山口大学教育学部研究論叢　第72巻　207頁～211頁　2023年1月

計算機を用いた命題論理の演習について

北本　卓也 *

On Exercises in Propositional Logic Using Computers

KITAMOTO Takuya*

（Received September 22, 2022）

近年、数式処理の研究分野で注目されているQuantifier Eliminationは応用範囲が広く、様々な分野への応用が可能と言われている。実際、国立情報学研究所が中心となって実施された「ロボットは東大に入れるか」というプロジェクトでは、数学の問題解法にQuantifier Eliminationが活用され、その有効性が確認された。プログラミング教育が必修の小・中学校・高等学校ではIT技術の活用が求められており、小・中学校・高等学校の教員を目指す学生がこのQuantifier Eliminationについて学ぶことは意義が大きいと考えられる。そこで教員を目指す学生の授業の一部において、数学の大学入試問題をQuantifier Eliminationを用いて解くことにより命題論理の演習を実施したので、その経過と結果を報告する。

1. はじめに

国立情報学研究所（大学共同利用機関法人情報・システム研究機構）が中心となって2011年から「ロボットは東大に入れるか」(以下、「東ロボプロジェクト」と呼ぶ）というタイトルのプロジェクトが実施された([1])。

この東ロボプロジェクトでは、人工知能を用いた大学入試の解法が研究されたが、数学の問題解法には　Quantifier Elimination (以下、「QE」と呼ぶ）が活用され、その有効性が確認された。QEは応用範囲が広く、使い道が広いと思われるが命題論理を用いるためとっつきにくい。

一方でプログラミング教育が必修の小・中学校・高等学校でIT技術の活用が求められている。そこで小学校免許取得を目指している教育学部の学生に「QEを用いた大学入試問題の解法」を解説する授業を実施した。また
実施後アンケートを実施し、授業の理解度や満足度を調査したので、その経過と結果について報告する。

2. QEと命題論理

QEは数式処理の研究分野において、比較的最近開発されたアルゴリズムの1つである。このアルゴリズムは与えられた形式理論 (formal theory) について 「限量記号付きの式 (一階述語論理式) 」 を入力とし 「等価で限量記号無しの式」 を出力する。より具体的には、∀，∃を含む命題述語論理を ∀, ∃を含まないものに変換するアルゴリズムである。例えば、

$$\exists x \in \mathrm{R},\ ax^2+bx+c=0$$

が与えられたとき（これは2次多項式が実根を持つという条件)、これと同値である

$$b^2-4ac \geq 0$$

を出力してくれる。このQEの適用可能範囲は非常に広く、東ロボプロジェクトでも示された

＊ 山口大学教育学部，〒753-8513 山口市吉田 1677－1，kitamoto@yamaguchi-u.ac.jp

ように大学入試問題でQEを使って解けるものは多い。このQEを使うためにはこのQEを機能として持っている数式処理システムが必要であるが、今回はオンラインで使える数式処理システムであるWolfram cloud ([2])を用いている。

3. 授業の概要

授業は全部で３回行った。それぞれについてその内容を解説する。

3.1 第１回目の授業

まずはじめに命題論理についての説明を行った。説明はなるべく具体例を用いて行い、例えば２次多項式が実根を持つという条件は命題論理で

$$\exists x \in \mathbf{R},\ ax^2 + bx + c = 0$$

と書けること、またこれは

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

と同値であるということを解説した。この授業ではパソコン等IT機器は一切用いず、講義形式で授業を行った。また、授業後に命題論理についてのアンケートを行った。アンケートの設問と結果（カッコ内の数字）は次の通りである。

設問１：命題論理について、下のうち、最も自分に合うものを選んでください。
(a) 命題論理について学んだことはない。(28.2%)
(b) 命題論理について高等学校で学んだ。(66.7%)
(c) 命題論理について塾で学んだ。(0.8%)
(d) 命題論理について中学校のときに既に知っていた。(4.2%)

設問２：「必要十分条件」という言葉について、下のうち、最も自分に合うものを選んでください。
(a) 必要十分条件というのは初耳。(0.8%)
(b) 必要十分条件という言葉は聞いたことがあるが、その意味はよくわからない。(8.3%)
(c) 必要十分条件の意味は分かっているが、それに関する問題を解くことは難しい。(48.3%)
(d) 必要十分条件の意味がわかっており、それに関する問題を解くことができる。(42.5%)

設問３：∀, ∃ の記号を知った時期について、下のうち最も自分に合うものを選んでください。
(a) ∀, ∃ の記号を見たのは、この授業が初めて。(84.2%)
(b) 高等学校のときには全く知らなかったが、この授業が始まる前に大学の他の授業で ∀, ∃ の記号を見たことはある。(8.3%)
(c) 高等学校のときに授業で ∀, ∃ の記号を見たことがあるが、それについての説明はほとんどなかった。(5%)
(d) 高等学校のときに学校の授業で ∀, ∃ の記号を含んだ命題論理について学んだ。(2.5%)
(e) 高等学校のときに塾で ∀, ∃ の記号を含んだ命題論理について学んだ。(0%)
(f) 高等学校に入る前に∀, ∃ の記号を知っていた。(0%)

設問４：∀, ∃ の記号について説明した前回の授業について、下のうち最も自分に合うものを選んでください。

(a) 全くわからなかった。(20.3%)
(b) 全くわからないことはないが、よくわからなかった。(41.5%)
(c) わかったような気がする。(21.2%)
(d) だいたいわかった。(13.6%)
(e) 全て理解した。(3.4%)

3.2 第２回目の授業

第２回目の授業には各自のパソコン(山口大学教育学部ではノートパソコンの必携化を行っており、学生は自分のパソコンを所持している)を持ってきてもらい、実際にWolfram Cloudを用いて数学の問題を解いてもらった。取り組んだ問題を以下に示す。

問題１：$x^2 + bx + c = 0$ となる実数 x が存在するための条件を求めなさい。

問題２：不等式 $x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ (a は実数）について次の問いに答えなさい。
(a) 全ての実数 x について上の不等式が成り立つためには、a がどのような範囲にあればよいか？
(b) $4 < x < 6$ を満たす全ての x について上の不等式が成り立つように、a の範囲を定めよ。

上の問題１は、命題論理で表すと

$$\exists x(p(x)), q(x)$$

ただし、$p(x) = x \in \mathbf{R},\ q(x) = x^2 + bx + c = 0$

と書ける。問題２の (a), (b) はともに

$$\forall x(p(x)),\ q(x)$$

の形で書け、$p(x), q(x)$ がそれぞれ次のようになる。

(a) の時：

$$p(x) = x \in \mathbf{R},\ q(x) = x^2 - 2ax + a + 6 > 0$$

(b) の時：

$$p(x) = x \in \mathbf{R},\ \ 4 < x < 6,$$
$$q(x) = x^2 - 2ax + a + 6 > 0$$

問題２(a),(b)をこのような命題論理に書き表せるということの理解度について、第２回目の授業の終了後にアンケートを実施した。一番当てはまる物を選ばせた結果は次の通りである。

(a) よく理解できる。(8.1%)
(b) だいたい理解できる。(27.9%)
(c) 正直良くわからない。(49.5%)
(d) 全くわからない。(14.4%)

Wolfram cloud では、命題 $\exists x(p(x)), q(x)$ に QE を適用するには

Resolve[Exists[x, $p(x)$, $q(x)$], Reals]

を用いる。また命題 $\forall x(p(x)), q(x)$ に QE を適用するには

Resolve[ForAll[x, $p(x)$, $q(x)$], Reals]

を用いる。よって、問題１の計算には

```
Resolve[Exists[x, Element[x,Reals], x^2+b*x+c==0], Reals]
```

と入力すれば良く、問題２(a) の計算には

```
Resolve[ForAll[x, Element[x,Reals], x^2+b*x+c>0], Reals]
```

問題２(b) の計算には

```
Resolve[ForAll[x, Element[x,Reals]&&4<x<6, x^2+b*x+c>0], Reals]
```

と入力すれば良い。Wolfram Cloud での計算には上のような命令を使えば良いと授業で解説を行ったが、これについての理解度を第２回目の授業の終了後に実施したアンケートで調査した。一番当てはまる物を選ばせた結果は次の通りである。

(a) よく理解できる。(7.2%)
(b) だいたい理解できる。(35.1%)
(c) 正直良くわからない。(40.5%)
(d) 全くわからない。(17.1%)

3.3 第３回目の授業

最後の第３回目の授業においては、まず下記の２次関数の最大化問題について考えた。

問題３（２次関数の最大化問題）:

区間 $0 \le x \le 1$ に於ける２次関数

$$y = -x^2 - ax + a^2$$

(a は定数)の最大値 M を求めよ。

この問題はパラメータ a の値により場合分けが必要な問題であり、簡単な問題ではない。求める最大値 M は数式で書くと

$$M = \max_{p(x)}(q(x))$$

と書けるが、上の式は命題論理を用いて

$$\forall x(p(x)),\ q(x) \le M \ \textbf{かつ}\ \forall x(p(x)),\ q(x) = M$$

$$p(x) = x \in \mathbf{R}, 0 \le x \le 1$$
$$q(x) = -x^2 - ax + a^2$$

と書き表せる。問題３をこのような命題論理に書き表せるということについて、第３回目の授業の最後に実施したアンケートで、一番当てはまる物を選ばせた結果は次の通りである。

(a) よく理解できる。(6.3%)
(b) だいたい理解できる。(25%)
(c) 正直良くわからない。(49.1%)
(d) 全くわからない。(19.6%)

問題３を解くためにの Wolfram Cloud への命令は上の命題論理での表現と第２回目の授業より

```
c1=Resolve[ForAll[x,Element[x,Reals]&&0<=x<=1,-x^2-a*x
   +a^2<=M],Reals] ;
c2=Resolve[Exists[x,Element[x,Reals]&&0<=x<=1,-x^2-a*x
   +a^2==M],Reals] ;
Reduce[c1&&c2] ;
```

とすれば良いことがわかる(上は３つの命令からなっている)。授業でこのことについての解説を行い、これについての理解度を第３回目の授業の最後に実施したアンケートで調査した。
一番当てはまる物を選ばせた結果は次の通りである。
(a) よく理解できる。(8.9%)
(b) だいたい理解できる。(30.4%)
(c) 正直良くわからない。(42%)
(d) 全くわからない。(18.8%)

授業ではこの問題の他にも似たような例題を行わせた。その時の例題は高校３年生用の数学の問題集から取ってくるようにして、学生に問題への親近感をもたせるように配慮した。
第３回目の授業の最後に行ったアンケートでは、上で説明した設問の他にも授業全体の理解度や授業への感想も聞いている。その結果は以下の通りである。

設問：今回、学んだことを使って、あなた一人で同じような問題を解くことができるとおもいますか？
(a) できる。(1.8%)
(b) 多分、できるんじゃかないと思う。(14.5%)
(c) できるかもしれない。(33.6%)
(d) 絶対無理。(50%)

設問：この３回分の命題論理の授業の理解度について、次のうち、一番良く当てはまるものを選んでください。
(a) 全部、理解できた。(0.9%)
(b) ほどんと、理解できた。(13.5%)
(c) まあまあ、理解できた。(25.2%)
(d) あまり、わからなかった。(41.4%)
(e) 全く、わからなかった。(18.9%)

設問：「ロボットは東大に入れるか」というプロジェクトでは、今回紹介した技術を数学の問題解法につかっています。この「ロボットは東大に入れるか」（俗に言う「東ロボプロジェクト」）のことを、これまでに聞いたことがありますか？
(a) 話題になっていたのでよく知っている。(4.5%)
(b) これまでにその名前を聞いたことはある。(13.4%)
(c) その名前を聞いたことがある気がする。(18.8%)
(d) そんな名前、聞いたことはない。(63.4%)

4. 授業の感想についての分析

第３回目の授業の最後に行ったアンケートで、授業の感想を書いてもらった。ここには学生の授業への感想が生の形で表れていると考え、その分析を行った。
自由記述であるため、はっきりと結果を分類できるわけでは無いが、感想のうち、目立ったのはやはり

(ア)「難しい、理解できない」を含むもの

である。これらの言葉を含むものは全体の 58.0% に登った。次に目立ったものは

(イ) 「面白い、興味深い、驚いた、勉強になった」を含むもの

であり、こちらは全体の 25%だった。興味深いのはこの(ア)と(イ)は相反するものでなく、(ア)と(イ)の両方を書いている感想もあり、それは全体の 5.3% だった。それらの一部を示す。

・内容は正直あまり理解できなかったが、初めて出会うものだったので興味深かった。
・難しかったが勉強になった。
・とても難しかった。Wolfram Cloud で一発で計算してくれてすごいと思った。例題があると

自分でも入力することができた。

この他、次の感想も全体の 15.2% あった。

(ウ) 最初は戸惑ったが少しずつ理解できるようになった

このような感想の一部を示す。

・最初は戸惑ったが、だんだん理解でき、最後にはスムーズに進めれ、問題を解くことができた
・式がきちんと入力できて、正しい答えがでると、すっきりします。式の入力は前回よりもスムーズに入力することができました。
・命題論理と聞いて、初めはよく分からなかったが、授業を受ける過程で意味が理解できた。

また、中には授業の進め方に否定的な意見もあった。特に QE を用いて大学入試問題を解くことの必要性を疑問視する意見が多かった。

前節のアンケート結果より分かるように、多くの学生は例題として示した問題を授業中に解くことは出来ても、自分一人で問題を解くことは出来ないと感じている。それを示す感想を以下に示す。

・できたけど、理解はできていない
・ PC 遅くて、うまくできなかった。また、面白いソフトだと思ったが、絶対にひとりではできないと思う。

授業の感想の分析を通じて見えてきたことを以下に述べる。

・やはり多くの学生にとって内容が難しすぎた。
・内容は難しいが、面白いと感じた学生もいた。
・例題を解いていく間に少しずつ命題論理について理解をしてきた学生もいるが、理解は浅いと思われる（例題は解けるが自分一人で問題は解けない)。

以上のように、色々と課題はあるものの、この授業が
∀、∃ を含んだ命題論理についての理解の取っ掛かりにはなったのではないかと感じている。

5. おわりに

学生のアンケート結果からわかるように、この演習は学生にとって難しすぎたと思われる。しかしながら、数学の授業の中にはこのような授業もあってもいいのではないかと考えており、できるだけ授業は来年度以降も続けていきたい。もちろん、内容が難しすぎる点はどうにか改善していく必要があるが、何を削ったら良いか考える必要がある（もしくは授業回数を増やすという選択肢もありうる)。

∀，∃を含む命題論理が学生にとって特にわかりにくいのだと思われる。大学受験の例題を初めから使って説明したほうがわかりやすいのではないかと考えており、その考えを使って授業を再構成し、次回の授業に臨みたい。

参考文献

[1] 新井紀子，東中竜一郎（2018）『人工知能プロジェクト「ロボットは東大に入れるか」第三次 AI ブームの到達点と限界』東京大学出版会

[2] WOLFRAM CLOUD 公式ホームページ, https://www.wolframcloud.com/ (2022 年 9 月 21 日閲覧)