様式７－２号（第 12 条，第 31 条関係）
（様式７－２号）(Format No.7-2) 英語版

学 位 論 文 要 旨
(Summary of the Doctoral Dissertation)

学位論文題目 (Dissertation Title)	On direct sum decompositions of lifting modules (lifting 加群の直和分解について)
氏　名(Name)	SHIBATA Yoshiharu

In the ring theory, the study of modules, which extract information for the ring structure, is significant. Lifting modules play important roles in the studies of several rings such as (semi)perfect rings, quasi-Frobenius rings, Harada rings and Nakayama rings. Therefore, the study of lifting modules is important.

There are some unsolved fundamental questions of lifting modules. For example, it is still unknown when is a direct sum of lifting modules to be lifting. For (quasi-)discrete modules which are types of lifting modules, it is characterized by the relative projectivity that these modules are closed under direct sums. In general, the relative projectivity implies a condition that a direct sum of lifting modules is lifting, but the converse does not hold. Therefore, Harada and Tozaki considered that a direct sum of lifting modules being lifting might be characterized by some kind of projectivity which is weaker than the relative projectivity, and introduced the almost projectivity. In 1990, Baba and Harada reported a result associated with direct sums of certain indecomposable lifting modules using the almost projectivity. After the almost projectivity was introduced by Harada and Tozaki, Baba introduced the almost injectivity which is the dual. Following that, in 2002, Hanada, Kuratomi and Oshiro introduced the generalized injectivity, which is more precise than the almost injectivity, as a necessary and sufficient condition for a direct sum of extending modules with the finite internal exchange property to be extending with the finite internal exchange property. In 2004, Mohamed and M¨uller introduced the generalized projectivity as the dual of the generalized injectivity, and investigated a direct sum of lifting modules with the finite internal exchange property under some kind of conditions. In 2005, Kuratomi proved that $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i$ is lifting with the finite internal exchange property if and only if M_i is M/M_i-projective for each $i = 1, 2, \ldots, n$, for any lifting modules with the finite internal exchange property $M_1, M_2, \ldots, M_n$, which is a generalization of Mohamed-Müller's result.

In this dissertation, we study decomposition structures of lifting modules. Almost of known extending modules satisfy the finite internal exchange property, but not all known extending modules satisfy the finite internal exchange property. However, the existence of lifting modules which do not satisfy the finite internal exchange property has not been confirmed for a long time.

In Chapter 1, we give an example of a lifting module which does not satisfy the finite internal exchange property over a semiperfect ring. First, we give a certain projectivity which is

(和文 2,000 字程度 / 英文 800 語程度)
(about 800 words)

different from the almost projectivity and the generalized projectivity, as a necessary and sufficient condition for the square of a uniserial module to be lifting. Next, we make an example of a lifting module which does not satisfy the finite internal exchange property over a semiperfect ring, using the above projectivity.

On the other hand, any lifting module over an artinian ring satisfies the finite internal exchange property. By this fact and our example, the following new question arose: Does any lifting module over a right perfect (a semiprimary) ring satisfy the finite internal exchange property? In 2021, Kuratomi has showed that any lifting module over a right perfect ring is a direct sum of a dual square free module and a factor square full module such that they have no nonzero isomorphic factor modules, and any dual square free lifting module over a right perfect ring is quasi-discrete. In Chapter 2, we first introduce the concepts and fundamental properties of dual square free and factor square full, and consider a condition for a lifting module over a right perfect ring to satisfy the finite internal exchange property, applying Kuratomi's results.

As aforementioned, the almost projectivity and the generalized projectivity are useful for the study of direct sums of lifting modules. We can easily see that the generalized projectivity implies the almost projectivity, but the converse does not hold in general. In Chapter 3, we first give new characterizations of the almost projectivity and generalized projectivity over a right perfect ring by the projective covers. Moreover, using these characterizations, we investigate the relationship between the almost projectivity and the generalized projectivity. In addition, we consider conditions for these projectivities to be closed under direct sums. Finally, we give a condition for a direct sum of lifting modules over a right perfect ring to be lifting, using these results.

（様式９号）

学位論文審査の結果及び最終試験の結果報告書

山口大学大学院創成科学研究科

氏　　名	柴 田 義 大
審査委員	主　査：倉 富 要 輔
	副　査：菊 政 勲
	副　査：木 内 功
	副　査：宮 澤 康 行
	副　査：大 関 一 秀
論文題目	On direct sum decompositions of lifting modules （lifting 加群の直和分解について）

【論文審査の結果及び最終試験の結果】

本博士論文は、lifting 加群の直和分解に関する研究を行ったものである。lifting 加群は、右完全環上の射影加群の一般化であり、様々な環の情報を引き出す重要な加群で、1980 年代から国内外の研究者によって間断なく研究されている。しかし、いくつかの基本的な問題が未解決のまま残されており、本論文は、その中の１つである

すべての lifting 加群は有限内部交換性を満たすか？

という問題に関する研究を纏めたものである。

M を体 K 上のベクトル空間としたとき，M の任意の部分空間 X と M の任意の直和分解 $M=\oplus_I M_i$ に対し，

$M=X\oplus(\oplus_I N_i)$ を満たす $N_i\subseteq M_i$（$i\in I$）が存在する。　(*)

これは Steiniz の exchange lemma により直ちに得られる結果である。ここで，M を環上の加群とする。環上の加群 M が，任意の直和因子 X と任意の有限直和分解 $M=\oplus_I M_i$ に対して(*)を満たすとき，M は finite internal exchange property (以下 FIEP と略す) を満たすという。環上の加群は必ずしも FIEP を満たすとは限らない。例えば，整数環 $\mathbb{Z}$ を右 $\mathbb{Z}$-加群とみたとき，$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}=(3,2)\mathbb{Z}\oplus(4,3)\mathbb{Z}$ という直和分解に対し，$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ の直和因子 $(1,0)\mathbb{Z}$ の補空間として $(3,2)\mathbb{Z}$ や $(4,3)\mathbb{Z}$ を取ることは出来ない。与えられた加群が FIEP を満たすか？という問題は加群の直和分解の研究において基本的であるが、lifting 加群については未解決のまま残されていた。

本博士論文の第１章では、半完全環上の特殊な直既約 lifting 加群の平方を考察することで、この問題を否定的に解決している。一方、2018 年に、右アルティン環上の lifting 加群は FIEP をみたすことが示されていることから、新たに

右完全環や半準素環上の lifting は FIEP をみたすか？

という問題が浮上する。第２章ではこの問題を解決するために、dual-square-free や factor-square-full なる加群を導入し、その基本性質を紹介している。2021 年に先行研究として、右完全環上の lifting 加群が、同型な非零剰余加群をもたない dual-square-free 加群と factor-square-full 加群の直和に分解されることと、右完全環上の dual-square-free 加群が FIEP をみたすことが示されており、ここではこれらの結果を応用して、右完全環上の lifting 加群が FIEP をみたすための必要十分条件が与えられている。また、第３章では、lifting 加群の直和の研究で重要な役割を果たす generalized N-projective と almost N-projective という２つの射影性の新たな特徴づけを与え、これらの射影性が同値になるための条件を調べている。

公聴会には学内外より２３名の参加があり、活発な質疑応答がなされた。公聴会での主な質問内容は、以下の通りである。

- dual-square-free 加群の定義にあるN^2の指数を３などにするとどうなるか？
- 今回与えた FIEP を満たさない lifting 加群の例から新たな FIEP を満たさない lifting 加群の例を構成することはできないか？
- 第３章の結果の双対は考えることが出来ないのか？
- 完全環上で加群が lifting であるとき generalized N-projective と almost N-projective が同値という結果があるが、lifting 加群がどのように効いてくるのか？

いずれの質問に対しても発表者から的確な回答がなされた。

本研究は、lifting 加群に関する未解決の問題を解決するともに新たな問題を提起し、その問題解決のために factor-square-full 加群等の新たな概念を導入したという点で、「独創性」、「新規性」がある。また、lifting 加群は完全環上の射影加群の一般化であり、そこで得られた研究成果は広範な応用が期待されるため、「有用性」がある。さらに、本博士論文は、Communications in Algebra, Turkish Journal of Mathematics, Algebra and Discrete Mathematics といった著名な雑誌に掲載された内容で構成されており、「信頼性」、「完成度」も十分である。

以上より、本研究は、独創性、新規性、有用性、信頼性に優れ、博士（理学）の論文に十分値するものと判断した。

論文内容および審査会、公聴会での質問に対する応答などから、最終試験は合格とした。

なお、主要な関連論文の発表状況は下記の通りである。（査読付き関連論文　計４編）

１）D. Keskin Tütücü, I. Kikumasa, Y. Kuratomi and Y. Shibata, On dual of square free modules, Communications in Algebra 46 (2018) 3365-3376.

２）D. Keskin Tütücü, Y. Kuratomi and Y. Shibata, On image summand coinvariant modules and kernel summand invariant modules, Turkish Journal of Mathematics 43 (2019) 1456-1473.

３）I. Kikumasa, Y. Kuratomi and Y. Shibata, Factor square full modules, Communications in Algebra 49 (2021) 2326-2336.

４）Y. Shibata, On lifting and extending properties on direct sums of hollow uniform modules, to appear in Algebra and Discrete Mathematics.（2020 年 9 月掲載決定）