様式7号（第12条，第31条関係）
（様式7号）(Format No.7)　日本語版

学 位 論 文 要 旨

(Summary of the Doctoral Dissertation)

学位論文題目 (Dissertation Title)	Juliaの補題に関する歪曲評価 (The sharp distortion estimate concerning Julia’s lemma)
氏　名(Name)	星長　翔太

α を正の定数とする．このとき J_α を単位円板 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上の正則函数 f の族で $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ を満たし，$z = 1$ における角微分係数が α，即ち非正接極限 $\angle\lim_{z\to 1} \frac{f(z)-1}{z-1} = \alpha$ を満たすもの全体とする．このとき $f \in J_\alpha$ についてJuliaの補題と呼ばれる不等式

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \le \alpha \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ．$z \in \mathbb{D}$ に対して，$k(z) = \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$ とおくと上の不等式は $k(f(z)) \le \alpha k(z)$ と簡明に表される．ここで，$z = z_0$ とおいて固定すると，この不等式は f が J_α 内を動くとき $f(z_0)$ の存在範囲を表している．一方，歪曲評価，つまり $f'(z_0)$ の評価については部分的な結果が知られているのみであった．本論文では，sharpな結果として

$$|f'(z_0)| \le \frac{4\alpha k(z_0)^2}{(\alpha k(z_0)+1)^2|1-z_0|^2}, \quad \alpha k(z_0) \le 1 \text{ のとき}$$
$$|f'(z_0)| \le \frac{k(z_0)}{|1-z_0|^2}, \quad \alpha k(z_0) > 1 \text{ のとき}$$

を得た．$\alpha k(z_0) \le 1$ のとき，等号が成り立つ極値函数は $f = \sigma_{w_0}^{-1} \circ \sigma_{z_0}, w_0 = \frac{1-\alpha k(z_0)}{\alpha k(z_0)+1}$ に限る．ただし $a \in \mathbb{D}$ に対し $\sigma_a(z) = \frac{1-\overline{a}}{1-a}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ であり，単位円板を不変にする1次変換で，a を 0 に写像し，1を固定する．一方 $\alpha k(z_0) > 1$ のときは等号が成り立つ函数は存在しないが不等式はsharpである．これは J_α が広義一様収束の位相で閉集合でないことに起因する．このような複雑な事情を解析することが本論文の目標である．

そこで，まず第1章ではJuliaの補題およびその原型であるSchwarzの補題について先行研究及びその歴史をまとめた．第2章では後に必要になる範囲で，平面の部分集合に関する位相的な結果を記した．第3章は複素解析学からの準備である．第4章ではこの研究で得られた主要な結果をまとめた．第5章で主要定理の証明の準備として，函数族 J_α の様々な性質について考察した．特に J_α の閉包がどのような空間になるかを調べた．第6章では主要定理の証明を行い，極値函数をすべて決定した．最後に第7章では今後の展望に関する考察を行った．

(和文2,000字程度 / 英文800語程度)
(about 800 words)

(様式９号)

学位論文審査の結果及び最終試験の結果報告書

山口大学大学院創成科学研究科

氏　　名	星長 翔太
審査委員	主　　査：柳原 宏
	副　　査：増本 誠
	副　　査：木内 功
	副　　査：西山 高弘
	副　　査：堀田 一敬
論文題目	Julia の補題に関する歪曲評価 (The sharp distortion estimate concerning Julia's lemma)

【論文審査の結果及び最終試験の結果】

複素平面内の単位円板 D から自身への正則写像 f で f(0) = 0 を満たすものについて単位円板上で $|f(z)| \leq |z|$ と $|f'(0)| \leq 1$ が成り立つことを主張するのが Schwarz の補題である．この補題は複素変数の正則函数の局所理論のみならず，単位円板上の正則函数に関する様々な評価式を得る際に中心的な役割を果たす，大変重要な不等式である．この補題の設定において函数 f は原点を固定していることになるが，この固定点を境界に移動させて得られる，謂わば境界版の Schwarz の補題とも言うべきものに Julia の補題がある．Julia の補題は，単位円板から自身の中への正則写像で境界上に固定点を 1 を持つとしたときの角微分係数$f'(1) = \angle\text{-}\lim_{z\to 1}\frac{f(z)-1}{z-1}$が有限値で正になるか，または複素の意味で ∞ に発散するかのどちらかであること，さらに前者の場合に $\alpha = f'(1)$ と置けば $\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$ が成り立つことを主張するものである．これを幾何学的に解釈すれば $z = z_0$ を固定したときに $f(z_0)$ の存在範囲が単位円板の内側から 1 で接する horodisk であり，その半径が α と z_0 により決まることを意味する．

Julia の補題は Schwarz の補題と並び，単位円板の中の点 z_0 を固定したとき，函数値 $f(z_0)$ の挙動を調べる際に極めて重要な役割を果たす不等式である．Schwarz と Julia の 2 つの補題は前世紀の初期の頃から研究され，100 年を越える長い研究の歴史を持つ．その中で Schwarz の補題における原点固定の条件に加え，原点以外の点 z_0 を固定し，

（様式第 9 号）

その点での値 $w_0 = f(z_0)$ が既知のときに，微分係数 $f'(z_0)$ を評価するなど，Schwarz の補題のさらなる精密化に関しても研究が行われている．これは sharpened form of Schwarz's Lemma と呼ばれていて Dieudonné の定理や Rogosinski の定理など様々な結果が知られている．

一方，境界点 1 における角微分 $\alpha = f'(1)$ を固定したとき $f(z_0)$ の存在範囲を表すのが Julia の補題であるが，このときの $f'(z_0)$ の存在範囲がどのようになるか，結果は殆ど知られていない．これは原点を固定する正則函数全体がなす族がコンパクトであるのに比して $f'(1) = \alpha$ を満たす正則函数全体がなす族がコンパクトでないなど，構造が複雑になるため，今まで研究が進んでいなかったと推察される．

本論文では，この Julia の補題の設定において $f'(z_0)$ を取り扱うという点で新規性があり，絶対値の評価のみならず，$f'(z_0)$ の存在しうる範囲である variability region $V(\alpha,z_0)$ の形状の決定に取り組むという点で独創的である．実際に $V(\alpha,z_0)$ が凸な単純閉曲線で囲まれた Jordan 閉領域になること，及び純閉曲線のパラメータ表現，さらには極値函数の完全な決定を行っている．また以上の応用として sharp な歪曲評価を導き，この分野における基本的であるが新しい知見を導いている．

予備審査会，本審査会，公聴会での発表も明快であり質問についても的確に答えていた．例として公聴会のおりに出た質問である「将来の課題として $f'(z_0)$ の代わりに $f''(z_0)$ の評価についてはどのように考えているか？」についての回答として，現時点で得られている評価式についての説明があり，$f'(z_0)$ と $f''(z_0)$ の混じった不等式になっているため，これから $f''(z_0)$ 単独の不等式を得るために努力しているとの回答であった．

以上より,本論文の内容は新規性と独創性に富み，博士（理学）の学位論文に十分値するものと判断した．

論文内容及び審査会，公聴会での質問に対する回答も的確であったので，審査員全員一致の意見として最終試験の結果は合格とした．

なお主要な関連論文の発表状況は下記の通りである．（関連論文　計 1 編）

[1] S. Hoshinaga and H. Yanagihara, The sharp distortion estimate concerning Julia’ s lemma,
to appear in Computational Methods and Function Theory.