行動と成果の間の確率的関係に不確実性がある場合の最適契約

川村一真 *

概要

本稿では，行動と成果の確率的関係について不確実性があるプリンシパルーエージェント関係を考え，最適契約を特徴付ける．

1　イントロダクション

Mirrlees(1999) や Holmström(1979) を嚆矢に，契約理論はこれまで発展を続け，多くの研究蓄積が生み出されている．特にエージェントの行動に関する情報の非対称性を仮定した，モラルハザードモデルは企業の人事制度の分析に貢献してきた．その標準的なモデル*1では，エージェントの行動と成果の間の確率的関係はプリンシパルとエージェントの共有情報としてモデル化されている．すなわち，任意の努力水準に対し，どのような成果がどのような確率で実現するのか両者は知っており，その情報に基づきそれぞれが意思決定を行う．しかし，現実にはその確率的関係が明確ではない状況が存在する．例えば，ある企業が多角化を進めた場合，新事業に携わるそれぞれの職務については，企業も担当の社員もどのような行動がどのような成果に繋

* 山口大学経済学部

*1 例えば伊藤 (2003) 第 4 章参照.

がるのか十分な情報を持たないだろう．

以上のような状況を，本稿は次のようにモデル化する．所与の行動に対して成果の条件付き確率分布があるパラメータによって定まるが，そのパラメータを確率変数として扱う．プリンシパルもエージェントも (i) パラメータの事前分布と (ii) パラメータが与えられた場合の成果の条件付き確率分布について共有情報を持つ．しかしプリンシパルもエージェントもパラメータの実現値は観測できない．もしパラメータの事前分布として退化した確率分布を仮定すれば標準的なモラルハザードモデルと一致する．それゆえ本稿は標準モデルの一般化として位置付けられる．

このようなモデルは例えば Manso(2011) で見られる．Manso(2011) は 2 期間の動学モデルについて考察しており，エージェントが行動と成果の確率的関係が未知な行動と既知の行動を選択できる状況において，未知な行動を選択させるための最適なインセンティブについて議論している．対して，本稿は行動空間を連続集合として考えた上，エージェントのリスク回避性を仮定する点に違いがある．

2　モデル

リスク中立的なプリンシパルとリスク回避的なエージェントを考える．標準的なモラルハザードモデルでは，まずプリンシパルはエージェントに契約 $\mathbf{w} = (w(x))$ を提示し，エージェントが合意すれば雇用関係が始まる．もしエージェントが雇用のオファーを拒否すれば，留保効用 $\underline{u}$ を得る．もし雇用関係が結ばれれば，エージェントにはある職務が与えられ，努力水準 $e \in E$ を決定する．確率分布 $F(\cdot|e)$ にしたがってエージェントの成果 $x \in X$ が実現する．選択された努力水準はエージェントの私的情報であるが，成果は立証可能な情報であり，契約に従って賃金 $w(x)$ がエージェントに支払われる．

本稿で検討するのは，成果の確率分布があるパラメータ $\theta \in \Theta$ にも依存し，θ が確率変数の状況である．θ と e が与えられた時の x の確率分布を

$F(\cdot|e,\theta)$，θ の事前確率分布は $F_\theta(\cdot)$ によって表す．標準的なモラルハザードモデルは F_θ が退化分布である状況として解釈される．

本稿では成果の集合として $X = \{0,1\}$ を考える．$x = 1$ は成功，$x = 0$ は失敗と解釈する．エージェントが選択できる努力水準の集合を $E = [0,1]$ とする．成果の条件付き確率分布は

$$P(X = 1|\theta, e) = \theta e$$

とし，$\theta \in [0,1]$ はある確率分布 F_θ に従う． θ の事前の期待値，分散はそれぞれ

$$E[\theta] = \mu > 0, \quad Var[\theta] = \sigma^2$$

と書く．

エージェントは努力回避的であり，努力水準 e を選べば費用 $c(e)$ が発生する．加法分離型の効用関数を仮定し，賃金 w を得た時の効用は $u(w) - c(e)$ である．c, u は 2 階連続微分可能であり，c は凸，u は凹型関数であり，

$$u' > 0, \quad u'' \leqq 0, \quad c' > 0, \quad c'' \geqq 0$$

とする．

プリンシパルは利益を最大にするリスク中立的なプレイヤーであり，エージェントが e を選んだ時の期待収入は $R(e)$ とし，賃金 w を支払えば，期待利益は $\pi(e,w) = R(e) - w$ である．R は 2 階連続微分可能な単調増加の凹型関数とする．つまり $R' > 0, R'' \leqq 0$ である

プリンシパルから提示される契約を $(w(x))$ と書く．$w(x)$ は成果が x である時エージェントに支払われる賃金である．$X = \{0,1\}$ であるため 一般性を失うことなく

$$w(x) = a + bx$$

と書くことができる．a は固定給，b はボーナスと解釈できる．

3　分析

任意の契約 $w(x)$ に対して，努力 e を選べばエージェントの期待賃金は

$$\begin{aligned}E[w(x)|e] &= E[a+bx|e] = a+bE[x|e] = a+bE[E[x|\theta,e]|e]\\ &= a+bE[\theta e|e] = a+b\mu e\end{aligned}$$

であり，分散は

$$\begin{aligned}V[w(x)|e] &= V[a+bx|e] = b^2V[x|e] = b^2E[(x-E[x])^2|e]\\ &= b^2E[E[(x-E[x])^2|\theta,e]|e] = b^2E\left[(1-\theta e)\theta e|e\right]\\ &= b^2(eE[\theta]-e^2E[\theta^2]) = b^2\left(\mu e-e^2(\sigma^2+\mu^2)\right)\end{aligned}$$

となる．任意の努力水準 e に対して，プリンシパルはエージェントから e を引き出すために次の２つの条件を満たさなければいけない．第一に参加制約 (個人合理性，以下 IR) である．

$$U(e) = E[u(w(x))|e] - c(e) \geqq \underline{u} \tag{1}$$

第二に誘因両立性 (以下 IC) である．

$$U(e) = \max_{e'} U(e') \tag{2}$$

ただし

$$\begin{aligned}U(e) &= E[u(w(x))|e] - c(e)\\ &= E[E[u(w(x))|\theta,e]|e] - c(e)\\ &= E[e\theta u(a+b) + (1-e\theta)u(a)|e] - c(e)\\ &= \mu eu(a+b) + (1-\mu e)u(a) - c(e)\end{aligned}$$

であるため，$U(e)$ は e に関して凹型である．したがって，(2) は以下の一階条件と同値である．

$$\mu(u(a+b)-u(a)) = c'(e) \tag{3}$$

プリンシパルにとって最適な契約は以下の最適化問題によって得られる．

$$\max_{e,w} E[R(e) - w(x)|e] \quad \text{s.t. } (1), (3)$$

Grossman and Hart(1986) に倣いこの問題を 2 段階に分ける．第 1 は遂行問題である．任意に努力水準 e を固定する．最小費用で e を引き出す契約を求めるのが遂行問題である．

$$\min_{w} E[w(x)|e] \quad \text{s.t. } (1), (3) \tag{4}$$

補題 1. (4) の解では (1) はバインドする．

証明. (4) の解を $w(e) = (a(e), b(e))$ とする．$u(a(e) + b(e)) = v_1(e), u(a(e)) = v_0(e)$ と書く．もし (1) がバインドしていなければ，ある正数 $\delta > 0$ が存在して

$$\delta = \{E[u(w(e))|e] - c(e)\} - \underline{u}$$

が成り立つ．契約 $w' = (a', b')$ を次のように構築する．$u(a' + b') = v_1', u(a') = v_0'$ と書くと，$v_1' = v_1(e) - \delta, v_0' = v_0(e) - \delta$ を満たすように a', b' を定める．$v_x(e) > v_x'$ が $x = 0, 1$ が成り立つ．したがって，$a(e) > a', a(e) + b(e) > a' + b'$ が成り立つ． それゆえ，$E[w(e)(x)|e] > E[w'(x)|e]$ が成り立つ．さらに，

$$E[u(w')|e] - c(e) = E[u(w(e))|e] - \delta - c(e) = \underline{u}$$

であるため，(1) が満たされ，

$$\mu(u(a' + b') - u(a')) = \mu(v_1' - v_0') = \mu(v_1(e) - v_0(e)) = c'(e)$$

であるため，(3) も満たされる．よって $w(e)$ は解ではない． □

補題 1 より，(4) の解は以下の連立方程式の解で求められる．

$$\mu(u(a + b) - u(a)) = c'(e)$$
$$\mu e u(a + b) + (1 - \mu e)u(a) - c(e) = \underline{u}$$

補題 2. (4) の解 $w_e = (a(e), b(e))$ は

$$u(a(e)) = \underline{u} + c(e) - c'(e)e$$
$$u(a(e)+b(e)) = \underline{u} + c(e) - c'(e)e + \frac{c'(e)}{\mu}$$

によって特徴付けられる．

e を遂行するためのプリンシパルの期待費用は

$$E[w_e(x)|e] = \mu e u^{-1}\left(\underline{u} + c(e) + c'(e)\left\{\frac{1}{\mu} - e\right\}\right) + (1-\mu e)u^{-1}(\underline{u} + c(e) - c'(e)e)$$

となる．

第二に最適契約を求める．問題を次のように書くことができる．

$$\max_{e\in[0,1]} R(e) - E[w_e(x)|e]$$

$R(e)$ および $E[w_e(x)|e]$ は e に関して連続であり，$[0,1]$ はコンパクト集合であるので，ワイエルシュトラスの定理より解は存在する．一階条件は

$$\begin{aligned}
R'(e) &= \frac{\partial E[w_e(x)|e]}{\partial e} \\
&= \mu b(e) + \mu e\frac{c''(e)\left\{\frac{1}{\mu} - e\right\}}{u'\left(a(e)+b(e)\right)} - (1-\mu e)\frac{c''(e)e}{u'\left(a(e)\right)} \\
&= \mu b(e) + (1-\mu e)c''(e)e\left[\frac{1}{u'\left(a(e)+b(e)\right)} - \frac{1}{u'\left(a(e)\right)}\right] \qquad (5)
\end{aligned}$$

である．左辺はエージェントの努力の限界収入，右辺は限界費用である．2行目の右辺一項目は，努力水準を高くすることによるプリンシパルが支払うボーナスの期待値の増加，二項目は成功した場合にエージェントに支払う期待賃金の変化，三項目は失敗したエージェントに支払う期待賃金の変化を指す．エージェントから引き出す努力水準を高くするためには，成功した場合の賃金を上げ，失敗した場合の賃金を下げるのが最適であることを示す．

任意の e に対し，平均値の定理より，ある $t_e \in (0,1)$ が存在し，

$$b(e) = u^{-1}\left(\underline{u} + c(e) - c'(e)e + \frac{c'(e)}{E[\theta]}\right) - u^{-1}(\underline{u} + c(e) - c'(e)e)$$
$$= \frac{c'(e)}{\mu u'(a(e) + t_e b(e))}$$

であるから，

$$\frac{\partial E[w_e(x)|e]}{\partial e} = \frac{c'(e)}{u'(a(e)+t_e b(e))} + (1-\mu e)c''(e)e\left[\frac{1}{u'\left(a(e)+b(e)\right)} - \frac{1}{u'\left(a(e)\right)}\right]$$

と書き換えることができる．したがって，

$$\frac{\partial E[w_e(x)|e]}{\partial e} \geqq \frac{c'(e)}{u'(a(e))} \tag{6}$$

が成り立つ．

仮定 1. (i) $\lim_{e\to1} R'(e) = 0$, (ii) $\lim_{e\to0} C'(e) = 0$.

命題 3. 仮定 1 の下，最適な努力水準 e^* は (5) を満たし，最適契約は $w^* = (a(e^*), b(e^*))$ である．

証明. $\lim_{e\to0} R'(e) > 0 = \lim_{e\to0} \frac{\partial E[w_e(x)|e]}{\partial e}$ が成り立つ．したがって，

$$\lim_{e\to0} R'(e) - \frac{\partial E[w_e(x)|e]}{\partial e} > 0$$

であるため，$e=0$ は最適ではない．さらに，任意の $e \in [0,1]$ に対して，$c'(e)/u'(a(e)) > 0$ である．

$$\lim_{e\to1} R'(e) = 0 < \frac{c'(1)}{u'(\underline{u} + c(1) - c'(1))} \leqq \lim_{e\to1} \frac{\partial E[w_e(x)|e]}{\partial e}$$

が成り立つ．2 つ目の不等号は (6) を用いている．したがって，

$$\lim_{e\to1} R'(e) - \frac{\partial E[w_e(x)|e]}{\partial e} < 0.$$

これより，$e=1$ は最適でない．したがって内点解を持つ．最適な努力水準 e^* は (5) を満たす．　□

4　おわりに

以上で行動と成果の間の確率的関係について不確実性のある状況を考察した．本稿で分析したモデルはプリンシパル・エージェント関係のベイズ的モデルと解釈できる．関係が継続することによるプレイヤー達の学習と最適契約のダイナミクスを明らかにすることが今後の課題である．

参考文献

Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2013). *Bayesian data analysis.* CRC press.

Grossman, S. J., & Hart, O. D. (1983). An Analysis of the Principal-Agent Problem. *Econometrica*, 51(1), 7-46.

Holmström, B. (1979). Moral hazard and observability. *The Bell journal of economics*, 74-91.

伊藤秀史. (2003)『契約の経済理論』有斐閣.

Manso, G. (2011). Motivating innovation. *The Journal of Finance*, 66(5), 1823-1860.

Mirrlees, J. A. (1999). The theory of moral hazard and unobservable behaviour: Part I. *The Review of Economic Studies*, 66(1), 3-21.