

博士学位論文

$f(R)$  重力理論における宇宙初期と現在の加速膨  
張の統一モデルの観測的検証

(Observational tests of unified models of early and current  
accelerated expansions of the universe in  $f(R)$  gravity)

山口大学大学院 創成科学研究科

自然科学系専攻

理論宇宙物理学研究室

学籍番号： 17-8901-005-3

著者： 家舗 真衣

指導教員： 坂井 伸之

2020年3月



# 目次

<b>第1章</b>	<b>イントロダクション</b>	<b>1</b>
1.1	膨張宇宙の発見	1
1.2	標準宇宙モデルとインフレーション理論	1
1.3	現在の宇宙の加速膨張	3
1.4	一般相対論と修正重力理論	4
1.5	本論文の目的と構成	6
<b>第2章</b>	<b>一様等方宇宙</b>	<b>9</b>
2.1	宇宙原理	9
2.2	FLRW 計量	10
2.3	赤方偏移	10
2.4	ホライズン	11
2.5	Friedmann 方程式	12
2.6	宇宙論パラメータ	13
2.7	エネルギー成分	14
2.7.1	放射優勢期	15
2.7.2	物質優勢期	15
2.7.3	放射・物質等密度時	15
2.7.4	宇宙定数優勢期	16
2.8	現在の宇宙の加速膨張	16
2.8.1	現在の加速膨張を引き起こす要因	18
	宇宙定数	18
	修正物質理論	18
	修正重力理論	19
<b>第3章</b>	<b>インフレーション理論</b>	<b>21</b>
3.1	ビッグバン理論の問題点	21
3.1.1	ホライズン問題	21
3.1.2	平坦性問題	22
3.1.3	問題の解決方法	23
3.2	インフレーション機構	25
3.2.1	スローロールインフレーション	25
3.2.2	インフレーション中の初期ゆらぎ	28

	スカラー型ゆらぎ . . . . .	29
	テンソル型ゆらぎ . . . . .	33
3.3	CMB の観測による制限 . . . . .	37
<b>第 4 章</b>	<b><math>f(R)</math> 重力理論</b>	<b>39</b>
4.1	基礎方程式 . . . . .	39
4.2	Jordan Frame と Einstein Frame . . . . .	40
4.3	インフレーション . . . . .	44
4.3.1	$R^2$ インフレーションモデル . . . . .	44
4.3.2	$R^n$ インフレーションモデル . . . . .	48
4.4	現在の加速膨張を説明する $f(R)$ モデル . . . . .	50
4.4.1	インフレーション以降の宇宙の発展 . . . . .	51
	Autonomous Equations . . . . .	53
	各優勢期に対する条件 . . . . .	54
4.4.2	カメレオン機構 . . . . .	59
	コンパクトオブジェクトにおけるスカラー場の解 . . . . .	61
	$f(R)$ DE モデルに対する制限 . . . . .	64
4.5	$f(R)$ DE モデルにおける特異点問題 . . . . .	66
<b>第 5 章</b>	<b><math>f(R)</math> 統一モデル</b>	<b>71</b>
5.1	統一モデルの紹介 . . . . .	71
5.1.1	拡張 AL モデル . . . . .	71
5.1.2	Starobinsky DE + $R^n$ モデル . . . . .	72
5.1.3	$g$ -AB + $R^n$ モデル . . . . .	73
5.2	インフレーション . . . . .	74
5.3	インフレーション以降の宇宙の発展 . . . . .	76
5.3.1	数値解析 . . . . .	78
5.4	統一モデルにおける重力テスト . . . . .	80
5.4.1	拡張 AL モデル . . . . .	81
5.4.2	Starobinsky DE + $R^n$ モデル . . . . .	83
5.4.3	$g$ -AB + $R^n$ モデル . . . . .	86
<b>第 6 章</b>	<b><math>K</math>-essentially modified <math>R^2</math> モデルにおけるインフレーション</b>	<b>91</b>
6.1	$R^2$ インフレーションの拡張モデル . . . . .	91
6.2	テンソル・スカラー比とスペクトル指数 . . . . .	92
<b>第 7 章</b>	<b>まとめ</b>	<b>97</b>
7.1	CMB 観測からのインフレーションモデルへの制限 . . . . .	97
7.2	インフレーション以降の宇宙の発展 . . . . .	98
7.3	スカラー場の質量に対するインフレーション項の寄与 . . . . .	98
7.4	今後の課題 . . . . .	99

付録 A 宇宙論的摂動論	101
A.1 線形摂動での FLRW 計量	101
A.2 線形 Einstein 方程式	101
A.3 ゲージ変換	102
A.4 スカラー・テンソル・ベクトル分解	104
A.5 ゲージ不変量による Einstein 方程式	106
A.5.1 スカラー型摂動	106
A.5.2 テンソル型摂動	107
A.6 ゲージ固定	107
付録 B $f(R)$ DE モデルが満たすべき条件について	111
謝辞	114
References	116



# 第1章 イントロダクション

いつの時代も人類にとって宇宙は未知なる存在である。その謎を解明しようと数多くの観測実験および理論研究がなされてきた。それらの功績により、宇宙について様々なことがわかってきている。

## 1.1 膨張宇宙の発見

科学技術がまだ発展していなかった時代には、人々は肉眼による天体観測から仮説を立てていた。天体望遠鏡が発明されると、肉眼では発見できなかった様々な星や銀河、星雲が次々と発見された。これにより、宇宙には地球や太陽がある天の川銀河以外にもたくさんの銀河があり、宇宙は人間の想像以上の大きさを持っていることがわかった。観測による宇宙の理解が進む一方、1916年に Einstein が一般相対性理論を提唱し、理論的な宇宙の描像に関する研究も盛んに行われるようになった。そして1922年に、Friedmann は Einstein 方程式から膨張宇宙解を発見した。しかし当時は宇宙は不変であるという考えが一般的であったため、関心を集めることはなかった。そんな中、1929年に宇宙膨張に対する観測的証拠が発見された。Hubble は望遠鏡を用いて系外銀河にあるセファイド型変光を観測し、その明るさと変光周期から、銀河の後退速度  $v$  と銀河までの距離  $d$  を測定したところ、 $v$  と  $d$  が比例関係にあることを発見した。これを Hubble の法則という [1]。ハッブルの法則は宇宙全体が膨張すると考えると自然に導かれることから、宇宙が膨張していることの決定的証拠となった。この発見により、宇宙論の分野は飛躍的に進展していった。

## 1.2 標準宇宙モデルとインフレーション理論

Hubble の法則の発見により、我々のいる宇宙が膨張していることがわかった。すると、新たな疑問として浮上したのが、宇宙には始まりがあるのかということである。

膨張宇宙では過去に遡ると物質の密度が増加していき、無限に大きな密度から宇宙が始まったというシナリオに行き着く。1948年に Gamow は、宇宙には始まりがあり、物を圧縮すると熱くなるのと同様に、宇宙初期は超高温・高密度であったとするビッグバン理論を提唱した。超高温・高密度な初期宇宙は放射で満たされており、宇宙膨張により放射の温度は徐々に冷えていく。そしてその残光が現在の宇宙にも残っていると考えられる。ビッグバン理論では、この残光が約 5K の黒体放射スペクトルを持ち、宇宙全天に存在していると予言した。この残光のことを宇宙マイ

クロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background radiation, CMB) [2] という。また, Gamow と Alpher は, 宇宙が高温状態から放射が冷えていく過程で軽元素を合成する「原始元素合成」によって, 星内部で生成される量をはるかに超えていた, 宇宙に存在するヘリウムの量を説明できることを発表した。ビッグバン理論の発表当時は, 放射温度の低い CMB を観測する技術がなかったため注目を浴びることはなかった。しかし, 1965 年にアメリカのベル研究所で Penzias と Wilson によって CMB が偶然発見されたことにより, ビッグバン理論の正しさが裏付けられた。CMB は全天からほぼ等方的に観測され, 初観測時のスペクトルはおよそ 3K であった。その後, CMB 観測機器が次々と開発され, 人工衛星 COBE(COSmic Background Explorer) [3], 宇宙探査機 WMAP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [4], 最新では Planck 衛星 [5] などにより, CMB をより詳細に観測することが可能となった。これらの観測から, CMB はおよそ 2.725K の黒体放射であること, そして方向によってわずかに温度ムラ (温度異方性) があることがわかった。この温度異方性は, 地球の運動による光のドップラーシフトによって生じるものだけでは取り除くことができないため, 宇宙初期から温度の不均一性があったと考えられた。図 1.1 に, Planck 衛星によって観測された CMB の全天マップを載せた [6]。この図に見られる色の違いは 2.725 K からの温度のずれを表している。この図から, 方向によってわずかに温度ゆらぎがあること, つまり CMB に非等方性があることが示された。最新の観測 [7] では, この温度ムラは  $10^{-5}$  のオーダーであることがわかった。CMB 観測が発展したことに

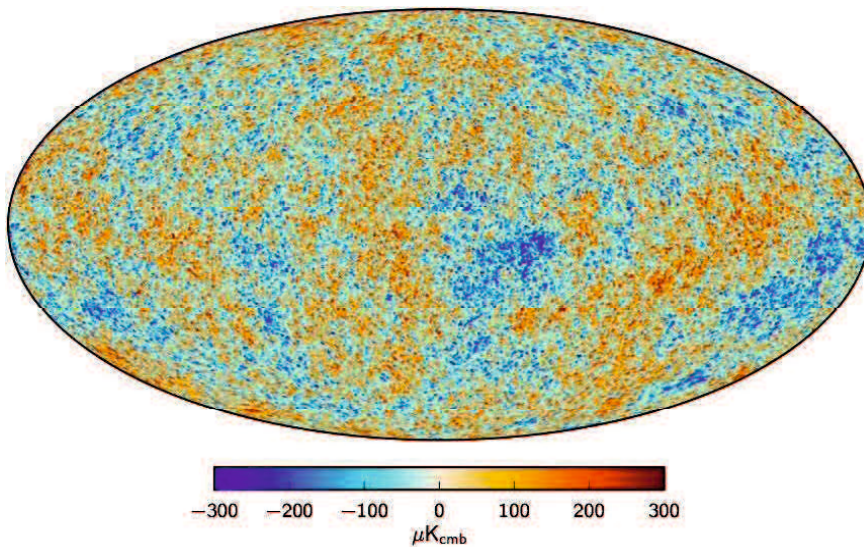


図 1.1: Planck 衛星による観測で得られた CMB の全天マップ [6]。色の違いは 2.725 K からの温度のずれであり, わずかに非等方性があることを表している。

より, 宇宙年齢や組成といった宇宙論パラメータをこれまでよりも高精度で決定することができるようになった。

宇宙初期にビッグバンが起こったことが観測により裏付けられたことで, ビッグ



バンから宇宙が始まったと考える宇宙モデルが考えられた。これを標準宇宙モデルといい、このモデルではビッグバン後の宇宙は減速膨張する。しかし、宇宙が始まってから現在付近まで減速膨張しているとすると、平坦性問題やホライズン問題 [8] などの問題が生じてしまうことがわかった (詳細は第3章)。これらの問題を解決すべく考えられた理論が、インフレーション理論 [9, 10] である。インフレーション理論とは、ビッグバンよりも前の宇宙初期に急激な加速膨張が起こったと仮定する理論である。急激な加速膨張が宇宙初期に起こることにより、標準宇宙モデルで生じた問題を自然に説明することができる。インフレーション理論には、それらの問題を解決する以外にも重要な特徴がある。1つはインフレーション中に初期ゆらぎを生成することである。この初期ゆらぎは星や銀河等の構造形成の種となるだけでなく、CMBの温度異方性を説明することができる。もう1つは、CMBの温度異方性を生むゆらぎのスケール依存性がほぼ不変であることを予言し、観測結果と見事に一致したことである。このような成功を収めたことで、インフレーション理論は宇宙初期を記述する理論として強い支持を得始めているが、ビッグバン理論におけるCMBの発見のように、理論を裏付ける直接的な証拠は未だ得られていない。そのため、現在まで数多くのインフレーションモデルが考案されており、どのインフレーションモデルが最適であるかは未だにわかっていない。現在では、CMBやバリオン音響振動 (BAO) [11, 12] 等の観測によってモデルの選別が行われている。今後は、これまでよりも精密なCMB観測を行える LiteBIRD や、インフレーション中に生成される原始重力波の直接検出を目指す LISA, DECIGO など、将来観測によってより詳細なモデル選別を行うことが可能となると考えられている。

### 1.3 現在の宇宙の加速膨張

インフレーション終了後、宇宙はビッグバンを経て、放射 (相対論的物質) が宇宙を支配する放射優勢期、物質 (非相対論的物質) が宇宙を支配する物質優勢期へと移っていく。宇宙の膨張速度は、その時何が宇宙を支配しているかによって変わる。これを特徴づけるのが、宇宙を占める成分の性質を表す状態方程式パラメータ  $w = P/\rho$  である ( $P, \rho$  はそれぞれ圧力とエネルギー密度)。詳細な導出は後述に回すが、 $w < -1/3$  であれば加速膨張をし、 $-1/3$  より大きければ減速膨張をする。放射・物質優勢期での  $w$  の値はそれぞれ  $w = 1/3, 0$  となることから、これらの期間では宇宙は減速膨張をする。そして現在の宇宙も減速膨張をしていると考えられていたが、1998年に多数のIa型超新星爆発の観測により、現在の宇宙は加速膨張していることがわかった。Ia型超新星爆発の絶対光度は理論的に解明されており、絶対光度を用いて光源までの距離を計ることができる。Perlmutter 率いるチームと Schmidt 率いるチームはそれぞれ、遠方のIa型超新星爆発の明るさを測定した。すると、宇宙が減速膨張している場合に予想されていた明るさよりも、暗くなっていることが判明した [13, 14, 15]。図 1.2 に、Perlmutter らによるIa型超新星の観測から得られた銀河の見かけの等級と赤方偏移の関係をプロットした図を載せた。図 1.2 より、宇宙

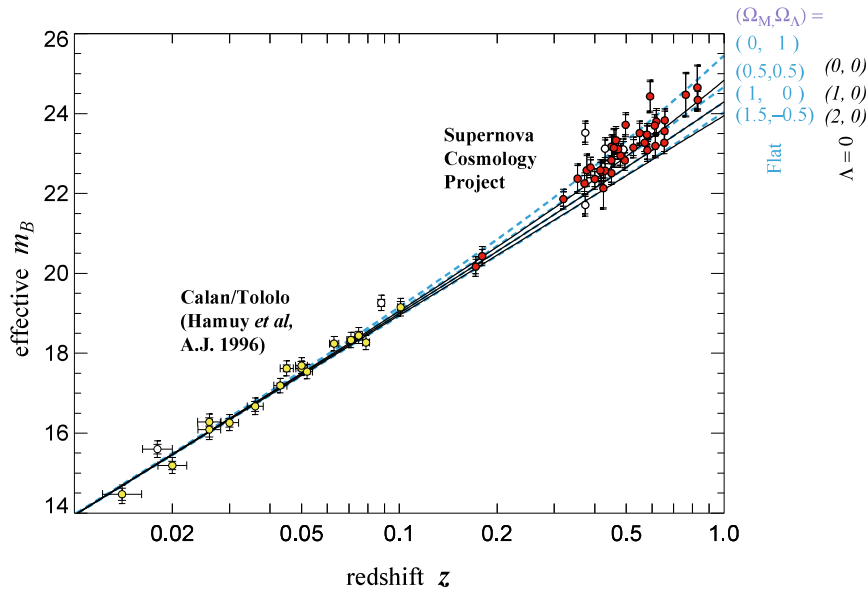


図 1.2: Ia 型超新星爆発の観測から得られた、銀河の見かけの等級 (縦軸) と宇宙の赤方偏移 (横軸) の関係をプロットした図 [13]. ドットは観測値であり、各線は宇宙の組成を変えた場合の赤方偏移と等級の関係を表す. 物質のみ (減速膨張) よりも宇宙定数  $\Lambda$  がある方が観測結果と一致することから、現在の宇宙が加速膨張していることが示された.

が物質のみで支配されている場合、つまり減速膨張の宇宙よりも、物質と宇宙定数  $\Lambda$  (後述) に支配されている場合、つまり宇宙が加速膨張している方が観測結果と一致していることがわかる. この観測により、現在の宇宙は減速膨張から加速膨張に転じていることがわかった [13].

このように現在の宇宙が加速膨張をしていることの観測的証拠が示され、最新の観測では、 $w$  はおよそ  $-1$  であることがわかっている [16]. しかし、この加速膨張が何によって引き起こされているかは未だわかっていない. というのも、この現在の宇宙の加速膨張を説明するためには、通常物質では考えられない、負の圧力を持つエネルギーが必要となるからである. この未知なるエネルギーを総称してダークエネルギー (DE) [17] と呼ばれており、現在宇宙の約 68% を占めていることが CMB などの観測によりわかった [16]. しかし、DE のソースが何であるかは未だわかっておらず、様々な研究がなされている.

## 1.4 一般相対論と修正重力理論

DE のソースとして様々な候補が挙げられているが、その中でも最もシンプルな DE の候補は、Einstein 方程式に含まれる宇宙定数  $\Lambda$  である. 宇宙定数が DE だとす

ると、 $w = -1 = \text{const.}$  となり、観測結果とよく一致している。しかし、宇宙定数の起源が素粒子論に基づく真空エネルギーであるとする、観測から得られる DE のエネルギースケールと理論値が大きくかけ離れてしまう。これを「宇宙定数問題」[18] といい、この問題を解決すべく、あらゆる試みがなされている。

この問題を受け、宇宙定数を用いずに現在の加速膨張を説明しようとする理論がいくつか考えられた。その中でも、Einstein 方程式の左辺、つまり重力を修正する「修正重力理論」がある。修正重力理論とは、一般相対論 (GR) における重力作用に修正を加えた作用を用いて記述される重力理論である。宇宙定数と異なる点は、DE の状態方程式が  $w \neq -1$  であることである。修正重力理論についての詳しい解説や文献は [19, 20, 21] を参照のこと。

修正重力理論には様々な理論が存在するが、その中の 1 つに  $f(R)$  重力理論がある [22, 23]。  $f(R)$  重力理論とは、GR における Einstein-Hilbert 作用におけるスカラー曲率  $R$  の線型項を、 $R$  の非線形関数  $f(R)$  に置き換えた作用を用いて記述される重力理論である。最初に考えられた  $f(R)$  モデルは、現在の加速膨張を説明するモデルではなく、インフレーションモデルであった。このモデルは  $R^2$  インフレーションモデル [24, 25] といい、Planck 衛星による CMB の観測結果とよく一致するインフレーションモデルである。また、関数  $f(R)$  の選び方によって、現在の宇宙の加速膨張を説明する実現可能な DE モデルにもなる [26, 27, 28] など。このことから、 $f(R)$  の関数形をうまく選ぶことで、宇宙初期の加速膨張であるインフレーションと、現在の宇宙の加速膨張を 1 つのモデルで統一して説明することが可能であると考えられる。そして、もし 1 つのモデルで宇宙初期と現在を説明できるならば、その間の期間にあたる放射・物質優勢期でも重力が修正されていることになる。しかし、観測によりこれらの期間では GR が正しいことがわかっている。したがって、宇宙初期と現在だけでなく放射・物質優勢期も含めた宇宙全体の発展が、観測と整合性があるかどうかを確かめる必要がある。

$f(R)$  重力理論は重力を修正しているため、関数  $f(R)$  にいくつかの制約が課されている [29, 26, 27]。その中の 1 つに、太陽系などの局所宇宙における重力テストからの制限がある。これは、GR では現れないスカラー自由度の存在により発生する第 5 の力を、宇宙の局所領域では抑制しなければならないというものである。この第 5 の力を抑制する機構をカメレオン機構 [30] といい、スカラー場の質量が周りの密度に依存して変化することで、スカラー場の寄与を見えなくする。場の質量はポテンシャルの二階微分で定義されているため、ポテンシャルの関数形が変わると質量も変化する。

2 つの加速膨張期を 1 つの  $f(R)$  統一モデルで説明しようとする研究は、これまでいくつかなされてきた [31, 32, 33] など。先行研究では、インフレーションを起こす項と現在の加速膨張を起こす項 (DE 項) はそれぞれ、宇宙初期とインフレーション以降にしか寄与しないものとし、それぞれの期間以外では各項を無視していた。しかし、各統一モデルのモデルパラメータの選び方次第で、比較的低いエネルギースケールでインフレーション項が DE 項よりも優勢となる可能性があることがわかっ

た. 統一モデルにすることでポテンシャルの関数形が変わることから, インフレーション項が優勢となるとスカラー場の質量も変化する. したがって, もしインフレーション項の寄与により地球程度のスケールでスカラー場の質量が軽くなってしまうと, カメレオン機構が破綻してしまう可能性がある.

## 1.5 本論文の目的と構成

本論文では, 3つの  $f(R)$  統一モデルを考え, それらが宇宙初期から現在までの宇宙の発展を観測と矛盾することなく説明可能であるかについて議論する. 検証する事柄は主に以下の点である:

- 最新の観測結果と整合性のあるインフレーションを起こせるか
- インフレーション以降の宇宙全体の発展が観測と合っているか
- 統一モデルにすることでカメレオン機構が破綻しないか

上記を調べることにより,  $f(R)$  統一モデルが現実的なモデルであることを検証することを目的とする.

本論文は, 本章を含め全7章で構成される. 第2-4章は, 著者の研究において必要な基礎知識等をまとめたレビューであり, 第5, 6章は著者が行った研究結果をまとめたものである.

第2章では, 宇宙論において最も一般的な仮定である宇宙原理に基づいた一様等方宇宙モデルについて述べる. そして, 宇宙の膨張則を支配する Friedmann 方程式や, 現在の加速膨張を起こす要因の候補について述べる. 第3章では, 標準宇宙モデルの問題点について述べた後, 最もシンプルなインフレーション機構であるスローロールインフレーションに基づいた, インフレーション機構と初期ゆらぎについて紹介する. 第4章では,  $f(R)$  重力理論の基礎方程式を紹介し,  $f(R)$  重力理論に基づいたインフレーションモデルとダークエネルギーモデルを紹介する. そして,  $f(R)$  ダークエネルギーモデルが満たさなければならない条件等について述べる. 第5章では, 3つの  $f(R)$  統一モデルを例にとり, インフレーション中に生成される初期ゆらぎ, そしてインフレーション以降の宇宙の発展を調べ, 最新の観測結果との比較から各モデルパラメータに対する制限を求めた結果を述べる. そして, どの程度のスケールでインフレーション項がスカラー場の質量に寄与するか, そして, その寄与により地球程度のスケールで質量が軽くなり, カメレオン機構が破綻しないかを検証した結果について述べる. 第6章では,  $R^2$  インフレーションモデルに  $K$ -essence 場を加えて修正した, 2つのスカラー場による拡張  $R^2$  インフレーションモデルについて議論する. 最後の第7章で本論文の主な結果をまとめる.

本論文では, 計量の符号は  $(-, +, +, +)$  とし, 光速  $c = 1$ , デイラック定数  $\hbar = 1$  とする自然単位系を用いる (必要に応じて適宜復活させる). また,  $\kappa^2 = 8\pi G =$

$8\pi m_{\text{pl}}^{-2} = M_{\text{pl}}^{-2}$  とし,  $G$  は重力定数,  $m_{\text{pl}}$  はプランク質量,  $M_{\text{pl}}$  は還元プランク質量である.



## 第2章 一様等方宇宙

この章では、宇宙の発展を記述する上で広く用いられている、宇宙原理に基づいた「一様等方宇宙モデル」について述べる。そして一様等方時空における Einstein 方程式から、膨張宇宙解が得られることを述べる。また、宇宙の膨張速度は、宇宙を支配している各エネルギー成分の割合によって変化する。物質の性質を特徴づける状態方程式から、宇宙を支配する各エネルギー成分におけるスケール因子  $a$  と時間  $t$  の関係性をみていく。

### 2.1 宇宙原理

宇宙原理とは、「大局的スケールでは宇宙は一様かつ等方である」という仮定である。一様性とは、宇宙の姿は地球上から見ても他の銀河から見ても変わらないことを表しており (並進対称性)、等方性とは、宇宙は見る方向によって不変であることを表している (回転対称性)。実際の宇宙には、地球などの星やそれらが集まった銀河、銀河の集まりである銀河団と言うように、様々なスケールの天体が階層的な構造を成している。このような構造が見えるスケールでは宇宙は一様でも等方でもない。しかし、これよりもはるかに大きいスケールで見ると、宇宙には特別な場所や方向はないという考えである。

等方性は地球上での観測によって検証を行える。しかし我々は観測者の位置を変えることができないため、一様性の直接検証は行えない。したがって、等方性は様々な観測から裏付けされているが、一様性は十分な裏付けはなされていない。しかし現在でも、宇宙原理を一般相対論に適用した宇宙論が一般的に支持されている。本論文では、一様等方性を満たす宇宙モデルである「一様等方宇宙モデル」を用いて議論する。

宇宙空間のあらゆるところで、宇宙が等方に見える仮想的な観測者を基本観測者と呼ぶ。一様性より、全ての基本観測者に対しても同じように宇宙が見える3次元空間が存在し、その空間を時間一定面になるように定義した時間のことを、宇宙時間  $t$  という。そして、基本観測者の3次元空間座標が時間に依らないように空間座標  $x_i$  を張ると、宇宙の膨張・収縮にともなって動くことになる。このような座標を共動座標という。

## 2.2 FLRW計量

宇宙原理を満たす最も一般的な一様等方計量は以下のように書ける.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\}. \quad (2.1)$$

この計量は Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 計量, 略して FLRW 計量 (またはロバートソン・ウォーカー (RW) 計量) と呼ばれている. また, 3次元一様等方空間は曲座標表示である. ここで,  $a(t)$  はスケール因子といい, 宇宙の膨張や収縮の度合いを表すパラメータである. 現在時刻  $t_0$  におけるスケール因子を  $a_0(t_0) = 1$  とする規格化を用いると,  $K$  は現在時刻の三次元空間の曲率となる.  $K > 0$  の場合は三次元球面,  $K < 0$  の場合は三次元双曲面,  $K = 0$  の場合は平坦な宇宙である. ここで, 新しい時間座標として, 共形時間

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad (2.2)$$

を導入しておく. 以下本論文では, 宇宙時間  $t$  での微分をドット ( $\dot{\phantom{x}}$ ) で表すことにする.

## 2.3 赤方偏移

もし宇宙が膨張しているとする, ある点から発された光は, 観測者に届くまでにその波長がスケール因子  $a(t)$  に応じて変化する. ある銀河の静止系で放射された光の波長を  $\lambda_c$ , 観測された時の波長を  $\lambda_0$  とすると, 銀河の赤方偏移  $z$  は観測された波長が実際の波長に対してどれくらい伸びたかを表す割合を表し,

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_c}{\lambda_c}, \quad (2.3)$$

と定義される.  $a_0 = 1$  の規格化を用いると, 赤方偏移は,

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_c} = \frac{1}{a(t)}, \quad (2.4)$$

と表される.  $z = 0$  が現在の宇宙に対応する. 膨張宇宙では, 赤方偏移が大きい天体ほど光が放射された時刻が早くなり, 天体までの距離は遠くなる.

Hubble は, 近傍の銀河の観測から得られた後退速度  $v$  と銀河までの距離  $d$  をプロットし, Hubble の法則

$$v = H_0 d, \quad (2.5)$$

が成り立つことを発見した [1]. ここで,  $H_0$  はハッブル定数といい, 時間の逆数の次元を持つ. 宇宙全体が膨張すると考えると, ハッブルの法則 (2.5) が自然に導かれることから, この発見は, 宇宙膨張の直接的な証拠となった.



近年の観測技術の向上により、当時 Hubble が描いた Hubble 図よりも正確なものが書けるようになってきた。最新の観測結果から、Hubble 定数の現在値  $H_0$  は、

$$H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ [km/s/Mpc]}, \quad (2.6)$$

で見積もられている [16].

Hubble 定数の逆数は宇宙年齢の目安となっており、この時間  $H_0^{-1}$  を Hubble 時間という。

$$H_0^{-1} = 9.778h^{-1} \text{ Gyr}, \quad (2.7)$$

という値となる。ここで、 $h$  は無次元パラメータであり、

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km/s/Mpc}}, \quad (2.8)$$

で定義される。 $h = 0.7$  とすると、現在の宇宙の年齢はおよそ 140 億年となる。また、光が宇宙において最も早く進むため、Hubble 時間に光速をかけた  $cH_0^{-1}$  は、現在の宇宙で因果関係を持つ範囲を表している。これを Hubble 距離 (半径) といい、我々が観測できる宇宙の大きさの目安となっている。

## 2.4 ホライズン

相対性原理より、光速を超えるものはない。このことから、情報が因果関係を持つことができる範囲は、ある時空点を中心として、そこから光が伝播する範囲に対応する。この範囲の境界をホライズンという。ホライズンには 2 種類あり、1 つは過去に遡って因果関係がある領域を表す「粒子ホライズン」、もう 1 つは未来に向かって将来因果関係を持つことができる領域を表す「事象ホライズン」である。膨張宇宙の場合、ある時刻の粒子ホライズンは、宇宙の始まりからその時刻までに光が到達可能な距離を半径とする球面となる。一方事象ホライズンは、その時刻以降に光が到達可能な距離を半径とする球面となる。

宇宙が始まった時刻  $t = 0$  を原点とし、ある宇宙時間  $t$  における粒子ホライズンまでの共動距離  $L_H(t)$  は、

$$L_H(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.9)$$

となる。また、粒子ホライズンの物理的距離は、 $l_H = a(t)L_H$  で与えられるため、

$$l_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.10)$$

となる。膨張宇宙では、 $H = \dot{a}/a$  を用いることで、

$$l_H = a \int_0^a \frac{da'}{a'^2 H} = \frac{1}{1+z} \int_z^\infty \frac{dz'}{H}, \quad (2.11)$$

と表される。

一方、事象ホライズンまでの共動距離を  $L_E(t)$  は、

$$L_E(t) = \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.12)$$

となり、物理的距離は以下の通りである。

$$l_E(t) = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.13)$$

また、膨張宇宙の場合には、

$$l_E = a \int_a^\infty \frac{da'}{a'^2 H} = \frac{1}{1+z} \int_{-1}^z \frac{dz'}{H}, \quad (2.14)$$

と表される。

## 2.5 Friedmann 方程式

以下では、一様等方時空における Einstein 方程式の解として膨張解が得られること、そしてスケール因子  $a(t)$  の具体的な時間変化をみていく。

宇宙定数  $\Lambda$  を含む Einstein 方程式は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

と書ける。ここで、 $R_{\mu\nu}$  はリッチテンソル、 $R$  はスカラー曲率、 $G$  は重力定数、 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルである。FLRW 計量 (2.1) を Einstein 方程式 (2.15) に適用することで、以下の2式を得る。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.16)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G P - \frac{K}{a^2}. \quad (2.17)$$

上2式のうち、式 (2.16) を Friedmann 方程式といい、宇宙の膨張則を支配する方程式である。ここで、 $\rho, P$  はそれぞれエネルギー密度と圧力である。また、 $H$  はハッブルパラメータといい、宇宙の膨張率を決めるパラメータである。 $H$  の定義は以下の通りである。

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.18)$$

式 (2.16), (2.17) より曲率項を消去すると、加速度の式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.19)$$

が得られる。上式左辺はスケール因子の時間の2階微分であることから、右辺が正か負かによって宇宙が加速膨張をしているか減速膨張をしているかがわかる。

また、一様等方時空におけるエネルギー保存則  $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$  を求めると、以下のようになる。

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (2.20)$$

ただし、上式は Einstein 方程式と独立ではないので、式 (2.16), (2.17) からでも得ることができる。

## 2.6 宇宙論パラメータ

宇宙定数  $\Lambda$  と曲率  $K$  がともに 0 の場合、式 (2.16) から得られるエネルギー密度を臨界密度  $\rho_c$  といい、以下の式で与えられる。

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.21)$$

一般の宇宙におけるエネルギー密度と臨界密度の比をとったもの、つまり宇宙を支配する成分の割合を表すものを密度パラメータという。各エネルギー成分ごとの密度パラメータは

$$\Omega_X = \frac{\rho_X}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho_X}{3H^2}, \quad (2.22)$$

で表される。ここで  $X$  は、宇宙に存在する各エネルギー成分とする。すべての成分の密度パラメータの和  $\Sigma_X \Omega_X$  をとると、宇宙全体の密度パラメータ  $\Omega$  となる。

以下では、 $\Lambda$  と  $K$  が 0 でない場合を考える。式 (2.16), (2.17) から、宇宙定数と曲率の項はエネルギー密度とともに、宇宙の膨張率に関与していることがわかる。これらをエネルギー密度と圧力によって解釈すると、

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad P_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.23)$$

$$\rho_K = -\frac{3K}{8\pi G a^2}, \quad P_K = -\frac{K}{8\pi G a^2}, \quad (2.24)$$

となる。上式より、宇宙定数は  $P_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$ 、曲率は  $P_K = 3\rho_K$  という状態方程式をもつエネルギー成分とみなすことができる。ここから、宇宙定数と曲率の密度パラメータはそれぞれ

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_c} = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_K = \frac{\rho_K}{\rho_c} = -\frac{K}{a^2 H^2}, \quad (2.25)$$

となる。曲率と宇宙定数以外の成分を放射と物質であるとする、Friedmann 方程式 (2.16) に  $\rho = \rho_r + \rho_m$  を代入し、密度パラメータの定義を用いると、以下の式が得られる。

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \frac{\Omega_{K0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0}}. \quad (2.26)$$

ここで、各密度パラメータの間には以下の関係式が成り立つ。

$$\Omega_{r0} + \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{K0} = 1. \quad (2.27)$$

1つの成分が宇宙を支配している場合は、その他の成分の密度パラメータはほぼ0となる。

最新の観測では、各エネルギー密度の現在値はそれぞれ、

$$\Omega_{r0} \sim 10^{-5}, \quad (2.28)$$

$$\Omega_{m0} = 0.3153 \pm 0.0073, \quad (2.29)$$

$$\Omega_{\Lambda 0} = 0.6847 \pm 0.0073, \quad (2.30)$$

$$\Omega_{K0} = 0.001 \pm 0.002, \quad (2.31)$$

と見積もられている [16].

## 2.7 エネルギー成分

宇宙を支配しているエネルギー成分の性質を特徴づけるために、以下の状態方程式を考える。

$$w \equiv \frac{P}{\rho}. \quad (2.32)$$

ここで、 $w$  は状態方程式パラメータという。状態方程式はどのエネルギー成分においても同じ形で表されるため、 $w$  の値によってどのエネルギー成分が優勢な期間であるかがわかる。簡単のため  $w = \text{const.}$  とすると、式 (2.32) を保存則 (2.20) に代入し積分することで、

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad (2.33)$$

が得られる。また、 $K = 0$  のとき、式 (2.16) は以下のようなになる。

$$a \propto (t - t_i)^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (2.34)$$

状態方程式パラメータ  $w$  の値は各優勢期で異なることから、式 (2.34) より宇宙の膨張率も優勢期により異なることがわかる。状態方程式を用いて加速度の式 (2.19) を書き直すと、

$$\frac{\ddot{a}}{a} \propto -\rho(1 + 3w), \quad (2.35)$$

となる。宇宙が加速膨張するためには、 $\ddot{a} > 0$  でなければならない。エネルギー密度  $\rho$  は常に正であることから、上式より、 $w < -1/3$  であれば宇宙は加速膨張することがわかる。一方、 $w > -1/3$  の場合には宇宙は減速膨張する。最新の観測では、状態方程式の現在値は  $w_0 = -1.028 \pm 0.032$  であることがわかっている [16].

一般に、 $w$  が定数でない場合は、保存則 (2.20) より、

$$\rho \propto \exp \left[ -3 \int^a (1 + w) \frac{da}{a} \right], \quad (2.36)$$

となり、これを Friedmann 方程式 (2.16) に代入することで得られる1階微分方程式から、スケール因子の時間変化  $a(t)$  を得ることができる。

宇宙を支配する各成分間でのエネルギー交換が無視できる場合には、式 (2.20), (2.36) は成分ごとに成り立つ。以下では、放射成分、物質成分、宇宙定数それぞれの優勢期におけるスケール因子の変化についてみていく。

### 2.7.1 放射優勢期

放射 (相対論的物質) が宇宙を支配している時期を放射優勢期という。放射優勢期での状態方程式は  $w = 1/3$  となる。式 (2.35) より、放射優勢期では宇宙は減速膨張していることがわかる。この時、式 (2.33) より、放射優勢期におけるエネルギー密度とスケール因子は以下のようなになる。

$$\rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4}, \quad (2.37)$$

$$a \propto t^{1/2} \propto \tau, \quad (2.38)$$

となる。ここで、添字の 0 は現在時刻  $t_0$  での値をさす。

### 2.7.2 物質優勢期

非相対論的物質、つまり通常物質が宇宙を支配している時期を物質優勢期という。通常物質は圧力  $P_m = 0$  なので、状態方程式は  $w = 0$  となるため、式 (2.35) より、物質優勢期でも宇宙は減速膨張していることがわかる。この時、式 (2.33) より、物質優勢期におけるエネルギー密度とスケール因子は以下のようなになる。

$$\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{a^3}, \quad (2.39)$$

$$a \propto t^{2/3} \propto \tau^2, \quad (2.40)$$

となる。

### 2.7.3 放射・物質等密度時

放射と物質のエネルギー密度が等しくなる時期のことを「等密度時」という。等密度時  $t_{\text{eq}}$  のスケール因子は、 $\rho_r = \rho_m$  より、

$$a_{\text{eq}} = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{m0}} = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}}, \quad (2.41)$$

で与えられる。

### 2.7.4 宇宙定数優勢期

Einstein 方程式に含まれる宇宙定数  $\Lambda$  が正の場合, Friedmann 方程式 (2.16) において, 宇宙定数の項が優勢となる. このような時期を, 宇宙定数優勢期という. この時のスケール因子は,

$$a \propto e^{\sqrt{\Lambda/3}t}, \quad (2.42)$$

となることから, 正の宇宙定数は宇宙を加速させる働きがあることがわかる.

## 2.8 現在の宇宙の加速膨張

第1章で述べたように, Ia型超新星 (SN Ia) の観測により現在の宇宙は加速膨張していることが観測により示された. しかし, 観測や理論研究が進んできた現在でも, 何が現在の加速膨張を引き起こしているかは未だわかっていない. 以下では, 観測からどのようにして現在の加速膨張の証拠が得られるかを見ていく.

絶対光度  $L_s$  の天体から出た光が, 途中で吸収を受けずにフラックス  $F$  で観測されたとすると, 光度距離  $d_L$  は,

$$d_L = \sqrt{\frac{L_s}{4\pi F}}, \quad (2.43)$$

と定義される. 光度距離は, 静止ユークリッド空間や十分近傍の宇宙では天体までの物理的距離に一致するが, 膨張宇宙では天体までの距離とは一致しない. 宇宙膨張を考慮すると, 距離  $r$  にある絶対光度  $L_s$  の天体から放たれる光を観測者が受けるフラックスは  $F = a^2 L_s / 4\pi r^2$  となる. すると, 式 (2.4), (2.43) より, 赤方偏移  $z$  の SN Ia までの観測者 ( $z = 0$ ) からの光度距離は,

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.44)$$

となる. 光度距離の測定には, 天体の絶対等級  $M$  とみかけの等級  $m$  の関係式

$$m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right), \quad (2.45)$$

が用いられる. SN Ia のピーク時の絶対等級は全て同じであることから, みかけの等級  $m$  を測定することで, 異なる  $z$  に対する光度距離が求められる.

比較的近傍の宇宙では放射成分は無視できるので, ある赤方偏移  $z$  でのハッブルパラメータ  $H(z)$  は式 (2.26) より,

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}}, \quad (2.46)$$

となる. ただし,  $K = 0$  とした. 上式において,  $\Omega_{m0}$  と  $\Omega_{DE0}$  の割合を変えて  $H(z)$  を算出し, 式 (2.44), (2.45) に代入することで,  $m$  と  $z$  の関係式が得られる.

図 1.2 において、エラーバー付きの点が SN Ia の観測から得られた  $m$  を赤方偏移ごとにプロットしたものであり、水色の波線はそれぞれ、 $\Omega_0$  と  $\Omega_{DE0}$  の比を変えた場合の理論曲線である。また黒の実線は全て、宇宙定数  $\Lambda = 0$  とし、 $\Omega_0$  の値を変えた場合のものである。もし現在の宇宙が加速膨張していると、過去の膨張速度は現在に比べて遅いため、ある等級の銀河は減速膨張と考えた時の赤方偏移よりも大きくなる。図 1.2 より、 $\Lambda$  がある場合の方が観測値と合っていることがわかる。これにより、現在の宇宙が加速膨張していることが示された。そして、Perlmutter らは、42 個の SN Ia のデータを統計解析し、平坦な宇宙 ( $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ ) において、 $\Omega_{m0} = 0.28^{+0.09}_{-0.08}$  (68%CL) という制限を得た [13].

また、SN Ia の観測とは独立に、CMB の観測からも加速膨張の証拠が得られる。第 1 章でも述べたように、CMB には温度ゆらぎが存在する。観測から得られた温度ゆらぎの解析には、天球上のある点  $i$  での温度  $T_i$  が与えられた時、別のある点  $j$  が取りうる温度  $T_j$  の確率を与える 2 点相関関数が用いられる。天球上には特別な位置も方向も存在しないという仮定から、2 点相関関数は 2 点間のなす角度の大きさ  $\theta_{ij}$  のみの関数となる。2 点相関関数を球面調和関数展開することで、温度ゆらぎの角度パワースペクトルが求められる。図 2.1 に、Planck 衛星による CMB の観測で得られた角度パワースペクトルの図を載せる [34]。縦軸は与えられた角度スケールで

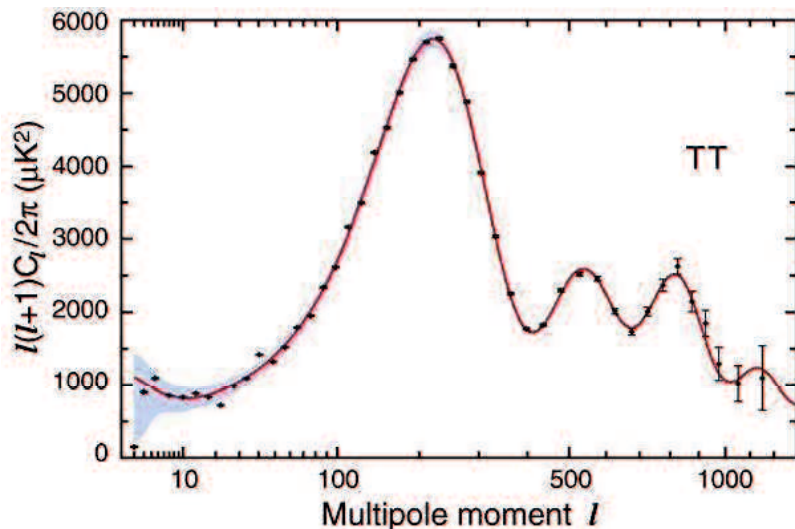


図 2.1: WMAP による CMB の観測から得られた角度パワースペクトル [34].

どのくらいの非等方性があるかを表したものである。また、横軸の  $l$  は見込み角  $\theta$  と  $l = \pi/\theta$  という関係にある。パワースペクトルの形は、密度パラメータ  $\Omega$  などの宇宙論パラメータに依存しており、これらの値を動かして作られるパワースペクトルと、観測から得られたパワースペクトルを比較することによって、パラメータを決定することができる。

次に、現在の加速膨張を起こす要因はどのようなものであるかをみていく。2.7節で求めた宇宙が加速膨張するための条件  $w < -1/3$  を圧力を用いて書き直すと、

$$P < -\frac{\rho}{3} \quad (2.47)$$

となる。  $\rho > 0$  より、加速膨張は負の圧力  $P < 0$  を持つエネルギー成分が引き起こしていると考えられる。したがって、放射 ( $P > 0$ ) や通常物質 ( $P = 0$ ) では宇宙は加速膨張を起こすことはできず、我々の知らない未知なるエネルギーによって現在の加速膨張は引き起こされていることになる。

### 2.8.1 現在の加速膨張を引き起こす要因

観測や理論研究が進んできた現在でも現在の加速膨張を引き起こす要因は未だわかっておらず、総称して「ダークエネルギー (DE)」と呼ばれており、様々な候補が上げられている。本論文では、以下の3つの候補について言及する。

#### 宇宙定数

現在の加速膨張を引き起こす最もシンプルな候補として知られているのが、Einstein 方程式に含まれている宇宙定数  $\Lambda$  である。前節で述べたように、正の宇宙定数は加速膨張を起こすことができる。また、宇宙定数があると、式 (2.23) より  $w = -1 = \text{const.}$  となることから、観測結果とよく一致する。しかし、宇宙定数のソースが真空の零点エネルギーと考えると、

$$\Lambda \sim \frac{m_{\text{pl}}}{l_{\text{pl}}^3} \sim 10^{98} [\text{g/cm}^3], \quad (2.48)$$

となる。ここで、 $l_{\text{pl}}$  はプランク長である。密度パラメータで書き直すと、式 (2.25) の1式目より、

$$\Omega_{\Lambda} \sim 10^{121}, \quad (2.49)$$

となる。Planck 衛星のCMBの観測から得られた最新の観測値は、式 (2.30) より  $\mathcal{O}(1)$  であるため、121桁もずれてしまうことがわかる。これを宇宙定数問題という [18]。

上記の問題を受け、状態方程式パラメータ  $w$  が定数ではなく時間変化するモデルも検証されるようになった。

#### 修正物質理論

修正物質理論とは、Einstein 方程式の右辺：物質のエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  に修正を加えた理論である。通常物質では加速膨張は起こらないため、負の圧力を持つ exotic な物質を含む  $T_{\mu\nu}$  を導入することで、現在の加速膨張を説明するとい



うものである。修正物質理論の中には様々なモデルがあるが、その中の1つにクインテッセンスがある [35, 36, 37, 38]。クインテッセンスとは、スカラー場のポテンシャルエネルギーにより現在の加速膨張を引き起こすというものである。このモデルでは、宇宙定数とは違い  $w_{\text{DE}}$  は時間変化し、常に  $w_{\text{DE}} > -1$  となる。場の運動エネルギーが負の場合には  $w_{\text{DE}} < -1$  となるが、場が非物理的な場(ゴースト)となるため真空が不安定になってしまうという問題がある。

### 修正重力理論

修正重力理論とは、Einstein 方程式の左辺：Einstein テンソル  $G_{\mu\nu}$  に修正を加えた重力理論である。具体的には、Einstein-Hilbert 作用に含まれるスカラー曲率  $R$  の線形項に修正を加えた作用を用いて記述される重力理論のことである。重力の修正の仕方は様々であり、スカラー・テンソル理論 [39, 40, 41]、ガリレオン [42, 43] などがある。スカラー・テンソル理論は、スカラー場のポテンシャルエネルギーにより加速膨張を起こす理論である。また、ガリレオンは場の運動項により加速膨張を起こす理論である。

修正重力理論の中でも最もシンプルな理論が、 $f(R)$  重力理論である。 $f(R)$  重力理論では、Einstein-Hilbert 作用中の  $R$  を非線型関数  $f(R)$  に置き換えた作用を用いる。関数  $f(R)$  をうまく選ぶことで、現在の加速膨張を説明するモデルだけでなく、宇宙初期の加速膨張であるインフレーションを引き起こすモデルにもなることが特徴である。また、修正物質理論とは違い、ゴーストを回避しつつ  $w_{\text{DE}} < -1$  を実現する。詳しい説明は、第4章で述べる。



## 第3章 インフレーション理論

インフレーション理論は、ビッグバン以前の宇宙初期で加速膨張を起こすことにより、標準宇宙モデルで生じた問題を解決しようとする理論である。この理論では、宇宙初期の加速膨張期(インフレーション期)は極めて短時間で終了し、その後ビッグバンへと繋がり標準宇宙モデルへ帰着する。標準宇宙モデルで生じた問題を解決する以外のインフレーション理論の特徴は、インフレーション中に初期ゆらぎを生成することである。この初期ゆらぎは、現在の宇宙の構造形成の元となる種となり、CMBの温度異方性を説明することができることから、宇宙初期を記述する最も正しい理論となりつつある。

この章では、まず初めにビッグバンから宇宙が始まったと考える標準宇宙モデルで生じる問題について述べる。そして、それらの問題を宇宙初期に加速膨張があることでどのように解決するかを説明する。次に、数多くあるインフレーション機構のうち、最も一般的な単一スカラー場によるスローロールインフレーションを用いて、インフレーションのメカニズムを紹介し、どのように標準宇宙モデルで生じる問題を解決するかを説明する。その後、宇宙論的摂動論を用いてインフレーション理論が予言するCMBのゆらぎとの整合性と、モデルの選別に必要な2つのパラメータである、テンソル・スカラー比  $r$  とスペクトル指数  $n_s$  について述べる。最後にPlanck衛星による最新のCMBの観測から得られた2つのパラメータ  $r$  と  $n_s$  に対する制限から、観測と無矛盾なインフレーションモデルのうち、 $f(R)$ 重力理論に基づくインフレーションモデルが挙げられることをみる。

### 3.1 ビッグバン理論の問題点

ビッグバン理論はCMBの発見により直接的な証拠を得たが、宇宙がビッグバンから始まったと考えると、いくつかの問題が生じてしまう。以下では、それらの問題について述べる。そして、ビッグバンよりも以前の宇宙初期に加速膨張があることによって、それらの問題を自然に解決することができることを述べる。

#### 3.1.1 ホライズン問題

ビッグバンから宇宙が始まったと考えると、宇宙はその後放射優勢期を経て物質優勢期に入るため、宇宙は減速膨張する。放射優勢期および物質優勢期でのスケール

ル因子の時間変化は2.7節で述べたように、それぞれ  $a(t) \propto t^{1/2}$  と  $a(t) \propto t^{2/3}$  である。これらを式(2.10)に代入すると、ある時刻  $t$  における粒子ホライズンの半径は、

$$l_H \propto 2t \quad (\text{放射優勢期}), \quad (3.1)$$

$$l_H \propto 3t \quad (\text{物質優勢期}), \quad (3.2)$$

に比例して増大する。宇宙の晴れ上がり時(宇宙誕生から38万年)に同じ温度を持つ領域が、宇宙膨張によりどの程度まで引き伸ばされるかを見積もると、式(3.1)より、

$$l_H \sim 10^{22} \text{ m} \sim 0.4 \text{ Mpc}, \quad (3.3)$$

となる。この粒子ホライズンの見かけの角度  $\Delta\theta$  は、角径距離  $d_A$  を用いて、

$$\Delta\theta = \frac{l_H}{d_A}, \quad (3.4)$$

となる。これを計算すると、宇宙初期に因果関係を持つ領域は全天の約1度までしか達しない。しかしCMBの観測から、現在観測されている宇宙はほぼ等しく同じ温度をもっており、現在のホライズンスケールに渡って極めて一様であることがわかっている。つまり、現在の粒子ホライズンだけ離れた2点は、過去に因果関係を持っていないにも関わらず、同じ温度であるという不自然な状況が成り立っていることになる。このように、標準宇宙モデルでは、宇宙初期に一様性を持った範囲をはるかに超えて現在の宇宙の一様性であることに最もらしい説明することができない。これを「地平線問題」という。

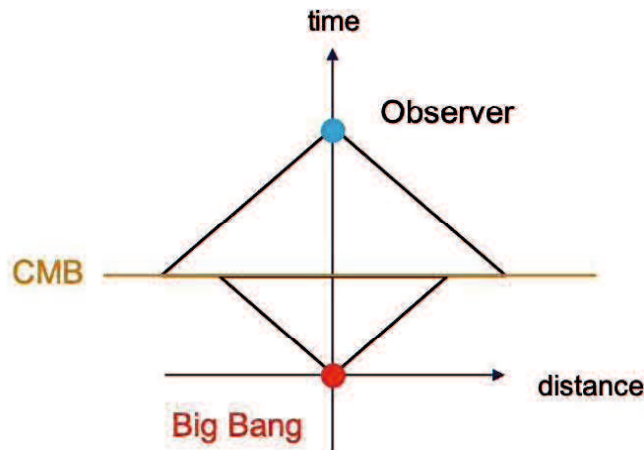


図 3.1: ホライズン問題の模式図

### 3.1.2 平坦性問題

現在の宇宙はほぼ平坦であり、Planck衛星によるCMBの観測から、現在の曲率パラメータは  $\Omega_{K0} = 0.001 \pm 0.002$  と見積もられている [16]. 曲率の密度パラメー

た  $\Omega_K = -\frac{K}{3H^2}$ , および曲率半径  $\mathcal{R} = |K|^{-1/2}$  より, 現在の宇宙では曲率半径がハッブル半径よりも大きいことを意味する. 宇宙初期では曲率がどのようになるかを見てみる. 共動座標での曲率半径は宇宙膨張によって変化しない. しかしハッブル半径は  $a(t)H$  の逆数であることから, 放射・物質優勢期の減速膨張期では  $t^{1/2}, t^{1/3}$  に比例する. したがって, 曲率半径とハッブル半径の比は, 過去に遡るほど大きくなるため, 宇宙初期では曲率半径がハッブル半径に比べ非常に大きくなる. そのため, 宇宙初期の曲率は, 初期条件として極端にゼロに近い値に微調整されなければならない. 標準宇宙モデルでは, 宇宙初期になぜ微調整を行わなければならないかを説明できない. これを「平坦性問題」という.

### 3.1.3 問題の解決方法

標準宇宙モデルでは, 宇宙初期が減速膨張をし続けるため, 上記の問題が生じてしまっていた. そこで, 宇宙初期のある一時期のみ, 急激な加速膨張が起こったと仮定することで, 標準宇宙モデルで生じた問題を解決しようと導入されたのがインフレーション理論である. インフレーション理論では, ビッグバン以前の宇宙は de Sitter 宇宙であり, ハッブルパラメータ  $H$  がほぼ定数となることから, スケール因子は  $a(t) \propto e^{Ht}$  となり, 宇宙は指数関数的に膨張する.

ここでは, 標準宇宙モデルにおける各問題を, インフレーション理論でどのように解決するかを述べる. ここで, インフレーション開始時のスケール因子およびハッブルパラメータをそれぞれ  $a_i, H_i$ , インフレーション終了時のスケール因子およびハッブルパラメータをそれぞれ  $a_f, H_f$  とする. また, インフレーション期のある時刻以降, インフレーションがどの程度継続したかを表す量である膨張指数を以下のように定義する.

$$N \equiv \ln \left( \frac{a_f}{a(t)} \right) = \int_t^{t_f} H dt. \quad (3.5)$$

また簡単のため, インフレーション期から放射優勢期への遷移期間は十分短いと仮定する.

まず, ホライズン問題がどのように解決されるかをみる. 宇宙初期にインフレーション期があることにより, 宇宙初期に因果関係をもつある2点の物理的距離は指数関数的に増加する. この時, ハッブルパラメータ  $H$  はほぼ一定であることからハッブル半径  $1/H$  も一定値にとどまるため, 2点間の物理的距離はハッブル半径を超えて外へ出る. インフレーション終了後, 宇宙は放射優勢期・物質優勢期に入るとハッブル半径の増加率の方が大きくなるため, 宇宙初期に因果関係をもっていた範囲は再びハッブル半径内に入ってくる. これにより, 現在観測される宇宙全天で同じ温度をもつことができる.

次に, ホライズン問題を解決するためにはどの程度インフレーションが続けばよいかをみていく. インフレーション終了時での粒子ホライズンまでの共動距離は, 式

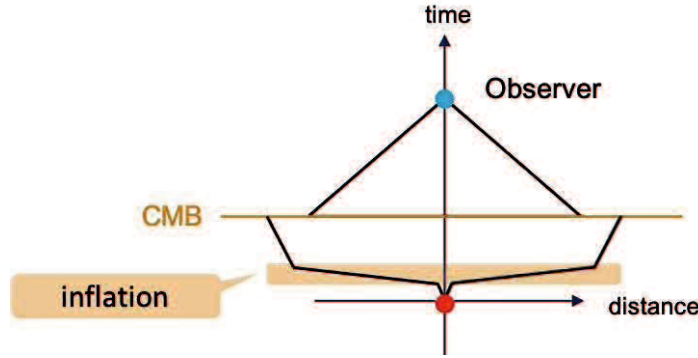


図 3.2: インフレーションによるホライズン問題解決の模式図

(2.9) より,

$$L_H(t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (3.6)$$

である. インフレーション中のスケール因子を,

$$a(t) = a_i e^{H_i(t-t_i)} = a_f e^{-H_i(t_i-t)}, \quad (3.7)$$

とすると,  $L_H(t_f)$  は以下のようになる.

$$L_H(t_f) \simeq \frac{e^N}{a_f H_f}, \quad (3.8)$$

上式を導出する際, 式 (3.5) を用いた. ホライズン問題を解決するためには, これが現在のハッブル半径を上回っていれば良いので,  $L_H(t_f) > 1/H_0$  を計算すると,

$$N = \ln \left( \frac{a_f}{a_i} \right) \gtrsim \ln \left( \frac{a_f H_f}{H_0} \right) \equiv N_{\min}, \quad (3.9)$$

となる. ここで, 上式を導出する際, インフレーション中は  $H$  はほぼ一定であるため,  $H_i \simeq H_f$  という近似を用いた. また,  $N_{\min}$  はホライズン問題を解決するために必要な膨張指数  $N$  の最小値とする. インフレーション期から放射優勢期への遷移時のスケール因子とハッブルパラメータはそれぞれ,

$$a_f = \left( \frac{g_* s(T_0)}{g_*(T_f)} \right)^{1/3} \frac{T_0}{T}, \quad H_f = \sqrt{\frac{4\pi^3 g_*(T_f)}{45} \frac{T_f^2}{m_{\text{pl}}}}, \quad (3.10)$$

で与えられる. ここで,  $g_*$  は有効自由度と呼ばれるもので, 放射優勢期における全エネルギー密度  $\rho$  と光子の温度  $T$  を用いて  $g_*(T) \equiv (30/\pi^2)\rho/T^4$  で表される.  $g_* s$  はエントロピーに関する有効自由度であり,  $T$  と宇宙の全エントロピー  $s$  を用いて  $g_* s(T) \equiv (45/2\pi^2)s/T^3$  で表される. また,  $T_f$  は放射優勢期への遷移時での宇宙の温度であり,  $T_0$  は現在の宇宙の温度である. これらを式 (3.9) に代入すると,

$$\begin{aligned} N_{\min} &= \ln \left[ \sqrt{\frac{4\pi^3}{45} \frac{g_* s(T_0)^{1/3} T_0}{m_{\text{pl}} H_0}} g_*(T_f)^{1/6} T_f \right] \\ &\simeq 59 + \frac{1}{6} \ln \left( \frac{g_*(T_f)}{100} \right) + \ln \left( \frac{T_g}{10^{15} \text{GeV}} \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。上式2式目の最後の項は、大統一理論 (GUT) のエネルギースケールで規格化を行った。インフレーション終了時の宇宙の温度  $T_f$  が GUT エネルギースケール程度 ( $T_f \sim 10^{15} \text{ GeV}$ ) であるとする、 $N \gtrsim 60$  であればホライズン問題を解決することができる。

次に、平坦性問題がどのように解決されるかを見ていく。曲率の密度パラメータの時間依存性は式(2.24)より、 $\Omega_K \propto 1/(a^2 H^2)$  である。したがって、現在の曲率の密度パラメータ  $\Omega_{K0}$  とインフレーション開始時における曲率の密度パラメータ  $\Omega_K(t_i)$  との関係は、

$$\Omega_{K0} = \left( \frac{a_i H_i}{H_0} \right)^2 \Omega_K(t_i), \quad (3.12)$$

となる。膨張指数 (3.5) と  $N_{\min}$  (3.9) を用いると、上式は以下のようなになる。

$$\frac{\Omega_{K0}}{\Omega_K} = \frac{a_i H_i}{H_0} \simeq \frac{a_f H_f}{H_0} e^{-N} = e^{N_{\min} - N}. \quad (3.13)$$

$N > N_{\min}$  であれば現在の曲率パラメータの絶対値はインフレーション開始時のものより小さくなることから、初期条件を微調整することなく現在の曲率を小さくできる。

最後に、3.3節で出てくる  $N = 50 - 60$  という値は、現在の観測スケールにおいて、粒子ホライズンがインフレーション開始時の共動距離より大きくなる時の膨張指数であることを述べておく。

## 3.2 インフレーション機構

宇宙初期に急激な加速膨張が十分続くことで、ホライズン問題と平坦性問題を一挙に解決することができることがわかった。しかし、インフレーションを起こす機構については様々なモデルがあり、どのモデルが最適であるかは未だ確立していない。

本論文では、最も一般的なインフレーション機構である、単一スカラー場によるスローロールインフレーションについて説明する。これは、インフラトン場と呼ばれるスカラー場が持つポテンシャルエネルギーによりインフレーションを引き起こすというものである。

### 3.2.1 スローロールインフレーション

実スカラー場がインフレーションを起こすインフラトン場となる場合を考える。実スカラー場  $\phi$  のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (3.14)$$

で与えられる。ここで、 $V(\phi)$  はスカラー場のポテンシャルであり、適切な関数形であれば適切なインフレーションを起こすことができる。計量として FLRW 計量を

適用し、スカラー場に空間依存性がないと仮定すると、一様等方時空におけるスカラー場のエネルギー密度  $\rho_\phi$  と圧力  $P_\phi$  はそれぞれ、

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.15)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.16)$$

となる。スカラー場がエネルギー優勢である場合、一様等方時空における Einstein 方程式 (2.16), (2.17) は、

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] - \frac{K}{a^2}, \quad (3.17)$$

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2 + \frac{K}{a^2}, \quad (3.18)$$

となり、これら2式より加速度の式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} \left[ \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \quad (3.19)$$

が得られる。また、一様等方時空における場の運動方程式は、以下のようになる。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.20)$$

式 (3.20) は、摩擦を受けながら1次元中を運動する粒子の運動方程式と等価であることから、左辺第2項が摩擦項となる。摩擦項に  $H$  が含まれていることから、宇宙膨張が摩擦となって場の値の変化を抑制する役割を果たす。この時、上式は以下のように近似することができる。

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{1}{3H} \frac{dV}{d\phi}. \quad (3.21)$$

このように、 $\phi$  がポテンシャルをゆっくり運動することを“スローロール”という。スローロールする間、スカラー場のポテンシャルエネルギーにより宇宙は指数関数的に膨張する。スローロールを起こすための条件は、

$$\dot{\phi}^2 \ll 2V(\phi), \quad |\ddot{\phi}| \ll 3H\dot{\phi}. \quad (3.22)$$

である。これらの条件はスローロール条件と呼ばれる。1つ目の条件は、式 (3.17) より、スカラー場のポテンシャルエネルギーによってインフレーションを起こすための条件である (ただし、曲率  $K=0$  とする)。もう1つの条件は、式 (3.20) より、スカラー場がゆっくりと運動し、十分な期間のインフレーションを実現するための条件である。このスローロール条件下では、式 (3.17) は、

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi), \quad (3.23)$$



となる. 式 (3.18) を用いると,

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq -\frac{3\dot{\phi}^2}{2V} \ll 1, \quad (3.24)$$

となることから, スローロール条件が成り立っていると  $H$  の時間変化は十分小さくなる.

またスローロール条件 (3.22) は, ポテンシャル  $V(\phi)$  を用いて書き表すと以下のようになる.

$$\left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll 48\pi G, \quad \left|\frac{1}{V} \frac{d^2V}{d\phi^2}\right| \ll 24\pi G. \quad (3.25)$$

上2式より, ポテンシャルの傾きがほぼフラットである必要があることがわかる. これにより, 場はポテンシャルをゆっくり転がることができ, 十分な期間のインフレーションが続く. 図 3.3 にスローロールインフレーションを起こすスカラー場のポテンシャルの模式図を載せる.

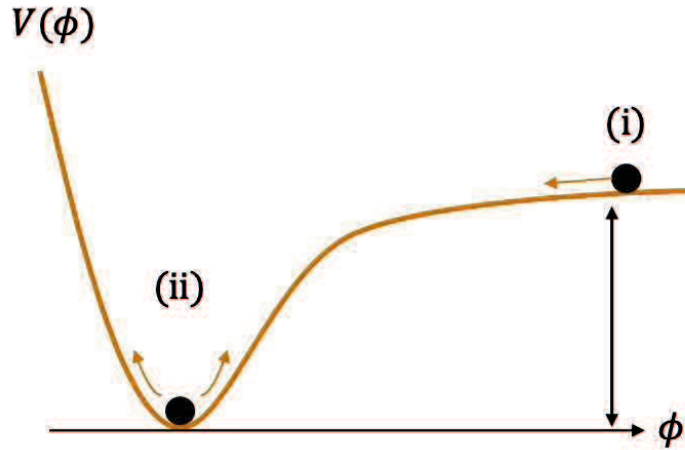


図 3.3: スローロールインフレーションを起こすインフラトン場のポテンシャルの模式図. (i): ポテンシャルがフラットな所でスカラー場はスローロールする. この時, 場のポテンシャルエネルギーによって宇宙は加速膨張する. (ii): 場がスローロールしなくなる (スローロール近似が破れる) とインフレーションは終了し, 場はポテンシャルの最小値へ落ち込み振動する.

更に, スローロール条件が満たされているかを定量的に表すパラメータをスローロールパラメータといい,

$$\epsilon_V \equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi}\right)^2, \quad \eta_V \equiv \frac{1}{8\pi G} \frac{1}{V} \frac{d^2V}{d\phi^2}, \quad (3.26)$$

で与えられる. 式 (3.25) より, インフレーション中は  $\epsilon_V \ll 1, \eta_V \ll 1$  となることから,  $\epsilon_V, \eta_V$  が 1 より十分小さいときインフレーションが起きていることになる. ま

たスローロールパラメータ  $\epsilon_V$  は、式 (3.18), (3.21) および (3.23) を用いると、ハッブルパラメータ  $H$  を用いて以下のように書ける。

$$\epsilon_H \simeq -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (3.27)$$

式 (3.26), (3.27) の添字の  $V$  および  $H$  は、それぞれ場のポテンシャル  $V$  およびハッブルパラメータ  $H$  で表記されるスローロールパラメータであることを意味する。このように、スカラー場  $\phi$  がポテンシャルをスローロールすることでインフレーションを起こすタイプの機構を、スローロールインフレーションという [44]。スローロールパラメータはポテンシャルに依存することから、インフレーションモデルによって値が異なる。

スローロールパラメータが 1 に近づくとスカラー場はスローロールしなくなり、インフレーションは終了する。その後、場は急速にポテンシャルの最小値へ転がり最小値付近で振動する。振動しはじめると場と物質の相互作用により、場が持っていたエネルギーは粒子の生成エネルギーへと変換され、宇宙は高温状態となる。この過程を宇宙の再加熱 (reheating) という。宇宙の再加熱が起こることにより、インフレーション後にビッグバンへとつながる。

### 3.2.2 インフレーション中の初期ゆらぎ

インフレーション理論のもう 1 つの特徴は、インフレーション中に初期ゆらぎを生成することである。インフラトン場には、量子的な不確定性によりゆらぎが存在する。場がゆらぐことで宇宙初期にはわずかに非一様が存在し、それが後の構造形成の種となる。そして、観測から判明した CMB の非一様性も、初期ゆらぎがあることで自然に説明することができる。

インフラトン場の量子ゆらぎはインフレーションによって引き延ばされ、ゆらぎの波長はホライズンを超える。ホライズンを超えるとゆらぎは凍りつき、量子ゆらぎを古典ゆらぎとみなすことができる。このことから、インフレーション中のゆらぎは、ホライズンを超えた領域である superhorizon scale ( $k \ll aH$ ) でのスカラー場のゆらぎを考えればよいことになる [45]。ただし  $k$  は波数とする。スカラー場の摂動  $\delta\phi$  はエネルギー運動量テンソルの摂動と関係しており、エネルギー運動量テンソルの摂動は Einstein 方程式より、計量の摂動  $\delta g_{\mu\nu}$  とみなすことができる。このことから、 $\delta\phi$  は  $\delta g_{\mu\nu}$  と結びついていることがわかる。

一般的にゆらぎの時間発展は非線形方程式に従う。しかし、宇宙初期や大スケールの宇宙ではゆらぎは小さいため、非線形項を無視し線形近似で解析することができる。計量テンソルを一様等方成分  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  と非一様等方成分  $\delta g_{\mu\nu}$  に分解すると、計量の摂動  $\delta g_{\mu\nu}$  は、スカラー型摂動・ベクトル型摂動・テンソル型摂動の 3 つに分解される。これをスカラー・ベクトル・テンソル (SVT) 分解という。ここでのスカラー、ベクトル、テンソルとは、空間の座標変換に対して定義されるものである。インフレーション中はベクトル型摂動は成長せず減衰することから、以下ではスカラー型

とテンソル型摂動のみを考えることにする．計量テンソルに SVT 分解を適用すると，摂動を考慮した FLRW 計量 (2.1) は，

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ -(1+2A)d\tau^2 - 2\partial_i B d\tau dx^i + [(1-2D)\gamma_{ij} + \partial_i \partial_j E + h_{ij}] dx^i dx^j \right]. \quad (3.28)$$

と書くことができる (付録 A 参照)．ここで， $A, B, D, E$  はスカラー型摂動， $h_{ij}$  はテンソル型摂動， $\tau$  は共形時間である．また， $\gamma_{ij}$  は 3 次元一様等方計量である．

スカラー型摂動のうち，宇宙が平坦かつ断熱ゆらぎの場合に superhorizon scale で保存する曲率ゆらぎは，のちの大規模構造の種となる．この曲率ゆらぎがインフレーションによって十分引き延ばされた後，ホライズン内に再入し，現在観測されている CMB の温度ゆらぎとなる．また，テンソル型摂動は，インフレーション中に生成される原始重力波に対応する．

以下では，スローロールインフレーションに基づいた，インフレーション理論における初期ゆらぎの生成についてみていく．ゲージ変換や線形 Einstein 方程式等の，宇宙論的なゆらぎの取り扱いに関する線形摂動論の詳細は，付録 A を参照のこと．

### スカラー型ゆらぎ

インフラトン場の振る舞いを知るために，まずスカラー場のゆらぎを考える．スカラー場  $\phi$  を背景成分  $\bar{\phi}(\tau)$  と摂動成分  $\delta\phi(\mathbf{x}, \tau)$  に分解する．

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \bar{\phi}(\tau) + \delta\phi(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.29)$$

背景時空と摂動時空の対応関係からゲージ変換を行うと，スカラー型摂動はゲージ変換に対して不変ではない．そこで，スカラー場の摂動量から作られるゲージ不変量として，以下の変数

$$u = a \left( \delta\phi - \frac{\bar{\phi}'}{\mathcal{H}} D \right), \quad (3.30)$$

を導入する．このゲージ不変な変数  $u$  はムハノフ-佐々木変数と呼ばれ，ゲージ条件が  $D = 0$  である空間的平坦ゲージ (A.6 節参照) におけるスカラー場のゆらぎに対応する．ここで， $\mathcal{H}$  は共形時間でのハッブルパラメータであり， $\mathcal{H} = aH$  となる．また，プライム ( $'$ ) は  $\tau$  での微分である．

$u$  に対する方程式は，バーディーンポテンシャル  $\Phi$  と呼ばれるゲージ不変量 (A.53) に対する以下の方程式

$$\Phi'' + 2 \left( \mathcal{H} - \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}'} \right) \Phi' - \Delta \Phi + 2 \left( \mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}'} \right) \Phi = 0, \quad (3.31)$$

とスカラー場の運動方程式の摂動成分の式を用いることで得ることができ，最終的に，

$$u'' - \Delta u - \frac{z''}{z'} u = 0, \quad (3.32)$$

が得られる。ここで、 $z \equiv a\bar{\phi}'/\mathcal{H}$  であり、背景時空の時間のみ依存する関数である。空間的平坦ゲージにおいて、変数  $u$  をゲージ不変量  $\Psi, v^{(\text{GI})} = v$  (付録 A 参照) を用いて書き直すと、

$$u = -\frac{a\bar{\phi}'}{\mathcal{H}}(\Psi + \mathcal{H}v), \quad (3.33)$$

となる。空間計量の等方的ゆらぎである曲率ゆらぎ (A.68)

$$\zeta = \Psi + \mathcal{H}v, \quad (3.34)$$

を用いると、変数  $u$  と  $z$  に関して、

$$u = -z\zeta, \quad (3.35)$$

という関係式が得られる。したがって、ムハノフ-佐々木変数  $u$  は曲率ゆらぎ  $\zeta$  に比例する量である。

次に、上述までの古典的なスカラー場を量子化し、スカラー場の量子ゆらぎを求める。  $u$  を場の演算子とみなし、  $u$  を平面波展開すると、

$$u(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [u_k(\tau)a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_k^*(\tau)a^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (3.36)$$

となる。ただし、 $k = |\mathbf{k}|$  であり、 $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$  は生成消滅演算子である。これらの交換関係は、

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.37)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \quad (3.38)$$

であり、真空状態  $|0\rangle$  は  $a(\mathbf{k})|0\rangle = 0$  で定義される。今は膨張宇宙を考えているため時間の並進対称性がないことから、基本モードは時間依存成分が一般のモード関数  $u_k(\tau)$  となっている。式 (3.32), (3.36) より、モード関数に対して以下の微分方程式が得られる。

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)u_k = 0. \quad (3.39)$$

インフレーション以前の古典的なゆらぎは、空間の急激な膨張によりならされる。よって現在の宇宙に残るゆらぎは、インフレーション中の場  $u$  の真空中での量子ゆらぎのみと仮定される。式 (3.36) において場  $u$  の空間依存性をフーリエ変換すると、

$$\tilde{u}(\mathbf{k}, \tau) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \tau) = u_k(\tau)a(\mathbf{k}) + u_k^*(\tau)a^\dagger(-\mathbf{k}), \quad (3.40)$$

となり、真空期待値から波数  $k$  に対するゆらぎの大きさを特徴づけるパワースペクトル  $P_u(k, \tau)$  は以下のように定義される。

$$\langle 0 | \tilde{u}(\mathbf{k}, \tau) \tilde{u}(\mathbf{k}', \tau) | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_u(k, \tau). \quad (3.41)$$

生成消滅演算子の交換関係 (3.37), (3.38) を用いると, パワースペクトルは,

$$P_u(k, \tau) = |u_k(\tau)|^2, \quad (3.42)$$

となる. 上式から, モード関数  $u_k(\tau)$  により量子ゆらぎの振幅が決まる.

短波長極限 ( $k/\mathcal{H} \rightarrow \infty$ ) では, 式 (3.39) は,

$$u_k'' + k^2 u_k = 0, \quad (3.43)$$

となる. 一般に, 曲がった時空では真空の定義に不定性があるが, 宇宙膨張のスケールより十分小さい短波長極限で, モード関数の微分方程式 (3.53) の一般解が平坦時空における平面波解に一致するように真空状態を選ぶことで排除される. このように選ばれた真空をバンチ・デービス真空という. 真空状態としてバンチ・デービス真空を選ぶことで, 式 (3.43) の一般解に含まれる積分定数を決定することができる. すると, 最終的に短波長極限での解は以下ようになる.

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}. \quad (3.44)$$

一方, 長波長極限 ( $k/\mathcal{H} \rightarrow 0$ ) では, 式 (3.39) は,

$$u_k'' - \frac{z''}{z} u_k = 0, \quad (3.45)$$

となる. スローロール条件が成り立つ場合には, 成長解は以下のような形になる.

$$u_k(\tau) = C(k)z(\tau). \quad (3.46)$$

ここで,  $C(k)$  は初期条件によって決まる関数である. ムハノフ-佐々木変数  $u$  と曲率ゆらぎ  $\zeta$  の関係式 (3.35) より, 長波長極限における曲率ゆらぎのパワースペクトルは  $P_\zeta(k, \tau) = P_u(k, \tau)/z^2$  となる. したがって, 式 (3.42) より曲率ゆらぎのパワースペクトルは,

$$P_\zeta(k, \tau) = |C(k)|^2, \quad (3.47)$$

となる. 上式より, 長波長極限では, 曲率ゆらぎのパワースペクトルは時間  $\tau$  に依存しない波数  $k$  のみの関数となる.

スローロール近似が成り立つ場合での式 (3.39) の解を求めるために, スローロール近似下での微分方程式の係数  $z''/z$  を求める. スローロール条件下でのスカラー場の運動方程式 (3.20) やスローロール条件 (3.22), Einstein 方程式 (3.17) およびスローロールパラメータの微分の式を, 共形時間  $\tau$  を用いて書き直したものをを用いると,  $z$  の二階微分はスローロールパラメータを用いて以下のように書ける.

$$z'' \simeq \mathcal{H}^2(2 + 5\epsilon_V - 3\eta_V)z. \quad (3.48)$$

式(3.27)から得られるスローロールパラメータ  $\epsilon_V$  と  $\mathcal{H}$  との関係式

$$(1 - \epsilon_V)\tau \simeq -\frac{1}{\mathcal{H}}, \quad (3.49)$$

と式(3.48)より, 式(3.39)の係数  $z''/z$  は,

$$\frac{z''}{z} \simeq \frac{2 + 5\epsilon_V - 3\eta_V}{(1 - \epsilon_V)^2\tau^2} \simeq \frac{2 + 9\epsilon_V - 3\eta_V}{\tau^2}, \quad (3.50)$$

となる. ここで, 変数  $\nu$  を,

$$\frac{z''}{z} = \frac{\nu^2 - 1/4}{\tau^2}, \quad (3.51)$$

によって定義すると, スローロールパラメータの1次近似で,

$$\nu \simeq \frac{3}{2} + 3\epsilon_V - \eta_V, \quad (3.52)$$

となる. この変数  $\nu$  を用いると, 微分方程式(3.39)は以下のように書ける.

$$\frac{d^2 u_k}{d\tau^2} + \left[ k^2 - \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\tau^2} \right] u_k = 0. \quad (3.53)$$

変数変換  $u_k = \sqrt{-\tau} F_k$  を施すと,  $\nu$  が定数の時, 上式はベッセル微分方程式と等価になる. したがって, 式(3.53)の一般解はベッセル微分方程式の一般解であるハンケル関数の重ね合わせで書くことができる.

長波長極限における式(3.53)の漸近解は,

$$u_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i\pi/2} 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} (-k\tau)^{1/2-\nu}, \quad (3.54)$$

となる. ここで  $\Gamma(\nu)$  はガンマ関数である. 式(3.52)を用いて上式右辺の  $2^{\nu-3/2}$  およびガンマ関数  $\Gamma(\nu)$  をスローロールパラメータの1次まで展開し, 式(3.49), (3.52)から得られる以下の式

$$(-k\tau)^{1/2-\nu} \simeq (1 - \epsilon_V) \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^{-1-3\epsilon_V+\eta_V}, \quad (3.55)$$

を用いると, 長波長極限における解  $u_k$  は最終的に,

$$u_k \simeq \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i\pi(1+3\epsilon_V-\eta_V)/2} [1 - (3\gamma + 3\ln 2 - 5)\epsilon_V + (\gamma + \ln 2 - 2)\eta_V] \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^{-1-3\epsilon_V+\eta_V}, \quad (3.56)$$

となる. ここで,  $\gamma$  はオイラーの定数である. スローロール近似下では  $\epsilon \simeq 4\pi G \bar{\phi}^2 / \mathcal{H}^2$  となることを用いると,  $z$  は以下のような式となる.

$$z \simeq a \sqrt{\frac{\epsilon_V}{4\pi G}}. \quad (3.57)$$

これらの式より、長波長極限における係数  $C(k)$  の絶対値は、

$$|C(k)| \simeq \sqrt{2\pi G H^2 \epsilon_V} k^3 \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^{\eta_V - 3\epsilon_V}, \quad (3.58)$$

となる。

インフレーション中の量子ゆらぎの波長はハッブル半径を超えると古典化するものと仮定すると、ハッブル半径を超えた量子ゆらぎのパワースペクトル式 (3.42) を、古典的なゆらぎのパワースペクトルとみなすことができる。このとき、式 (3.47), (3.58) より、ハッブル半径を超える波長に対する曲率ゆらぎのパワースペクトルは、

$$P_\zeta(k) = \frac{2\pi H^2}{m_{\text{pl}}^2 \epsilon_V k^3} \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^{2\eta_V - 6\epsilon_V}, \quad (3.59)$$

となる。また、以下で定義される無次元化されたパワースペクトル

$$\mathcal{P}_\zeta \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_\zeta, \quad (3.60)$$

を用いると、

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{4\pi}{m_{\text{pl}}^2 \epsilon_V} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^{2\eta_V - 6\epsilon_V}, \quad (3.61)$$

と書ける。パワースペクトルの波数依存性を、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \propto k^{n_s - 1}, \quad (3.62)$$

と定義すると、べきの  $n_s$  をスカラー型ゆらぎのスペクトル指数といい、スローロールパラメータを用いて、

$$n_s = 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V, \quad (3.63)$$

で与えられる。スローロールパラメータはインフレーション中は1より十分小さいことから、 $n_s \simeq 1$  となる。したがって、スカラー型ゆらぎは波数  $k$  に依存しないことから、ほぼスケール不変なスペクトルを持つことがわかる。

### テンソル型ゆらぎ

テンソル型摂動  $h_{ij}$  は、トレースレスかつ発散が0であることから、3次元2階対称テンソルに含まれる6自由度のうち2自由度が残る。これらの自由度は重力波の偏極に対応し、 $\lambda = +, \times$  と表記される。テンソル型摂動はゲージ変換に対して不変であることから、偏極の2自由度は物理的な自由度となる。

計量に対する線形近似の運動方程式を得るためには、作用  $S$  を計量の2次まで展開したものが必要となる。宇宙定数を無視したアインシュタイン・ヒルベルト作用

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.64)$$

に、テンソル型摂動のみの計量

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + (\gamma_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j], \quad (3.65)$$

を代入し、摂動の2次の項だけを取り出すと、最終的に以下の形の作用を得る。

$$\mathcal{S}^{(2)} = \frac{1}{64\pi G} \int a^2 d\tau \sqrt{\gamma} d^3x \left( h^{ij'} h'_{ij} - h_{|k}^{ij} h_{ij}^{|k} - 2K h^{ij} h_{ij} \right). \quad (3.66)$$

ここで、添字の前の縦棒記号は、一様等方3次元計量  $\gamma_{ij}$  に関する3次元共変微分である。インフレーションが十分に起きたと仮定し、 $K = 0, \gamma_{ij} = \delta_{ij}$  とする。この時、添字の上下は区別しなくて良いので、全て下付きで表記し、繰り返し現れる添字については和をとるものとする。ここで、以下の変数

$$v_{ij} = \frac{a}{\sqrt{32\pi G}} h_{ij}, \quad (3.67)$$

を導入すると、摂動2次の作用は、

$$\mathcal{S}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left( v'_{ij} v'_{ij} - v_{ij|k} v_{ij|k} + \frac{a''}{a} v_{ij} v_{ij} \right), \quad (3.68)$$

となる。これの変分をとることで、以下の運動方程式を得る。

$$v''_{ij} - \Delta v_{ij} - \frac{a''}{a} v_{ij} = 0. \quad (3.69)$$

この式は、スカラー場の線形摂動の運動方程式 (3.32) で  $z \rightarrow a$  としたものに对应する。したがって、偏極が2つあること以外はスカラー型ゆらぎと同様の計算によりパワースペクトルを導出できる。

スカラー型摂動の場合と同様に、テンソル型摂動変数  $v_{ij}$  を場の演算子とみなし平面波展開すると、

$$v_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=+, \times} e_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left[ v_{\mathbf{k}}(\tau) a_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_{\mathbf{k}}^*(\tau) a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (3.70)$$

となる。ここで、重力波に対する2つの偏極自由度の基底として偏極テンソル  $e_{ij}^{(\lambda)}$  を導入した。  $e_{ij}^{(\lambda)}$  は基底の直交規格化条件

$$e_{ij}^{(\lambda)} e_{ij}^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (3.71)$$

を満たすように選ぶものとする。また、生成消滅演算子  $a_{\lambda}(\mathbf{k}), a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})$  は、以下の交換関係を満たす。

$$[a(\mathbf{k}), a^{\dagger}(\mathbf{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.72)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^{\dagger}(\mathbf{k}), a^{\dagger}(\mathbf{k}')] = 0, \quad (3.73)$$



式 (3.70) は、2つの偏極モードごとにスカラー場と同じ方程式になっていることがわかる。したがって、原始重力波の量子ゆらぎはスカラー場の場合と全く同様に求められる。モード関数  $v_k$  の満たす方程式は、式 (3.69) より、

$$v_k'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k, \quad (3.74)$$

となる。スローロール近似下では、係数  $a''/a$  は、

$$\frac{a''}{a} \simeq \mathcal{H}^2(2 - \epsilon_V) = 0, \quad (3.75)$$

となり、変数  $\mu$  を、

$$\frac{a''}{a} = \frac{\mu^2 - 1/4}{\tau^2}, \quad (3.76)$$

と定義すると、スローロールパラメータの1次近似で、

$$\mu \simeq \frac{3}{2} + \epsilon_V, \quad (3.77)$$

となる。この変数  $\mu$  を用いると、微分方程式 (3.74) は以下のように書ける。

$$\frac{d^2 v_k}{d\tau^2} + \left[ k^2 - \left( \mu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\tau^2} \right] v_k = 0. \quad (3.78)$$

スカラー場に対する方程式 (3.53) と比較すると、 $\nu \rightarrow \mu, \eta \rightarrow 2\epsilon$  と置き換えた式になっていることがわかる。したがって、長波長極限における式 (3.78) の解は、

$$v_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i\pi(\mu-1/2)/2} 2^{\mu^3/2} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(3/2)} (-k\tau)^{1/2-\mu}, \quad (3.79)$$

と書くことができ、スローロールの1次近似では、

$$v_k \simeq \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i\pi(1+\epsilon_V)/2} [1 - (\gamma + \ln 2 - 1)\epsilon] \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^{-1-\epsilon_V}, \quad (3.80)$$

となる。 $v_k$  の絶対値は、 $\epsilon$  の1次のみを考慮すると以下の式となる。

$$|v_k| \simeq \frac{1}{\sqrt{2k}} \frac{aH}{k^{3/2}} \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^{-\epsilon_V}. \quad (3.81)$$

原始重力波のパワースペクトルを求めるために、 $v_{ij}$  と同様にして  $h_{ij}$  を平面波展開すると、

$$h_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=+, \times} e_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left[ h_k(\tau) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + h_k^*(\tau) a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (3.82)$$

となり、モード関数  $h_k(\tau)$  は、

$$h_k(\tau) = \frac{\sqrt{32\pi G}}{a(\tau)} v_k(\tau), \quad (3.83)$$

となる。スカラー型摂動の場合と同様の手順を踏み、テンソル型摂動のパワースペクトル  $\mathcal{P}_T(k, \tau)$  を定義する。式 (3.82) において  $h_{ij}$  の空間依存性をフーリエ変換し、フーリエ係数  $\tilde{h}_{ij}(\mathbf{k}, \tau)$  の積の真空期待値から、テンソル型摂動のパワースペクトルは以下の式で定義される。

$$\langle 0 | \tilde{h}_{ij}(\mathbf{k}, \tau) \tilde{h}_{ij}(\mathbf{k}', \tau) | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_T(k, \tau). \quad (3.84)$$

生成消滅演算子の交換関係 (3.72), (3.73) と偏極テンソルの規格化条件 (3.71) を用いると、テンソル型摂動のパワースペクトルは、

$$P_T(k, \tau) = 2 |h_k(\tau)|^2, \quad (3.85)$$

となる。これに、式 (3.81), (3.83) を代入すると、

$$P_T(k, \tau) = \frac{32\pi H^2}{m_{\text{pl}}^2 k^3} \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^{-2\epsilon_V}, \quad (3.86)$$

となる。無次元化されたパワースペクトル  $\mathcal{P}_T = k^3 P_T / 2\pi^2$  を用いると、

$$\mathcal{P}_T = \frac{64\pi}{m_{\text{pl}}^2} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^{-2\epsilon_V}, \quad (3.87)$$

が得られる。パワースペクトルの波数依存性を、

$$\mathcal{P}_T \propto k^{n_T}, \quad (3.88)$$

と定義すると、べきの  $n_T$  はテンソル型ゆらぎのスペクトル指数であり、

$$n_T = -2\epsilon_V \ll 1, \quad (3.89)$$

で与えられる。したがって、テンソル型ゆらぎもほぼスケール不変なスペクトルを持つことがわかる。

インフレーションモデルの選別には、スカラー型ゆらぎのスペクトル指数  $n_s$  (3.63) の他に、スカラー型およびテンソル型ゆらぎのパワースペクトルの比であるテンソル・スカラー比  $r$  が用いられる。テンソル・スカラー比  $r$  は原始重力波の大きさを表すパラメータであり、式 (3.61), (3.87) より、

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T(k)}{\mathcal{P}_\zeta(k)} = 16\epsilon_V, \quad (3.90)$$

で表される。式 (3.26) より、 $r, n_s$  はポテンシャル  $V(\phi)$  に依存するため、インフレーションモデルによってそれぞれ異なる値をとる。各インフレーションモデルでの値を算出し、CMB の観測から得られる  $r, n_s$  に対する制限と比較することで、インフレーションモデルの絞り込みが可能となる。

### 3.3 CMBの観測による制限

Planck衛星によるCMBの最新の観測から、テンソル・スカラー比 $r$ とスペクトル指数 $n_s$ に対する制限はそれぞれ、

$$r < 0.10, \quad n_s = 0.9659 \pm 0.0041 \quad (95\% \text{ CL}), \quad (3.91)$$

である [46]. この結果と主な単一場のインフレーションモデルが予言する $r, n_s$ の値をプロットしたものを図3.4に載せる. 図3.4において、グレーの半円はPlanck衛

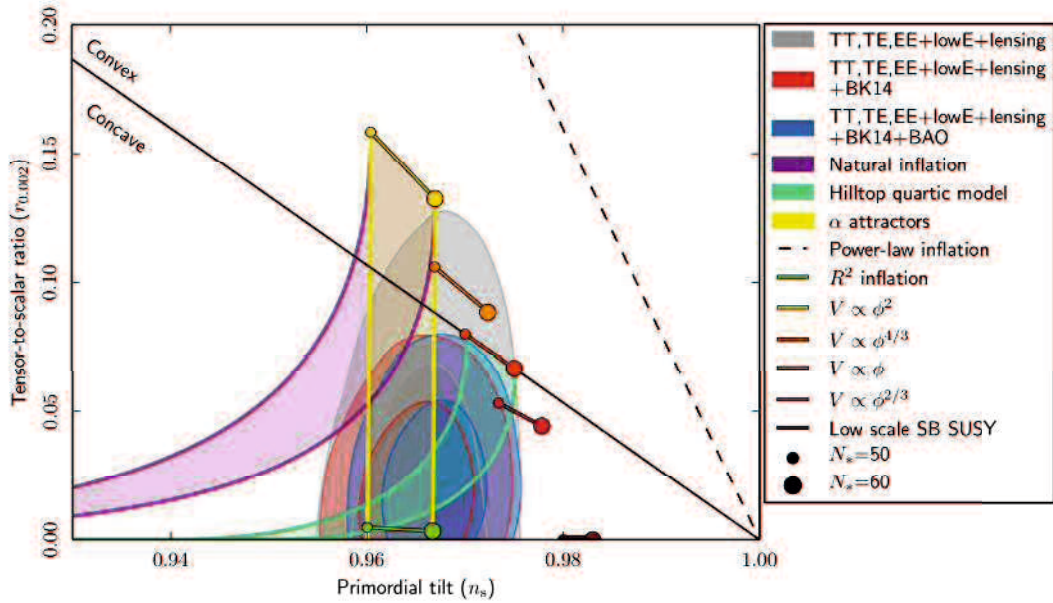


図 3.4: Planck衛星によるCMB観測から得られた $r$ と $n_s$ の制限(色付きの半円)と各単一場インフレーションモデルの予言値との比較 [46]. グレー, 赤, 青の領域はそれぞれ, 濃い色が $1\sigma$ (68 % CL), 薄い色が $2\sigma$ (95 % CL)領域を表す. 小さいドット, 大きいドットはそれぞれ, 膨張指数 $N = 50, 60$ の場合の値を表す.

星によるCMBの観測結果のみからの制限である. また, 赤, 青色で囲われている半円は, Planck衛星とその他の観測結果と合わせて得られた, $r, n_s$ に対する制限である. 各インフレーションモデルが予言する $r, n_s$ において, 小さいドットと大きいドットはそれぞれ, 膨張指数が $N = 50, 60$ の場合の値を表す. 観測から得られた制限領域に入っているモデルは, 観測と無矛盾なインフレーションモデルであることになる. 例として, $V \propto \phi^2$ モデルは観測からの制限から外れているため棄却され, $R^2$ インフレーションは生き残る. ここで, 図3.4に載っているモデル以外にも, 観測と無矛盾なインフレーションモデルは数多くあることを強調しておく.

本論文では、観測とよく一致しているインフレーションモデルのうち、 $R^2$  インフレーションモデル [24, 25] に着目した (図 3.4 の黄緑色のモデル). このモデルは、 $f(R)$  重力理論とよばれる一般相対性理論を修正した重力理論に基づいたインフレーションモデルである. 詳細は第 4 章で述べる.

## 第4章 $f(R)$ 重力理論

$f(R)$  重力理論とは修正重力理論の1つであり、GRとは異なる立場で現在の宇宙の加速膨張を説明する理論である。また、3.3節で出てきた  $R^2$  インフレーションは  $f(R)$  重力理論に基づいた、最新のCMBの観測とよく一致しているインフレーションモデルである。これらのことから、宇宙初期の加速膨張であるインフレーションだけでなく、現在の加速膨張も説明できる理論となっている。

この章では、まず一様等方時空における  $f(R)$  重力理論の基礎方程式を紹介する。次に、 $f(R)$  重力理論で重要となる2つの系、Jordan frame と Einstein frame について述べる。そして、 $f(R)$  重力理論におけるインフレーションやDEモデルとなるための条件、そして放射優勢期および物質優勢期を説明するためにはどのような条件を満たさなければいけないのかをみていく。

### 4.1 基礎方程式

$f(R)$  重力理論では、Einstein-Hilbert作用におけるスカラー曲率  $R$  の線型項を、 $R$  の非線形関数  $f(R)$  に置き換えた、以下の作用を用いて記述される重力理論である。

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \Phi_m). \quad (4.1)$$

ここで、 $\kappa^2 = 8\pi G = 8\pi/m_{\text{Pl}}^2$ 、 $\mathcal{L}_m$  は物質のラグランジアン、 $\Phi_m$  は物質場とする。 $f(R)$  の関数形を変えることで、異なるモデルを作ることができる。例として、 $R^2$  インフレーションの場合、 $f(R) = R + \alpha R^2$  という形となっている。ただし、 $\alpha > 0$  とする。

式(4.1)を計量  $g_{\mu\nu}$  で変分すると、場の方程式は、

$$F(R)R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (4.2)$$

となる。ただし、 $F(R) \equiv df(R)/dR$ 、 $T_{\mu\nu}^{(m)}$  は物質のエネルギー運動量テンソルとする。また、 $\square$  はダランベルシアンと呼ばれるもので、 $\square \equiv \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)/\sqrt{-g}$  で表される。上式に対してトレースを取ると、

$$3\square F + FR - 2f = \kappa^2 T, \quad (4.3)$$

となる。ただし、 $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^{(m)}$  とする。宇宙定数  $\Lambda$  がない場合、GRでは  $f(R) = R$  より  $F = 1$  となるため、式(4.3)左辺第1項目の運動項  $\square F$  は消える。この場合、

$R = \kappa^2 T$  となるので、スカラー曲率  $R$  は物質に依存することになる。一方、 $f(R)$  重力理論では、 $f(R)$  は  $R$  の非線形関数なので、 $F \neq 1$  となるため、第1項目の  $\square F$  は消えずに残る。これは、スカラー自由度  $F(R) \equiv \varphi$  の伝搬が存在していることを意味している。このことから、式 (4.3) はスカラー場  $\varphi$  の運動を決定する式となる。この  $\varphi$  のことを“スカラロン”(scalatron) [24] といい、このようなスカラー自由度が現れることが、この理論の特徴である。しかし、この議論のままではスカラー自由度  $F$  の定義を明確にすることは難しい。そこで、元の作用 (4.1) に対して共形変換を行うことで、スカラー自由度の定義がはっきりとした系で表現することが可能となる。詳しくは次節で述べる。

物質のエネルギー密度と圧力を  $\rho_m, P_m$  とすると、物質のエネルギー運動量テンソルは  $T_\nu^{\mu(m)} = \text{diag}(-\rho_m, P_m, P_m, P_m)$  で与えられる。これと FLRW 計量を適用すると、式 (4.3) は、

$$3FH^2 = \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} + \kappa^2 \rho_m, \quad (4.4)$$

$$-2F\dot{H} = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa^2(\rho_m + P_m), \quad (4.5)$$

となる。ここでドットは宇宙時間  $t$  での微分を表す。式 (4.4) は GR における Friedmann 方程式 (2.16) に対応しており、拡張 Friedmann 方程式と呼ぶことにする。また、 $\rho_m, P_m$  は以下の連続方程式を満たす。

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + P_m) = 0. \quad (4.6)$$

これは、式 (2.20) と一致しており、 $\rho_m$  とスケール因子  $a$  の関係は式 (2.33) と同じ結果を得る。

## 4.2 Jordan Frame と Einstein Frame

式 (4.3) より、スカラロンと呼ばれるスカラー自由度が現れることがわかったが、このままではスカラー自由度  $F$  の定義がはっきりしないことを述べた。これは、Jordan frame [47, 48] という系で書かれていることが原因であり、共形変換を行って Einstein frame [49] という系に書き換えることで、スカラー自由度  $F$  の定義を明確にすることが可能となる。以下では、Jordan frame と Einstein frame とはどのような系なのか、また2つの系の相関性について述べ、Einstein frame への書き換えによりスカラロン  $F$  がスカラー場を用いて定義されることをみていく。

Jordan frame とは、式 (4.1) の作用を用いて記述される系のことを指す。一方、Einstein frame とは、通常のエinstein-Hilbert 作用 ( $R$  の線形項のみの作用) にスカラー場のラグランジアンを含んだ作用で記述される系のことを指す。この2つの系は、それぞれの作用に対して共形変換 (4.12) を行うことで、互いの系に書き換える

ことができる。Jordan frame から Einstein frame に書き換えることにより、スカラーロン  $F$  を明確に表現することが可能となる。また、Einstein frame で書くことにより、スカラーロンのポテンシャルが Jordan frame で書かれるよりも直感的にみやすくなる。

$f(R)$  重力理論の Jordan frame における作用 (4.1) は、スカラー・テンソル理論の 1 つである Brans-Dicke 理論 [50] の作用

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \varphi R - \frac{\omega_{\text{BD}}}{\varphi} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - U(\varphi) \right] + \int d^4x \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \Phi_m), \quad (4.7)$$

において、 $\varphi = F(R)$ 、Brans-Dicke パラメータ  $\omega_{\text{BD}} = 0$  とした作用と等価である [51]。ここで、 $\varphi$  はスカラー場であり、右辺 1 項目はスカラー場と重力のカップリングを表し、2 項目はスカラー場の運動項、3 項目は Jordan frame におけるスカラー場のポテンシャルであり、

$$U(F) = \frac{FR - f}{2\kappa^2}, \quad (4.8)$$

と定義される。したがって、式 (4.1) は Jordan frame において、

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2\kappa^2} FR - U(F) \right) + \int d^4x \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \Phi_m). \quad (4.9)$$

と書き換えることができる。この作用 (4.9) から得られる場の方程式は、 $g_{\mu\nu}$  で変分を行い FLRW 計量を適用することで得られる。

$$\ddot{F} + 3H\dot{F} + \frac{2}{3} \left( F \frac{dU}{dF} - 2U \right) = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_m + P_m), \quad (4.10)$$

$$3H^2 + 3H \frac{\dot{F}}{2F} = \frac{U}{F} + \frac{\kappa^2 \rho_m}{F}. \quad (4.11)$$

Jordan frame から Einstein frame における作用に変換するために、以下の共形変換を施す [49, 52]。

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

ここで、 $\Omega^2(x)$  は共形因子である。以下では、簡略化のため  $\Omega$  のみで記載する。また、 $\tilde{g}_{\mu\nu}$  は Einstein frame における計量であり、これ以降では Einstein frame における量にはすべてチルダを付けることにする。2 つの系におけるスカラー曲率  $R$  と  $\tilde{R}$  は、共形変換により、

$$R = \Omega^2 (\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega), \quad (4.13)$$

という関係を持つ。ここで、 $\omega$  は以下のように定義される。

$$\omega \equiv \ln \Omega, \quad \partial_\mu \omega \equiv \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{x}^\mu}, \quad \tilde{\square}\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \omega). \quad (4.14)$$

Jordan frame における元の作用 (4.1) を式 (4.9) に書き換えた作用に対して共形変換を行うことで、以下の作用を得る。

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} F \Omega^{-2} \left( \tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega \right) - \Omega^{-4} U \right] + \int d^4x \mathcal{L}_m(\Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi_m). \quad (4.15)$$

式 (4.15) が  $\tilde{R}$  の線型の作用となるように共形因子を以下のように選ぶ。

$$\Omega^2 = F. \quad (4.16)$$

ただし、 $F > 0$  とする。ここで、新しくスカラー場  $\phi$  を導入し、以下のように定義する。

$$\kappa\phi \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \ln F. \quad (4.17)$$

すると、 $\omega$  の定義式 (4.14) より、 $\omega = \kappa\phi/\sqrt{6}$  となる。これを用いて式 (4.15) を書き直すと、

$$\mathcal{S}_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4x \mathcal{L}_m(F^{-1}(\phi) \tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi_m), \quad (4.18)$$

となる。ここで、 $V(\phi)$  はスカラー場  $\phi$  のポテンシャルであり、以下で定義される。

$$V(\phi) = \frac{U}{F^2} = \frac{FR - f}{2\kappa^2 F^2}. \quad (4.19)$$

上式は、 $\tilde{R}$  の線型項とスカラー場  $\phi$  の運動項とポテンシャルの形で書けていることから、Einstein frame における作用となっている。このように、新たに導入したスカラー場  $\phi$  を式 (4.17) のように定義することで、Jordan frame から Einstein frame への書き換えができ、スカラー  $F$  はスカラー場  $\phi$  に依存することがわかる。

また、式 (4.18) の右辺第2項より、Einstein frame ではスカラー場  $\phi$  は物質とカップリングしていることがわかる。スカラー場と物質の結合定数は、

$$Q \equiv -\frac{F_{,\phi}}{2\kappa F} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad (4.20)$$

で定義される [53]。この結合定数はモデルによらず一定である。

Einstein frame における作用 (4.18) を  $\phi$  で変分すると、以下の式を得る。

$$\tilde{\square}\phi - V_{,\phi} + \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi} = 0. \quad (4.21)$$

ただし、

$$\tilde{\square} \equiv \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \phi), \quad (4.22)$$



とする。また、式 (4.12) より、 $\sqrt{-\tilde{g}} = F^2\sqrt{-g}$ ,  $\tilde{g}^{\mu\nu} = F^{-1}g^{\mu\nu}$  となることから、Einstein frame におけるエネルギー運動量テンソルは以下ようになる。

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{T_{\mu\nu}^{(m)}}{F}. \quad (4.23)$$

ここで、物質のラグランジアン  $\mathcal{L}_m$  を  $\phi$  で微分すると、

$$\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\phi} = \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial\phi} = -\sqrt{-\tilde{g}} \frac{F_{,\phi}}{2F} \tilde{T}, \quad (4.24)$$

となる。式 (4.20) を用いて上式を書き直すと、

$$\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\phi} = \sqrt{-\tilde{g}} \kappa Q \tilde{T} \quad (4.25)$$

と書ける。式 (4.25) を式 (4.21) に代入すると、以下の場の方程式を得る。

$$\tilde{\square}\phi - V_{,\phi} + \kappa Q \tilde{T} = 0. \quad (4.26)$$

また、Einstein frame における FLRW 計量は、式 (2.1) より、

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \Omega^2 ds^2 = F(-dt^2 + a(T)dx^2) \\ &= -d\tilde{t}^2 + \tilde{a}^2(\tilde{t})d\tilde{x}^2, \end{aligned} \quad (4.27)$$

と書けることから、Jordan frame と Einstein frame における宇宙時間とスケール因子には、 $d\tilde{t} = \sqrt{F}dt$ ,  $\tilde{a} = \sqrt{F}a$  という関係式が得られる。式 (4.26) に計量 (4.27) を代入すると、一様等方時空における Einstein frame での場の方程式は、

$$\frac{d^2\phi}{d\tilde{t}^2} + 3\tilde{H} \frac{d\phi}{d\tilde{t}} + V_{,\phi} = -\kappa Q(\tilde{\rho}_m - 3\tilde{P}_m), \quad (4.28)$$

となる。ここで、 $\tilde{H} \equiv \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\sqrt{F}} \left( H + \frac{\dot{F}}{2F} \right)$  とする。

Einstein frame における連続方程式をみるために、スカラー場  $\phi$  のエネルギー密度と圧力を以下のように定義する。

$$\tilde{\rho}_\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\tilde{t}} \right)^2 + V(\phi), \quad \tilde{P}_\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\tilde{t}} \right)^2 - V(\phi). \quad (4.29)$$

式 (4.28) を  $\tilde{\rho}_\phi$  と  $\tilde{P}_\phi$  を用いて書き直すと、

$$\frac{d\tilde{\rho}_\phi}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho}_\phi + \tilde{P}_\phi) = -\kappa Q(\tilde{\rho}_m - 3\tilde{P}_m) \frac{d\phi}{d\tilde{t}}, \quad (4.30)$$

となる。また、共形変換 (4.12) より、Jordan frame と Einstein frame における物質のエネルギー密度と圧力の関係式  $\rho_m = F^2\tilde{\rho}_m$ ,  $P_m = F^2\tilde{P}_m$  を用いると、Einstein frame における連続方程式は、

$$\frac{d\tilde{\rho}_m}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho}_m + \tilde{P}_m) = \kappa Q(\tilde{\rho}_m - 3\tilde{P}_m) \frac{d\phi}{d\tilde{t}}, \quad (4.31)$$

となる. ここで,  $H = \sqrt{F}[\tilde{H} - (dF/d\tilde{t})/2F]$  を用いた. 式(4.30), (4.31)より, 全体のエネルギー密度  $\tilde{\rho}_T = \tilde{\rho}_\phi + \tilde{\rho}_m$  と全体の圧力  $\tilde{P}_T = \tilde{P}_\phi + \tilde{P}_m$  は,

$$\frac{d\tilde{\rho}_T}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho}_T + \tilde{P}_T) = 0, \quad (4.32)$$

となることから, 連続方程式を満たしていることがわかる.

以上が  $f(R)$  重力理論の Einstein frame における記述である. Jordan frame, Einstein frame は共に同じ物理を扱っているが, 使用している時間等のスケールが異なるため, 観測している量によっては違っているように見える. 式(4.1)より, 計量は物質とカップルしていることから, 実際に観測されるエネルギー密度は Jordan frame におけるエネルギー密度  $\rho$  である. したがって, 以下では Jordan frame を物理的な系とみなすことにする. 計算上もしくは解釈するうえで必要となる場合は, Einstein frame を用いることにする.

## 4.3 インフレーション

$f(R)$  重力理論では, スカラロン  $F$  がスカラー場に対応することから,  $F$  をインフラトン場とみなしインフレーションを起こすことになる.  $f(R)$  重力理論におけるインフレーションを具体的にみるために, まず  $R^2$  インフレーションモデルを用いて説明する. この節では, インフレーション中を考えるため, 物質はないものとする ( $\rho_m = P_m = 0$ ).

### 4.3.1 $R^2$ インフレーションモデル

$R^2$  インフレーションモデルにおける関数形  $f(R)$  は以下の形で与えられる [24, 25].

$$f(R) = R + \frac{1}{6M^2}R^2. \quad (4.33)$$

ここで,  $M$  は質量の次元を持つ定数である. インフレーション中はスカラー曲率  $R$  は十分大きいので,  $R^2$  項が  $R$  の線形項よりも優勢となることから,  $R^2$  の項によりインフレーションを起こす. また,  $R$  の線形項があることで, インフレーションが終了する.  $R$  の線形項を無視すると, 式(4.4), (4.5)より, 以下の2式が得られる.

$$\ddot{H} - \frac{\dot{H}^2}{2H} + \frac{1}{2}M^2H = -3H\dot{H}, \quad (4.34)$$

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + M^2R = 0. \quad (4.35)$$

インフレーション中は式(4.34)左辺の第1, 2項目は他の項に比べて無視できるため,  $\dot{H} \simeq -M^2/6$  と近似できる. これを用いると,  $R^2$  インフレーションモデルにおける

ハッブルパラメータ, スケール因子およびスカラー曲率は,

$$H \simeq H_i - \frac{M^2}{6}(t - t_i), \quad (4.36)$$

$$a \simeq a_i \exp \left[ H_i(t - t_i) - \frac{M^2}{12}(t - t_i)^2 \right], \quad (4.37)$$

$$R \simeq 12H^2 - M^2, \quad (4.38)$$

となる. ここで,  $t_i$  はインフレーション開始時の時刻,  $H_i$  および  $a_i$  はそれぞれインフレーション開始時でのハッブルパラメータおよびスケール因子である. この時, ハッブルパラメータ  $H$  を用いて表されるスローロールパラメータ  $\epsilon_H$  は, 式 (3.27) より,

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{M^2}{6H^2}, \quad (4.39)$$

となり, インフレーションが続いている間は  $H^2 \gtrsim M^2$  であることがわかる. インフレーション終了時 ( $t \sim t_f$ ) には,  $\epsilon_H \sim 1$  となることから,  $H_f \simeq M/\sqrt{6}$  となる. 式 (4.38) より, スカラー曲率は  $R \sim M^2$  まで減少することに対応する.

Jordan frame における膨張指数は,

$$N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq H_i(t - t_i) - \frac{M^2}{12}(t - t_i)^2, \quad (4.40)$$

となる. インフレーションは  $t_f \simeq t_i + 6H_i/M^2$  で終了するので, 上式は,

$$N \simeq \frac{3H_i^2}{M^2} \simeq \frac{1}{2\epsilon_H(t_i)}, \quad (4.41)$$

となる. ここで, 最後の近似には式 (4.39) を用いた.

Jordan frame では, インフレーションを引き起こすインフラトン場の振る舞いが分かりにくい. Einstein frame で考えると, 3.2.1 節で述べた単一スカラー場のインフレーションと同じ場の方程式が得られることから, スローロールインフレーションと同じメカニズムで描写できる. そこで以下では, Einstein frame におけるインフレーションを見ていく.

$R^2$  インフレーションモデルにおけるスカラー場  $\phi$  は, 式 (4.17) より,

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{R}{3M^2} \right), \quad (4.42)$$

となる. また, スカラー場のポテンシャルは, 式 (4.19) は以下で書かれる.

$$V(\phi) = \frac{3M^2}{4\kappa^2} \left( 1 - e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi} \right)^2. \quad (4.43)$$

図 4.1 にポテンシャル (4.43) の図を載せる.  $\kappa\phi \gg 1$  の時, ポテンシャルはほぼ定数となることから, スローロールインフレーションを実現する.  $\kappa\phi \ll 1$  となると, ポ

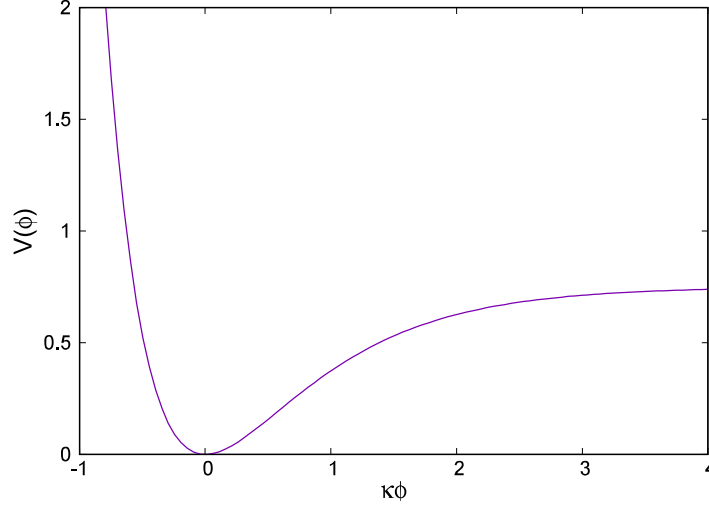


図 4.1: Einstein frame における  $R^2$  インフレーションモデルのポテンシャル (4.43).

テンシャルは  $V(\phi) \simeq M^2 \phi^2 / 2$  となり,  $\phi = 0$  で場が振動する. 共形変換 (4.12) を用いて, Einstein frame における宇宙時間, スケール因子およびハッブルパラメータを求めると,

$$\tilde{t} = \int_{t_i}^t \sqrt{F} dt \simeq \frac{2}{M} \left[ H_i(t - t_i) - \frac{M^2}{12}(t - t_i)^2 \right], \quad (4.44)$$

$$\tilde{a}(\tilde{t}) \simeq \left( 1 - \frac{M^2}{12H_i^2} M\tilde{t} \right) \tilde{a}_i e^{M\tilde{t}/2}, \quad (4.45)$$

$$\tilde{H}(\tilde{t}) \simeq \frac{M}{2} \left[ 1 - \frac{M^2}{6H_i^2} \left( 1 - \frac{M^2}{12H_i^2} M\tilde{t} \right)^{-2} \right], \quad (4.46)$$

となる. ここで,  $F \simeq 4H^2/M^2$  という近似を用いた. また, インフレーション終了時の Einstein frame での時刻は  $\tilde{t}_f = (2/M)N$ , インフレーション開始時の Einstein frame でのスケール因子は  $\tilde{a}_i = 2H_i a_i / M$  となる.

場の方程式は式 (4.18) より,

$$\frac{d^2 \phi}{d\tilde{t}^2} + 3\tilde{H} \frac{d\phi}{d\tilde{t}} + V_{,\phi} = 0, \quad (4.47)$$

$$3\tilde{H}^2 = \kappa^2 \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (4.48)$$

となる. スローロール近似  $(d\phi/d\tilde{t})^2 \ll V(\phi)$ ,  $|d^2\phi/d\tilde{t}^2| \ll |\tilde{H}d\phi/d\tilde{t}|$  を用いると, 上2式は以下のように近似される.

$$3\tilde{H} \frac{d\phi}{d\tilde{t}} + V_{,\phi} \simeq 0, \quad (4.49)$$

$$3\tilde{H}^2 \simeq \kappa^2 V(\phi). \quad (4.50)$$

これらを用いると、スローロールパラメータは式(3.27)より、それぞれ以下のように書ける。

$$\tilde{\epsilon}_H \equiv -\frac{d\tilde{H}/d\tilde{t}}{\tilde{H}^2} \simeq \frac{1}{2\kappa^2} \left( \frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad (4.51)$$

$$\tilde{\eta}_H \equiv \frac{d^2\tilde{H}/d\tilde{t}^2}{\tilde{H}^2(d\phi/d\tilde{t})} \simeq \tilde{\epsilon} - \frac{V_{,\phi\phi}}{3\tilde{H}^2}. \quad (4.52)$$

ポテンシャル(4.43)を用いると上2式は、

$$\tilde{\epsilon}_H \simeq \frac{4}{3} \left( e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi} - 1 \right)^2, \quad (4.53)$$

$$\tilde{\eta}_H \simeq \tilde{\epsilon} - \frac{M^2}{3\tilde{H}^2} e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi} \left( 1 - 2e^{-\sqrt{2/3}\kappa\phi} - 1 \right), \quad (4.54)$$

となり、インフレーション中 ( $\kappa\phi \gg 1$ ) は1より十分小さいことがわかる。  $\tilde{\epsilon}_H \simeq 1$  となるとインフレーションが終了し、この時のスカラー場の値は  $\phi_f \simeq 0.19m_{\text{pl}}$  となる。

Einstein frame における膨張指数は、

$$\tilde{N} = \int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_f} H dt \simeq \kappa^2 \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi, \quad (4.55)$$

と書ける。インフレーション中 ( $\kappa\phi_i \gg 1$ ) では、

$$\tilde{N} \simeq \frac{3}{4} e^{\sqrt{2/3}\kappa\phi_i}, \quad (4.56)$$

となる。  $\tilde{H} \simeq M/2$  という近似を用いると、式(4.53), (4.54), (4.56) より  $\tilde{N}$  を用いて、

$$\tilde{\epsilon}_H \simeq \frac{3}{4\tilde{N}^2}, \quad \tilde{\eta}_H \simeq \frac{1}{\tilde{N}}, \quad (4.57)$$

という形で書ける。

曲率ゆらぎとテンソル型ゆらぎは共形変換(4.12)下で不変であるため [54, 55], テンソル・スカラー比  $r$  とスペクトル指数  $n_s$  は Einstein frame で直接評価することができる。 Einstein frame におけるスカラー場の作用は、単一場のスローロールインフレーションと同じである。したがって、Einstein frame における  $r$  と  $n_s$  は、式(3.90), (3.63) と同様の形で書くことができ、

$$r = 16\tilde{\epsilon}_H, \quad n_s = 1 - 6\tilde{\epsilon}_H + 2\tilde{\eta}_H, \quad (4.58)$$

となる。よって、  $R^2$  インフレーションモデルにおける  $r$  と  $n_s$  は、上式と式(4.57)より、

$$r \simeq 0.004, \quad n_s \simeq 0.964, \quad (4.59)$$

である。ただし、  $N = 55$  とした。

### 4.3.2 $R^n$ インフレーションモデル

次に,  $R^2$  インフレーションモデルを一般化した以下のモデル

$$f(R) = R + \alpha R^n, \quad (4.60)$$

におけるインフレーションを考える. ここで,  $\alpha > 0, n >$  とする.  $R^2$  インフレーションモデル (4.33) と同様に, 第2項目がインフレーションを起こす項となる.

Jordan frame における, このモデルの場の方程式は, 式 (4.4) より,

$$3(1 + \alpha n R^{n-1})H^2 = \frac{1}{2}\alpha(n-1)R^n - 3\alpha n(n-1)R^{n-2}\dot{R}, \quad (4.61)$$

となる.  $F = 1 + \alpha n R^{n-1} \gg 1$  のときにインフレーションが起こることから,  $F \simeq \alpha n R^{n-1}$  と近似すると, 上式は以下のように近似できる.

$$H^2 \simeq \frac{n-1}{6} \left( R - 6nH \frac{\dot{R}}{R} \right). \quad (4.62)$$

インフレーション中は, ハッブルパラメータ  $H$  の時間変化は十分小さいことから,  $|\dot{H}/H^2| \ll 1, |\ddot{H}/(\dot{H}H)| \ll 1$  という近似を用いることができる. すると, 式 (4.62) より,

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq -\epsilon_H, \quad (4.63)$$

となる. ここで, スローロールパラメータ  $\epsilon_H$  は  $n$  を用いて,

$$\epsilon_H = \frac{2-n}{(n-1)(2n-1)}, \quad (4.64)$$

と書ける. Jordan frame におけるこのモデルのハッブルパラメータやスケール因子は, 式 (4.62) において  $\epsilon_H > 0$  とし  $t$  で積分することで求めることができ,

$$H \simeq \frac{1}{\epsilon_H t}, \quad (4.65)$$

$$a \propto t^{1/\epsilon_H}, \quad (4.66)$$

となる. ここから, インフレーションを起こすための条件 ( $\epsilon_H \ll 1$ ) を考慮すると,  $H$  はほぼ定数になり,  $a$  は短時間で急膨張を起こすことが可能であると考えられる.

式 (4.64) より,  $n = 2$  のとき  $\epsilon_H = 0$  となってしまうため, 式 (4.58) より  $r = 0$  となり, 式 (4.59) の結果と一致しない. これは, 場の方程式 (4.61) から  $H^2$  を導出する際,  $F \simeq \alpha n R^{n-1}$  という近似を用いて導出したために起こったことである. 任意の  $n$  において  $\epsilon_H$  を数値的に計算すれば,  $n = 2$  での  $r$  の値は式 (4.59) と一致する.

次に, Einstein frame におけるインフレーションを考える.  $f(R) = R + \alpha R^n$  モデルにおけるポテンシャルは, 式 (4.19) より,

$$V(\phi) = \frac{\alpha^{\frac{2n-1}{n}} (n-1) n^{\frac{n-1}{n}} (e^{\sqrt{2/3}\kappa\phi} - 1)^{n/(n-1)}}{2\kappa^2 e^{2\sqrt{2/3}\kappa\phi}}, \quad (4.67)$$

となる. ここで, 式(4.17)を用いて, ポテンシャルを  $F$  の関数で書き直すと以下のようになる.

$$V(F(\phi)) = \frac{\alpha^{\frac{2n-1}{n}} (n-1)n^{\frac{n-1}{n}} (F-1)^{\frac{n}{n-1}}}{2\kappa^2 F^2}. \quad (4.68)$$

インフレーション中は  $\tilde{\epsilon}, \tilde{\eta} \ll 1$  となるため, ここからインフレーションを起こすための  $\phi$  に対する条件を得ることができる. 例として,  $n = 1.98$  のとき, 式(4.51), (4.52), (4.68) より,

$$\phi \gg m_{\text{Pl}}, \quad (4.69)$$

となる. よって,  $\phi$  が  $m_{\text{pl}}$  より大きければ, インフレーションを実現することが可能となる. しかし, 第3章でも述べたように, 十分なインフレーションが起こるためには, 膨張指数が  $N > 60$  である必要がある. したがって, インフレーション指数  $N$  とスカラー  $F$  の関係式から十分なインフレーションを起こすための  $\phi$  の条件を求め, そこから得られた条件と, スローロール条件から得られた  $\phi$  の条件(4.69)との比較を行う. このモデルにおける  $F$  と  $N$  の関係は, 式(4.10), (4.11)において, スローロール条件を適用して各式を以下のように近似する.

$$3H\dot{F} + \frac{2}{3} \left( F \frac{dU}{dF} - 2U \right) \simeq 0, \quad (4.70)$$

$$3H^2 \simeq \frac{U}{\kappa^2 F}. \quad (4.71)$$

ここで, インフレーション中を考えているので,  $\rho_{\text{m}} = P_{\text{m}} = 0$  とした. また, 膨張指数  $N$  は,

$$N = \int H dt = \int \frac{H}{\dot{F}} dF, \quad (4.72)$$

で求めることができる. 式(4.70), (4.71)を式(4.72)に代入すると,  $F$  と  $N$  の関係式を得る.

$$N = -\frac{3}{4} \log F + \frac{3n}{4(2-n)} \log \left( \frac{F(2-n) + 2(n-1)}{n} \right). \quad (4.73)$$

上式が  $N > 60$  を満たすときの  $\phi$  は,  $n = 1.98$  のときには,

$$\phi > 6m_{\text{Pl}}, \quad (4.74)$$

となる. よって,  $\phi > 6m_{\text{pl}}$  であれば, インフレーションを起こし, かつ標準宇宙モデルで生じた問題を解決するのに十分なインフレーションを起こすことができる.

$R^2$  インフレーションモデルおよび  $f(R) = R + \alpha R^n$  モデルは, 3.2.1節で述べたスローロールインフレーションと同様に, インフレーション終了後, インフラトンであるスカラー  $\phi$  はポテンシャルの最小値へと落ち込み, 最小値付近で振動し宇宙の再加熱を経て, ビッグバンへと繋がる. スカラー  $\phi$  はそのまま最小値付近で落ち着く.

#### 4.4 現在の加速膨張を説明する $f(R)$ モデル

この節では、現在の加速膨張を説明する  $f(R)$  モデルに焦点を当てる。以下では、このようなモデルを総称して、 $f(R)$  ダークエネルギー (DE) モデルと呼ぶことにする。

$f(R)$  重力理論は一般相対論を修正した重力理論であるため、現在の加速膨張を説明するためには、単に宇宙が加速膨張を起こす解を持ち、状態パラメータが  $w < -1/3$  を満たすだけでよいというわけではない。というのも、重力理論を修正しているため、現在から過去に遡った際に、放射優勢期や物質優勢期が通常の GR のものとは大きく違っている可能性がある。しかし一般的には、これらの期間では GR が正しいと考えられているため、 $f(R)$  DE モデルはこれらの期間で GR を回復するようなものでなければならない。また観測実験から宇宙の局所領域では GR の正しさが証明されているため、太陽系のような宇宙局所領域でも  $f(R)$  モデルは GR を回復するようなものでなければならないが、これについては次節で述べる。したがって、GR を回復し、かつ非物理的な状態が現れないようにするためには、適切な関数形  $f(R)$  を選ぶ必要がある。 $f(R)$  重力理論で現在の加速膨張を説明する DE モデルとなるためには、以下の4つの条件を満たす必要がある [56]。ただし、 $R_0$  は現在のスカラー曲率とする。

$$(i) \quad F \equiv \frac{df(R)}{dR} > 0 \quad \text{for} \quad R \geq R_0,$$

graviton がゴーストにならないための条件

$$(ii) \quad F' \equiv \frac{d^2f(R)}{dR^2} > 0 \quad \text{for} \quad R \geq R_0,$$

摂動の不安定性を回避するための条件 (スカラロンがタキオンにならないための条件) また、宇宙局所領域で GR を回復するための条件。

$$(iii) \quad f(R) \rightarrow R - 2\Lambda \quad \text{for} \quad R \gg R_0,$$

放射・物質優勢期で GR を回復するための条件

$$(iv) \quad 0 < \frac{RF'}{F} < 1 \quad \text{at} \quad r \equiv -\frac{RF'}{f} = -2.$$

安定な de Sitter 解を得るための条件

ここで、ゴーストとは、場の量子論においてローレンツ共変性を保つために導入された非物理的な場のことであり、場がゴーストとなると真空が不安定になってしまう。またタキオンとは、質量の二乗が負となる、光速より速い速度で伝搬する仮想粒子のことである。

上記の条件の意味や導出については、付録 B を参照のこと。これらの条件をみたす DE モデルのうち、一般的な DE モデルを以下に挙げる。

(A) Power-law model [26]



$$f(R) = R - \beta R^p, \quad (4.75)$$

ただし,  $0 < p < 1, \beta > 0$ . 以下では,  $R^p$  モデルと呼ぶ.

(B) Starobinsky DE model [28]

$$f(R) = R - \mu R_c \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R^2}{R_c^2} \right)^{-j} \right], \quad (4.76)$$

ただし,  $\mu, j, R_c > 0$ .

(C) Hu & Sawicki model [27]

$$f(R) = R - \mu R_c \frac{(R/R_c)^{2j}}{(R/R_c)^{2j} + 1}, \quad (4.77)$$

ただし,  $\mu, j > 0, R_c > 0$ . 以下では, HS モデルと呼ぶ.

(D) Appleby & Battye model [57, 58]

$$f(R) = \frac{R}{2} - \frac{\epsilon_{AB}}{2} \log \left[ \frac{\cosh(\frac{R}{\epsilon_{AB}} - b)}{\cosh b} \right], \quad (4.78)$$

ただし,  $\epsilon_{AB} = R_c / (b + \log(2 \cosh b))$ ,  $c, R_c > 0$ . 以下では, AB モデルと呼ぶ.

Starobinsky DE モデル (B) と HS モデル (C) は,  $R \gg R_0$  の極限で, 以下の同じ関数形となる.

$$f(R) \simeq R - \mu R_0 \left[ 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-2j} \right]. \quad (4.79)$$

#### 4.4.1 インフレーション以降の宇宙の発展

現実的な  $f(R)$  モデルとなるためには, 上で述べた条件を満たす以外に, 観測と矛盾のない宇宙の発展をしているかも重要となる.  $f(R)$  重力理論は重力を修正した理論であるため, 宇宙の膨張則を支配する Friedmann 方程式は一般相対論のものと異なる. 放射優勢期や物質優勢期におけるスケール因子  $a(t)$  の時間発展は拡張された Friedmann 方程式から決まるため,  $f(R)$  重力理論における放射・物質優勢期は通常のものと同じであるか, また各優勢期が存在するかは自明ではない. ここでは,  $f(R)$  重力理論におけるインフレーション以降の宇宙の発展を考え, 放射・物質優勢期や現在の加速膨張期が存在するために必要な条件をみていく.

インフレーション以降の宇宙を考えるため、式(4.1)に物質と放射のラグランジアン  $\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_{\text{rad}}$  を含んだ作用を用いる。

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} f(R) + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{rad}} \right]. \quad (4.80)$$

式(4.80)を計量  $g_{\mu\nu}$  で変分すると、場の方程式は以下ようになる。

$$3FH^2 = \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} + \kappa^2(\rho_m + \rho_{\text{rad}}), \quad (4.81)$$

$$-2F\dot{H} = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa^2\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_{\text{rad}}\right). \quad (4.82)$$

ここで、 $\rho_m, \rho_{\text{rad}}$  はそれぞれ、物質、放射のエネルギー密度である。またこれらは、それぞれ以下の保存則を満たしている。

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad (4.83)$$

$$\dot{\rho}_{\text{rad}} + 4H\rho_{\text{rad}} = 0. \quad (4.84)$$

DEの状態方程式を定義するために、式(4.81), (4.82)を以下のように書き直す。

$$3F_0H^2 = \kappa^2(\rho_m + \rho_{\text{rad}} + \rho_{\text{DE}}), \quad (4.85)$$

$$-2F_0\dot{H} = \kappa^2\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_{\text{rad}} + \rho_{\text{DE}} + P_{\text{DE}}\right). \quad (4.86)$$

ただし、 $\rho_{\text{DE}}, P_{\text{DE}}$  はそれぞれDEのエネルギー密度と圧力とし、

$$\kappa^2\rho_{\text{DE}} = \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} + 3H^2(F_0 - F), \quad (4.87)$$

$$\kappa^2P_{\text{DE}} = \ddot{F} + 2H\dot{F} - \frac{1}{2}(FR - f) - (2\dot{H} + 3H^2)(F_0 - F), \quad (4.88)$$

をみたすものとする。ここで、 $F_0$  はスカロンの現在値である。 $f(R)$  重力理論では  $F \neq 1$  であることから、 $\rho_{\text{DE}}$  および  $P_{\text{DE}}$  は  $F$  に依存する。一方GRの場合には、 $F = 1$  であるため  $\rho_{\text{DE}}, P_{\text{DE}}$  はどちらも宇宙定数  $\Lambda$  にのみに依存し、式(2.23)と一致する。また  $\rho_{\text{DE}}, P_{\text{DE}}$  は以下の保存則をみたす。

$$\dot{\rho}_{\text{DE}} + 3H(\rho_{\text{DE}} + P_{\text{DE}}) = 0. \quad (4.89)$$

式(4.87), (4.88)より、DEの状態方程式は、

$$w_{\text{DE}} \equiv \frac{\rho_{\text{DE}}}{P_{\text{DE}}} = -1 + \frac{2\ddot{F} - 2H\dot{F} - 4\dot{H}(F_0 - F)}{FR - f - 6H\dot{F} + 6H^2(F_0 - F)}, \quad (4.90)$$

となる。全体のエネルギー密度と圧力を  $\rho_T, P_T$  とすると、式(2.16), (2.17)より、有効状態方程式  $w_{\text{eff}} = P_T/\rho_T$  は以下のように定義される。

$$w_{\text{eff}} \equiv -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}. \quad (4.91)$$

上式より,  $f(R)$  重力理論における有効状態方程式は,

$$w_{\text{eff}} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} = \frac{\frac{1}{3}\rho_{\text{rad}} + P_{\text{DE}}}{\rho_{\text{DE}} + \rho_{\text{m}} + \rho_{\text{rad}}}, \quad (4.92)$$

となる.

式 (4.81) より,  $f(R)$  重力理論における密度パラメータは,

$$\Omega_X \equiv \frac{\kappa^2 \rho_X}{3FH^2}, \quad (4.93)$$

で与えられる. ここで, 一般的な議論をするために現在値  $F_0$  ではなく  $F$  を用いた.  $X$  は放射・物質・DE のいずれかをとるものとし, 以下では各エネルギー成分をそれぞれ  $X = \text{rad}, \text{m}, \text{DE}$  と書くことにする.

### Autonomous Equations

有効状態パラメータ  $w_{\text{eff}}$  が各優勢期における値をとるかどうかを調べていく. 放射成分を含む拡張 Friedmann 方程式 (4.4) を, 以下のように書き換える.

$$-\frac{\dot{F}}{HF} - \frac{f}{6FH^2} + \frac{FR}{6FH^2} + \frac{\rho_{\text{rad}}}{3FH^2} + \frac{\rho_{\text{m}}}{3FH^2} = 1, \quad (4.94)$$

ここで, 以下の変数を導入する [29]:

$$x_1 \equiv -\frac{\dot{F}}{HF}, \quad (4.95)$$

$$x_2 \equiv -\frac{f}{6FH^2}, \quad (4.96)$$

$$x_3 \equiv \frac{R}{6H^2} = \frac{\dot{H}}{H^2} + 2, \quad (4.97)$$

$$x_4 \equiv \frac{\rho_{\text{rad}}}{3FH^2}. \quad (4.98)$$

上記の変数を用いると, 式 (4.90), (4.92), (4.93) は以下のように書き換えられる.

$$w_{\text{DE}} = \frac{1}{3} \frac{1 - x_4 I - 2x_3}{1 - I(1 - x_1 - x_2 - x_3)}, \quad (4.99)$$

$$w_{\text{eff}} = -\frac{1}{3}(2x_3 - 1), \quad (4.100)$$

$$\Omega_{\text{rad}} = x_4, \quad (4.101)$$

$$\Omega_{\text{m}} = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4. \quad (4.102)$$

ここで,  $I = F/F_0$  とする.

式(4.95)～(4.98)を膨張指数  $N \equiv \ln a$  で微分すると、以下の発展方程式を得る.

$$\frac{dx_1}{dN} = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1x_3 + x_4, \quad (4.103)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{x_1x_3}{m} - x_2(2x_3 - 4 - x_1), \quad (4.104)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = -\frac{x_1x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2), \quad (4.105)$$

$$\frac{dx_4}{dN} = -2x_3x_4 + x_1x_4. \quad (4.106)$$

ここで、 $m$  は以下のように定義する.

$$m \equiv \frac{RF'}{F}. \quad (4.107)$$

GRでは  $F' = 0$  であるため、常に  $m = 0$  となる. 一方、 $f(R)$  は  $R$  の非線形関数なので、 $m$  はゼロでない関数となる. これらの発展方程式は、すべての  $f(R)$  モデルに用いることができる. したがって、モデル依存性は  $m$  にのみ現れることがわかる. 式(4.103)～(4.106)の解

$$\frac{dx_i}{dN} = 0, \quad (4.108)$$

は、各密度パラメータ  $\Omega_X$  の極値に対応する.

### 各優勢期に対する条件

$f(R)$  重力理論では、 $w_{\text{eff}}$  は GR と同じ値をとる. つまり物質優勢期では  $w_{\text{eff}} = 0$ 、放射優勢期では  $w_{\text{eff}} = 1/3$ 、DE 優勢期では  $w_{\text{eff}} \sim -1$  となる. 発展方程式(4.108)を解くことで、各優勢期に対応する固定点が得られる. この解析により、各優勢期において、 $w_{\text{eff}}$  が上記の値をとるための条件を見ていく.

まず、放射成分を無視した場合 ( $x_4 = 0$ ) を考える. 発展方程式(4.108)の解に対応する固定点は [29],

$$P_1 : (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -1, \quad (4.109)$$

$$P_2 : (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0), \quad \Omega_m = 2, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \quad (4.110)$$

$$P_3 : (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \quad (4.111)$$

$$P_4 : (x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \quad (4.112)$$

$$P_5 : (x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right),$$

$$\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{m}{1+m}, \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned}
P_6 : (x_1, x_2, x_3) \\
&= \left( \frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)} \right), \\
\Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} &= \frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}. \tag{4.114}
\end{aligned}$$

となる。  $P_5$  と  $P_6$  から、  $x_3 = -(m+1)x_2$  となるので、  $m$  は以下の方程式を満たす。

$$m(r) = -1 - r. \tag{4.115}$$

ここで、

$$r \equiv -\frac{RF}{f} = \frac{x_3}{x_2}, \tag{4.116}$$

である。

各優勢期が十分続き、かつ次の優勢期へ移ることができるかを調べるには、各固定点まわりでの摂動  $\delta x_{i=1\sim 6}$  の安定性を調べればよい [59]。固定点まわりでの摂動から、以下の行列式が求まる。

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \partial \dot{x}_1 / \partial x_1 & \partial \dot{x}_1 / \partial x_2 & \partial \dot{x}_1 / \partial x_3 \\ \partial \dot{x}_2 / \partial x_1 & \partial \dot{x}_2 / \partial x_2 & \partial \dot{x}_2 / \partial x_3 \\ \partial \dot{x}_3 / \partial x_1 & \partial \dot{x}_3 / \partial x_2 & \partial \dot{x}_3 / \partial x_3 \end{pmatrix}. \tag{4.117}$$

すると、  $\delta x_i$  は行列  $\mathcal{M}$  の固有値  $\lambda_{i1}$ 、  $\lambda_{i2}$  を用いて、

$$\delta x_i = C_1 e^{\lambda_{i1} N} + C_2 e^{\lambda_{i2} N}, \tag{4.118}$$

と表すことができる。ここで、  $C_1$  と  $C_2$  は積分定数である。したがって、固定点まわりでの安定性は行列の固有値に依存し、一般的に以下のように場合分けされる [60]。

- (a) Stable node :  $\lambda_{i1} < 0$  かつ  $\lambda_{i2} < 0$ .
- (b) Unstable node :  $\lambda_{i1} > 0$  かつ  $\lambda_{i2} > 0$ .
- (c) Saddle point :  $\lambda_{i1} < 0$  かつ  $\lambda_{i2} > 0$  (または、  $\lambda_{i1} > 0$  かつ  $\lambda_{i2} < 0$ ).
- (d) Stable spiral : 行列  $\mathcal{M}$  の行列式が負で、かつ  $\lambda_{i1}$  と  $\lambda_{i2}$  の実部が負。

放射・物質優勢期に対応するためには、固定点はアトラクターかつ転換点である必要があるため、固定点は (c) と (d) を満たさなければならない。一方、DE 優勢期に対応するためには、固定点はアトラクターであればよいので、(a) または (d) を満たせばよい。これらの議論より、固有値の符号を調べることで  $m$  に対する条件を得ることができる (上記の議論の詳細については、 [59, 60] を参照のこと)。以下では、  $m_i \equiv m(P_{i=1\sim 6})$  とする。

## (A) 物質優勢期

物質優勢期 ( $\Omega_m \approx 1, w_{\text{eff}} \approx 0$ ) に対応する固定点は,  $m_5 \rightarrow 0$  の時の  $P_5$  のみである. 通常物質優勢期が存在するための  $P_5$  の必要条件は,

$$m_5(r = -1) = 0. \quad (4.119)$$

である.  $m_5$  は式 (4.115) を満たすので,  $P_5$  は  $(r, m)$  平面で  $(r, m) = (-1, 0)$  まわりに存在する.  $P_5$  の固有値は, 以下のようになる.

$$3(1 + m'_5), \frac{-3m_5 \pm \sqrt{m_5(256m_5^3 + 160m_5^2 - 31m_5 - 16)}}{4m_5(m_5 + 1)}, \quad (4.120)$$

ここで, プライム ( $'$ ) は  $r$  での微分を意味する.  $|m_5| \ll 1$  とすると, 上記の固有値は,

$$3(1 + m'_5), \quad -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{m_5}}. \quad (4.121)$$

と近似できる. 物質優勢期は, 一定期間続いた後, DE 優勢期へ移行しなければならぬため,  $P_5$  は安定かつ転換点である必要がある (図 4.2 参照). したがって, 式

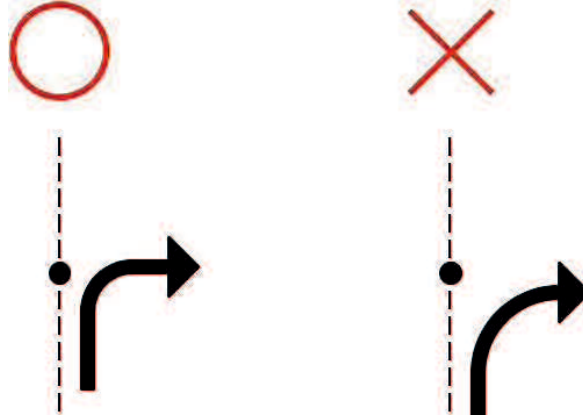


図 4.2: 物質優勢期に対応する固定点のイメージ図. 左図は固定点が安定かつ転換点である場合. この場合, 物質優勢期は一定期間継続し, DE 優勢期へと移る. 右図は固定点が転換点でのみある場合. この場合, 物質優勢期の継続時間は短く, すぐに DE 優勢期へ移ってしまう.

(4.121) は条件 (c) と (d) を満たさなければならない.  $m_5 \rightarrow -0$  とすると, 固有値は発散してしまい,  $P_5$  付近に十分な期間留まることができない. 式 (4.115) より,  $r < -1$  のとき  $m(r) > 0$  であることから, 物質優勢期が存在するための  $P_5$  の条件は,

$$m_5(r < -1) > 0, \quad m'_5(r < -1) > -1. \quad (4.122)$$

となる.

## (B) DE 優勢期

DE 優勢期 ( $\Omega_m = 0, w_{\text{eff}} \approx -1$ ) に対応する固定点は,  $P_1$  と  $P_6$  の 2 種類である.

(I)  $P_1$ 

固定点  $P_1$  は, de Sitter point に対応する.  $P_1$  の固有値は以下のようになる.

$$-3, -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 16/m_1}}{2}. \quad (4.123)$$

DE 優勢期に対応するためには,  $P_1$  は安定点でなければならないことから, 式 (4.123) は条件 (a) または (d) を満たす必要がある. したがって, 現在の de Sitter point  $P_1$  が安定となるための条件は,

$$0 < m_1(r = -2) \leq 1, \quad (4.124)$$

であり, これは de Sitter point がアトラクターであることを意味する (図 4.3 参照).

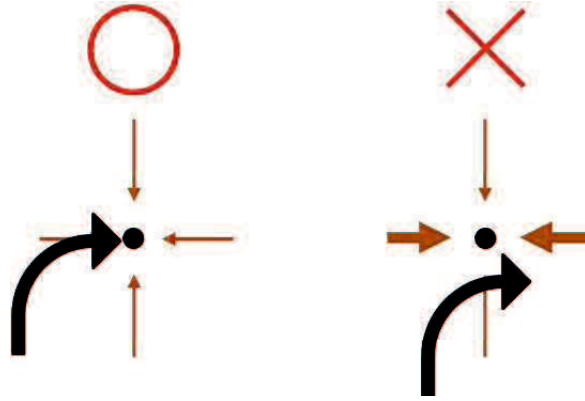


図 4.3: DE 優勢期に対応する固定点のイメージ図. 左図は固定点が安定である場合. これは固定点がアトラクターとなっていることを表している. 右図は固定点がアトラクターではない場合. この場合, 固定点は安定ではないため DE 優勢期に対応しない.

(II)  $P_6$ 

固定点  $P_6$  は, curvature-dominated point に対応し,  $w_{\text{eff}}$  は  $m_6$  に依存する. 現在の加速膨張を実現するためには,  $w_{\text{eff}} < -1/3$  でなければならない. これを満たすには,  $m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2$ ,  $-1/2 < m_6 < 0$ ,  $m_6 > (\sqrt{3} - 1)/2$  のいずれかで必要がある.  $P_6$  が de Sitter point に対応するための  $m_6$  の条件は,

$$m_6(r = -2) \rightarrow 1. \quad (4.125)$$

である. また,  $P_6$  の固有値は以下のようになる.

$$-4 + \frac{1}{m_6}, \frac{2 - 3m_6 - 8m_6^2}{m_6(1 + 2m_6)}, -\frac{2(m_6^2 - 1)(m_6' + 1)}{m_6(1 + 2m_6)}. \quad (4.126)$$

したがって、 $P_6$ の安定性は $m_6$ と $m'_6$ に依存することがわかる。DE優勢期に対応するためには、 $P_6$ は安定でかつ加速膨張を起こさなければならないため、式(4.126)は条件(a)または(d)を満たす必要がある。以上より、安定かつ加速膨張を起こすための $m_6$ と $m'_6$ の領域は、以下の4つに分けられる:

$$(i) \quad m'_6 > -1, \quad (\sqrt{3}-1)/2 < m_6 < 1.$$

このとき、 $w_{\text{eff}} > -1$ .  $m_6 \rightarrow -\infty$ で $w_{\text{eff}} \rightarrow -1$ となる.

$$(ii) \quad m'_6 > -1, \quad m_6 < -(1+\sqrt{3})/2.$$

このとき、 $w_{\text{eff}} < -7.6$ より、ファントムエネルギーとなる.

$$(iii) \quad m'_6 > -1, \quad m_6 \geq 1.$$

このとき、 $-1.07 < w_{\text{eff}} \leq -1$ .  $m_6 \rightarrow +\infty$ , 1で $w_{\text{eff}} \rightarrow -1$ となる.

$$(iv) \quad m'_6 < -1, \quad (\sqrt{3}-1)/2 < m_6 < 1.$$

このとき、 $w_{\text{eff}} > -1$ .

ここで、ファントムエネルギーとは $w < -1$ となるエネルギーのことであり、最新のCMBなどの観測から、 $w \sim -1$ であることから、 $-1$ より十分小さい(ii)は排除される。 $P_6$ も式(4.115)を満たすので、 $P_6$ は $P_5$ に接続されなければならない。このことから、安定かつ加速膨張を起こす $P_6$ として実現可能なのは(iv)のみである(詳しくは[29]を参照).

### (C) 放射優勢期

放射成分 $x_4$ を含めると、これまでで述べた固定点の他に、以下の2つの固定点が追加される.

$$P_7 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1),$$

$$\Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \quad (4.127)$$

$$P_8 : (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= \left( \frac{4m}{1+m}, -\frac{2m}{2(1+m)^2}, \frac{2m}{2(1+m)}, \frac{1-2m-5m^2}{(1+m)^2} \right),$$

$$\Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{1-3m}{3+3m}. \quad (4.128)$$

#### (I) $P_7$

固定点 $P_7$ では $w_{\text{eff}} = 1/3$ となるため、通常の放射優勢期に相当すると考えられる。放射優勢期も物質優勢期の場合と同様に、安定かつsaddle pointとならなければならない。しかし、 $P_7$ の固有値は $1, -1, 4$ となるため、条件(c)は満たすが、条



件 (d) を満たさない。したがって、 $P_7$  は放射優勢期には対応しない。

(II)  $P_8$

固定点  $P_8$  は、 $m_8 \rightarrow 0$  の時、放射優勢期 ( $\Omega_m \approx 0, w_{\text{eff}} \approx 1/3$ ) に対応する。通常の放射優勢期が存在するための  $P_8$  の必要条件は、

$$m_8(r = -1) = 0. \quad (4.129)$$

である。また、 $P_8$  の固有値は以下ようになる。

$$1, 4(1 + m'_8), \frac{m_8 - 1 \pm \sqrt{81m_8^2 + 30m_8 - 15}}{2(m_8 + 1)}. \quad (4.130)$$

$|m_8| \ll 1$  のとき、上記の固有値は、

$$1, 4(1 + m'_8), \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2}. \quad (4.131)$$

と近似できる。放射優勢期に対応するためには、上記の固有値は  $m'_8 < -1$  で条件 (c) と (d) を満たす必要がある。これは物質優勢期に対応する固定点と同様、安定かつ転換点でなければならないことを意味する。 $P_8$  は  $P_5$  と同様に、式 (4.115) を満たすことから、 $P_5$  が物質優勢期となるための条件を満たしていれば、 $P_8$  も自動的に条件を満たすことになる。したがって、 $m_8$  と  $m'_8$  は、式 (4.122) と同じ条件となる。

表 4.1 に、各優勢期が存在するために  $m, m'$  と  $r$  の条件をまとめておく。

表 4.1: 各優勢期におけるパラメータ  $m, m', r$  に対する条件

	$m$	$m'$	$r$
物質優勢期 ( $P_5$ )	$m > 0$	$m' > -1$	$r < -1$
DE 優勢期 ( $P_1$ )	$0 < m < 1$	no condition	$r = -2$
DE 優勢期 ( $P_6$ )	$\frac{\sqrt{3}-1}{2} < m < 1$	$m' < -1$	$r = -2$
放射優勢期 ( $P_8$ )	$m > 0$	$m' > -1$	$r < -1$

その他の固定点 ( $P_2, P_3, P_4$ ) は、通常の物質優勢期には対応しない。これらは、“ $\phi$ -matter-dominated-epoch” ( $\phi$ MDE) [61] と呼ばれる kinetic epoch に対応する (詳細は [29] を参照)。本論文では、放射および物質優勢期で GR を回復する現実的なモデルを考慮しているため、これらの固定点には言及しない。

#### 4.4.2 カメレオン機構

$f(R)$  重力理論を含む修正重力理論では、GR には現れない余分なスカラー自由度が存在する。4.2 節で見たように、余分なスカラー自由度はスカラロンといい、スカ

ラー場で定義される．Einstein frame での作用 (4.18) の第2項を見るとわかるように，スカラー場は計量と同じように物質と相互作用する．これにより，重力と同様のメカニズムにより第5の力が発生する．しかし，太陽系などの局所領域ではこのような力の存在は確かめられていないため，そのような場所では遮蔽されなければならない．このスカラー場の存在により発生する第5の力を遮蔽する機構の1つにカメレオン機構がある [30]．以下では，カメレオン機構でどのようにスカラー場の寄与が隠されるのかが分かりやすいように，Einstein frame で考える．

Einstein frame におけるスカラー場の運動方程式は，式 (4.26) より，

$$\square\phi = V(\phi)_{,\phi} + \frac{\rho^*}{\sqrt{6}} e^{\kappa Q\phi}, \quad (4.132)$$

である．ここで， $Q$  はスカラー場と物質の結合係数であり， $f(R)$  重力理論では式 (4.20) より  $Q = -1/\sqrt{6}$  である． $\rho^*$  は Einstein frame における保存量であり，Jordan frame におけるエネルギー密度  $\rho$  と  $\rho^* = e^{-3\kappa/\sqrt{6}}\rho$  という関係にある．また，式 (4.132) 右辺より，スカラー場の運動は，スカラー場のポテンシャル  $V(\phi)$  だけではなく，以下で定義される有効ポテンシャルによって決まる．

$$V_{\text{eff}} \equiv V(\phi) + \rho^* e^{-\frac{\kappa}{\sqrt{6}}\phi}. \quad (4.133)$$

上式より，ポテンシャルは密度  $\rho^*$  に依存しているため，周りの密度によって有効ポテンシャルの関数形が変わることがわかる．図 4.4 に， $Q < 0$  で  $V(\phi)$  が単調増加関数とした場合の有効ポテンシャルを載せる．

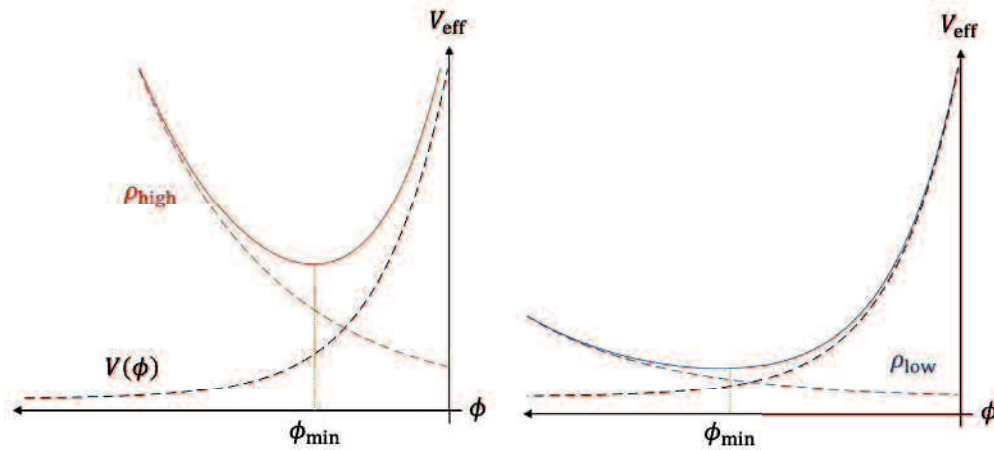


図 4.4: 左：高密度領域での有効ポテンシャル．右：低密度領域での有効ポテンシャル．

有効ポテンシャルの最小値でのスカラー場  $\phi_{\min}$  は，

$$V(\phi_{\min})_{,\phi} + \frac{\rho^*}{\sqrt{6}} e^{-\frac{\kappa}{\sqrt{6}}\phi_{\min}} = 0, \quad (4.134)$$

で求められる。また、スカラー場の有効質量は、

$$m_{\phi_{\min}}^2 \equiv \frac{d^2 V_{\text{eff}}(\phi_{\min})}{d\phi^2}, \quad (4.135)$$

と定義される。有効ポテンシャルが密度  $\rho^*$  に依存することから、 $\phi_{\min}$ ,  $m_\phi$  共に周りの密度に依存して変化する。高密度領域ではスカラー場の質量が大きくなるため、対応するコンプトン波長  $\lambda_\phi \sim 1/m_\phi$  が天体のサイズより短くなり、スカラー場の寄与がなくなる。このように、有効ポテンシャルが周囲の密度に依存し変化することで、場の質量が天体などの高密度領域で重くなることで第5の力を遮蔽する機構を、カメレオン機構という。以下では、カメレオン機構が働くことで地球などの天体でどのように第5の力を遮蔽するかを具体的に見ていく。

### コンパクトオブジェクトにおけるスカラー場の解

太陽や地球などのコンパクトオブジェクトでのスカラー場  $\phi$  がどのような解となるかをみていく。考えるコンパクトオブジェクトは静的球対称で、半径  $R_c$  で一様な密度  $\rho_c$  を持つ質量  $M_c$  の天体とする。この天体は孤立しており、周囲の天体の影響を受けないものとし、天体外部は一様なバリオン・物質密度  $\rho_G \approx 10^{-24} \text{g/cm}^3$  であるとする。これらの仮定の下では、式(4.132)を球座標で表すと以下のように書ける。

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} - V_{,\phi} - \frac{\rho(r)}{\sqrt{6}} e^{-\frac{\kappa}{\sqrt{6}}\phi} = 0. \quad (4.136)$$

ここで、

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_c & \text{for } r < R_c \\ \rho_G & \text{for } r > R_c \end{cases}. \quad (4.137)$$

また、式(4.132)の境界条件は、以下の通りである。

$$\frac{d\phi}{dr} = 0 \quad \text{at } r = 0, \quad (4.138)$$

$$\phi \rightarrow \phi_G \quad \text{as } r \rightarrow \infty. \quad (4.139)$$

1つ目の境界条件は、原点で解が発散しないための条件、2つ目は無限遠で  $d\phi/dr \rightarrow 0$  であることを意味する。

天体外部 ( $r > R_c$ ) でのスカラー場の解を得るために、天体の微小体積要素  $dV$  がスカラー場に及ぼす影響を考える (各記号は図4.5を参照のこと)。

天体内部 ( $0 < r < R_1$ ) では、天体内部での場の質量  $m_c = m_\phi(\rho_c)$  が十分重いと、スカラー場はポテンシャルの最小値  $\phi_c$  付近に留まる。この時、場の値の変化はほとんどなく、式(4.136)は  $dV_{\text{eff}}/d\phi \simeq 0$  となる。したがって、天体内部でのスカラー場の解は、

$$\phi = \phi_c \quad (r < R_1), \quad (4.140)$$

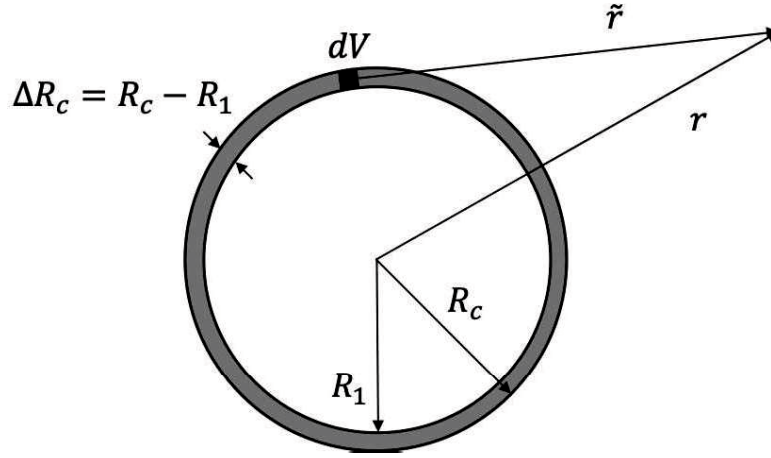


図 4.5: 微小体積要素  $dV$  が  $\tilde{r}$  の点に及ぼすスカラー場の寄与.

となり, 天体の十分内部は外部へ及ぼす寄与はない.

天体の仮想的な球殻  $\Delta R_c = R_c - R_1$  ( $0 \ll R_1 < r < R_c$ ) では,  $|V_\phi| \ll \rho_c e^{-\kappa\phi/\sqrt{6}}/\sqrt{6}$  となるため,  $\kappa\phi \ll 1$  の時,  $dV_{\text{eff}}/d\phi \simeq -\rho(r)/\sqrt{6}$  と近似できる. この時, 球殻内のスカラー場の解は式 (4.136) より,

$$\phi(r) = -\frac{1}{6\sqrt{6}}\rho_c r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (R_1 < r < R_c), \quad (4.141)$$

となる. ここで,  $C_{1,2}$  は積分定数である.

天体外部 ( $r > R_c$ ) では, 式 (4.136) の左辺3項目は  $\phi = \phi_G \equiv \phi_{\min}(\rho_G)$  まわりで,  $dV_{\text{eff}}/d\phi \simeq m_G^2(\phi - \phi_G)$  となる. したがって, 境界条件を考慮すると, 天体外部でのスカラー場の解は,

$$\phi(r) = \phi_G + C_3 \frac{e^{-m_G \tilde{r}}}{r} \quad (r > R_c), \quad (4.142)$$

となる.  $C_3$  は積分定数である.

$R = R_1$  および  $R = R_c$  で, 天体内部・球殻内・天体外部それぞれのスカラー場の解が接続するように  $\phi(r), d\phi(r)/dr$  に条件を課すと, 積分定数  $C_{1\sim 3}$  を決定することができる. これらを計算すると, 天体外部におけるスカラー場の解は, 最終的に以下のようなになる [30].

$$\phi(r) \simeq \phi_G + \frac{\kappa}{4\sqrt{6}\pi} \left( \frac{3\Delta R_c}{R_c} \right) \frac{M_c e^{-m_G \tilde{r}}}{r}. \quad (4.143)$$

したがって, 天体内部が外部へ及ぼす寄与は, 球殻  $\Delta R_c$  からの寄与のみとなる. また,

$$\frac{\Delta R_c}{R_c} \equiv \frac{\phi_G - \phi_c}{\sqrt{6}\Phi_c}, \quad (4.144)$$

は thin-shell パラメータといい, ポテンシャル最小値での場の値と, 天体表面でのニュートンポテンシャル  $\Phi_c = \kappa^2 \rho_c R_c^2/6$  を用いて表される. 質量  $M$  のテスト粒子に

働く、スカラー場が媒介する第5の力は、

$$\vec{F} = \frac{M\kappa}{\sqrt{6}} \vec{\nabla}\phi, \quad (4.145)$$

であることからスカラー場の勾配に比例するため、スカラー場の外部解 (4.143) より、球殻が十分薄い、つまり

$$\frac{\Delta R_c}{R_c} \ll 1, \quad (4.146)$$

である場合には、 $r$  依存性が小さくなり、第5の力は抑制される。この条件を thin-shell 条件という [30]。したがって、thin-shell 条件 (4.146) が成り立っている場合には、スカラー場の寄与はなくなる。図 4.6 に、天体の球核が薄い場合 (thin-shell:  $\Delta R/R \ll 1$ ) と厚い場合 (thick-shell:  $\Delta R/R > 1$ ) における、スカラー場の外部解のプロファイル、図 4.7 に、第5の力のプロファイルを載せる。

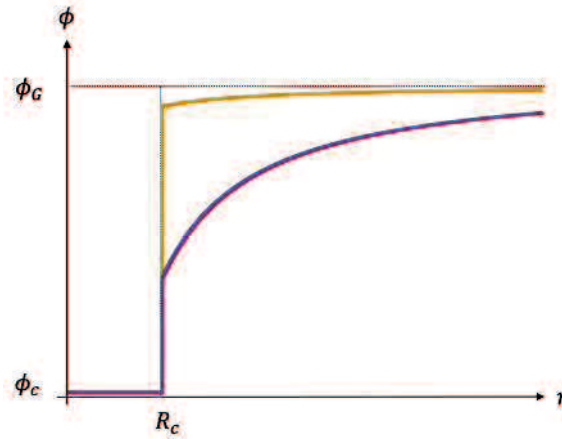


図 4.6: スカラー場の外部解のプロファイル。黄色、マゼンタの線はそれぞれ thin-shell, thick-shell の場合に対応する。天体内部では、場はポテンシャルの最小値に留まっているため場の値の変化が小さく、外部への寄与はなくなる。天体外部では式 (4.143) より、thin-shell の場合には場の値の変化の  $r$  依存性が小さいが、thick-shell の場合には  $r$  依存性が残る。

次に、地球でのスカラー場の解について考える。地球の半径を  $R_\oplus = 6 \times 10^3 \text{ km}$ 、地球内部の密度を  $\rho_\oplus \simeq 5.5 \text{ g/cm}^3$ 、大気密度を  $\rho_{\text{atm}} \simeq 10^{-3} \text{ g/cm}^3$  とし、大気は  $R_\oplus < r < R_{\text{atm}}$  の領域にあるとする。また、大気より外 ( $r > R_{\text{atm}}$ ) では一様密度  $\rho_G \simeq 10^{-24} \text{ g/cm}^3$  であるとする。大気圏は地球の半径に比べて十分薄いため、thin-shell 条件が成立している。すると、thin-shell 条件は地球の重力ポテンシャル  $\Phi_\oplus$  を用いて、

$$\frac{\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \equiv \frac{\phi_G - \phi_{\text{atm}}}{\sqrt{6}\Phi_\oplus}, \quad (4.147)$$

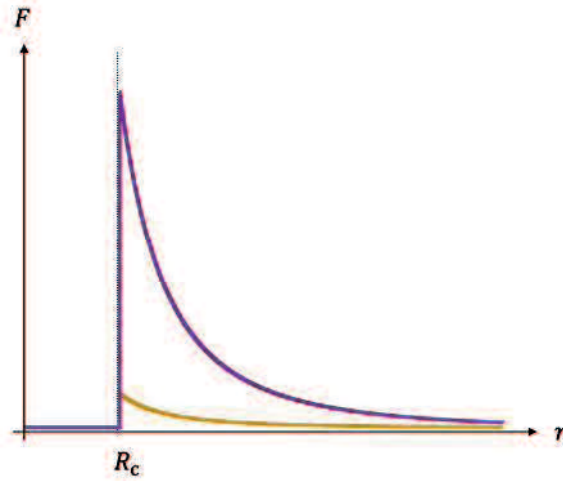


図 4.7: 第5の力のプロファイル. thin-shell の場合は天体外部で第5の力が遮蔽されているが, thick-shell の場合には遮蔽されず天体外部へ滲み出る.

と書ける. また, スカラー場の外部解 ( $R > R_{\text{atm}}$ ) は, 式 (4.143) より,

$$\phi(r) \approx \frac{\kappa}{4\sqrt{6}\pi} \left( \frac{3\Delta R_c}{R_c} \right) \frac{M_\oplus}{r} + \phi_G, \quad (4.148)$$

となる. ここで,  $m_G R_\oplus \ll 1$  を用いた.

### $f(R)$ DE モデルに対する制限

以下では, 太陽に対する地球や月の加速度を用いた太陽系でのテストから,  $f(R)$  DE モデルのモデルパラメータを制限できることをみる. ここでは, 太陽や月も地球同様 thin-shell 条件が成り立っていると仮定する. 等価原理からのずれを表す Eötvös パラメータ  $\eta$  は, 実験から以下の制限がつけられている.

$$\eta \equiv 2 \frac{|a_{\text{Moon}} - a_\oplus|}{a_{\text{Moon}} + a_\oplus} < 10^{-13}. \quad (4.149)$$

式 (4.145), (4.148) より, 質量  $M$  のテスト粒子における第5の力は,

$$|\vec{F}| = \frac{\kappa^2}{3} \left( \frac{3\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \right) \frac{M_\oplus M}{r^2}, \quad (4.150)$$

となる. また,  $\phi_G \gg \phi_{\text{Moon}}$  と仮定すると, 式 (4.147) より,

$$\frac{\Delta R_{\text{Moon}}}{R_{\text{Moon}}} \approx \frac{\Delta R_\oplus}{R_\oplus} \frac{\Phi_\oplus}{\Phi_{\text{Moon}}}, \quad (4.151)$$

と近似できる. 第5の力 (4.150) を考慮すると, 太陽に対する地球と月の加速度はそれぞれ [30],

$$a_{\oplus} \simeq \frac{GM_{\odot}}{r^2} \left[ 1 + 3 \left( \frac{\Delta R_{\oplus}}{R_{\oplus}} \right)^2 \frac{\Phi_{\oplus}}{\Phi_{\odot}} \right], \quad (4.152)$$

$$a_{\text{Moon}} \simeq \frac{GM_{\odot}}{r^2} \left[ 1 + 3 \left( \frac{\Delta R_{\oplus}}{R_{\oplus}} \right)^2 \frac{\Phi_{\oplus}^2}{\Phi_{\odot} \Phi_{\text{Moon}}} \right], \quad (4.153)$$

となる. 導出の際, 式 (4.151) を用いた. 上2式の右辺2項目が, 第5の力によるGRからのずれを表している. このように, 天体によって遮蔽の効き方が変わることによって, カメレオン機構が働いている場合には等価原理が破れる. 太陽・地球・月の重力ポテンシャル,  $\Phi_{\odot} \simeq 2.1 \times 10^{-6}$ ,  $\Phi_{\oplus} \simeq 7.0 \times 10^{-10}$ ,  $\Phi_{\text{Moon}} \simeq 3.1 \times 10^{-11}$  を用いると, 式 (4.149) から以下の制限が得られる.

$$\frac{\Delta R_{\oplus}}{R_{\oplus}} < 2 \times 10^{-6}. \quad (4.154)$$

式 (4.151), (4.154) からモデルパラメータへの制限をつけるために, 有効ポテンシャルの最小値でのスカラー場を求める. 例として  $R^p$  モデル (4.75) の場合を考える. ここでは,  $R$  の現在値  $R_0$  で規格化した以下のモデルを用いる.

$$f(R) = R_0 \left[ \frac{R}{R_0} - \tilde{\beta} \left( \frac{R}{R_0} \right)^p \right]. \quad (4.155)$$

ここで,  $\tilde{\beta} \equiv \beta R_0^{p-1}$  とする. このモデルにおける, 有効ポテンシャルの最小値でのスカラー場  $\phi_{\min}$  は,

$$\phi_{\min} \simeq -\tilde{\beta} p \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \frac{\rho^*}{R_0} \right)^{p-1}, \quad (4.156)$$

となる. ここで,  $\phi_{\min} \ll 1$  とした. 天体内部と外部の密度はそれぞれ  $\rho_c \gg \rho_G$  であるため,  $0 < p < 1$  と式 (4.156) より,  $|\phi(\rho_c)| \ll |\phi(\rho_G)| \ll 1$  となる. したがって, thin-shell 条件 (4.151) は,

$$\frac{\Delta R_{\oplus}}{R_{\oplus}} \simeq \frac{|\phi(\rho_G)|}{\sqrt{6}\Phi_{\oplus}}, \quad (4.157)$$

と近似できる.  $\rho_G = 10^{-24} [\text{g}/\text{cm}^3]$ ,  $R_0 = 10^{-29} [\text{g}/\text{cm}^3]$ ,  $\tilde{\beta} = \mathcal{O}(1)$  を用いると, 上式と式 (4.154) よりモデルパラメータ  $p$  に対する制限は,

$$p < 10^{-10} \quad (4.158)$$

となる.

4.4節で述べた他のDEモデルも同様の計算方法でパラメータに制限をつけることができる [62]. 表 4.2 にそれらの制限をまとめる. ここで, Starobinsky DE モデル

表 4.2: 各 DE モデルのモデルパラメータへの制限 [62]

(A) $R^p$ モデル	$p < 10^{-10}$
(B) Starobinsky DE モデル	$j \gtrsim 0.9$
(C) HS モデル	$j \gtrsim 0.9$
(D) AB モデル	$b > 0$

と HS モデルのモデルパラメータへの制限が同じであるのは、 $R \gg R_0$  の極限で 2 つのモデルは同じ関数  $f(R)$  となることに由来する。

表 4.2 より、 $R^p$  モデルの制限は他の DE モデルに比べて厳しいことがわかる。つまり、 $R^p$  モデルは重力テストをパスするためには、ほぼ宇宙定数に近くなければならないことを意味している。

## 4.5 $f(R)$ DE モデルにおける特異点問題

前節で、現実的な  $f(R)$  DE モデルであるための条件について述べた。しかし、上記の条件を満たすモデルであっても、過去に遡るとスカラー曲率  $R$  が発散してしまうことが示された [58]。この節では、 $R$  の発散により生じてしまう問題について紹介する。また、この特異点はインフレーション項を付け加えることで回避できることを提唱した先行研究 [32] の結果を述べる。

Starobinsky DE モデル (4.76) と AB モデル (4.78) は、 $R$  が大きい場合には有効的な宇宙定数を持つ GR に近づく。これらのモデルを  $R \gg R_0$  で、以下のように近似する。

$$f(R) \approx R - \frac{R_0}{2} + \chi(R). \quad (4.159)$$

ここで、 $R_0/2$  は有効的な宇宙定数として振る舞うが、 $f(0) = 0$  となることから、これらのモデルは真に宇宙定数を持つわけではない。この時、 $\chi(R)$  はそれぞれ、

$$\chi_{\text{Sta}} = \frac{\epsilon_{\text{Sta}}^{2j+1}}{R^{2j}}, \quad \chi_{\text{AB}} = \frac{\epsilon_{\text{AB}}}{2} e^{2b} \exp(-2R/\epsilon_{\text{AB}}), \quad (4.160)$$

となる。ここで、

$$\epsilon_{\text{Sta}} = \frac{R_0}{(2c)^{1/(2j+1)}}, \quad \epsilon_{\text{AB}} = \frac{R_0}{b + \log(2 \cosh b)}, \quad (4.161)$$

であり、どちらも  $R_0$  より小さい値をとる。



過去での  $R$  の振る舞いを調べるため、スカラー曲率  $R$  の線形摂動  $R = R_{\text{GR}} + \delta R$  ( $\delta R \ll R_{\text{GR}}$ ) を考えると、 $f(R), F, F'$  はそれぞれ、

$$f(R) \approx R_{\text{GR}} + \delta R - \frac{R_0}{2} + \chi(R_{\text{GR}}) + \chi'(R_{\text{GR}})\delta R + \mathcal{O}(\delta R)^2, \quad (4.162)$$

$$F(R) \approx 1 + \chi'(R_{\text{GR}}) + \chi''(R_{\text{GR}})\delta R + \mathcal{O}(\delta R)^2, \quad (4.163)$$

$$F'(R) \approx \chi''(R_{\text{GR}}) + \chi'''(R_{\text{GR}})\delta R + \mathcal{O}(\delta R)^2, \quad (4.164)$$

となる。ここでプライム ( $'$ ) は  $R$  での微分とする。これを式 (4.3) に代入し、 $\delta R$  の一次までをとると、

$$3\chi''\square\delta R + 6\chi'''\nabla_\alpha R_{\text{GR}}\nabla^\alpha\delta R - \delta R = \alpha(R_{\text{GR}}), \quad (4.165)$$

となる。ここで、

$$\alpha(R_{\text{GR}}) = 2\chi - R_{\text{GR}}\chi' - 3\chi''(\nabla R_{\text{GR}})^2 - 3\chi''\square R_{\text{GR}}, \quad (4.166)$$

である。式 (4.165) の解は  $\delta R$  の二次の非斉次方程式なので、この解は右辺をゼロにした斉次微分方程式

$$3\chi''\square\delta R + 6\chi'''\nabla_\alpha R_{\text{GR}}\nabla^\alpha\delta R - \delta R = 0, \quad (4.167)$$

の解の線形結合で書き表すことができる。ここで、上式はスケール因子  $a(t)$  を用いて、

$$\frac{3}{a^3} \frac{d}{dt} \left( a^3 \frac{d}{dt} (\chi''\delta R) \right) + \delta R = 0, \quad (4.168)$$

と近似することができる [57]。先行研究において、Starobinsky DE および AB モデルにおける  $\chi$  を上式に代入し数値的に解くと、過去に行くほど  $\delta R$  の振幅が際限なく大きくなり、ある有限の時刻で  $\delta R \ll R_{\text{GR}}$  を破ってしまうことが示された。

過去に遡ると  $R$  の線形摂動が有限の時間で破綻してしまうため、その時刻より過去では適用できず、 $R$  の振る舞いを計算できない。そこで先行研究では、線形摂動近似を仮定せずに非線形項を含めた式 (4.3) を数値的に解き、 $R$  の振る舞いを調べた (詳細な計算方法については [58] を参照のこと)。すると、過去に行くほど  $R$  は非対称に大きく振動し、 $R$  が発散することが示された。このとき、 $f(R)$ DE モデルが満たすべき条件のうち  $F'(R) > 0$  を破ってしまう。したがって、一見 DE モデルとなるための条件を満たしているようにみえても、過去で  $R$  の発散が現れてしまう。この特異点を “weak curvature singularity” という。

この特異点の存在により、 $F'(\infty) = 0$  となり DE モデルが満たすべき条件 (4.4 節参照) を破ってしまう。そこで、 $f(R)$ DE モデルの関数  $f(R)$  にインフレーション項である  $R^2$  項、

$$\hat{f}(R) = f(R)_{\text{DE}} + \alpha R^2, \quad (4.169)$$

を付け加えたところ、 $R$  の発散は抑えられ特異点が回避されることが示された [32]。これは、 $R^2$  項を加えることで、スカラロンの質量に上限ができるため、 $R$  の振動数

にも制限がつくことから  $\delta R$  が際限なく増加しなくなり、 $R$  の発散がなくなるためである。また、過去に行くほど  $R^2$  項が DE 項より大きくなることで、 $\delta R$  の振幅の成長が緩和される。

しかし、 $R^2$  項を加えることで新たな問題が発生してしまう。DE モデルのみの場合には、過去に遡っても  $R$  は負の値を取らないため、 $F > 0, F' > 0$  の条件は  $R > 0$  の場合のみ考慮すればよかった。しかし  $R^2$  項を加えたことで、インフレーション後に場がポテンシャルの最小値で振動するため、 $R$  は負の値をとることから、 $R < 0$  で条件を満たすかどうかを調べなければならない。AB+ $R^2$  モデルの場合、 $|R|$  が小さいとき、 $R = -R_0$  で  $\hat{F} = 0$  となり、 $f(R)$  DE モデルが満たすべき条件を破ってしまう。

そこで、 $R \ll \alpha^{-1}$  を満たす小さい  $R$  の範囲  $(-R, R)$  で  $F' > 0$  を満たすための条件として、 $F'(R) > 0$  を上記の範囲で積分して得られる以下の  $g$  因子、

$$g = \frac{F(R) - F(-R)}{2F(R)}, \quad R_0 \ll R \ll \alpha^{-1}, \quad (4.170)$$

を含めることで、実現可能な  $f(R)$  DE モデルとなることが示された [32]。この  $g$  因子は、DE モデルが満たすべき条件 ( $F > 0, F' > 0$ ) より  $0 < g < 1/2$  である。

このことを考慮した結果、AB+ $R^2$  モデルは以下のように修正される。

$$f(R) = (1 - g)R + g\epsilon_{AB} \log \left[ \frac{\cosh(R/\epsilon_{AB} - b)}{\cosh b} \right] + \alpha R^2. \quad (4.171)$$

ただし、

$$\epsilon_{AB} = \frac{R_0}{2g(b + \log(2 \cosh b))}, \quad (4.172)$$

とする。以下では、このモデルを  $g$ -AB+ $R^2$  モデルと呼ぶ。 $g = 0$  の場合は  $R^2$  インフレーションモデルに、 $g = 1/2$  の場合は AB +  $R^2$  モデルに帰着する。このモデルにおける  $g$  因子とモデルパラメータ  $b$  との関係は、 $Q(R) \equiv RF - 2f = 0$ ,  $dQ(R)/dR = 0$  を解くことで求められる [32]。図 4.8 に  $g$  と  $b$  の関係を載せる。

また、Starobinsky DE モデル (および HS モデル) の場合では、元のモデルおよび  $R^2$  を加えたモデルのどちらの場合においても、有限の  $R/R_0 = \pm ((2j - 1)/(2j + 1))^{1/2j}$  で  $F'(R) = 0$  となってしまう [32]。これは、有限の  $R$  で条件  $F' > 0$  を破ってしまうため、宇宙の発展に影響を及ぼす。

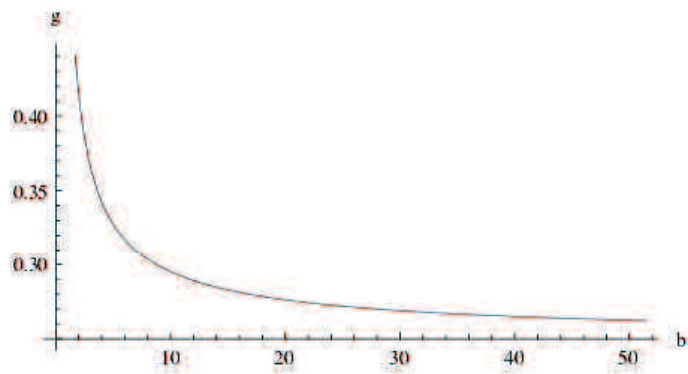


図 4.8:  $g$ - $AB + R^2$  モデルにおける  $g$  と  $b$  の関係 [32]. この曲線上のパラメータを選べば, このモデルは安定な de Sitter 点を持つ.



## 第5章 $f(R)$ 統一モデル

前章で、 $f(R)$  重力理論に基づくインフレーションモデルおよび DE モデルに課される条件について述べた。この章では、インフレーションモデルと DE モデルを組み合わせた  $f(R)$  統一モデルが宇宙初期から現在までの宇宙の発展を説明可能であるかの検証を行う。統一モデルが観測に合う現実的なモデルであるためには、インフレーション中に生成されるゆらぎが CMB の観測結果と一致すること、そして通常の放射・物質優勢期が存在するモデルであるかを確かめる必要がある。また、4.4.2 節で述べたように、第 5 の力を抑制するカメレオン機構は、地球などの高密度領域でスカラー場の質量が重くなることで働く。統一モデルにすると有効ポテンシャルの関数形が DE モデルのものと変わるため、スカラー場の質量も変化する。このことから、統一モデルにすることでスカラー場の質量が軽くなり、カメレオン機構が働かなくなる可能性がある。

この章ではまず、用いる  $f(R)$  統一モデルを紹介する。その後、統一モデルでのテンソル・スカラー比とスペクトル指数とモデルパラメータとの関係を求め、CMB の観測結果と比較しモデルパラメータに対して制限をつける。次に、インフレーション以降の宇宙の発展を、Friedmann 方程式を数値的に解き、その計算結果から統一モデルが現実的なモデルであるかを調べる。そして、統一モデルにおけるスカラー場の質量を求め、カメレオン機構が破綻しないかを検証する。また、本章では  $\kappa^2 = 8\pi G = 1$  として、議論を進める。

### 5.1 統一モデルの紹介

#### 5.1.1 拡張 AL モデル

このモデルは、先行研究 [33] の統一モデル： $f(R) = R + \alpha R^n - \beta R^{2-n}$  を拡張したモデルであり、関数  $f(R)$  は以下のような形である。

$$f(R) = R + \alpha R^n - \beta R^p. \quad (5.1)$$

ただし、 $n > 1$ ,  $0 < p < 1$ ,  $\alpha, \beta > 0$  とする。

この統一モデルにおける Einstein frame での場のポテンシャル (4.19) は、

$$V(\phi) = \frac{e^{-\frac{4}{\sqrt{6}}\phi}}{2} [\alpha(n-1)R(\phi)^n + \beta(1-p)R(\phi)^p], \quad (5.2)$$

となる。ここで、 $R(\phi)$  は以下の式を解くことで得られる。

$$e^{\frac{2}{\sqrt{6}}\phi} = F(R) = 1 + \alpha n R^{n-1} - \beta p R^{p-1}. \quad (5.3)$$

ポテンシャルの一階微分は、

$$\begin{aligned} V_\phi &= \frac{2f - FR}{\sqrt{6}F^2} \\ &= \frac{e^{-\frac{4}{\sqrt{6}}\phi} R}{\sqrt{6}} [1 + \alpha(2-n)R^{n-1} - \beta(2-p)R^{p-1}], \end{aligned} \quad (5.4)$$

である。 $\beta$  項がない場合には、場のポテンシャルは  $R=0$  で最小値を持ち、その時のポテンシャルの最小値は  $V_{\min} = 0$  である。したがって、物質場を導入しなければ現在の宇宙の加速膨張を説明することはできない。一方、 $\beta$  項があることにより、ポテンシャルは  $R = R_{\min} \simeq [\beta(2-p)]^{1/(1-p)} > 0$  で最小値となり、 $V_{\min} > 0$  となる。一般的に、 $R^2$  インフレーションモデルに DE 項を加えることで、 $R_{\min}, V_{\min}$  はそれぞれ 0 でない値を持つことになる。先行研究 [33] のモデルと同様に、拡張 AL モデルはポテンシャルエネルギーによって現在の加速膨張を引き起こす。

統一モデル (5.1) における  $F' = d^2 f(R)/dR^2$  は以下のようになる。

$$F' = \alpha n(n-1)R^{n-2} + \beta p(1-p)R^{p-2}. \quad (5.5)$$

### 5.1.2 Starobinsky DE + $R^n$ モデル

次に、Starobinsky が提唱した DE モデル (4.76) とインフレーション項  $\alpha R^n$  を合わせたモデルを考える。

$$f(R) = R - \mu R_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-j} \right] + \alpha R^n. \quad (5.6)$$

ただし、 $n > 1, \alpha, j > 0, \mu = \mathcal{O}(1)$  とする。このモデルは、 $R \gg R_0$  の時、以下のよう近似できる。

$$f(R) \simeq R - \mu R_0 \left[ 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-2j} \right] + \alpha R^n. \quad (5.7)$$

4.4 節で紹介した HS モデル (4.77) は、 $R \gg R_0$  の近似では式 (5.7) の DE 項と同じ  $f(R)$  関数になる。したがって HS モデルとの統一モデルの結果は、Starobinsky DE +  $R^n$  モデルと同じ結果になる。

この統一モデル (5.7) における Einstein frame でのポテンシャルとその一階微分はそれぞれ、

$$V(\phi) = \frac{e^{-\frac{4}{\sqrt{6}}\phi}}{2} \left[ \mu R_0 - \mu R_0(2j+1) \left( \frac{R(\phi)}{R_0} \right)^{-2j} + \alpha(n-1)R(\phi)^n \right], \quad (5.8)$$

$$V_\phi = \frac{e^{-\frac{4}{\sqrt{6}}\phi}}{\sqrt{6}} \left[ R - 2\mu R_0 + 2\mu(j+1) \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-2j} + \alpha(2-n)R^n \right], \quad (5.9)$$

ここで,  $R(\phi)$  は,

$$e^{\frac{2}{\sqrt{6}}\phi} = F(R) = 1 + \alpha n R^{n-1} - 2\mu j \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-2j-1}, \quad (5.10)$$

より求められる. このモデルも拡張 AL モデル同様に, ポテンシャルエネルギーによって現在の加速膨張を引き起こす. また  $F'$  は,

$$F' = \alpha n(n-1)R^{n-2} + 2\mu j(2j-1) \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-2j-2}, \quad (5.11)$$

となる.

### 5.1.3 $g$ -AB + $R^n$ モデル

次に, 式(4.171)の統一モデルにおいて,  $R^2$  を  $n$  乗に一般化した  $g$ -AB +  $R^n$  モデルを考える.

$$f(R) = (1-g)R + g\epsilon_{AB} \log \left[ \frac{\cosh(R/\epsilon_{AB} - b)}{\cosh b} \right] + \alpha R^n. \quad (5.12)$$

ただし,  $b > 0$ ,  $0 < g < 1/2$ ,  $\alpha, c, R_0 > 0$ ,  $n > 1$  であり,  $\epsilon_{AB}$  は以下の通りである.

$$\epsilon_{AB} = \frac{R_0}{2g(b + \log(2 \cosh b))}. \quad (5.13)$$

このモデルは,  $R \gg R_0$  の時, 以下のように近似できる.

$$f(R) = R - \frac{R_0}{2} + g\epsilon e^{2b} e^{-2R/\epsilon} + \alpha R^n. \quad (5.14)$$

この統一モデル(5.7)における Einstein frame でのポテンシャルとその一階微分はそれぞれ,

$$V(\phi) = \frac{e^{-\frac{4}{\sqrt{6}}\phi}}{2} \left[ \frac{R_0}{2} - (\epsilon + 2R) e^{2b} e^{-2R/\epsilon} + \alpha(n-1)R(\phi)^n \right], \quad (5.15)$$

$$V_\phi = \frac{e^{-\frac{4}{\sqrt{6}}\phi}}{\sqrt{6}} \left[ R - R_0 + 2g(\epsilon + R) e^{2b} e^{-2R/\epsilon} + \alpha(2-n)R^n \right], \quad (5.16)$$

ここで,  $R(\phi)$  は,

$$e^{\frac{2}{\sqrt{6}}\phi} = F(R) = 1 + \alpha n R^{n-1} - 2g e^{2b} e^{-2R/\epsilon}, \quad (5.17)$$

より求められる. このモデルも, ポテンシャルエネルギーによって現在の加速膨張を引き起こす. また  $F'$  は,

$$F' = \alpha n(n-1)R^{n-2} + \frac{4g}{\epsilon} e^{2b} e^{-2R/\epsilon}, \quad (5.18)$$

となる.

この節で導入した3つの統一モデルは全て、インフレーション中、つまりスカラー曲率  $R$  が十分大きい場合には、インフレーション項 ( $\alpha R^n$ ) がその他の項よりも優勢となる. 現在付近、つまり  $R$  が小さい場合には、各統一モデルに対応する DE 項が他の項よりも優勢となる.

## 5.2 インフレーション

$f(R)$  統一モデルにおける、インフレーションからのモデルパラメータへの制限についてみていく.  $f(R)$  重力理論では物質を導入せずにインフレーションを起こすことができるため、この節では物質を無視して考える ( $\rho_m = P_m = 0$ ). また、インフレーション中のスカラー曲率  $R$  は十分大きいことから、前節で述べた統一モデルは全て、

$$f(R) \simeq R + \alpha R^n, \quad (5.19)$$

と近似できる. このモデルの Einstein frame におけるポテンシャルは、式 (4.67) より、

$$V(\phi) = V_0 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \left[ e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} - 1 \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad (5.20)$$

となる. ここで  $V_0 \equiv \alpha(n-1)/[2(\alpha n)^{n/(n-1)}]$  とした.

スカラー型摂動およびテンソル型摂動は共形変換 (4.12) の下で不変である [54, 55]. また、Einstein frame での作用は、3.2.1 節で述べた単一スカラー場のスローロールインフレーションでの作用と等価である. これらのことから、Einstein frame でテンソル・スカラー比  $r$  とスペクトル指数  $n_s$  を直接評価できる. Einstein frame でも  $r$  と  $n_s$  はそれぞれ

$$r = 16\epsilon_V, \quad n_s = 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V, \quad (5.21)$$

で与えられる. ここで、スローロールパラメータ  $\epsilon_V, \eta_V$  は Einstein frame でのスローロールパラメータであり、3.2.1 節で出てきた式 (4.63), (5.24)

$$\epsilon_V \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2, \quad \eta_V \equiv \frac{V_{\phi\phi}}{V}, \quad (5.22)$$

である.

$R^n$  モデル (5.19) におけるスローロールパラメータは、

$$\epsilon_V = \frac{4E_k^2(2-n)^2}{3[2(n-1)E_k - n]^2}, \quad (5.23)$$

$$\eta_V = \frac{4(2-n)[2(2-n)E_k^2 - nE_k + n]}{3[2(n-1)E_k - n]^2}, \quad (5.24)$$



となる [63]. ここで,  $E_k \equiv e^{4(2-n)N_k/(3n)}$  であり,  $N_k$  はインフレーション終了時の膨張指数である.  $N_k$  を用いると,  $n \rightarrow 2$  の極限ではスローロールパラメータは以下のように書ける.

$$\epsilon_V = \frac{3}{4N_k^2}, \quad \eta_V = -\frac{1}{N_k}. \quad (5.25)$$

図 5.1 に, Planck 衛星からの  $r$  と  $n_s$  に対する制限と  $R^n$  モデル (5.19) における値との比較を載せた. その結果,  $n$  の制限は

$$1.977 < n < 1.991 \quad (95\% \text{ CL}, N_k = 50), \quad (5.26)$$

$$1.991 < n < 2.003 \quad (95\% \text{ CL}, N_k = 60), \quad (5.27)$$

となった [64, 65].

先行研究で得られたべき  $n$  の制限は  $1.805 < n < 1.845$  であった [33]. これは, 南極にある望遠鏡: BICEP2 の観測結果を使用したことが原因となっている. BICEP2 では, CMB にある 2 つの偏光のうち B モードと呼ばれる偏光モードの観測を行っていた. この B モードはインフレーション中に生成される原始重力波によってのみ生成されるモードであるため, B モード偏光を検出できれば原始重力波の大きさを見積もることができる. しかし, 宇宙に漂うダストなどによる放射や, もう 1 つの偏光である E モードが重力レンズ効果によって B モードのようなパターンを生成することから, 検出された B モード偏光が原始重力波由来であるかを慎重に調べる必要がある. BICEP2 のチームが 2014 年に発表した結果は, 予想よりも大きいシグナルを捉えたというものであり, これによりテンソル・スカラー比  $r$  の制限が, これまでの他の観測結果から得られた制限よりも大きい値となった ( $r \simeq 0.2$  [66]). しかし実際には, ダストなどによる影響をきちんと取り除けていなかったことが  $r$  が大きくなった原因であったことが判明した [67]. したがって, 本研究の結果 (5.26, 5.27) は, 最新の Planck 衛星からの制限を用いて再解析した結果である [64, 65].

また, 先行研究の統一モデル ( $f(R) = R + \alpha R^n - \beta R^{2-n}$ ) [33] では,  $n > 2$  のとき DE 項である  $\beta$  項は負冪となる. この時, 4.4.1 節で述べた放射・物質優勢期が存在するための条件を破ってしまうため, このモデルでは  $n > 2$  は排除されてしまう. しかし, 拡張 AL モデル (5.1) にすることでこのような制限はなくなる [65].

次に, スカラー型摂動のパワースペクトルの振幅  $\mathcal{P}_\zeta$  から, モデルパラメータ  $\alpha$  を見積もる.  $\mathcal{P}_\zeta$  はスローロールパラメータ (5.23) を用いると,

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{H_E^2}{8\pi^2\epsilon_V} \simeq \frac{N_k^2}{144\pi^2\alpha}, \quad (5.28)$$

となる. ここで,  $H_E$  は Einstein frame におけるハッブルパラメータである. また, 右辺 2 式目では  $n \simeq 2$  を用いた. CMB の観測値  $\mathcal{P}_\zeta \sim 10^{-10}$  [46] と比較すると,

$$\alpha \sim 10^{10} \quad [\text{M}^{2(1-n)}], \quad (5.29)$$

と見積れる [65]. ただし,  $N_k = 50 - 60$  とし, M は質量の次元である.

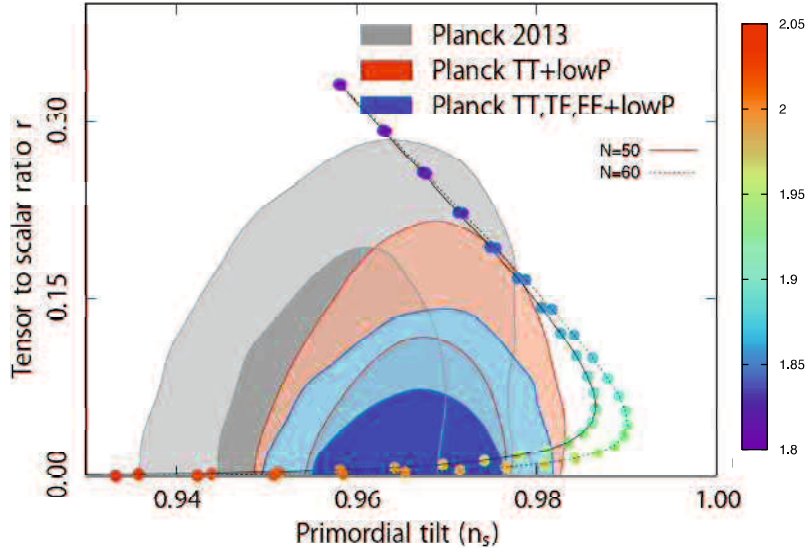


図 5.1: 各  $n$  における  $r, n_s$  の理論予想と Planck による観測的制限 ([68] 改変). カラーは  $n$  の範囲, 実線と点線はそれぞれ  $N_k = 50, 60$  に対応する.

### 5.3 インフレーション以降の宇宙の発展

4.4.1 節で現実的な  $f(R)$  モデルとなるための条件について述べた. しかし, 4.4.1 節で述べた条件は必要条件であるが十分条件ではない. というのも, その条件だけでは各優勢期の存続期間はわからないため, 存在しても一瞬で終わってしまう可能性が出てしまう. 物質優勢期は星や銀河等の構造形成を行う重要な期間であるため, 継続期間が短すぎるとはいけないことから, 各優勢期の存続期間を確かめる必要がある.

Autonomous equations を解くことで宇宙の発展を計算する方法は, Amendola らによって提案された [29]. 本論文では, 数値計算の精度を良くするために, 4.4.1 節で述べた変数の置き方を以下のように改良し, 数値計算を行う [65]. 変数を下記のように置き換えても, 各優勢期が存在するための条件は変わらないことを述べておく.

放射成分を含む拡張 Friedmann 方程式 (4.4) を, 以下のように書き換える.

$$-\frac{\dot{F}}{HF} - \frac{f}{6FH^2} + \frac{FR}{6FH^2} + \frac{\rho_{\text{rad}}}{3FH^2} + \frac{\rho_{\text{m}}}{3FH^2} = 1. \quad (5.30)$$

ここで、以下の変数を導入する:

$$y_1 \equiv -\frac{\dot{F}}{HF}, \quad (5.31)$$

$$y_2 \equiv \frac{FR - f}{6FH^2}, \quad (5.32)$$

$$y_3 \equiv \frac{2f - FR}{6FH^2} - \Omega_m, \quad (5.33)$$

$$y_4 \equiv \frac{\rho_{\text{rad}}}{3FH^2}, \quad (5.34)$$

$$y_5 \equiv \frac{\rho_m}{3FH^2}. \quad (5.35)$$

上記の変数を用いると、式(4.90), (4.92), (4.93) は以下のように書き換えられる.

$$w_{\text{DE}} = \frac{1}{3} \frac{1 - y_4 I - 2X}{1 - I(1 - y_1 - y_2)}, \quad (5.36)$$

$$w_{\text{eff}} = -\frac{1}{3}(2X - 1), \quad (5.37)$$

$$\Omega_{\text{rad}} = y_4, \quad (5.38)$$

$$\Omega_m = y_5, \quad (5.39)$$

$$\Omega_{\text{DE}} = y_1 + y_2. \quad (5.40)$$

ここで、 $I = F/F_0$  とし、

$$X \equiv \frac{R}{6H^2} = 2y_2 + y_3 + \frac{y_5}{2}, \quad (5.41)$$

は補助変数である.

式(5.31) ~ (5.35) を膨張指数  $N \equiv \ln a$  で微分すると、以下の発展方程式を得る.

$$\frac{dy_1}{dN} = y_1 + y_1^2 + (2 - y_1)(X - 2) + 4y_4 + 3y_5, \quad (5.42)$$

$$\frac{dy_2}{dN} = y_2(4 + y_1) - X(y_1 + 2y_2), \quad (5.43)$$

$$\frac{dy_3}{dN} = X\left(-\frac{y_1}{M} + 2y_1 - 2y_3 + 4\right) \quad (5.44)$$

$$-2y_2(y_1 - 4) - \frac{y_5}{2}(y_1 + 1), \quad (5.45)$$

$$\frac{dy_4}{dN} = y_4(y_1 - 2X), \quad (5.46)$$

$$\frac{dy_5}{dN} = y_5(1 + y_1 - 2X). \quad (5.47)$$

ここで、 $M$  は以下のように定義する.

$$M \equiv \frac{RF'}{F}. \quad (5.48)$$

$f(R)$  は  $R$  の非線形関数なので、 $M$  はゼロでない関数となる。これらの発展方程式は、すべての  $f(R)$  モデルに用いることができるため、モデル依存性は  $M$  にのみ現れる。また、式 (5.42) ~ (5.47) の解

$$\frac{dy_i}{dN} = 0, \quad (5.49)$$

は、各密度パラメータ  $\Omega_X$  の極値に対応する。

### 5.3.1 数値解析

autonomous equations (5.42) - (5.47) を数値的に解き、宇宙の発展を調べる。以下では、拡張 AL モデル (5.1) を例にとりて見ていく。インフレーション中のスカラー曲率を  $R_{\text{inf}}$  とすると、インフレーション以降は  $R_{\text{inf}} \gg R \gg R_0$  であることから、 $\alpha$  項を無視した DE モデルのみの関数に近似できる。これは、上で述べた 2 つの統一モデルどちらにも当てはまることである。

この節では、現在のスカラー曲率  $R_0$  でモデルパラメータを規格化した以下のモデルを用いる。

$$f(R) = R_0 \left[ \frac{R}{R_0} - \tilde{\beta} \left( \frac{R}{R_0} \right)^p \right]. \quad (5.50)$$

ここで、 $\tilde{\beta}$  は無次元のパラメータであり、

$$\tilde{\beta} \equiv \beta R_0^{p-1}, \quad (5.51)$$

とする。式 (5.48) より、このモデルにおける変数  $M$  は、

$$M = \frac{y_2}{X} p, \quad (5.52)$$

となる。したがって、宇宙の発展は  $R$  のべき  $p$  にのみ依存することがわかる。

図 5.2 - 5.4 に、赤方偏移  $z+1 = 1/a$  の  $\log$  をとったものを時間軸とした  $\Omega_X$ ,  $w_{\text{eff}}$  と  $w_{\text{DE}}$  の発展を載せる。図 5.2 - 5.3 より、 $p$  の値が大きいほど、物質優勢期のが十分長く続くことがわかる。また図 5.4 より、(5.50) モデルでは  $w_{\text{DE}}$  は時間変化していることがわかる。そして  $p$  の値が大きいほど、 $w_{\text{DE}}$  の時間変化の割合が大きいことがわかる。

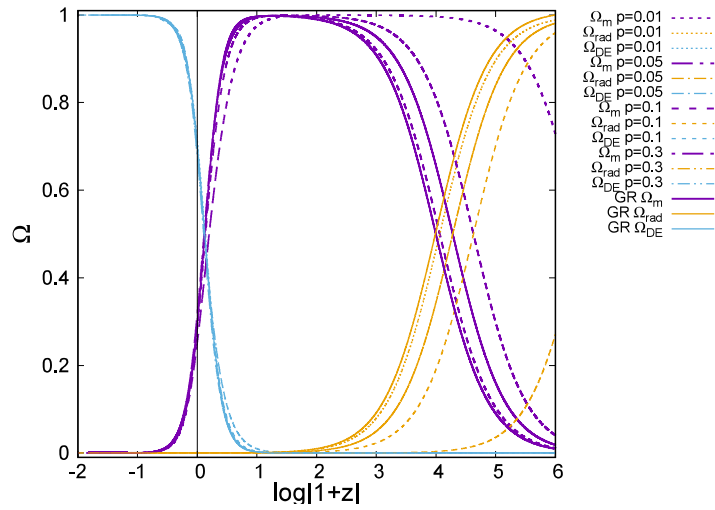


図 5.2:  $f(R) = R_0[R/R_0 - \tilde{\beta}(R/R_0)^p]$  モデルと GR における  $\Omega$  の時間発展. 青色の線は  $\Omega_{DE}$ , マゼンタの線は  $\Omega_m$ , 黄色の線は  $\Omega_{rad}$  をそれぞれ表す. 実線は GR の発展, 点線・破線は  $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.3$  それぞれの場合での  $f(R)$  モデルの発展を表す.

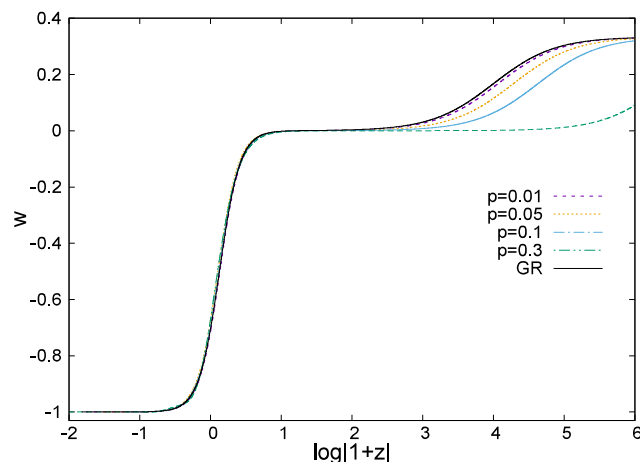


図 5.3:  $f(R) = R_0[R/R_0 - \tilde{\beta}(R/R_0)^p]$  モデルと GR における  $w_{eff}$  の時間発展. 黒の実線は GR, 色付きの点線・破線は  $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.3$  それぞれの場合での  $f(R)$  モデルの発展を表す.

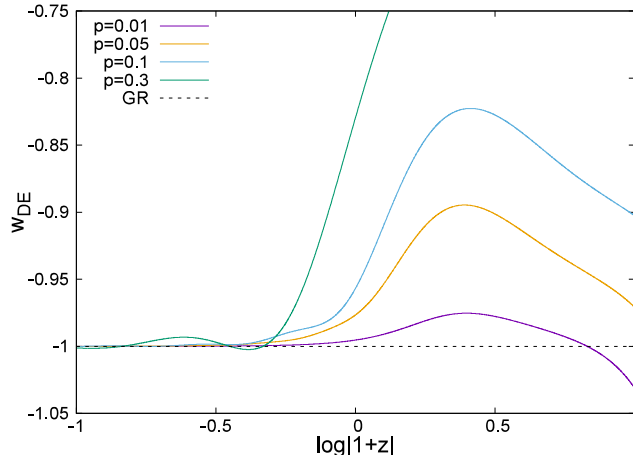


図 5.4:  $f(R) = R_0[R/R_0 - \tilde{\beta}(R/R_0)^p]$  モデルと GR における  $w_{\text{DE}}$  の時間発展. 黒の実線は GR, 色付きの点線・破線は  $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.3$  それぞれの場合での  $f(R)$  モデルの発展を表す.

数値計算の結果, 現在付近では  $y_1$  は  $y_2$  に比べて十分小さいことがわかった. これは, スカラロン (4.17) がポテンシャルの最小値での  $R(\phi_{\min}) = R_{\min}$  に到達し, ポテンシャルエネルギー  $V = (4.19) = 3y_2H^2/F$  によって加速膨張が引き起こされることに由来する. したがって, 現在時刻における  $\Omega_{\text{DE}}$  は,

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{DE},0} \simeq y_{2,0} &= \frac{F_0 R_0 - f(R_0)}{6F_0 H_0^2} \\ &= \frac{2\tilde{\beta}(1-p)}{1-\tilde{\beta}p} \left[ 1 - \frac{3}{4}(1+w_{\text{eff},0}) \right]. \end{aligned} \quad (5.53)$$

と見積もることができる.  $w_{\text{eff},0} \simeq -1$  とすると,  $\tilde{\beta}$  は以下のようなになる.

$$\tilde{\beta} \simeq \frac{\Omega_{\text{DE},0}}{2(1-p) + p\Omega_{\text{DE},0}}. \quad (5.54)$$

上式に  $\Omega_{\text{DE},0} \simeq 0.7$  と  $0 < p < 1$  を代入すると,  $\tilde{\beta} = \mathcal{O}(1)$  と見積もることができる [65].

## 5.4 統一モデルにおける重力テスト

前節までの検証で, 大域的なスケールにおける統一モデルの実現可能性について述べた. この節では, 統一モデルが局所的な宇宙における観測結果と矛盾しないかを調べるために, 4.4.2 節で議論したカメレオン機構について検証する. DE モデル単体の場合には, 周囲の密度が高くなるとスカラー場の質量は増加するため, カメレオン機構が機能する.  $f(R)$  統一モデルに関する先行研究 [31, 32] 等では, インフレーションのエネルギースケールと現在の宇宙のエネルギースケールは大きく違う

ことから、インフレーションを起こす項はインフレーション以降には寄与しないものとして検証が行われていた。しかし統一モデルの場合、有効ポテンシャルの関数形が変わってしまうため、周囲の密度と質量の関係は自明ではない。以下では、インフレーション項がスカラー場の質量へどのような影響を与えるのかを調べ、統一モデルにすることでカメレオン機構が破綻しないかを検証する。

### 5.4.1 拡張ALモデル

はじめに、拡張ALモデル(5.1)における $\alpha$ 項の質量への寄与を調べる。4.4.2節で述べたように、DE項のみのモデルに対する重力テストからの制限は $p < 10^{-10}$ であることから、地球程度のスケールではほぼ宇宙定数と同等とみなせるので、修正重力理論のモデルとしては不適切である。そこで、 $\alpha$ 項を加えて統一モデルにすることで、DE項のべき $p$ に対する制限が緩和され現実的なモデルとなり得るかを調べる。

この節では、モデルパラメータを現在のスカラー曲率 $R_0$ で規格化した以下の関数 $f(R)$ で考える。

$$f(R) = R_0 \left[ \frac{R}{R_0} + \tilde{\alpha} \left( \frac{R}{R_0} \right)^n - \tilde{\beta} \left( \frac{R}{R_0} \right)^p \right]. \quad (5.55)$$

ここで、

$$\tilde{\alpha} \equiv \alpha R_0^{n-1}, \quad \tilde{\beta} \equiv \beta R_0^{p-1}, \quad (5.56)$$

はそれぞれ無次元パラメータである。このモデルの有効ポテンシャルの最小値は、 $V_{\text{eff},\phi} = 0$ より以下のように定義される。

$$\frac{R}{R_0} + \tilde{\alpha}(2-n) \left( \frac{R}{R_0} \right)^n - \tilde{\beta}(2-p) \left( \frac{R}{R_0} \right)^p = \frac{\rho^* e^{-\frac{\phi}{\sqrt{6}}}}{R_0}. \quad (5.57)$$

ここで、

$$e^{\frac{2}{\sqrt{6}}\phi} = F(R) = 1 + \tilde{\alpha}n \left( \frac{R}{R_0} \right)^{n-1} - \tilde{\beta}p \left( \frac{R}{R_0} \right)^{p-1}. \quad (5.58)$$

$\tilde{\alpha}$ に対する制限(5.29)と $\tilde{\beta} = \mathcal{O}(1)$ (5.54)より、係数はそれぞれ、

$$\tilde{\alpha} \sim 10^{-110-120(n-2)}, \quad \tilde{\beta} \sim 1, \quad (5.59)$$

となる。ここで、 $n$ は5.2節で求めた $1.991 < n < 2.003$ とする。一方、式(5.57)の右辺は、エネルギー密度 $\rho^*$ をバリオン・ダークマター密度から地球の密度程度： $\rho^* = \mathcal{O}(10^{-24} - 1) [\text{g}/\text{cm}^3]$ とすると、

$$\frac{\rho^* e^{-\frac{\phi}{\sqrt{6}}}}{R_0} \sim 10^4 - 10^{28}, \quad (5.60)$$

と概算される. ここで,  $R_0 \simeq 12H_0^2 = 4\rho_{\text{crit}} \sim 10^{-29} [\text{g}/\text{cm}^3]$  とした. 式 (5.59) と (5.60) より, ポテンシャルの最小値では式 (5.57) の左辺は第1項目が優勢となるため, ポテンシャルの最小値でのスカラー曲率  $R_{\text{min}}$  のスケールはおおよそ,

$$\frac{R_{\text{min}}}{R_0} \simeq \frac{\rho^*}{R_0} \sim 10^{28} \left( \frac{\rho^*}{1 \text{g}/\text{cm}^3} \right), \quad (5.61)$$

となる. この時, 対応するスカラー場の最小値  $\phi_{\text{min}}$  は, 式 (5.58) より,

$$\frac{2\phi_{\text{min}}}{\sqrt{6}} \simeq \tilde{\alpha}n \left( \frac{R}{R_0} \right)^{n-1} - \tilde{\beta}p \left( \frac{R}{R_0} \right)^{p-1}, \quad (5.62)$$

と近似できる. ここで,  $\phi_{\text{min}} \ll 1$  とした. 上式より  $\alpha$  項は,

$$p \ll \frac{n\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{n-p} \sim 10^{-54-92(n-2)-28p} \left( \frac{\rho^*}{1 \text{g}/\text{cm}^3} \right)^{n-p}, \quad (5.63)$$

のように  $p$  が極端に小さいか, 局所的な密度が,

$$\rho^* \gg \left( \frac{p\tilde{\beta}}{n\tilde{\alpha}} \right)^{\frac{1}{n-p}} R_0 \sim (\rho_{\text{inf}}^{n-1} \rho_{\text{crit}}^{1-p})^{\frac{1}{n-p}}, \quad (5.64)$$

より十分大きくない限り, 無視できてしまう. ここで,  $\rho_{\text{inf}}$  はインフレーションのエネルギー密度  $\rho_{\text{inf}} \simeq R_{\text{inf}} \equiv \tilde{\alpha}^{-1/(n-1)} R_0$  である.  $\alpha$  項が無視できる場合, スカラー場の最小値  $\phi_{\text{min}}$  はエネルギー密度  $\rho^*$  を用いて表すと以下のようなになる.

$$\frac{2\phi_{\text{min}}}{\sqrt{6}} \simeq -\tilde{\beta}p \left( \frac{R}{R_0} \right)^{p-1} \simeq -\tilde{\beta}p \left( \frac{\rho^*}{R_0} \right)^{p-1}. \quad (5.65)$$

次にスカラー場の有効質量を見積もる. 式 (4.135) より, 場の質量は  $\phi_{\text{min}}$  によって決まる. 上記の議論より  $\phi_{\text{min}}$  における  $\alpha$  項の寄与は無視できてしまうことから, 拡張 AL モデルにおける場の質量  $m_\phi$  は,

$$m_\phi^2 \simeq R_0 \left[ \frac{1}{3p(1-p)\tilde{\beta}} \left( \frac{\rho^*}{R_0} \right)^{2-p} + \frac{8\rho^*}{3R_0} \right], \quad (5.66)$$

となる.  $p \ll 1$  では, 第1項目が優勢となり,

$$m_\phi^2 \simeq \frac{R_0}{3p(1-p)\tilde{\beta}} \left( \frac{\rho^*}{R_0} \right)^{2-p}, \quad (5.67)$$

と近似できる.

上記の議論より,  $\alpha$  項がスカラー場の質量に寄与するには, DE 項のみのモデルにおける重力テストからの制限  $p < 10^{-10}$  よりも十分小さいか, 密度が  $10^{26} [\text{g}/\text{cm}^3]$  程度まで大きくなければ寄与しない. したがって, 拡張 AL モデル (5.1) の場合, 地球



程度のエネルギースケールでは  $\alpha$  項の影響は無視できるため、重力テストからのべき  $p$  への制限は DE 項のみのモデル

$$f(R) = R - \beta R^p, \quad (5.68)$$

のものと一致する。先行研究 [33] では、拡張 AL モデルの元のモデル ( $p \rightarrow 2 - n$ ) は現実的なモデルであると結論づけていた。しかし、 $\alpha$  項を加えても DE 項のべきの制限は変わらないことから、拡張 AL モデルおよび元のモデルはともに  $R^2$  インフレーションモデルと宇宙定数を組み合わせたモデルに帰着する。これは、拡張 AL モデルは修正重力の効果が極めて小さく、GR とほぼ相違ないことを意味する。したがって、彼らの主張と違い、本研究ではこれらの統一モデルは修正重力理論モデルとしては棄却されると結論づけた [65]。

### 5.4.2 Starobinsky DE + $R^n$ モデル

次に、Starobinsky DE +  $R^n$  モデル (5.7) における  $\alpha$  項の質量への寄与を調べる。DE 項のみのモデルにおける重力テストからの制限は  $j \gtrsim 0.9$  であるため、修正重力理論モデルとして現実的なモデルである。そこで、 $\alpha$  項を加えることで質量が軽くなり、カメレオン機構が破綻しないかを検証する。ここで、 $\alpha$  項は  $R_0$  で規格化したものを用いる。

このモデルの有効ポテンシャルの最小値は、

$$\frac{R}{R_0} - 2\mu + \tilde{\alpha}(2 - n) \left(\frac{R}{R_0}\right)^n + 2\mu(j + 1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2j} = \frac{\rho^* e^{-\frac{\phi}{\sqrt{6}}}}{R_0}, \quad (5.69)$$

で定義される。ここで、

$$e^{\frac{2}{\sqrt{6}}\phi} = F(R) = 1 + \tilde{\alpha}n \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} - 2\mu j \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2j-1}. \quad (5.70)$$

前節と同様の議論から、 $R_{\min}$  のスケールは式 (5.61) となり、対応する  $\phi_{\min}$  は、

$$\frac{2\phi_{\min}}{\sqrt{6}} \simeq \tilde{\alpha}n \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} - 2\mu n \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2n-1}, \quad (5.71)$$

と近似できる。

次にスカラー場の質量を評価する。有効質量 (4.135) を  $R$  を用いて書き直すと、

$$m_\phi^2 = \frac{1}{3F'} \left(1 + \frac{RF'}{F} - \frac{4fF'}{F^2}\right) + \frac{\rho^*}{6} e^{-\frac{1}{\sqrt{6}}\phi_{\min}}, \quad (5.72)$$

となる。ここで、

$$F' = \frac{2j\mu(2j+1)}{R_0} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2j-2} + \frac{\tilde{\alpha}n(n-1)}{R_0} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-2}. \quad (5.73)$$

式 (5.61) より, ポテンシャルの最小値では  $R_{\min} \simeq \rho^*$  であることから,  $\alpha$  項の質量 (5.77) への寄与は周りの密度  $\rho^*$  によって決まる. また, Starobinsky DE モデルに対する重力テストからのパラメータへの制限は  $j \gtrsim 0.9$  であるため,  $j$  を大きくするほど  $\alpha$  項は低密度で質量に寄与する. 図 5.5 - 5.7 に,  $j = 1, 10, 50$  における Starobinsky DE モデルと統一モデルそれぞれの, スカラー場の質量  $m_\phi$  に対応するコンプトン波長  $\lambda_\phi = 1/m_\phi$  と密度  $\rho^*$  のグラフを載せる. 以下の図では,  $\alpha$  項は  $n = 2$  とした.

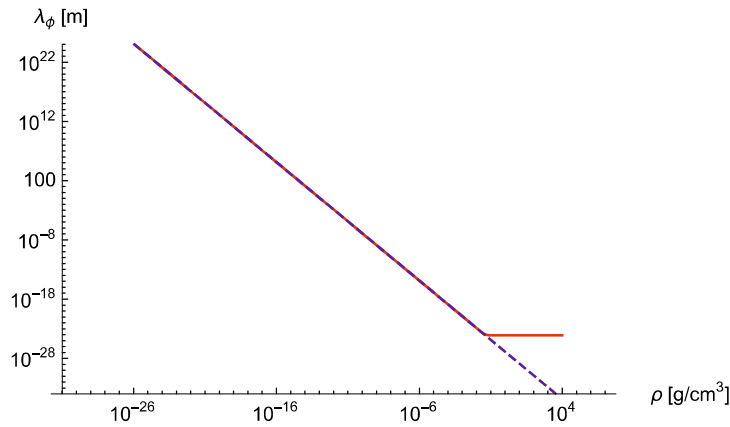


図 5.5: スカラー場のコンプトン波長  $\lambda_\phi$  と密度  $\rho$  のグラフ. 青線は DE 項のみ, 赤線は統一モデル (5.7) の場合.  $j = 1, n = 2$  の場合.

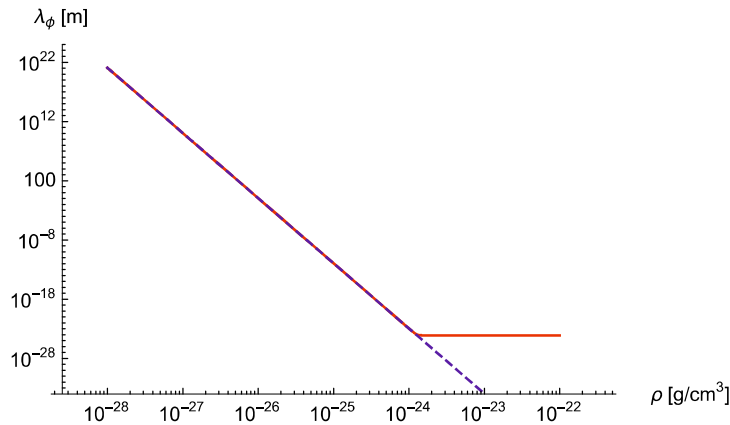
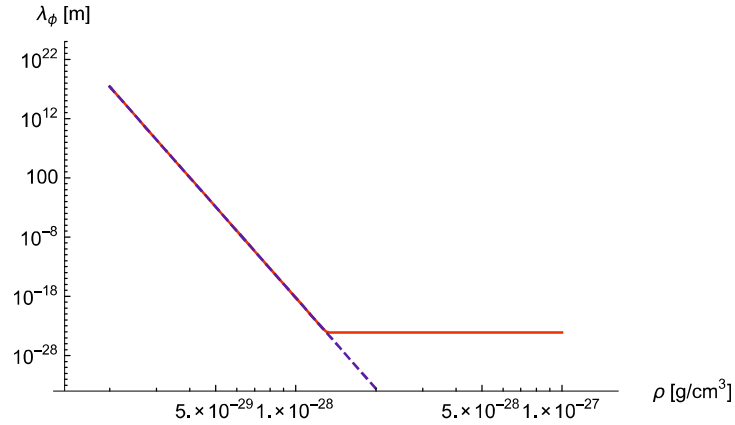


図 5.6:  $j = 10, n = 2$  の場合

図 5.5 - 5.7 より, DE 項のみのモデルの場合, 密度が高くなるほど対応するコンプトン波長が短くなっていることから, 場の質量は増加し続ける. 一方, 統一モデルにすると, ある密度で場の質量は一定値に落ち着く. 式 (5.77) の右辺第 1 項目に対してオーダー評価を行うと,  $m_\phi^2 \propto 1/F'$  と近似できる. 図 5.5 - 5.7 では  $\alpha$  項のべきを  $n = 2$  としたため, 式 (5.73) より,  $\alpha$  項は周囲の密度によらず一定となる. こ

図 5.7:  $j = 50, n = 2$  の場合.

れにより、質量に対する  $\alpha$  項の寄与が DE 項の寄与よりも大きくなると、質量は一定値に落ち着く。  $\alpha$  項が DE 項より優勢となる密度  $\rho$  は DE モデルのモデルパラメータ  $j$  に依存しており、  $j$  が大きくなるほど  $\alpha$  項が優勢となる  $\rho$  は低くなる。表 5.1 に、  $\alpha$  項が質量に寄与し始める密度をまとめた。表 5.1 より、  $\alpha$  項はインフレーションのエネルギースケールよりも十分小さいスケールで場の質量に寄与することがわかった [65].

表 5.1: Starobinsky DE +  $R^n$  モデルにおける、  $\alpha$  項が質量に寄与し始める時の  $j$  と密度の関係

$j$	$\rho^*$ [g/cm <sup>3</sup> ]
1	$\mathcal{O}(10^{-1})$
10	$\mathcal{O}(10^{-24})$
50	$\mathcal{O}(10^{-28})$

上で述べたように  $n = 2$  の場合には、  $\alpha$  項が優勢になると密度を高くしても質量は一定値を保ったままとなる。地球程度の密度 ( $\rho \sim 1$  [g/cm<sup>3</sup>]) でも質量は変わらず  $\sim 10^{14}$  [GeV] と重いままであった。  $n$  を 2 から少しずらすと、式 (5.73) より  $\alpha$  項も周囲の密度に依存する。  $n < 2$  の場合には、式 (5.73) で  $\alpha$  項が DE 項よりも優勢になった後には、  $\rho$  が大きくなるにつれて  $F'$  は小さくなるため、スカラー場の質量は重くなっていく。一方  $n > 2$  の場合には、  $\rho$  が大きくなるにつれて  $F'$  も大きくなるため、質量は軽くなっていく。図 5.8 に、  $j = 1$  でのインフレーションからの  $n$  の制限 (5.27) に振った場合におけるコンプトン波長と密度のグラフを載せる。

図 5.8, 5.9 より、  $n < 2$  の場合には、  $\alpha$  項が優勢になると質量は重くなり、  $n > 2$  の場合には、軽くなることがわかる。しかし、地球程度の密度 ( $\rho \sim 1$  [g/cm<sup>3</sup>]) では質量のオーダーは変化しない。これは、  $j$  の値を変えた場合も同様の結果となる。以

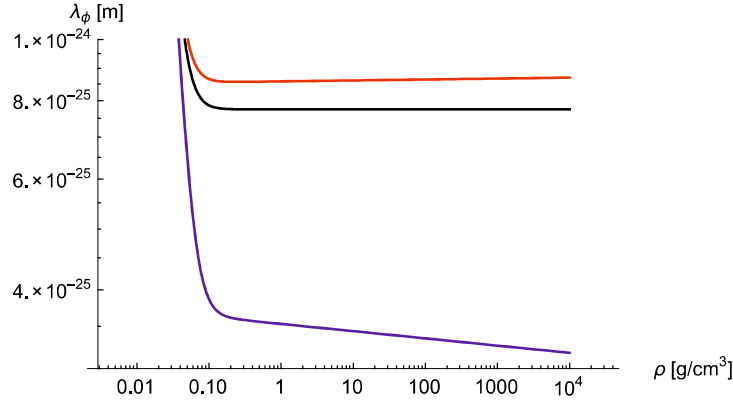


図 5.8: インフレーションからの  $n$  の制限  $1.977 < n < 2.003$  (5.27) に振った場合におけるスカラー場のコンプトン波長  $\lambda_\phi$  と密度  $\rho$  のグラフ. 赤, 黒, 青線はそれぞれ  $n = 1.977, 2, 2.003$  の場合に対応する. ただし,  $j = 1$  とした.

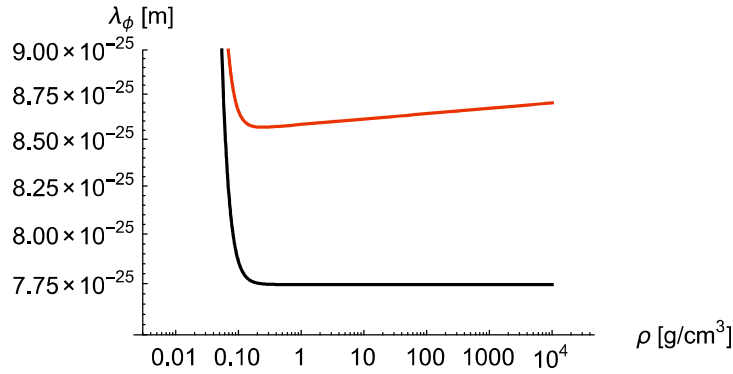


図 5.9: 図 5.8 の  $2 \leq n < 2.003$  付近の拡大図.

上の結果より, Starobinsky DE +  $R^n$  モデルでは,  $\alpha$  項はインフレーションよりも小さいスケールでスカラー場の質量に寄与するが, カメレオン機構は問題なく働くことがわかった [65].

### 5.4.3 $g$ -AB + $R^n$ モデル

最後に,  $g$ -AB +  $R^n$  モデル (5.14) における  $\alpha$  項の質量への寄与を調べる. Starobinsky DE モデルと同様に, この統一モデルの DE 項のみのモデルは修正重力理論モデルとして現実的なモデルであるので,  $\alpha$  項を加えることでカメレオン機構が破綻しないかを検証する. この節でも  $\alpha$  項は  $R_0$  で規格化したものを使用し, また式 (5.13) で定義した  $\epsilon_{AB}$  の下付き文字を省略して書く.

このモデルの有効ポテンシャルの最小値は,

$$\frac{R}{R_0} - 1 + \tilde{\alpha}(2-n) \left(\frac{R}{R_0}\right)^n + \frac{2g}{R_0} e^{2b} e^{-\frac{2R}{\epsilon}} (\epsilon + R) = \frac{\rho^* e^{-\frac{\phi}{\sqrt{6}}}}{R_0}, \quad (5.74)$$

で定義される。ここで,

$$e^{\frac{2}{\sqrt{6}}\phi} = F(R) = 1 + \tilde{\alpha}n \left( \frac{R}{R_0} \right)^{n-1} - 2g e^{2b} e^{-\frac{2R}{\epsilon}}. \quad (5.75)$$

前節と同様の議論から,  $R_{\min}$  のスケールは式 (5.61) となり, 対応する  $\phi_{\min}$  は,

$$\frac{2\phi_{\min}}{\sqrt{6}} \simeq \tilde{\alpha}n \left( \frac{R}{R_0} \right)^{n-1} - 2g e^{2b} e^{-\frac{2R}{\epsilon}}, \quad (5.76)$$

と近似できる.

次にスカラー場の質量を評価する. 有効質量 (4.135) を  $R$  を用いて書き直すと,

$$m_\phi^2 = \frac{1}{3F'} \left( 1 + \frac{RF'}{F} - \frac{4fF'}{F^2} \right) + \frac{\rho^*}{6} e^{-\frac{1}{\sqrt{6}}\phi_{\min}}, \quad (5.77)$$

となる. ここで,  $g$ -AB +  $R^n$  モデルにおける  $F'$  は以下の通りである.

$$F' = \frac{4g}{\epsilon} e^{2b} e^{-\frac{2R}{\epsilon}} + \frac{\tilde{\alpha}n(n-1)}{R_0} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{n-2}. \quad (5.78)$$

$g$ -AB +  $R^2$  モデルに対する重力テストからのパラメータへの制限は  $b > 0$  であるため, 図 4.8 に載せた  $g - b$  の関係を満たすようにモデルパラメータを設定する. 図 5.10 - 5.13 に, 各  $b, g$  における AB モデルと統一モデルそれぞれの, スカラー場の質量  $m_\phi$  に対応するコンプトン波長  $\lambda_\phi$  と密度  $\rho^*$  のグラフを載せる.

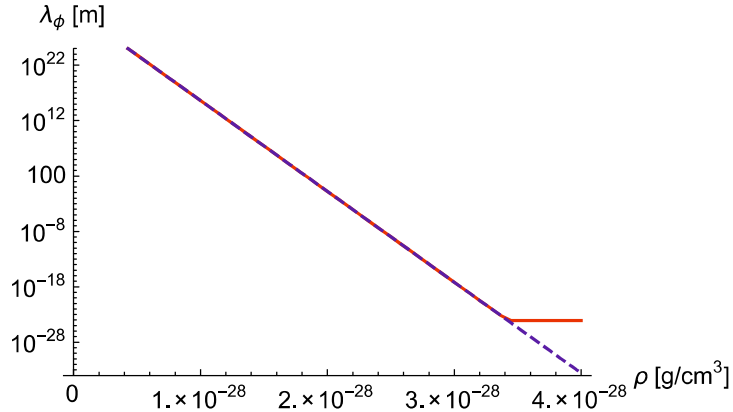
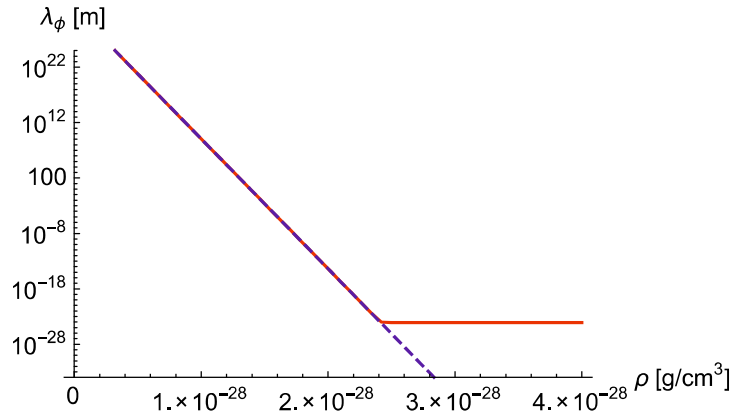
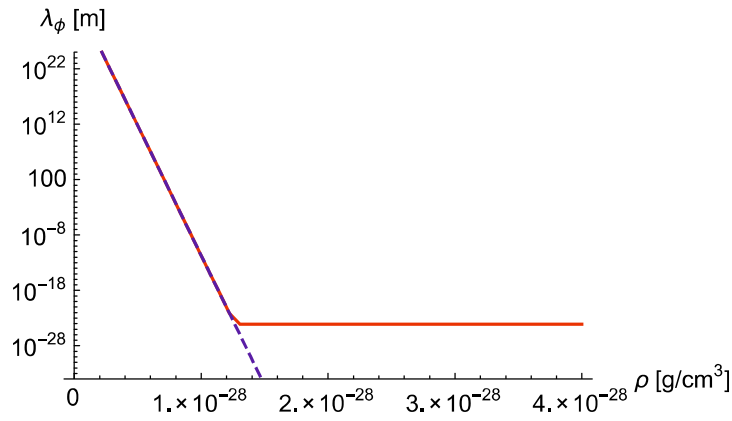


図 5.10: スカラー場のコンプトン波長  $\lambda_\phi$  と密度  $\rho$  のグラフ. 青線は DE 項のみ, 赤線は統一モデル (5.14) の場合.  $b = 2, g = 0.47$  の場合.

0

図 5.10 - 5.13 より, Starobinsky DE +  $R^n$  モデルの場合と同様に, DE 項のみの場合には質量  $m_\phi$  は際限なく増えていき, 統一モデルにすると場の質量は同じ一定値に落ち着く.  $\alpha$  項の寄与が現れる密度  $\rho$  については, DE モデルのモデルパラメー

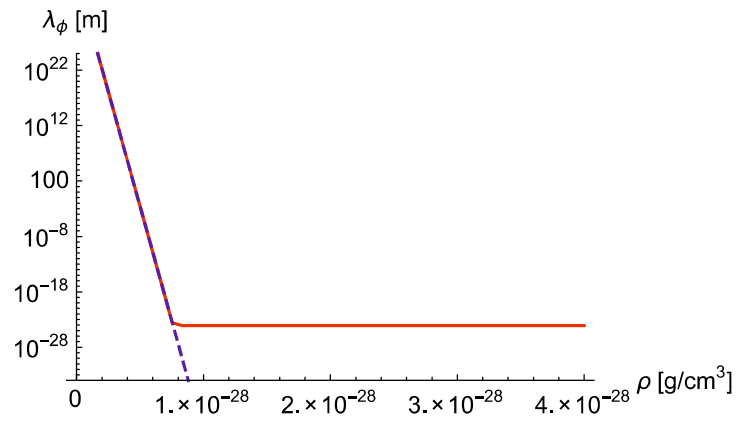
図 5.11:  $b = 3, g = 0.45$  の場合.図 5.12:  $b = 9, g = 0.3$  の場合.

タ  $g, b$  に依存するが, Starobinsky DE +  $R^2$  モデルの場合より低密度で  $\alpha$  項がスカラー場の質量に寄与することがわかった [65]. 表 5.2 に, 各  $n$  での  $\alpha$  項が寄与し始める密度をまとめた.

表 5.2:  $g$ -AB +  $R^2$  モデルにおける,  $\alpha$  項が寄与し始める時の  $g, b$  と密度の関係

$b$	$g$	$\rho^*$ [g/cm <sup>3</sup> ]
2	0.47	$\sim 3 \times 10^{-28}$
3	0.45	$\sim 2 \times 10^{-28}$
9	0.30	$\sim 1 \times 10^{-28}$
17	0.28	$\sim 7 \times 10^{-29}$

Starobinsky DE +  $R^n$  モデルと同様に,  $g$ -AB +  $R^n$  モデルにおいても,  $n < 2$  の場合にはスカラー場の質量は増加していき,  $n > 2$  の場合には減少していくが, 地球程度のスケールでは質量のオーダーは変わらない. したがって,  $g$ -AB +  $R^n$  モデ

図 5.13:  $b = 17, g = 0.28$  の場合.

ルの場合においても、 $\alpha$  項を加えてもカメレオン機構は破綻しないことがわかった [65].





## 第6章 $K$ -essentially modified $R^2$ モデルにおけるインフレーション

この章では、 $R^2$  インフレーションモデルの作用に  $K$ -essence [69] と呼ばれるスカラー場の運動項を加え拡張したモデル [70] におけるインフレーションの妥当性について議論する。  $K$ -essence とは修正物質理論の1つである。 2.8節で述べたクインテッセンスはスカラー場のポテンシャルエネルギーにより加速膨張を起こす模型だが、  $K$ -essence ではスカラー場の運動エネルギーによって加速膨張を起こす模型である。 4.2節で述べたように、  $f(R)$  重力理論では共形変換を行い Einstein frame に移ることで、新たにスカラー場が定義される。 したがってこのモデルは、2つのスカラー場によってインフレーションを起こすことになる。 このような  $R^2$  拡張モデルは、本論文で扱うモデル以外にも数多く研究されている (詳細は [71, 72, 73] などを参照)。

### 6.1 $R^2$ インフレーションの拡張モデル

$R^2$  インフレーションモデルにおける作用は、

$$S_S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \alpha R + \frac{\beta}{2} R^2 \right], \quad (6.1)$$

と書ける [24, 25]。 ここで、  $\alpha, \beta$  は定数とする。 本研究では、上記の作用を以下のように拡張する。

$$S_S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \alpha \left[ R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + \frac{\beta}{2} \left[ R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \gamma V(\phi) \right]^2 \right\}, \quad (6.2)$$

ここで、  $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$  であり、  $V(\phi)$  はスカラー場  $\phi$  のポテンシャルである。 また、  $\gamma$  は定数とする。 この作用を補助場  $\chi = R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \gamma V(\phi)$  を用いて書き直すと、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \alpha \left[ R - \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 - V(\psi) \right] + \beta \chi \left[ R - \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 - \gamma V(\psi) \right] - \frac{\beta}{2} \chi^2 \right\}, \quad (6.3)$$

となる。 式 (6.3) に共形変換  $g_{\mu\nu} = (1 + \frac{\beta}{\alpha} \chi)^{-1}$  を施すと、以下の Einstein frame における作用を得る。

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \alpha \left[ \tilde{R} - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}\psi)^2 - U(\phi, \psi) \right]. \quad (6.4)$$

ここで,  $\beta' \equiv \beta/\alpha$  とし,  $\psi$  は新たに導入したスカラー場 (スカラロン) であり,  $\psi \equiv -\sqrt{3} \ln(1 + \beta' \chi)$  で定義される. また, チルダ付きは Einstein frame における量を表す.  $U(\phi, \psi)$  は Einstein frame におけるポテンシャルであり,

$$U(\phi, \psi) = \frac{1}{2\beta'} \left( e^{\frac{1}{\sqrt{3}}\psi} - 1 \right)^2 + \left[ \gamma e^{\frac{1}{\sqrt{3}}\psi} - (\gamma - 1) e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\psi} \right] V(\phi), \quad (6.5)$$

とかける. 式 (6.5) の右辺1項目は,  $R^2$  インフレーションモデルにおけるポテンシャルに対応する. 以下では, チルダを省略して書くことにする.

Einstein frame における作用 (6.4) から得られる Friedmann 方程式と場の方程式はそれぞれ,

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\dot{\psi}^2}{2} + U(\phi, \psi) \right], \quad (6.6)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{dU(\phi, \psi)}{d\phi} = 0, \quad (6.7)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} - \frac{dU(\phi, \psi)}{d\psi} = 0, \quad (6.8)$$

となる. 上3式を用いて, スカラー場  $\phi$  のポテンシャルを,

$$V(\phi) = \frac{\rho}{2\beta'} \phi^2, \quad (6.9)$$

とした時の場  $\phi, \psi$  それぞれの振る舞いを見ていく. ここで,  $\rho$  は定数であり,  $\rho = 1$  の時  $\phi = \psi = 0$  で  $\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}$  となる. 図 6.1 に,  $\gamma = 0$  での  $\rho = 0.1, 1, 10$  における場の軌跡を載せた. 図 6.2, 6.3 はそれぞれ,  $\gamma = 1, 2$  でのものである. 3つの図に全てにおいて,  $\phi(t), \psi(t)$  の初期値は  $(\phi(0), \psi(0)) = (-7.6, 1), (\phi(0), \psi(0)) = (-7.6, 2), (\dot{\phi}(0), \dot{\psi}(0)) = (0, 0)$  とした.

$\rho = 10$  の場合では, どの  $\gamma$  においてもスカラー場  $\phi$  が先にゼロに近づき, その後スカラロン  $\psi$  はポテンシャルの最小値へ落ち込む.  $V(0) = 0$  の時ポテンシャル  $U$  は  $R^2$  モデルのポテンシャルとなるため,  $\rho$  が大きい時  $R^2$  インフレーションモデルに近い振る舞いをする.  $\rho = 0.1$  の場合では, スカラロン  $\psi$  は急速にポテンシャルの最小値へ落ち込む. この時,  $\phi$  の値の変化はゆっくりであることがわかる. また,  $\gamma$  が大きいほど  $\phi$  はより早くゼロに近くことがわかる.

## 6.2 テンソル・スカラー比とスペクトル指数

次に, このモデルにおけるテンソル・スカラー比  $r$  とスペクトル指数  $n_s$  を算出する. この節では, スカラー場  $\phi$  とスカラロン  $\psi$  がともにスローロールする場合を考えるため,  $\phi$  のポテンシャルとして,  $R^2$  インフレーションモデルとも同様の関数形,

$$V(\phi) = V_0 (1 - e^{-k\phi})^2, \quad (6.10)$$

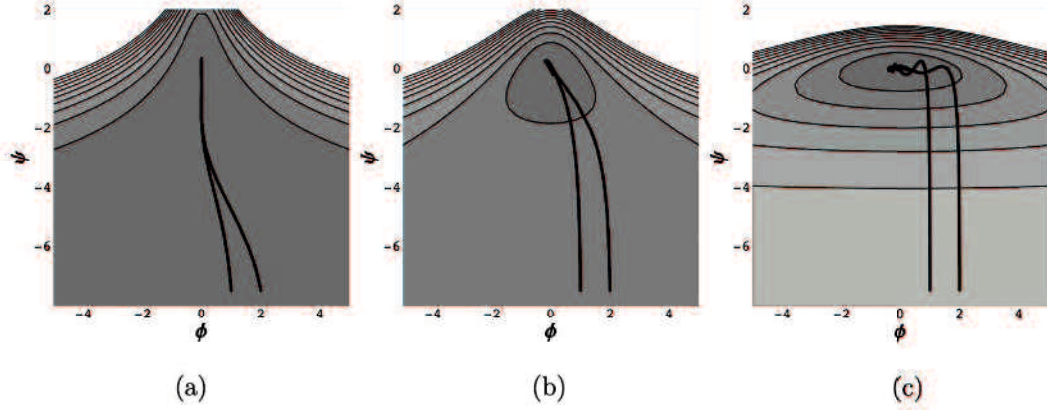


図 6.1:  $\gamma = 0$ におけるポテンシャル  $U(\psi, \phi)$  上での場  $\psi, \phi$  の軌跡. (a), (b), (c) はそれぞれ  $\rho = 10, 1, 0.1$  に対応する

を採用する. ここで,  $V_0, k$  は正の定数とする. 2つの場がどちらもスローロールする場合には, 以下のスローロール条件

$$\dot{\phi}, \dot{\psi} \ll U(\phi, \psi), \quad \ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}, \quad \ddot{\psi} \ll H\dot{\psi}, \quad (6.11)$$

を仮定することができる. したがって Friedmann 方程式と場の方程式はそれぞれ,

$$H^2 \simeq \frac{1}{3}U(\phi, \psi), \quad (6.12)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq \frac{dU(\phi, \psi)}{d\phi}, \quad (6.13)$$

$$3H\dot{\psi} \simeq \frac{dU(\phi, \psi)}{d\psi}, \quad (6.14)$$

と近似できる. この時, スローロールパラメータは,

$$\epsilon = \frac{U_\phi^2 + U_\psi^2}{U^2}, \quad (6.15)$$

$$\eta = \frac{2(\dot{\phi}^2 U_{\phi\phi} + \dot{\psi}^2 U_{\psi\psi} + 2\dot{\phi}\dot{\psi}U_{\phi\psi})}{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2)U}, \quad (6.16)$$

と書ける [74]. ただし,  $U_\phi \equiv \frac{\partial U}{\partial \phi}$  などとする. 膨張指数  $N$  は, ポテンシャル  $U$  を用いて表すと,

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = - \int_{\psi_i}^{\psi_f} \frac{U_\phi + U_\psi}{U} d\psi, \quad (6.17)$$

となる.

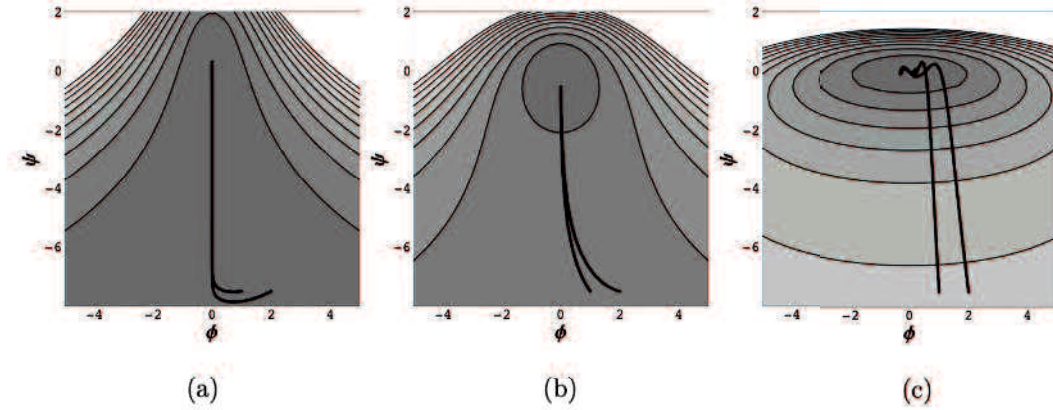


図 6.2:  $\gamma = 1$  におけるポテンシャル  $U(\psi, \phi)$  上での場  $\psi, \phi$  の軌跡. (a), (b), (c) はそれぞれ  $\rho = 10, 1, 0.1$  に対応する.

まず, スカラー場  $\phi$  とスカラー  $\psi$  が同様にスローロールする場合を考える. この時,  $\phi, \psi \gg 1$  とすると, ポテンシャル (6.5) は,

$$U(\phi, \psi) \sim \frac{1}{2\beta'} \left( e^{\frac{1}{\sqrt{3}}\psi} - 1 \right)^2, \quad (6.18)$$

と近似できる. この時, スローロールパラメータはそれぞれ,

$$\epsilon \sim \frac{4}{3} e^{\frac{4}{\sqrt{6}}\phi}, \quad (6.19)$$

$$\eta \sim \frac{4}{6} e^{-\frac{2}{\sqrt{6}}\phi}, \quad (6.20)$$

となる. 膨張指数は式 (4.55) と同じ形

$$N \simeq \frac{3}{4} e^{\sqrt{2/3}\phi}, \quad (6.21)$$

である. 上式を用いると, スローロールパラメータは膨張指数  $N$  を用いて以下のように書ける.

$$\epsilon \simeq \frac{3}{4N^2}, \quad \eta \simeq \frac{1}{2N}. \quad (6.22)$$

これらを用いて, テンソル・スカラー比  $r$  とスペクトル指数  $n_s$  を求めると,  $N = 55$  の時,

$$r \simeq 0.004, \quad n_s \simeq 0.980, \quad (6.23)$$

となる.  $\epsilon$  は  $R^2$  インフレーションモデルのものと同じであるため, このモデルにおけるテンソル・スカラー比  $r$  は  $R^2$  モデルと同じ結果となる. しかし, 式 (4.57) と比較すると,  $\eta$  は  $R^2$  モデルのものと  $\frac{1}{2}$  だけ違うため, スペクトル指数  $n_s$  は変化する [74]. Planck 衛星の制限 (3.91) では  $n_s = 0.9659 \pm 0.041$  なので,  $\phi, \psi$  が同じように

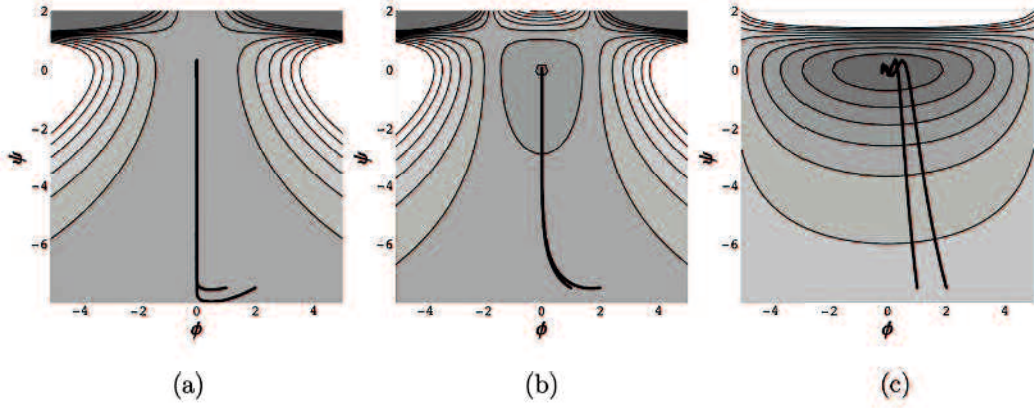


図 6.3:  $\gamma = 2$ におけるポテンシャル  $U(\psi, \phi)$  上での場  $\psi, \phi$  の軌跡. (a), (b), (c) はそれぞれ  $\rho = 10, 1, 0.1$  に対応する

スローロールしている場合には,  $1\sigma$  の精度では観測と合わないことがわかった.

次に, 2つの場が異なる転がり方をする場合を考える.  $\dot{\psi} = n\dot{\phi}$  ( $n$  は整数) と仮定すると, スローロールパラメータはそれぞれ,

$$\epsilon \sim \frac{4}{3} e^{\frac{4}{\sqrt{6}}\phi}, \quad (6.24)$$

$$\eta \sim \frac{n}{n+1} e^{-\frac{2}{\sqrt{6}}\phi}, \quad (6.25)$$

となる [74]. 膨張指数  $N$  を用いて表すとそれぞれ,

$$\epsilon \simeq \frac{3}{4N^2}, \quad \eta \simeq \frac{n}{(n+1)N}. \quad (6.26)$$

と表される. 上式より, 場の振る舞いの違いはスローロールパラメータ  $\eta$  にのみ反映される.

スカラー  $\psi$  がスカラー場  $\phi$  よりも早くポテンシャルを転がるとすると,  $n = 100$  とし膨張指数  $N = 55 - 65$  での  $r$  と  $n_s$  はそれぞれ,

$$r = 0.004 - 0.002, \quad n_s = 0.958 - 0.968, \quad (6.27)$$

となる. したがって,  $\phi, \psi$  が同じように転がる場合よりも Planck 衛星の結果に近い  $n_s$  となることがわかった.

スカラー場  $\phi$  がスカラー  $\psi$  よりも早くポテンシャルを転がるとすると,  $n = 1/100$  とし膨張指数  $N = 55 - 65$  での  $r$  と  $n_s$  はそれぞれ,

$$r = 0.004 - 0.002, \quad n_s = 0.997 - 0.998, \quad (6.28)$$

となる. したがって,  $\phi, \psi$  が同じように転がる場合と同様に,  $1\sigma$  の精度では観測と合わないことがわかった.



## 第7章 まとめ

本研究では、 $f(R)$  重力理論に基づいたインフレーションモデルと現在の加速膨張を説明するモデルを組み合わせ、1つの  $f(R)$  統一モデルで宇宙初期から現在までの宇宙の発展を説明可能であるかを議論した。統一モデルが現実的なモデルであるかを調べるにあたって、インフレーション期に生成されるゆらぎの大きさとスケール依存性が CMB 観測からの制限と一致しているか、および、インフレーション以降の宇宙の発展とモデルパラメータとの関係性について検証を行った。そして、統一モデルにすることで、宇宙の局所領域で第5の力を抑制するカメレオン機構が破綻しないかを検証した。

本論文では、拡張 AL モデル、Starobinsky DE +  $R^n$  モデル、 $g$ -AB +  $R^n$  モデルの3つの  $f(R)$  統一モデルを用いて検証を行った。これらのモデルは全て、インフレーションを起こす項 ( $\alpha R^n$ ) と現在の加速膨張を起こすダークエネルギー項を組み合わせたモデルである。

### 7.1 CMB 観測からのインフレーションモデルへの制限

本論文では、まず  $f(R)$  統一モデルが CMB の観測結果と矛盾なくインフレーションを起こすためのモデルパラメータの推定を行った。インフレーション中はスカラー曲率  $R$  が十分大きいので、 $\alpha$  項と DE 項を比較すると、前者は後者よりも十分大きくなるのがわかる。したがって3つの統一モデルは共に、ダークエネルギー (DE) 項を無視したモデル： $f(R) = R + \alpha R^n$  に近似することができる。

$f(R) = R + \alpha R^n$  モデルにおけるテンソル・スカラー比  $r$  とスペクトル指数  $n_s$  を Einstein frame で求めると、べき  $n$  に依存することがわかった。この結果から  $n$  の値を変えて  $r$  と  $n_s$  を算出し、Planck 衛星による最新の CMB の観測からの制限と比較することで、 $n$  に対して  $1.991 < n < 2.003$  (95% CL,  $N = 60$ ) という制限を得た。これは BICEP2 の結果を使用して得られた先行研究の結果を訂正するものである。

また、先行研究で提案された統一モデル： $f(R) = R + \alpha R^n - \beta R^{2-n}$  では、 $\alpha$  項のべきと DE 項のべきに同じパラメータを用いていたため、 $n > 2$  の場合には DE 項は負冪になってしまう。この時、 $f(R)$  DE モデルが満たすべき条件を破ってしまうため、先行研究のモデルでは  $n > 2$  は排除されてしまうが、拡張 AL モデルでは、このような制限はなくなる。

## 7.2 インフレーション以降の宇宙の発展

次に、前節の  $n$  の条件下で、統一モデルにおけるインフレーション以降の宇宙の発展を調べた。  $f(R)$  重力理論における Friedmann 方程式の各項を変数と定義し、それらの発展方程式を数値的に解くことで、各エネルギー成分の密度パラメータと有効状態方程式、そして DE の状態方程式の時間発展を求めた。

本論文では拡張 AL モデルを例にとり、それぞれの時間発展とモデルパラメータとの関係を調べた。インフレーション以降では、スカラー曲率  $R$  はインフレーション中の  $R$  に比べ十分小さいことから、先ほどのインフレーション中とは逆に、 $\alpha$  項は DE 項に比べて十分小さくなる。したがって拡張 AL モデルは  $\alpha$  項を無視した DE モデルに近似できる。その結果、べき  $p$  を大きくするほど、物質優勢期の継続期間が長くなり、DE の状態方程式  $w_{\text{DE}}$  の時間変化の割合が大きいくことがわかった。また、数値計算の結果から、DE の密度パラメータの現在値  $\Omega_{\text{DE},0}$  とモデルパラメータとの関係性を見積もり、CMB 観測から得られた現在値  $\Omega_{\text{DE},0} \sim 0.7$  と比較することで、 $\tilde{\beta} = \mathcal{O}(1)$  と見積もった。

## 7.3 スカラー場の質量に対するインフレーション項の寄与

最後に、統一モデルにおける重力テストの検証を行った。前2節の検証では、インフレーション中は  $\alpha$  項のみ、それ以降は DE 項のみのモデルに近似できるため、 $f(R)$  統一モデルに関する先行研究と同様に、統一モデルにすることによる寄与は見られなかった。また、 $f(R)$  統一モデルに関する先行研究においても、現在とインフレーション中のエネルギースケールは大きく違うことから、それぞれの時期以外では互いに寄与しないものとしていた。しかし、スカラー場の質量は有効ポテンシャルに依存しており、統一モデルにすることでポテンシャルの関数形が変化するため、統一モデルと DE 項のみのモデルでは場の質量が変わる可能性があると考えた。このことから、本論文では3つの統一モデルにおける、有効ポテンシャルの最小値でのスカラー場と質量を求め、それぞれのモデルでインフレーション項が質量にどのように寄与するかを調べることで、カメレオン機構が破綻してしまわないかを検証した。

まず、拡張 AL モデルの場合は、DE 項のみのモデルに対する重力テストからの制限は非常に厳しく、修正重力理論モデルとしては不適切なモデルであった。そこで、このモデルでは  $\alpha$  項を加えることでべきの制限が緩和され、現実的なモデルへ回復するかを検証した。 $\alpha$  項が DE 項よりも優勢となって寄与するためには、DE 項のべき  $p$  が重力テストから得られる制限  $p < 10^{-10}$  よりも十分小さいか、局所的な密度が  $\rho^* \sim 10^{26} [\text{g}/\text{cm}^3]$  より十分大きくなければならないことがわかった。したがって、モデルパラメータ  $p$  への制限は、DE 項のみのモデルのものと一致することがわかった。以上の結果から、この統一モデルは  $R^2$  インフレーションモデルと宇宙定数を組



み合わせたモデルに帰着するため、修正重力理論モデルとしては棄却され、先行研究の結果を覆す結果となった。

一方、Starobinsky DE +  $R^n$  モデルの場合は、DE 項のみのモデルは修正重力理論モデルとして現実的なモデルであった。そこで、 $\alpha$  項を加えることでスカラー場の質量が軽くなり、カメレオン機構が破綻してしまわないかを検証した。その結果、インフレーションのエネルギースケールよりも十分小さいエネルギースケールで、 $\alpha$  項が場の質量に寄与することわかった。 $\alpha$  項が  $R^2$  の場合 ( $n = 2$ ) には、質量は有効ポテンシャルの二階微分で定義されるため  $\alpha$  項は周囲の密度に依存せず一定値となる。したがって、 $\alpha$  項が DE 項よりも優勢になると、質量は一定値に落ち着き、地球程度のスケールでカメレオン機構は問題なく働くことがわかった。また、 $n$  を 2 からずらすと質量に対する  $\alpha$  項の寄与は周囲の密度に依存する。 $n > 2$  の場合には密度が高くなるにつれ質量は減少していくが、地球程度のスケールでは質量のオーダーの変化はみられなかった。 $g$ -AB +  $R^n$  モデルも同様の結果となったことから、これらの統一モデルでは、 $\alpha$  項を考慮しても、カメレオン機構は問題なく機能することがわかった。

## 7.4 今後の課題

最後の結果より、インフレーションのエネルギースケールよりも小さいエネルギースケールで  $\alpha$  項は場の質量に寄与するが、地球程度のスケールではカメレオン機構が働かなくなるほど軽くはならないことから、統一モデルを考慮しても重力テストからの制限は変わらないことがわかった。また、どちらの統一モデルにおいても、一度重くなったスカラー場の質量が軽くなり、対応するコンプトン波長がホライズンスケール程度まで大きくなる密度は、 $\rho^* \sim 10^{81} [\text{g}/\text{cm}^3]$  であった。これは、インフレーションのエネルギースケール程度にならないとスカラー場の質量は重いままであり、スカラー場は隠されてしまうことを意味する。したがって、統一モデルと宇宙初期・現在の加速膨張を別々に考えるモデルを観測により区別することは難しいことがわかった。

本論文では、インフレーション項として  $\alpha R^n$  を採用したが、このインフレーションモデルは高いエネルギースケールでインフレーションを起こすモデルであるため、上記のような結果となった。一方、低いエネルギースケールでインフレーションを起こすモデルを組み合わせることで、スカラー場の質量がインフレーションのエネルギースケールより低い密度で軽くなり始める可能性がある。すると、宇宙初期と現在の加速膨張を統一して説明するモデルが妥当なモデルであるのかを、観測的に検証することが可能となるかもしれない。この研究は、今後の課題として残す。



## 付録 A 宇宙論的摂動論

本文 3.2.2 節で述べたように、宇宙初期や大スケールな宇宙におけるゆらぎの計算においては、非線形項を無視し線形近似で解析することができる。ここでは、宇宙論的なゆらぎの計算で用いられる線形摂動論において、特に本文に関連する内容について触れる。

### A.1 線形摂動での FLRW 計量

計量テンソルを一様等方成分  $\bar{g}_{\mu\nu}$  と非一様等方成分  $h_{\mu\nu}$  に分解する。

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

摂動成分  $h_{\mu\nu}$  を、

$$h_{00} = -2a^2 A, \quad h_{0i} = -a^2 B_i, \quad h_{ij} = 2a^2 C_{ij}, \quad (\text{A.2})$$

と定義される変数で書き直す。ここで、3次元スカラー  $A$ 、3次元ベクトル  $B_i$ 、3次元テンソル  $C_{ij}$  である。すると、摂動を考慮した FLRW 計量は以下のようなになる。

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[ -(1 + 2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + (\gamma_{ij} + 2C_{ij})dx^i dx^j \right]. \quad (\text{A.3})$$

### A.2 線形 Einstein 方程式

宇宙定数  $\Lambda$  を含む Einstein 方程式 (2.15)

$$G_{\nu}^{\mu} + \Lambda \delta_{\nu}^{\mu} = 8\pi G T_{\nu}^{\mu}, \quad (\text{A.4})$$

において、Einstein テンソル  $G_{\nu}^{\mu}$  とエネルギー運動量テンソル  $T_{\nu}^{\mu}$  を、背景成分  $\bar{G}_{\nu}^{\mu}, \bar{T}_{\nu}^{\mu}$  と摂動成分  $\delta G_{\nu}^{\mu}, \delta T_{\nu}^{\mu}$  に分解すると、Einstein 方程式の摂動成分は、

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = 8\pi G \delta T_{\nu}^{\mu}, \quad (\text{A.5})$$

となる。

上式を具体的に書き下す。Einstein テンソルは  $G_{\nu}^{\mu} = R_{\nu}^{\mu} - \delta_{\nu}^{\mu} R/2$  であることから、摂動計量 (A.3) をクリストッフェル記号  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  の定義式

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}), \quad (\text{A.6})$$

に代入し、曲率テンソル  $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (\text{A.7})$$

リッチテンソル  $R_\nu^\mu = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$  およびスカラー曲率  $R = R_\mu^\mu$  を求めることで、Einstein テンソルの線形近似が求まる。

一般に曲がった時空におけるエネルギー運動量テンソルは、

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u_\nu^\mu + p\delta_\nu^\mu + \sigma_\nu^\mu, \quad (\text{A.8})$$

で与えられる。ここで、 $\rho$  はエネルギー密度、 $p$  は圧力、 $u^\mu$  は流体素片の4元速度、 $\sigma_{\mu\nu}$  は非等方応力テンソルである。これら成分の線形近似の式を求めることで、 $T_\nu^\mu$  の線形近似が求まる。

線形近似の Einstein テンソルおよびエネルギー運動量テンソルから摂動成分のみを取り出し、式 (A.5) に代入すれば、以下の線形 Einstein 方程式を導出することができる。

$$3\mathcal{H}^2 A - \mathcal{H}B_i^i - \mathcal{H}C_i^{i'} + KC_i^i - \frac{1}{2}C_{|ji}^{ij} + \frac{1}{2}C_{ij}^i{}^j = -4\pi Ga^2 \bar{\rho}, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathcal{H}A_{|i} + KB_i + \frac{1}{4}B_{|ij}^j - \frac{1}{4}B_{ij}^j + C_{[ij]}^j{}' = -4\pi Ga^2 (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i), \quad (\text{A.10})$$

$$3\mathcal{H}A' + 3(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')A + \Delta A - B_i^{i'} - 2\mathcal{H}B_i^i - C_i^{i''} - 2\mathcal{H}C_i^{i'} + KC_i^i - \frac{1}{2}C_{|ji}^{ij} + \frac{1}{2}C_{ij}^i{}^j = 12\pi Ga^2 \delta p, \quad (\text{A.11})$$

$$\left( \delta_k^i \delta_l^j - \frac{1}{3} \gamma_{kl} \gamma^{ij} \right) \left( A_{|ij} - B_{(ij)}' - 2\mathcal{H}B_{(ij)} - C_{ij}'' - 2\mathcal{H}C_{ij}' + 4KC_{ij} + C_{ij|m}^m + C_{m|ij}^m - 2C_{m(ij)}^m \right) = -8\pi Ga^2 \bar{p} \Pi_{kl}, \quad (\text{A.12})$$

ここで、バー付きの量は背景成分、 $\delta p$  は圧力のゆらぎ、プライム (') は共形時間  $\tau$  での微分である。また、 $\mathcal{H} = aH$  は共形時間におけるハッブル定数、 $K$  は曲率、 $\Delta$  はラプラシアンであり、 $\Pi_{ij} = \sigma_{ij}/p$  は非等方応力テンソルを圧力で無次元化した量である。添字の前後にある丸括弧は、添字の置換について対称化することを意味し、 $2C_{(ij)} \equiv C_{i,j} + C_{j,i}$  で定義される。また、角括弧は、添字の置換について非対称化することを意味し、 $2C_{[ij]} \equiv C_{i,j} - C_{j,i}$  で定義される。添字にある縦線は、3次元共変微分である。

### A.3 ゲージ変換

式 (A.1) において、一様等方成分と非一様等方成分に分解した。この時、背景時空と摂動時空で同じ座標値を持つ時空点同士で計量を比較し、その差を摂動成分と定義している。摂動時空の座標の取り方によって比較する時空点に任意性があるため、背景時空の時空点と摂動時空の時空点の対応関係は一意的ではない。この対応関係

に対する自由度のことをゲージ自由度という。そして、その対応関係を決めることをゲージ固定という。ゲージ自由度は物理的な自由度ではないため、異なるゲージ固定の間の変換であるゲージ変換に対して不変な量だけが物理的な意味を持つことになる。

ゲージ自由度に対するゲージ変換を見るために、摂動時空中における座標変換

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (\text{A.13})$$

を考える。ここで、 $\xi^\mu$  は計量の摂動と同程度のオーダーの微小量とする。この時、計量は、

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad (\text{A.14})$$

と変換される。上式を用いて、同じ座標値  $x$  を持つ点で計量を比較すると、 $\xi^\mu$  の一次までのオーダーで、

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\alpha}(x)\xi_{,\nu}^\alpha - g_{\nu\alpha}(x)\xi_{,\mu}^\alpha - g_{\mu\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha, \quad (\text{A.15})$$

となる。ゲージ変換では背景時空の座標は固定しているので、この座標変換は摂動部分にのみ作用する。座標変換を時間成分と空間成分 ( $\xi^\mu = (T, L^i)$ ) に分けて計算すると、計量の摂動成分は、

$$A \rightarrow \tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T, \quad (\text{A.16})$$

$$B_i \rightarrow \tilde{B}_i = B_i + L_i' - T|_i, \quad (\text{A.17})$$

$$C_{ij} \rightarrow \tilde{C}_{ij} = C_{ij} - \mathcal{H}T\gamma_{ij} - L_{(ij)}, \quad (\text{A.18})$$

となる。

エネルギー運動量テンソルに対しては、

$$T_\nu^\mu \rightarrow \tilde{T}_\nu^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} T_\beta^\alpha(x), \quad (\text{A.19})$$

と変換されるので、座標変換と線形近似下で、

$$\tilde{T}_\nu^\mu(x) - T_\nu^\mu(x) = T_\nu^\alpha(x)\xi_{,\alpha}^\nu - T_\beta^\mu(x)\xi_{,\nu}^\beta - T_{\nu,\alpha}^\mu(x)\xi^\alpha, \quad (\text{A.20})$$

となる。これをエネルギー運動量テンソルの成分ごとに計算すると、

$$\delta \rightarrow \tilde{\delta} = \delta - \frac{\tilde{p}'}{\bar{\rho}} T, \quad (\text{A.21})$$

$$v_i \rightarrow \tilde{v}_i = v_i + L_i', \quad (\text{A.22})$$

$$\delta p \rightarrow \tilde{\delta p} = \delta p - \tilde{p}' T, \quad (\text{A.23})$$

$$\Pi_j^i \rightarrow \tilde{\Pi}_j^i = \Pi_j^i, \quad (\text{A.24})$$

となる。ここで、 $\delta$  はエネルギー密度のゆらぎ、 $v_i = u^i/u^0$  は速度の空間成分である。上式より、非等方応力テンソルはゲージ不変量であることがわかる。

計量に対するゲージ変換の式 (A.16) - (A.18)、およびエネルギー運動量テンソルに対するゲージ変換の式 (A.21) - (A.24) を、線形 Einstein 方程式 (A.9) - (A.12) に代入すると、方程式は不変に保たれることがわかる。したがって、線形 Einstein 方程式はゲージ変換に対して不変である。

## A.4 スカラー・テンソル・ベクトル分解

式 (A.16) - (A.18) を見るとわかるように、ゲージ自由度が混在している。そこで、摂動量をスカラー型成分、ベクトル型成分、テンソル型成分の3つの成分に分解することで、線形近似では互いに独立に扱うことが出来る。このように分解することを、スカラー・テンソル・ベクトル分解 (SVT 分解) という。以下では、スカラー型成分には (S)、ベクトル型成分には (V)、テンソル型成分には (T) を添字につけて表すことにする。

計量の摂動成分  $A, B_i, C_{ij}$  に対して SVT 分解を適用すると、3次元スカラー成分  $A$  は、そのままスカラー型成分となる。3次元ベクトル成分である  $B_i$  は、スカラー場  $B^{(S)}$  から生成される成分とその他の成分に分解する。

$$B_i = B^{(S)}|_i + B_i^{(V)}. \quad (\text{A.25})$$

また、 $B_i^{(V)}$  は発散がゼロ、つまり、

$$B^{(V)}|_i{}^i = 0, \quad (\text{A.26})$$

を満たすものとする。 $B^{(S)}$  を  $B_i$  のスカラー型成分といい、 $B_i^{(V)}$  を  $B_i$  のベクトル型成分という。したがって、 $B_i$  は1自由度のスカラー型成分と2自由度のベクトル型成分に分解される。

同様にして3次元テンソル成分  $C_{ij}$  も、スカラーの共変微分で生成される成分とベクトルの共変微分で生成される成分、 $\gamma_{ij}$  に比例する成分、その他の成分に分解することができる。

$$C_{ij} = \gamma_{ij}D + E^{(S)}|_{ij} + E^{(V)}{}_{(ij)} + E^{(T)}{}_{ij}, \quad (\text{A.27})$$

となる。ここで、 $D$  はトレース成分、 $E_{ij}^{(T)}$  は縦波かつトレースレス、つまり、

$$E^{(T)}{}_{ij}|^{ij} = 0, \quad E^{(T)}{}_i{}^i = 0, \quad (\text{A.28})$$

をみだし、 $E^{(V)}{}_i$  は式 (A.26) と同じ条件をみたす。したがって、 $C_{ij}$  は2自由度のスカラー型摂動、2自由度のベクトル型摂動、2自由度のテンソル型摂動に分解される。

ゲージ変換の変数  $(T, L^i)$  にも SVT 分解を適用することができる。時間並進の変数  $T$  は、そのままスカラー型成分である。空間並進の変数  $L^i$  は3次元ベクトル場なので、 $L^i = L^{(S)}{}^i + L^{(V)}{}^i$  と分解される。ここで、 $L^{(V)}$  は式 (A.26) と同じ条件をみたす。

計量の摂動成分のゲージ変換の式 (A.16) - (A.18) に SVT 分解を適用すると、スカラー型・ベクトル型・テンソル型成分それぞれが互いに独立にゲージ変換する。これが、SVT 分解を考える利点である。スカラー型成分については、

$$A \rightarrow \tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T, \quad (\text{A.29})$$

$$B^{(S)} \rightarrow \tilde{B}^{(S)} = B^{(S)} + L^{(S)'} - T, \quad (\text{A.30})$$

$$D \rightarrow \tilde{D} = D - \mathcal{H}T, \quad (\text{A.31})$$

$$E^{(S)} \rightarrow \tilde{E}^{(S)} = E^{(S)} - L^{(S)}, \quad (\text{A.32})$$

ベクトル型成分については,

$$B_i^{(V)} \rightarrow \tilde{B}_i^{(V)} = B_i^{(V)} + L_i^{(V)'}, \quad (\text{A.33})$$

$$E_i^{(V)} \rightarrow \tilde{E}_i^{(V)} = E_i^{(V)} - L_i^{(V)}, \quad (\text{A.34})$$

テンソル型成分については,

$$E_{ij}^{(T)} \rightarrow \tilde{E}_{ij}^{(T)} = E_{ij}^{(T)}, \quad (\text{A.35})$$

となる. 以上より, スカラー型・ベクトル型成分はゲージ変換されるが, テンソル型成分はゲージ変換に対して不変となる.

エネルギー運動量テンソルに含まれる摂動量  $\delta, v_i, \delta p, \Pi_{ij}$  にも SVT 分解を適用することができる.  $\delta, \delta p$  は 3次元スカラー量なので, そのままスカラー型成分となる. 3次元ベクトル量である  $v_i$  は, 計量のベクトル量  $B_i$  と同様に分解され,  $v_i = v_i^{(S)} + v_i^{(V)}$  となる. 非等方応力テンソル  $\Pi_{ij}$  はトレースなしの対称テンソルであることを考慮すると,

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(S)} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta\Pi^{(S)} + \Pi_{(ij)}^{(V)} + \Pi_{ij}^{(T)}, \quad (\text{A.36})$$

と分解される. これらを用いると, エネルギー運動量テンソルの摂動量のゲージ変換の式 (A.21) - (A.24) のスカラー型成分は,

$$\delta \rightarrow \tilde{\delta} = \delta - \frac{\vec{p}'}{\rho}T, \quad (\text{A.37})$$

$$v^{(S)} \rightarrow \tilde{v}^{(S)} = v^{(S)} + L^{(S)'}, \quad (\text{A.38})$$

$$\delta p \rightarrow \tilde{\delta p} = \delta p - \vec{p}'T, \quad (\text{A.39})$$

$$\Pi^{(S)} \rightarrow \tilde{\Pi}^{(S)} = \Pi^{(S)}, \quad (\text{A.40})$$

ベクトル型成分は,

$$v_i^{(V)} \rightarrow \tilde{v}_i^{(V)} = v_i^{(V)} + L_i^{(V)'}, \quad (\text{A.41})$$

$$\Pi_i^{(V)} \rightarrow \tilde{\Pi}_i^{(V)} = \Pi_i^{(V)}, \quad (\text{A.42})$$

テンソル型成分は,

$$\Pi_{ij}^{(T)} \rightarrow \tilde{\Pi}_{ij}^{(T)} = \Pi_{ij}^{(T)}, \quad (\text{A.43})$$

となる.

以上の SVT 分解した変数で線形 Einstein 方程式 (A.9) - (A.12) を成分ごとに求めると, スカラー型成分は,

$$3\mathcal{H}^2 A - \mathcal{H}\Delta B^{(S)} - 3\mathcal{H}D' + (\Delta + 3K)D - \mathcal{H}\Delta E^{(S)'} = -4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta, \quad (\text{A.44})$$

$$\mathcal{H}A + KB^{(S)} - D' + KE^{(S)'} = -4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) (v^{(S)} - B^{(S)}), \quad (\text{A.45})$$

$$3\mathcal{H}A' + 3(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')A + \Delta A - \Delta B^{(S)'} - 2\mathcal{H}\Delta B^{(S)} - 3D'' - 6\mathcal{H}D' \\ + (\Delta + 3K)D - \Delta E^{(S)''} - 2\mathcal{H}\Delta E^{(S)'} = 12\pi G a^2 \delta p, \quad (\text{A.46})$$

$$A - B^{(S)'} - 2\mathcal{H}B^{(S)} + D - E^{(S)''} - 2\mathcal{H}E^{(S)'} = -8\pi G a^2 \bar{p}\Pi^{(S)}, \quad (\text{A.47})$$

となる。また、ベクトル型成分は、

$$(\Delta + 2K)B_i^{(V)} + (\Delta + 2K)E_i^{(V)'} = -16\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})\left(v_i^{(V)} - B_i^{(V)}\right), \quad (\text{A.48})$$

$$B_i^{(V)'} + 2\mathcal{H}B_i^{(V)} + E_i^{(V)''} + 2\mathcal{H}E_i^{(V)'} = 8\pi Ga^2\bar{p}\Pi^{(V)}, \quad (\text{A.49})$$

となり、テンソル型成分は、

$$E_{ij}^{(T)''} + 2\mathcal{H}E_{ij}^{(T)'} - (\Delta - 2K)E_{ij}^{(T)} = 8\pi Ga^2\bar{p}\Pi_{ij}^{(T)}, \quad (\text{A.50})$$

となる。

## A.5 ゲージ不変量による Einstein 方程式

線形 Einstein 方程式の解を求めるには、ゲージ固定をしてゲージ自由度を取り除いてから方程式をとけば良いが、ゲージ依存する量としない量の区別がつきにくい。そこで、線形 Einstein 方程式がゲージ変換に対して不変であることを利用し、ゲージ不変量のみで方程式を書き下すことで、ゲージ固定せずに方程式を解くことができる。この方法を、ゲージ不変摂動論という。

本文ではベクトル型摂動は減衰するため考慮していないので、以下ではスカラー型摂動およびテンソル型摂動のみを考える。

### A.5.1 スカラー型摂動

計量のスカラー型摂動のゲージ変換の式 (A.29) - (A.32) では、ゲージ自由度は  $T, L^{(S)}$  の2つなので、4つある変数のうち2つが物理的な自由度である。したがって、ゲージ変換を受けない2つの線形独立なゲージ不変量を作ることができる。式 (A.30), (A.32) より、

$$\tilde{B}^{(S)} + \tilde{E}^{(S)} = B^{(S)} + E^{(S)'} - T, \quad (\text{A.51})$$

$$\tilde{E}^{(S)} = E^{(S)} - L^{(S)}, \quad (\text{A.52})$$

という関係式が得られるので、これらを用いて式 (A.29), (A.31) からゲージ自由度  $T$  が打ち消されるような量を見ると、ゲージ変換を受けない量として以下の2つの線形独立な組み合わせが得られる。

$$\Phi = A - \left(B^{(S)} + E^{(S)'}\right)' - \mathcal{H}\left(B^{(S)} + E^{(S)'}\right), \quad (\text{A.53})$$

$$\Psi = D - \mathcal{H}\left(B^{(S)} + E^{(S)'}\right). \quad (\text{A.54})$$

これらのゲージ不変量  $\Phi, \Psi$  をバーディーンポテンシャルという。



式 (A.37) - (A.40) より, エネルギー成分のスカラー型摂動量もゲージ変換に対して不変ではない. 式 (A.51), (A.52) よりゲージ依存する項を打ち消すような組み合わせを考えると, 以下のゲージ不変量が得られる.

$$\delta^{(\text{GI})} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} \left( B^{(\text{S})} + E^{(\text{S}')'} \right), \quad (\text{A.55})$$

$$v^{(\text{GI})} = v^{(\text{S})} + E^{(\text{S}')'}, \quad (\text{A.56})$$

$$\delta p^{(\text{GI})} = \delta p - \bar{p}' \left( B^{(\text{S})} + E^{(\text{S}')'} \right), \quad (\text{A.57})$$

式 (A.51) - (A.57) を用いると, 変数  $A, D, \delta, \delta p, v^{(\text{S})}$  はゲージ不変な変数  $\Phi, \Psi, \delta^{(\text{GI})}, v^{(\text{GI})}, \delta p^{(\text{GI})}$  とゲージ依存する変数  $B^{(\text{S})}, E^{(\text{S}')'}$  で表すことができる. これらをスカラー型成分の線形 Einstein 方程式 (A.44) - (A.47) に代入すると,

$$3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi - \Psi') + (\Delta + 3K)\Psi = -4\pi Ga^2 \bar{\rho} \delta^{(\text{GI})}, \quad (\text{A.58})$$

$$\mathcal{H}\Phi - \Psi' = -4\pi Ga^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) v^{(\text{GI})}, \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi + (\Delta + 3K)\Psi + 3(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Phi \\ + 3\mathcal{H}\Phi' - 6\mathcal{H}\Psi' - 3\Psi'' = 12\pi Ga^2 \delta p^{(\text{GI})}, \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

$$\Phi + \Psi = -8\pi Ga^2 \bar{p} \Pi^{(\text{S})}, \quad (\text{A.61})$$

となり, ゲージ依存する変数は打ち消され, 最終的にゲージ不変量のみで書き表すことができる. また, 式 (A.58), (A.59) より,

$$(\Delta + 3K)\Psi = -4\pi Ga^2 \bar{p} \left[ \delta^{(\text{GI})} + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} v^{(\text{GI})} \right], \quad (\text{A.62})$$

が成り立つ. 上式は, ポアソン方程式に対応している.

## A.5.2 テンソル型摂動

式 (A.35) で見たように, テンソル型成分はゲージ変換に対して不変であるため,  $E_{ij}^{(\text{T})}$  はゲージ不変量となる. したがって, テンソル型成分の線形 Einstein 方程式はゲージ不変な方程式となっている. テンソル型摂動はトレースレスかつ発散がゼロなので, テンソル型摂動の自由度は重力波に対応する. よって, 式 (A.50) は膨張宇宙における重力波の波動方程式となる.

## A.6 ゲージ固定

前節までの議論で, ゲージ不変摂動論を用いればゲージ固定する必要はないことを述べたが, ゲージ固定する方が簡単になる場合もある. ゲージ固定の方法はいくつかあるが, 本文に関連する共動ゲージと空間的平坦ゲージについてのみ紹介する. この節では, スカラー型成分についてのみ考え, (S) の添字は省略する. スカラー型

成分のゲージ自由度は2つであったことから、2つの条件を課すことでゲージ固定することができる。

共動ゲージにおけるゲージ条件は、

$$B = v, \quad E = 0, \quad (\text{A.63})$$

である。このゲージでは、時間一定面が4元速度と垂直となり、空間的なゆらぎの非等方性分が消えるため、空間の膨張は等方的である。残りの摂動計量を、 $A = \xi, D = \zeta$  とおくと、線素 (A.3) は以下ようになる。

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[ -(1 + 2\xi)d\tau^2 - 2v_{|i}d\tau dx^i + (1 + 2\zeta)\gamma_{ij}dx^i dx^j \right]. \quad (\text{A.64})$$

また、バーディーンポテンシャル (A.53), (A.54) は、

$$\Phi = \xi - v' - \mathcal{H}v, \quad \Psi = \zeta - \mathcal{H}v, \quad (\text{A.65})$$

となる。また、エネルギー成分に対するゲージ不変量 (A.55) - (A.57) はそれぞれ、

$$\delta^{(\text{GI})} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}v, \quad v^{(\text{GI})} = v, \quad \delta p^{(\text{GI})} = \delta p - \bar{p}'v, \quad (\text{A.66})$$

となる。

共動ゲージにおける空間計量の等方的なゆらぎ $\zeta$ は曲率ゆらぎと呼ばれる。曲率ゆらぎは、ホライズンよりも大きなスケールで時間的に一定値になる場合があるという性質がある。これをみるために、式 (A.55), (A.56) よりゲージ不変な密度ゆらぎを、

$$\Delta \equiv \delta^{(\text{GI})} - 3\mathcal{H}(1+w)v^{(\text{GI})} = \delta + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{p}}(v^{(\text{S})} - B^{(\text{S})}), \quad (\text{A.67})$$

と定義しなおしたものをを用いる。これは、 $\Phi, \Psi, \Pi$  と共にゲージ不変な変数であり、バーディーン変数と呼ばれる。これらを用いると、 $\xi, \zeta$  は、

$$\xi = \Phi + V' + \mathcal{H}v, \quad \zeta = \Psi + \mathcal{H}v, \quad (\text{A.68})$$

と書ける。スカラー型成分の線形 Einstein 方程式 (A.59) を用いると、曲率ゆらぎは、

$$\zeta = \Psi - \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}\Phi - \Psi'}{\mathcal{H}\Omega(1+w)}, \quad (\text{A.69})$$

のように、バーディーンポテンシャルのみで書き表される。ここで、 $\Omega$  は密度パラメータである。

曲率ゆらぎの時間変化を求めるために、式 (A.68) を  $\tau$  で微分すると、

$$\zeta' = \Psi' + \mathcal{H}'v + \mathcal{H}v', \quad (\text{A.70})$$

となる. 式 (A.68) の 1 式目, および背景成分の Einstein 方程式とエネルギー運動量保存則を用いて  $V', \mathcal{H}', \Psi'$  を消去すると, 上式は以下のように書ける.

$$\zeta' = \mathcal{H}\xi + K v. \quad (\text{A.71})$$

ここで, 式 (A.68) の 1 式目と, バーティーン変数を用いて式 (A.61) を書き直した式を用いると, 最終的に  $\zeta'$  は,

$$\zeta' = \frac{2}{9} \frac{1}{\mathcal{H}\Omega(1+w)} (\Delta + 3K) [(1 + 3c_s^2)\Psi + \Phi] - \frac{w}{1+w} \Gamma \mathcal{H} + K v, \quad (\text{A.72})$$

と書ける. ここで,  $c_s^2 = \bar{p}'/\bar{\rho}'$  は音速パラメータ,  $\Gamma$  はエントロピーゆらぎであり,

$$\Gamma = \frac{\delta p^{(\text{GI})} - c_s^2 \bar{\rho} \delta^{(\text{GI})}}{\bar{p}}, \quad (\text{A.73})$$

で表される.

宇宙初期などの曲率とエントロピーゆらぎが無視できる場合を考える. すると式 (A.72) 右辺のラプラシアン  $\Delta$  は, 右辺全体に作用する形になる. ゆらぎを平面波展開し, その波数を  $k$  とすると, ラプラシアンは  $\Delta \rightarrow -k^2$  で置き換えられる. この時, 式 (A.72) は,

$$\zeta' = -\frac{2}{9} \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \frac{\mathcal{H}(1 + 3c_s^2)\Psi + \Phi}{\Omega(1+w)}, \quad (\text{A.74})$$

となる. 上式より, superhorizon scale ( $k \ll \mathcal{H}$ ) では, 右辺は十分小さくなる. したがって, 宇宙が平坦かつ断熱ゆらぎ ( $\Gamma = 0$ ) の場合, 曲率ゆらぎ  $\zeta$  は保存される.

空間的平坦ゲージにおけるゲージ条件は,

$$D = E = 0, \quad (\text{A.75})$$

である. このゲージ条件下では, 線素 (A.3) は以下のようになる.

$$ds^2 = a(\tau)^2 [-(1 + 2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j]. \quad (\text{A.76})$$

また, バーティーンポテンシャル (A.53), (A.54) は,

$$\Phi = A - B' - \mathcal{H}B, \quad \Psi = -\mathcal{H}B, \quad (\text{A.77})$$

となる.



## 付録B $f(R)$ DEモデルが満たすべき条件について

4.4節冒頭で出てきた,  $f(R)$ DEモデルにおける4つの条件の導出, および各条件の意味を見ていく.

弱場近似下 ( $g_{\mu\nu}^{(0)} \approx \eta_{\mu\nu}$ ) において, スカラー曲率  $R$ , スカラロン  $F(R)$  およびエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  を, 背景成分と摂動成分に分ける.

$$R = R_0 + \delta R, \quad (\text{B.1})$$

$$F = F_0(1 + \delta_F), \quad (\text{B.2})$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + \delta T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.3})$$

これらを用いると, 場の方程式のトレースをとった式 (4.3) の線形展開は,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \delta_F + M_F^2 \delta_F^2 = -\frac{\kappa^2}{3F_0} \delta T, \quad (\text{B.4})$$

となる [75]. ここで,  $\delta T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$  である. また,  $M_F$  はスカロロンの質量であり,

$$M_F^2 \equiv \frac{1}{3} \left[ \frac{F(R_0)}{F'(R_0)} - R_0 \right] = \frac{R_0}{3} \left[ \frac{1}{m(R_0)} - 1 \right], \quad (\text{B.5})$$

で定義される. ここで,  $m(R_0)$  は 4.4.1 節で出てきた  $m(R_0) = RF'/F$  (5.48) である. 一様等方宇宙を仮定すると, スカロロンの摂動  $\delta_F$  は宇宙時間  $t$  のみに依存する関数となり, 式 (B.4) は,

$$\ddot{\delta}_F + M_F^2 \delta_F = \frac{\kappa^2}{3F_0} \rho, \quad (\text{B.6})$$

となる. ただし,  $\rho \equiv -\delta T$  とした.  $M_F^2 < 0$  となると, 上式よりスカロロンの摂動  $\delta_F$  は不安定になってしまう (この時, スカロロンはタキオンとなる). したがって, 宇宙論的摂動が安定となるためには,

$$M_F^2 \simeq \frac{F(R_0)}{F'(R_0)} > 0, \quad (\text{B.7})$$

という条件が必要となる. 式 (B.5) より,  $M_F^2 > 0$  を満たすためには,  $R_0 > 0$  より,

$$0 < m(R_0) = \frac{F(R_0)}{F'(R_0)} < 1, \quad (\text{B.8})$$

となる。これは、4.4節の条件 (iv) に対応する。

次に、半径  $r_c$  で一様密度  $\rho_c$  をもつ質量  $M_c$  である球対称な天体を考え、その天体の外部は密度がゼロとする。天体内部 ( $r < r_c$ ) での式 (B.4) は、

$$\frac{d^2}{dr^2}\delta_F + \frac{2}{r}\delta_F - M^2\delta_F = -\frac{\kappa^2}{3F_0}\rho_c, \quad (\text{B.9})$$

と書ける。天体外部 ( $r > r_c$ ) では、上式は右辺 = 0 となるので、 $M_F^2 > 0$  の時、上式の天体内部および外部での解はそれぞれ、

$$\delta_F = C_1 \frac{e^{-M_F r}}{r} + C_2 \frac{e^{M_F r}}{r} + \frac{8\pi G \rho_c}{3F_0 M_F^2} \quad (r < r_c), \quad (\text{B.10})$$

$$\delta_F = C_3 \frac{e^{-M_F r}}{r} + C_4 \frac{e^{M_F r}}{r} \quad (r > r_c), \quad (\text{B.11})$$

となる。 $C_{1\sim 4}$  はそれぞれ積分定数である。ここで、 $\delta_F \rightarrow 0$  as  $r \rightarrow \infty$  を課すと、 $C_4 = 0$  となる。また、 $r = 0$  で  $\delta_F = 0$  を課すと、 $C_1 = -C_2$  となる。境界条件より、内部解と外部解が一致するように残りの積分定数を決定すると、 $M_F r_c \ll 1$  の場合、以下の解を得る [76].

$$\delta_F \simeq \frac{4\pi G \rho}{3F_0} \left( r_c^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad (r < r_c). \quad (\text{B.12})$$

$$\delta_F \simeq \frac{2GM_c}{3F_0 r} \frac{e^{-M_F r}}{r} \quad (r > r_c), \quad (\text{B.13})$$

Einstein frame における計量  $\tilde{g}_{\mu\nu} = F_0(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$  の摂動  $h_{\mu\nu}$  の一次の解は、Einstein frame における一次線形の Einstein 方程式： $\delta\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi(G/F_0)\delta\tilde{T}_{\mu\nu}$  から得ることができ、

$$h_{00} = \frac{2GM_c}{F_0 r}, \quad h_{ij} = \frac{2GM_c}{F_0 r} \delta_{ij}, \quad (\text{B.14})$$

となる。したがって、Jordan frame における計量  $g_{\mu\nu}$  は、

$$g_{\mu\nu} = \frac{\tilde{g}_{\mu\nu}}{F} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \delta_F \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{B.15})$$

となる [76]. 外部解 (B.13) より、計量  $g_{\mu\nu}$  の (00) 成分および ( $ij$ ) 成分はそれぞれ、

$$g_{00} \simeq -1 + \frac{2G_{\text{eff}}^{(N)} M_c}{r}, \quad (\text{B.16})$$

$$g_{ij} \simeq 1 + \frac{2G_{\text{eff}}^{(N)} M_c}{r} \gamma, \quad (\text{B.17})$$

となる。ここで、 $G_{\text{eff}}^{(N)}$  は有効重力定数、 $\gamma$  はポストニュートンパラメータであり、

$$G_{\text{eff}}^{(N)} \equiv \frac{G}{F_0} \left( 1 + \frac{1}{3} e^{-M_F r} \right), \quad (\text{B.18})$$

$$\gamma \equiv \frac{3 - e^{-M_F r}}{3 + e^{-M_F r}}, \quad (\text{B.19})$$

で定義される。  $G > 0$  とすると、  $G_{\text{eff}}^{(N)} > 0$  となるためには  $F_0 > 0$  である必要があることがわかる。したがって、全宇宙の発展において、  $F > 0$  である必要がある。これは、4.4節の条件 (i) に対応する。

条件  $F > 0$  と式 (B.7) より、  $F' > 0$  が導かれる。これは、4.4節の条件 (ii) に対応することがわかる。

最後に条件 (iii) は、通常物質優勢期が存在するための条件である。





## 謝辞

本博士論文を作成するにあたり，多くのご指導，ご指摘，そして激励をいただきました，指導教員である，山口大学大学院創成科学研究科教授 坂井伸之先生に深く感謝致します。また，多くの適切なご指導，ご指摘，議論をいただきました，同研究科助教 齊藤遼先生に深く感謝致します。また，副査としてご助言を頂くとともに，本論文の細部に渡りご指摘していただきました，同研究科教授 白石清先生，新沼浩太郎先生，および同大学時間学研究科教授 藤澤健太先生に厚く感謝致します。本研究の一部は，日本学術振興会科学科研費(課題番号 19J12990)の助成を受けています。



## References

- [1] E. Hubble. Prov. Natl. Acad. Sci., **15**, 168, 1929.
- [2] C. L. Bennett *et al.* G. F. Smoot. Astrophys. J. **396**, L1-L5, 1992.
- [3] J. C. Mather *et al.* ApJL, **354**, L37, 1990.
- [4] C. L. Bennett *et al.* ApJ, **583**, 1, 2003.
- [5] Planck Collaboration. Astro. & Astrophys. 536 A1, 2011.
- [6] Planck Collaboration. Astro. & Astrophys. 38 A1, 2016.
- [7] G. F. Smoot *et al.* ApJL **396**, L1, 1992.
- [8] W. Rindler. Mon. Not. R. Astron. Soc. **116**, 663, 1956.
- [9] A. H. Guth. Phys. Rev. D **23**, 347, 1981.
- [10] K. Sato. Mon. Not. R. Astron. Soc. **195**, 467, 1981.
- [11] SDSS Collaboration. Astrophys. J. **633**, 560-574, 2005.
- [12] S. Cole *et al.* W. J. Percival. Mon. Not. R. Astron. **381**, 1053-1066, 2007.
- [13] G. Alring *et al.* S. Perlmutter. Astrophys. J. **517**, 565-586, 1999.
- [14] A. V. Filippenko *et al.* A. G. Riess. Astron. J. **116**, 1009-1038, 1998.
- [15] R. P. Kirshner *et al.* A. G. Riess. Astron. J. **117**, 707-724, 1999.
- [16] Planck Collaborations. arXiv:1807.06209, 2018.
- [17] D. Huterer and M. S. Turner. Phys. Rev. D **60**, 081301, 1999.
- [18] S. Weinberg. Rev. Mod. Phys. **61**, 1-23, 1989.
- [19] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**, 115-145, 2007.
- [20] S. Capozziello and M. Francaviglia. Gen. Relativ. Gravit. **40**, 357-420, 2008.
- [21] E. V. Linder. Phys. Rev. D **80**, 123528, 2009.

- [22] H. A. Buchdahl. Mon. Not. R. Astron. Soc. **150**, 1-8, 1970.
- [23] B. N. Breizman V. T. Gurovich and V. P. Sokolov. Sov. Phys. JETP **32**, 115, 1971.
- [24] A. A. Starobinsky. Phys. Lett. B **91** 99-102, 1980.
- [25] H. Nariai and K. Tomita. Prog. Theor. Phys. **46**, 1971.
- [26] B. Li and J. D. Barrow. Phys. Rev. D, **75**, 084010, 2007.
- [27] W. Hu and I. Sawicki. Phys. Rev. D, **76**, 064004, 2007.
- [28] A. A. Starobinsky. JETP Lett., **86**, 157, 2007.
- [29] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, and S. Tsujikawa. Phys. Rev. D **75**, 083504, 2007.
- [30] J. Khoury and A. Weltman. Phys. Rev. D, **69**, 044026, 2004.
- [31] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Phys. Rev. D **68**, 123512, 2003.
- [32] S. A. Appleby, R. A. Battye, and A. A. Starobinsky. J. Cosmol. Astpart. Phys. **06**, 005, 2010.
- [33] M. Artymowski and Z. Lalak. J. Cosmol. Astpart. Phys. **09**, 036, 2014.
- [34] C. L. Bennett *et al.* Astrophys. J. Suppl. **208**, 20, 2013.
- [35] R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt. Phys. Rev. Lett. **81**, 1582, 1998.
- [36] Y. Fujii. Phys. Rev. D **26**, 2580, 1982.
- [37] L. H. Ford. Phys. Rev. D **35**, 2339, 1987.
- [38] C. Wetterich. Nucl. Phys B. **302**, 668, 1988.
- [39] L. Amendola. Phys. Rev. D **60**, 043501, 1999.
- [40] J. P. Uzan. Phys. Rev. D **59**, 123510, 1999.
- [41] T. Chiba. Phys. Rev. D **60**, 083508, 1999.
- [42] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini. Phys. Rev. D **79**, 064036, 2009.
- [43] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman. Phys. Rev. D **79**, 084003, 2009.
- [44] A. Albrecht and P. J. Steinhardt. Phys. Rev. Lett., **48**, 1220, 1982.

- [45] J. M. Bardeen. Phys. Rev. D **22**, 1882, 1980.
- [46] Planck Collaborations. arXiv:1807.06211, 2019.
- [47] P. Jordan. Z. Physik **157**, 112, 1959.
- [48] C. Brans and R. H. Dicke. Phys. Rev. **124**, 925-935, 1961.
- [49] R. H. Dicke. Phys. Rev. **125**, 2163-2167, 1962.
- [50] C. Brans and R. H. Dicke. Phys. Rev. **124**, 925, 1961.
- [51] J. O'Hanlon. Phys. Rev. Lett. **29**, 137, 1972.
- [52] K. I. Maeda. Phys. Rev. D **39**, 3159-3162, 1989.
- [53] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa. Phys. Rev. Lett. **98**, 131302, 2007.
- [54] T. Chiba and M. Yamaguchi. JCAP **0810**, 021, 2008.
- [55] J.-O. Gong, J.-c Hwang, W. I. Park, M. Sasaki, Y.-S. Song. JCAP **09**, 023, 2011.
- [56] S. Capozziello *et al.* Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1969-1982, 2003.
- [57] S. A. Appleby and R. A. Battye. Phys. Lett. B. **654**, 1, 2007.
- [58] S. A. Appleby and R. A. Battye. JCAP **05**, 019, 2008.
- [59] E. J. Copel, A. R. Liddle, and D. Wands. Phys. Rev. D **57**, 4686, 1998.
- [60] E. J. Copel, M. Sami, and S. Tsujikawa. Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753, 2006.
- [61] L. Amendola. Phys. Rev. D **62**, 043511, 2000.
- [62] S. Capozziello and S. Tsujikawa. Phys. Rev. D **77**, 107501, 2008.
- [63] H. Motohashi. Phys. Rev. D **91**, 064016, 2015.
- [64] M. Yashiki. Phys. Rev. D **96**, 103518, 2017.
- [65] M. Yashiki, N. Sakai and R. Saito. in prep.
- [66] BICEP2 Collaboration. Phys. Rev. Lett. **112**, 241101, 2014.
- [67] BICEP2/Keck and Planck Collaborations. Phys.Rev. Lett. **114**, 101301, 2016.
- [68] Planck Collaboration. Astro. & Astrophys. 594 A20, 2016.

- [69] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov and P. J. Steinhardt. Phys. Rev. Lett. **85**, 4438, 2000.
- [70] N. Kan, K. Shiraishi and M. Yashiki. Gen. Relativ. Gravit. **51**, 7, 90, 2019.
- [71] C. van de Bruck and L. E. Paduraru. Phys. Rev. D **92**, 083513, 2015.
- [72] C. van de Bruck, P. Dunsby and L. E. Paduraru. Int. J. Mod. Phys. D **26**, 1750152, 2017.
- [73] T. Mori, K. Kohri and J. White. JCAP **1710**, 44, 2017.
- [74] Á. Cruz-Dombriz, E. Elizalde, S. D. Odintsov and D. Sáez-Gómez. JCAP **1605**, 060, 2016.
- [75] G. J. Olmo. Phys. Rev. D **72**, 083505, 2005.
- [76] I. Navarro and K. Van. Acoleyen. JCAP **0702**, 022, 2007.