算により

$$(1-w_0)^2=\left(\frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)^2(1-\zeta)^2,$$

$$k(w_0)=\frac{\left|1-\frac{1+\alpha k(z_0)\zeta}{\alpha k(z_0)+1}\right|^2}{1-\left|\frac{1+\alpha k(z_0)\zeta}{\alpha k(z_0)+1}\right|^2}=\frac{\alpha k(z_0)|1-\zeta|^2}{(\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)+|1-\zeta|^2}\tag{6.2.4}$$

となる．このとき (6.2.1), (6.2.3) と $\zeta=\zeta_\varphi$ から

$$\begin{aligned}\tilde{w}_0&=\frac{(1-z_0)^2}{(1-w_0)^2}\frac{k(w_0)}{k(z_0)}f'(z_0)\\&=-\frac{\alpha k(z_0)k(w_0)}{(1-w_0)^2}\zeta\\&=-\alpha k(z_0)\frac{\alpha k(z_0)|1-\zeta|^2}{(\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)+|1-\zeta|^2}\left(\frac{\alpha k(z_0)+1}{\alpha k(z_0)(1-\zeta)}\right)^2\zeta\\&=-\frac{|1-\zeta|^2(\alpha k(z_0)+1)^2\zeta}{(1-\zeta)^2\{(\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)+|1-\zeta|^2\}}\\&=\frac{1-\overline{\zeta}}{1-\zeta}\cdot\frac{\tilde{v}}{(\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)+|1-\zeta|^2}\\&=\frac{(1-\zeta)^2+(\alpha k(z_0)+1)e^{i\varphi}}{(1-\zeta)^2+(\alpha k(z_0)+1)\frac{1-\zeta}{1-\overline{\zeta}}}\end{aligned}$$

となる．これは $\tilde{w}_0=1$ となることと $e^{i\varphi}=\frac{1-\zeta}{1-\overline{\zeta}}$ が同値であることと，言い換えると $\varphi=0$ と $\zeta=-\frac{1}{\alpha k(z_0)}$ が同値であることを示している．

$\zeta=-\frac{1}{\alpha k(z_0)}$ のとき，$w_0=0$ と $\tilde{w}_0=1$ となる．この場合，定理 5.2.1 と補題 5.1.1 から $f=\sigma_{w_0}^{-1}\circ\sigma_{z_0}=\sigma_{z_0}\in J_{\frac{1}{k(z_0)}}$ となる．特に $f\notin J_\alpha$ のとき $\alpha k(z_0)>1$ であり，$f\in J_\alpha$ のとき $\alpha k(z_0)=1$ となる．

$\zeta \neq -\frac{1}{\alpha k(z_0)}$ のとき，$\tilde{w}_0 \neq 1$ となる．この場合，$\tilde{v} \in \partial\mathbb{D}\left((1-\zeta)^2, (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\right)$ であるから

$$f'(z_0) \in \frac{\alpha}{(1-z_0)^2}\left(\frac{k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)^2 \partial\mathbb{D}\left((1-\zeta)^2, (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\right)$$

となる．従って (5.2.2) と $w_0 = f(z_0)$ から

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_0 = \frac{(1-z_0)^2}{(1-w_0)^2}\frac{k(w_0)}{k(z_0)}f'(z_0) &\in \frac{k(w_0)}{\alpha k(z_0)(1-w_0)^2}\left(\frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)^2 \partial\mathbb{D}\left((1-\zeta)^2, (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta|^2)\right) \\
&= \frac{k(w_0)}{\alpha k(z_0)(1-w_0)^2}\partial\mathbb{D}\left((1-w_0)^2, \alpha k(z_0)(1-|w_0|^2) - |1-w_0|^2\right) \\
&= \partial\mathbb{D}\left(\frac{k(w_0)}{\alpha k(z_0)}, 1 - \frac{k(w_0)}{\alpha k(z_0)}\right) \\
&= \partial\mathbb{D}\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1}, \frac{\tilde{\alpha}k(z_0)}{\tilde{\alpha}k(z_0)+1}\right)
\end{aligned}$$

を得る．これと $\tilde{w}_0 \neq 1$ を合わせることにより，$k(\tilde{w}_0) = \tilde{\alpha}k(z_0)$ を得る．よって 命題 4.2.1 から $\tilde{f} = \sigma_{\tilde{w}_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_{\tilde{\alpha}}$ となり，命題 5.2.2 から $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ (\sigma_{z_0}\tilde{f}) \in J_\alpha$ を得る．

次に $\alpha k(z_0) < 1$ の場合を考える．ある $\zeta \in \Gamma_{\alpha k(z_0)}$. について $f'(z_0) = -\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\zeta$ となると仮定する．同じ議論により，$\alpha k(z_0) \geq 1$ のときは $w_0 = \frac{1+\alpha k(z_0)\zeta}{\alpha k(z_0)+1} \neq 1$ となる．$-\frac{1}{\alpha k(z_0)} \notin \Gamma_{\alpha k(z_0)}$ であるから $\tilde{w}_0 \neq 1$, $k(\tilde{w}_0) = \tilde{\alpha}k(z_0)$ と $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ (\sigma_{z_0}\tilde{f}) \in J_\alpha$ を得る．ここで $\tilde{f} = \sigma_{\tilde{w}_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_{\tilde{\alpha}}$ である．

$\zeta \in \Delta_{\alpha k(z_0)}$ について $f'(z_0) = \frac{\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2(1-z_0)^2}(1-\zeta)^2$ となると仮定する．$\tilde{v}$ と w を

$$\tilde{v} = \alpha(1-z_0)^2\left(\frac{\alpha k(z_0)+1}{\alpha k(z_0)}\right)^2 = (1-\zeta)^2 \in \partial\tilde{V}_1(z_0, \alpha),$$

$$w = \frac{1+\alpha k(z_0)\zeta}{\alpha k(z_0)+1}$$

と定義する．定理 6.1.3 と命題 6.1.2 からある $\varphi \in (-\pi, \pi]$ で $\tilde{v} = v_\varphi = (1-\zeta_\varphi)^2$ となるものがただ 1 つ存在する．$\zeta, \zeta_\varphi \in \partial\mathbb{D}\backslash\{1\}$ であるから $\zeta = \zeta_\varphi$ とある．$w = w_0 (= f(z_0))$ であることを示す．命題 6.1.2 から

$$\tilde{v} \notin \overline{\mathbb{D}}\left((1-\zeta')^2, (\alpha k(z_0)+1)(1-|\zeta'|^2)\right), \quad \zeta' \in \overline{\mathbb{D}}\backslash\{\zeta\}$$

となる．同様に $\alpha k(z_0) \geq 1$ のときこれは

$$f'(z_0) \notin \frac{(1-w')^2}{\alpha(1-z_0)^2}\mathbb{D}\left(1, \alpha\frac{k(z_0)}{k(w')} - 1\right), \quad w' \in \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)\backslash\{w\}$$

と書き換えることができる．よって

$$f'(z_0) \in \frac{(1-w_0)^2}{\alpha(1-z_0)^2}\overline{\mathbb{D}}\left(1, \alpha\frac{k(z_0)}{k(w_0)} - 1\right)$$

を得る．ここで $w_0 = f(z_0) \in \overline{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\alpha k(z_0)+1}, \frac{\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)$ である．これは $w_0 = w$ であることを示している．$k(w_0) = k(w) = \alpha k(z_0)$ であるから $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_\alpha$ となる．□

系 *4.3.4* の証明. $\alpha k(z_0) \geq 1$ と仮定する．このとき $\partial D_{\alpha k(z_0)} \subset \overline{\mathbb{D}}$ であり，写像 $\partial D_{\alpha k(z_0)} \ni \zeta \mapsto -\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\zeta \in \partial\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ は $\partial\overline{V}_1(z_0, \alpha)$ のパラメータ表示与える．簡単な幾何学的考察により，函数

$\left|\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\zeta\right|$, $\zeta \in \partial D_{\alpha k(z_0)}$ は $\zeta = -\frac{1}{\alpha k(z_0)}$ においてのみ最大値を取る．従って，$|f'(z_0)| \leq \frac{k(z_0)}{|1-z_0|^2}$ であり，等号が成立するのは $\zeta = -\frac{1}{\alpha k(z_0)}$, $f'(z_0) = \frac{k(z_0)}{(1-z_0)^2}$ のときである．これは $f = \sigma_{z_0} \in J_{\frac{1}{k(z_0)}}$ であることを示している．

$\alpha k(z_0) < 1$ と仮定する．この場合，定理 4.3.1 (ii) により $\partial \overline{V}_1(z_0, \alpha)$ は 2 つの単純弧よりなる．$\zeta \in \overline{\Gamma}_{\alpha k(z_0)}$ は

$$\zeta = -\frac{1 + (\alpha k(z_0) + 1)e^{i\varphi}}{\alpha k(z_0)(\alpha k(z_0) + 2)}$$

と表すことができる．ここで $\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi$, $\varphi_0 = \arccos\left(\frac{(\alpha k(z_0))^3 + 3(\alpha k(z_0))^2 - 2}{2}\right)$ である．

$$\xi^{\pm}_{\alpha k(z_0)} = -\frac{1 + (\alpha k(z_0) + 1)e^{\pm i\varphi_0}}{\alpha k(z_0)(\alpha k(z_0) + 2)}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\zeta\right|^2 &= \frac{k(z_0)^2}{(1-z_0)^4(\alpha k(z_0)+2)^2}\left\{(\alpha k(z_0)+1)^2 + 1 + 2(\alpha k(z_0)+1)\cos\varphi\right\} \\
&\leq \frac{k(z_0)^2}{(1-z_0)^4(\alpha k(z_0)+2)^2}\left\{(\alpha k(z_0)+1)^2 + 1 + 2(\alpha k(z_0)+1)\cos\varphi_0\right\} \\
&= \left|\frac{\alpha k(z_0)^2}{(1-z_0)^2}\xi^{\pm}_{\alpha k(z_0)}\right|^2
\end{aligned}$$

となる．従って $-1 \in \Delta_{\alpha k(z_0)}$ だから

$$\begin{aligned}
\max_{\zeta \in \overline{\Gamma}_{\alpha k(z_0)}} |v(\zeta)| &= |v(\xi^{\pm}_{\alpha k(z_0)})| \\
&\leq \max_{\zeta \in \Delta_{\alpha k(z_0)}} |v(\zeta)| \\
&= \frac{\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2|1-z_0|^2} \max_{\zeta \in \Delta_{\alpha k(z_0)}} |1-\zeta|^2 = \frac{4\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2|1-z_0|^2}
\end{aligned}$$

を得る．よって函数 $|v(\zeta)|$ は $\Gamma_{\alpha k(z_0)} \cup \Delta_{\alpha k(z_0)}$ 上で $\zeta = -1$ において最大値を取ることになるので，$|f'(z_0)| \leq \frac{4\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2|1-z_0|^2}$ となるのは $\zeta = -1$ となるときであり，$f'(z_0) = \frac{4\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2(1-z_0)^2}$ であることがわかる．等号が成立すると仮定する．(6.1.2) から

$$w_0 = \frac{1 - \alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0) + 1}$$

と

$$k(w_0) = \frac{\left(1 - \frac{1-\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}\right)^2} = \alpha k(z_0)$$

を得る．(6.1.3) と 定理 5.2.3 から $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0} \in J_\alpha$ となる．　□

第 7 章

今後の展望に関する考察

7.1 上半平面における Julia の補題

本研究では，単位円板から自身の中への正則写像について，角微分係数と内点における微分係数の関係を考察した．これを上半平面から上半平面の中への正則写像について関連する問題を考えたい．$\zeta = \varphi(z) = \frac{i(1+z)}{1-z}$ とおくと，$\mathbb{D}$ はこの変換によって上半平面 $\mathbb{H} := \{\zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ \zeta > 0\}$ に等角に写像される．F が $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数で $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}, F(\infty) = \infty$ を満たすとする．このとき，$F(\zeta)$ は ∞ のある近傍で

$$F(\zeta) = c_1\zeta + c_0 + \frac{c_{-1}}{\zeta} + \cdots$$

の形に展開され，$F'(\infty) = c_1 > 0$ であり，

$$F'(\infty)\,\mathrm{Im}\ \zeta \leq \mathrm{Im}\ F(\zeta) \quad ,\zeta \in \mathbb{H} \tag{7.1.1}$$

が成り立つ．$z = \varphi^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta-i}{\zeta+i}$ は上半平面 $\mathbb{H}$ から単位円板 $\mathbb{D}$ への等角写像なので，$F(\zeta)$ は $f \in J_\alpha$ を用いて $F = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ と書くことができる．このとき $f = \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi$ となる．$z \in \mathbb{D}$ に対して，$k(z)$ を ζ を用いて表してみよう．z と ζ の関係から

$$\begin{aligned}
k(z) =& \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \\
=& \frac{\left|1 - \frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right|^2}{1 - \left|\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right|^2} \\
=& \frac{|\zeta+i-\zeta-i|}{|\zeta-i|^2 - |\zeta+i|^2} \\
=& \frac{4}{-2i(\zeta-\overline{\zeta})} = \frac{1}{\mathrm{Im}\ \zeta}
\end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-1}{z-1} =& \frac{\frac{F(\zeta)-i}{F(\zeta)+i}-1}{\frac{\zeta-i}{\zeta+i}-1} \\ =& \frac{\zeta+i}{F(\zeta)+i} \\ =& \frac{\zeta}{F(\zeta)}\frac{1+\frac{i}{\zeta}}{1+\frac{i}{F(\zeta)}}\end{aligned}$$

となる．$z \to 1$ のとき $\zeta \to \infty$ であるから

$$\alpha = \angle \lim_{\Gamma_M(1)\ni z\to 1} \frac{f(z)-1}{z-1} = \angle \lim_{\Gamma'_M(1)\ni\zeta\to\infty} \frac{\zeta}{F(\zeta)}\frac{1+\frac{i}{\zeta}}{1+\frac{i}{F(\zeta)}} = \frac{1}{F'(\infty)}$$

となる．但し，ζ についての角微分については

$$\Gamma'_M(\infty) := \varphi(\Gamma_M(1)) = \left\{\zeta \in \mathbb{H} : \zeta = u+iv \text{ とおくとき } -\frac{u^2}{1-\frac{1}{M^2}} + \frac{v^2}{\frac{1}{M^2}} \geq 1\right\}$$

である．これらのことから，$k(f(z)) \leq \alpha k(z)$ に対応する不等式は

$$\frac{1}{\mathrm{Im}\ F(\zeta)} \leq \frac{1}{F'(\infty)}\frac{1}{\mathrm{Im}\ \zeta}$$

となるので (7.1.1) を得る．$\tilde{J}_\alpha := \varphi \circ J_\alpha \circ \varphi^{-1} = \{\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : f \in J_\alpha\}$ とおく．$V_1(z_0, \alpha)$ と $f \in J_\alpha$ についての条件から $F'(\zeta_0), F \in \tilde{J}_\alpha, \zeta_0 = \varphi(z_0)$ の変化域について考えよう．$\alpha = \frac{1}{F'(\infty)}$ なので

$$\tilde{J}_\alpha = \left\{F \in \mathcal{H}(\mathbb{H},\mathbb{H}) : \angle \lim_{\zeta\to\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta} = \frac{1}{\alpha}\right\} = \tilde{J}_\alpha = \left\{F \in \mathcal{H}(\mathbb{H},\mathbb{H}) : \inf_{\zeta\in\mathbb{H}} \frac{\mathrm{Im}\ F(\zeta)}{\mathrm{Im}\ \zeta} = \frac{1}{\alpha}\right\}$$

となる．合成函数の微分公式から

$$\begin{aligned}f'(z) =& \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{F(\zeta)-i}{F(\zeta)+i}\right)\frac{d\zeta}{dz} \\ =& \frac{-2iF'(\zeta)}{(F(\zeta)+i)^2}\frac{-2i}{(1-z)^2} \\ =& \frac{(\zeta-i)^2}{(F(\zeta)+i)^2}F'(\zeta)\end{aligned}$$

を得る．$\zeta_0 = \varphi(z_0)$ とおく．

$\alpha k(z_0) \geq 1$，つまり $\alpha \geq \mathrm{Im}\ \zeta_0$ のとき，$|f'(z_0)| \leq \frac{k(z_0)}{|1-z_0|^2}$ であったので，

$$\frac{|\zeta_0-i|^2}{|F(\zeta_0)+i|^2}|F'(\zeta)| \leq \frac{|\zeta_0-i|^2}{4}\frac{1}{\mathrm{Im}\ \zeta_0}$$

となり，

$$\frac{|F'(\zeta_0)|}{|F(\zeta_0)+i|^2} \leq \frac{1}{4\,\mathrm{Im}\ \zeta_0}$$

を得る．$\alpha k(z_0) < 1$，つまり $\alpha < \mathrm{Im}\ \zeta_0$ のとき，$|f'(z_0)| \leq \frac{4\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2|1-z_0|^2}$ であったので，上と同じように計算すると

$$\frac{|F'(\zeta_0)|}{|F(\zeta_0)+i|} \leq \frac{\alpha}{(\alpha+\mathrm{Im}\ \zeta_0)^2}$$

を得る．従って単位円板での結果をそのまま上半平面に翻訳しても，$F'(\zeta_0)$ 単独の評価式は得られない．これを乗り越えるためには更なる工夫が必要である．

7.2 $\bar{J}_\alpha$ の extreme points について

2022 年 12 月 17, 18 日に青森県八戸市八戸美術館で開催された等角写像論・値分布論合同研究集会で，本研究の内容を発表したところ，京都大学の宍倉光広教授より $\bar{J}_\alpha$ の extreme points については何か知られてるかとの質問をいただいた．

$\bar{J}_\alpha$ は局所凸位相線形空間 $\mathcal{H}$ のコンパクトで凸な部分集合であるから，Krein-Milman の定理によれば，その extreme points の集合 $E(\bar{J}_\alpha)$ は空ではなく，$\bar{J}_\alpha$ は $E(\bar{J}_\alpha)$ の凸包である．従って $\bar{J}_\alpha$ の extreme points を調べることは大変重要な意味を持つ．ここで，$f \in \bar{J}_\alpha$ が $\bar{J}_\alpha$ の extreme point であるとは，$f = (1-t)f_1 + tf_2$, $f_1, f_2 \in \bar{J}_\alpha, f_1 \neq f_2, 0 < t < 1$ の形に表せないことである．例えば定数函数 1 は $\bar{J}_\alpha$ の extreme point である．実際

$$1 = (1-t)f_1 + tf_2, \quad f_1, f_2 \in \bar{J}_\alpha, f_1 \neq f_2, 0 < t < 1 \tag{7.2.1}$$

とすると，少なくとも f_1 と f_2 のどちらか一方は定数函数 1 ではない．ここでは仮に $f_1 \neq 1$ として議論を進めると，

$$\bar{J}_\alpha = \bigcup_{0<\beta\leq\alpha} J_\beta \cup \{1\}$$

より，ある $\beta_1 \in (0, \alpha]$ で $f_1 \in J_{\beta_1}$ を満たすものが存在する．つまり $f_1'(1) = \beta_1 > 0$ である．(7.2.1) の両辺の 1 における角微分は

$$0 = (1-t)\beta_1 + tf_2'(1) > 0$$

となり不合理である．

では，1 以外の extreme points にはどのような函数があるだろうか？ これは将来の研究課題にしたいと考えている．また，$f'(z_0), f \in J_\alpha$ の微分係数についての評価をしたが，これを 2 回微分や 3 回微分，つまり $f''(z_0), f'''(z_0)$ についての評価を考えることもできる．他にも Schwarz 微分の評価などもあるが，それらもすべて将来の研究課題としたい．

謝辞

本研究を進めるにあたり，指導教員の柳原宏教授に感謝いたします．さらに，本研究や学位論文執筆にあたり多くも助言やアドバイスをくださった木内功教授，西山高弘教授，堀田一敬准教授，増本誠教授に御礼申し上げます．また，ここまでお世話になった池田敏春教授，岡田真理教授，栗原大武准教授，栗山憲教授，孫立杰先生，柳研二郎教授，柳下剛広先生に感謝いたします．工学部知能情報工学科入学から創成科学研究科自然科学系専攻博士後期課程終了まで長い道のりでしたがここまでの生活や勉強，研究を支えてくださった山口大学工学部の先生方，スタッフの皆様，応用数学研究室の学生の皆様に深く御礼を申し上げます．

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants:Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York , 1973.

[2] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1979.

[3] R. V. Benson, *Euclidean Geometry and Convexity*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[4] M. Berger, *Geometry I*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[5] F. Bracci, M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, *Continuous Semigroups of Holomorphic Self-maps of the Unit Disc*, Springer, 2020.

[6] C. Carathéodory, Sur quelques applications du théorème de Landau-Picard, C. R. Acad. Sci. Paris **144**, 1203–1206, 1907.

[7] C. Carathéodory, Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 39–54, 1929.

[8] C. Carathéodory, *Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. 2*, Chelsea Publishing Company, New York, 1954.

[9] G. Chen and H. Yanagihara, Variability regions for the second derivative of bounded analytic functions, Monatshefte für Mathematik, **197**, 57 – 70, 2022.

[10] P. Duren, *Univalent functions*, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, Springer-Verlag, 1983.

[11] P. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Dover Pub., New York, 2000.

[12] M. Elin, F. Jacobzon, M. Levenshtein, and D. Shoikhet, The Schwarz Lemma. Rigidity and Dynamics, in *Harmonic and Complex Analysis and its Applications*, Birkhäuser, Basel, 135-230, 2014.

[13] G. B. Folland, *Real Analysis*, Jhon Wiley, New York, 1984.

[14] S. Hoshinaga and H. Yanagihara, The sharp distortion estimate concerning Julia's lemma, to appear in Computational Methods and Function Theory.

[15] S. Hoshinaga, I. Hotta and H. Yanagihara, Continuous evolution families, to appear in Proc. of the Amer. Math. Soc.

[16] G. Julia, Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz, Acta Math. **42**, 349–355, 1920.

[17] S. Łojasiewicz, *An introduction to the theory of real functions*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1988.

[18] P. R. Mercer, Another look at Julia's lemma, Complex Variables Theory Appl., **43**, 129-138, 2000.

[19] G. Pick, Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche, Math. Ann. **77**,

1–6, 1915.

[20] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

[21] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[22] J. Wolff, Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz, C. R. Acad. Sci. Paris **182**, 918–920, 1926.

[23] H. Yanagihara, On the locally univalent Bloch constant, *J. Anal. Math*, **65**, 1–17, 1995.