〈研究ノート〉

Zaltaの基本的対象理論

脇　條　靖　弘

この研究ノートは、Edward N. Zalta の基本的対象理論（The Elementary Object Theory）のまとめと紹 介である。Zaltaの理論は、存在しない対象を認めるマイノング主義の現代版の一つに位置づけられる。この理論は事例化（exemplification）とエンコーディング（encoding）という二つの述語付けの区別に基盤を置くも のであるため、二重コプラ戦略（The Dual Copula Strategy）と呼ばれる（Reicher 2019参照）。Zalta は彼の 著書（Zalta 1983）において、またさらにPelletierとの共著論文（Pelletier and Zalta 2000）において、二重コプラ戦略をプラトンのイデア論解釈に応用する可能性を示唆している。筆者は今後の研究課題として、二重 コプラ戦略だけでなく、現代のマイノング主義の他の形態についても、それらをプラトン解釈に応用できないかを考察したいたいと考えている。この研究ノートをその考察の足がかりの一つにしたい。

第1節から第5節はZaltaの著書『抽象的対象：公理的形而上学への導入』（Zalta 1983）の第1章（15-39）の要点のまとめである。まとめに当たっては、見出しとして原文にはない下位節、下位下位節を設けた。便宜上記述の順序を変えたところもある。これは翻訳ではないが、特に定義などについて正確な記述が必要な部分では、翻訳に近くなっている部分もある。第1節から第5節では、本文になく筆者が加えた内容は可能な限り註に回した。本文の誤植と思われるものも註に加えた。

最後の第6節の付録は、第1節で触れられるパラドックスとラムダ公理型の妥当性についての筆者による補足である。

1　言語（THE LANGUAGE）

この節（16-19）では、Zalta のシステムで用いられる言語が与えられる。それは標準的な二階の述語論理に変更を加えたものである。変更点は、通常の述語付けである事例化（exemplification）に加えて、エンコーディング（encoding）

という新しい述語付けを設けたことである。また、この言語は、λ-表現による複雑な関係項を含んでいる。この言語の正確な定義は、「A. プリミティブな記号」と「B. 式と項」の二つの部分に分けられる。

1.1　A. プリミティブな記号（Primitive Symbols）

	プリミティブな対象項（primitive object terms）	プリミティブな関係項（primitive relation terms）
名辞（names）	$a_1, a_2, a_3, \ldots$（公式） $a, b, c, \ldots$（非公式）	$P^n_1, P^n_2, P^n_3, \ldots\ n \geq 1$（公式） $P^n, Q^n, \ldots$（非公式） $E!$ 一座の特殊な関係項（述語） $=_E$ 二座の特殊な関係項
変項（variables）	$x_1, x_2, x_3, \ldots$（公式） $x, y, z \ldots$（非公式）	$F^n_1, F^n_2, F^n_3, \ldots\ n \geq 1$（公式） $F^n, G^n, \ldots$（非公式）

この他に、接続詞 $\sim$, $\rightarrow$, 量化子 $\forall$, ラムダ λ と、カッコ類を用いる。

1.2　B. 式（formulas）、命題式（propositional formulas）と項（terms）

以下のように「（命題）式」、「対象項」、「n-座の関係項」を帰納的に定義する。[*1]

（1）すべてのプリミティブな対象項は対象項（object terms）であり、すべてのプリミティブな n-座の関係項は n-座の関係項（n-place relation terms）である。

（2）原子的事例化（Atomic exemplification）: ρ^n が n-座の関係項であり、$o_1, \ldots o_n$ が対象項であるならば、$\rho^n o_1 \ldots o_n$ は（命題）式（a (propositional) formula）である。（「$o_1, \ldots o_n$ は関係 ρ^n を事例化する」）

（3）原子的エンコーディング（Atomic encoding）: ρ^1 が一座の関係項であり、o が対象項であるならば、$o\rho^1$ は式（a formula）である。（「o は属性 ρ^1 を encode する」）

（4）分子的（Molecular）: ϕ と ψ が（命題）式であるならば、$(\sim\phi)$ と $(\phi \rightarrow \psi)$ は（命題）式である。

[*1] この定義は「（命題）」、「（対象）」の部分なしで読んだ場合と、それらを入れて読んだ場合の二つを含む形になっている。

(5) 量化（Quantified）: ϕ が（命題）式であり、α が（対象）変項であるならば、$(\forall\alpha)\phi$ は（命題）式である。

(6) 複合的な n-座の関係項（Complex n-place relation terms）ϕ が n 個の自由対象変項 $v_1, \ldots v_n$ を持つ命題式であるならば、$[\lambda v_1 \ldots v_n \phi]$ は n-座の関係項である。

$=_E o_1 o_2$ は、$o_1 = o_2$ と書く。カッコ類は多義性がない場合は省略する。*2 また、$(\phi \& \psi)$, $(\phi \equiv \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\exists\alpha)\phi$ については標準的な省略表現を用いる。*3

1.2.1　抽象的対象の定義

定義1（D_1）として以下が与えられる。

$$A!x =_{df} [\lambda y \sim E!y]x$$

つまり、「x は抽象的対象である」は「x は存在しないという属性を事例化する」と定義される。

1.2.2　式（formulas）の例

P^3axb	a, x, b は関係 P^3 を事例化する
aG	a は属性 G をエンコードする
$\sim(\exists x)(xQ \& Qx)$	Q をエンコードし、かつ事例化する対象はない
$(x)(E!x \rightarrow \sim(\exists F)xF)$	存在を事例化する対象はどんな属性もエンコードしない
$(\exists x)(A!x \& (F)xF \equiv Fa)$	ある抽象的対象は a が事例化する属性をすべて、そしてそれらだけをエンコードする

1.2.3　命題式（propositional formulas）と λ- 表現

先の（1）から（6）の規則により、エンコードを含んだ式は命題式ではない。（また、関係変項の量化を含んだ式も命題式ではない。）そして、命題式だけが λ-表現の中に含まれることができる。

$[\lambda v_1 \ldots v_n \phi]$ は、「ϕ であるような対象 $v_1 \ldots v_n$ であること（であるという関係、属性）」あるいは、「ϕ であるような一番目のもの、二番目のもの..., n 番目のも

---

*2 本文の式の表記では、“∀” もしばしば省略されている。

*3 具体的には次のようであると思われる。$(\phi \& \psi) =_{df} \sim(\phi \rightarrow \sim\psi)$, $(\phi \equiv \psi) =_{df} (\phi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \phi)$, $(\phi \vee \psi) =_{df} \sim\phi \rightarrow \psi$, $(\exists\alpha)\phi =_{df} \sim(\forall\alpha)\sim\phi$

のであること（であるという関係、属性）」と読める。例えば、以下のような例がある。

$[\lambda x \sim Rx]$	R を事例化しないという属性
$[\lambda x Px \,\&\, Qx]$	P も Q も事例化するような対象であること
$[\lambda x\, x =_E b]$	b と等しい$_E$こと
$[\lambda xy Px \,\&\, Syx]$	x が P を事例化し、y が x と S の関係にあるような x と y であること
$[\lambda x (\exists y) Fyx]$	何かがそれに対して F という関係にあるという属性
$[\lambda xyz Gzx \,\&\, E!y]$	z が x に対して G という関係にあり、かつ、y は存在するような、そんな x, y, z であるという関係

先に述べたように、任意の式 ϕ から λ-表現を作れるわけではない。たとえば、$[\lambda x xP]$, $[\lambda y yP \,\&\, Py]$, $[\lambda x (\exists F) Fx]$, $[\lambda x (\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]$ はすべて式としては不適切 (ill-formed) である。最初の二つについてはエンコーディングを含む式が、三つ目については関係変項を束縛する量化子を含む式がそれぞれの λ の後に続いているという理由で不適切である。また、四つ目は両方の理由によって不適切である。この二つの制限の内、「関係量化子禁止」の制限は、本質的に重要なものではない。それが採用されているのは、意味論をあまりに複雑なものにしないためである。それに対して、「エンコーディング禁止」の制限は決定的に重要である。この制限によっていくつかのパラドックスを回避できる。たとえば、次の「クラークのパラドックス “Clark’s paradox”」が付録 A (158-159) で挙げられている。

クラークのパラドックス　ある抽象的対象 a_0 が $[\lambda x (\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]$ を、そしてそれのみをエンコードしているとする。(1) まず、a_0 が $[\lambda x (F)(xF \rightarrow Fx)]$ を事例化していると仮定する。λ-除去[*4]によって、$(F)(a_0F \rightarrow Fa_0)$ が導ける。したがって、a_0 は $[\lambda x (\exists F)(xF \,\&\, Fx)]$ をエンコードするだけでなく、事例化もしている、つまり、$[\lambda x (\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]a_0$ である。[*5] 再び λ-除去により、$(\exists F)(a_0F \,\&\, \sim Fa_0)$, すなわち、$\sim (F)(a_0F \rightarrow Fa_0)$ である。

[*4] ここで用いられている論理的公理 LA4, λ-等値と推論規則 λ-除去, λ-導入, UE, 矢印除去, $\equiv$ 除去については、3節を参照。

[*5] $(F)(a_0F \rightarrow Fa_0)$ から、UE により、$a_0[\lambda x (\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)] \rightarrow [\lambda x (\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]a_0$ が導ける。a_0 は $[\lambda x (\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]$（のみ）をエンコードしているので、前件が成立し、矢印除去により、$[\lambda x (\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]a_0$である。

λ-等値と UE により、$[\lambda x(F)(xF \rightarrow Fx)]a_0 \equiv (F)(a_0F \rightarrow Fa_0)$ なので、右辺の否定から ≡ 除去により、左辺の否定 $\sim [\lambda x(F)(xF \rightarrow Fx)]a_0$ が導ける。つまり、a_0 は $[\lambda x(F)(xF \rightarrow Fx)]$ を事例化していない。これは仮定に矛盾する。

(2) 逆に a_0 が $[\lambda x(F)(xF \rightarrow Fx)]$ を事例化していないと仮定する。そのとき、$\sim(F)(a_0F \rightarrow Fa_0)$, [*6] すなわち、$(\exists F)(a_0F \,\&\, \sim Fa_0)$ である。これは a_0 がある属性をエンコードし、かつ事例化しているということである。この属性を R とする。また、λ-導入により、a_0 は $[\lambda x(\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]$ を事例化していることも導ける。a_0 はただ一つの属性のみをエンコードしているので、R はその属性 $[\lambda x(\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]$ でなければならない。しかし、a_0 は R を事例化していないので、$\sim[\lambda x(\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]a_0$ であり、矛盾が帰結する。[*7]

1.2.4 λ- 表現の入った式の例

$[\lambda xyPx \,\&\, Qy]ab$	a と b は、x が P を事例化し、y が Q を事例化するような x と y であるという関係を事例化する
$x[\lambda y \sim Ry]$	x は R を事例化しないという属性をエンコードする
$(\exists x)(A!x \,\&\, (F)(xF \equiv (\exists G^2)((Gab \,\&\, F = [\lambda yGyb]) \vee (Gba \,\&\, F = [\lambda yGby]))))$	ある抽象的対象は、a が b に対して持っている関係をすべて、そしてそれらだけをエンコードしている

1.2.5 項（terms）

対象項（object terms）と、n-座の関係項を合わせて「項（terms）」と言う。

1.2.6 置き換え（substitution）

$\phi(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ によって、$\alpha_1, ..., \alpha_n$ を自由な出現として持っているかもしれない式を表す。そして、

$$\phi^{\tau_1,...,\tau_n}_{\alpha_1,...,\alpha_n}$$

---

*6 やはり、λ-等値と UE により、$[\lambda x(\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]a_0 \equiv (F)(a_0F \rightarrow Fa_0)$ なので、今度は左辺の否定から ≡ 除去により右辺の否定が導かれる。

*7 このパラドックスは Priest 2016: 247 の註38では、少し異なる形で説明されている。これについては第6.2節を参照。

によって、$1 \leq i \leq n$ のそれぞれの i について、ϕ の中の α_i の自由な出現を τ_i で置き換えて得られる式を表す。

項 τ が ϕ の中で自由変項 α と**置き換え可能**（**substitutable**）であるのは、τ の中のすべての自由変項 β について、ϕ の中の α のどの自由な出現も、ϕ の中にある（$\forall\beta)\psi$ という形の下位式の中にも生じていないし、また、ϕ の中の項 $[\lambda v_1 ... \beta ... v_n \psi]$ の中にも生じていないとき、そしてそのときのみである。つまり、τ が α と置き換えられた時、τ の中のどの自由変項 β も、ϕ の中で β を束縛する量化子や λ によって「捕獲されない」とき、そのときのみである。[*8]

２　意味論（THE SEMANTICS）

意味論の節（19-28）では、前節で与えられた言語における式（formulas）の真理条件を決定するための諸定義がなさる。それらは四つのグループに分けられる。A. 解釈、B. 割当てと指示、C. 充足、D. 解釈下の真理 である。特に意味論に関わる集合、存在者、関数を表す名辞や変項は筆記体で表記されている。

2.1　A. 解釈（INTERPRETATIONS）

解釈 $\mathscr{I}$ は、この下位節で記述される条件を満たす六つの順序付き組 $\langle \mathscr{D}, \mathscr{R}, \mathscr{ext}_{\mathscr{R}}, \mathscr{L}, \mathscr{ext}_{\mathscr{A}}, \mathscr{F} \rangle$ である。

2.1.1　対象の領域（the domain of objects）と関係の領域（the domain of relations）

$\mathscr{D}$ と $\mathscr{R}$ は空でない集合で、言語の持つプリミティブなあるいは複合的な名辞に対して、それが指示する存在者を提供し、また、量化の領域の役割を果たす。$\mathscr{D}$ は「対象の領域（the domain of objects）」と呼ばれ、o（サブスクリプト付きのこともある）がこの領域の要素を変域とするメタ言語的な変項として用いられる。

$\mathscr{R}$ は、それぞれ空でない集合の列 $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3, ...$ の和集合である。すなわち、$\mathscr{R} = \bigcup_{n \geq 1} \mathscr{R}_n$ である。それぞれの $\mathscr{R}_n$ は n-座の関係の集合である。$\mathscr{r}^n$ を $\mathscr{R}_n$ の要素を変域とするメタ言語的な変項とする。$\mathscr{R}$ は、後述する $\mathscr{L}$ のすべての論理関数の下で閉じていなければならない。

[*8] たとえば、$[\lambda x (P^1 x \& Q^2 xy)]$ は $(\exists y) F^1 y$ の中で F^1 と置き換え可能ではない。

2.1.2　事例化外延（exemplification extension）とエンコード外延（encoding extension）

$\mathscr{ext}_{\mathscr{R}}$と$\mathscr{ext}_{\mathscr{A}}$は、後述する$\mathscr{L}$とともに、$\mathscr{D}$と$\mathscr{R}$の要素に構造を与える関数の集合である。

まず、$\mathscr{R}_n$の要素であるそれぞれのn-座の関係に対して、領域$\mathscr{D}$から取られたn個の順序付き組の集合があり、それがその関係の事例化についての外延の役割を果たす。したがって、$\mathscr{ext}_{\mathscr{R}}$は、それぞれの$r^n \in \mathscr{R}_n$を$\mathfrak{P}(\mathscr{D}^n)$（$\mathscr{D}^n$のべき集合）へ写像する関数である。$\mathscr{ext}_{\mathscr{R}}(r^n)$を$r^n$の「事例化外延（exemplification extension = $\mathrm{extension}_{\mathscr{R}}$））」と呼ぶ。

次に、$\mathscr{R}_1$のすべての要素（1-座の関係＝属性）は、エンコードについての外延を持つとみなされる。ある属性のエンコード外延は、その属性をエンコードする$\mathscr{D}$の要素の集合である。したがって、$\mathscr{ext}_{\mathscr{A}}$は、$\mathscr{R}_1$を$\mathscr{D}$へ写像する関数である。

2.1.3　　論理的関数（logical functions）

$\mathscr{L}$は論理的関数の集合である。それらの論理的関数は$\mathscr{R}_n$と$\mathscr{D}$に対して働き、λ-表現が指示する複合的な関係を生成する。それぞれの複合的関係の事例化外延は、その複合的関係の構成部分をなすより単純な関係の事例化外延と自然な仕方でなじむ（mesh, in a natural way, with）ものでなければならないとされる（20）。

$\mathscr{L}$の要素は以下の6つである。

- $\mathscr{PLUG}_i$（i-差し込み i-plug）
- $\mathscr{REFL}_{i,j}$（i, j-反射 i, j-reflection）
- $\mathscr{UNIV}_i$（i-普遍化 i-universalization）
- $\mathscr{COND}$（条件化 conditionalization）
- $\mathscr{CONV}_{i,j}$（i, j-交換 i, j-conversion）
- $\mathscr{NEG}$（否定 negation）

これらのうち、最初の四つは指標付きの関数の集まりであり、i, jは自然数である。残りの二つ、$\mathscr{COND}$と$\mathscr{NEG}$は特定の関数である。これらの六つの関数は以下のように働く。

(a) $\mathscr{PLUG}_1$は（$\mathscr{R}_2 \cup \mathscr{R}_3 \cup \ldots$）$\times \mathscr{D}$を（$\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup \ldots$）へ写像する。
$\mathscr{PLUG}_j$はそれぞれの$j > 1$について、（$\mathscr{R}_j \cup \mathscr{R}_{j+1} \cup \ldots$）$\times \mathscr{D}$を（$\mathscr{R}_{j-1} \cup \mathscr{R}_j \cup \ldots$）$\times \mathscr{D}$へ写像する。
ただし、$\mathscr{PLUG}_i$は次の条件を満たさなければならない：

$$\mathscr{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{PLUG}_i(r^n, o)) = \{\langle o_1, \ldots, o_{i-1}, o_{i+1}, \ldots, o_n\rangle \mid \langle o_1, \ldots, o_{i-1}, o, o_{i+1}, \ldots, o_n\rangle \in \mathscr{ext}_{\mathscr{R}}(r^n)\}$$

これによって、例えば、ある対象 o_1 が $\mathscr{PLUG}_2$（κ^2, o_5）の事例化外延に入っているならば、$\langle o_1, o_5\rangle$ が κ^2 の事例化外延に入っていることが保証される。

(b) $\mathscr{UNIV}_1$ は（$\mathscr{R}_2 \cup \mathscr{R}_3 \cup ...$）を（$\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup ...$）へ写像する。$\mathscr{UNIV}_j$ は それぞれの $j > 1$ について、（$\mathscr{R}_j \cup \mathscr{R}_{j+1} \cup ...$）を（$\mathscr{R}_{j-1} \cup \mathscr{R}_j \cup ...$）へ写像する。
ただし、$\mathscr{UNIV}_i$ は次の条件を満たさなければならない：
$ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{UNIV}_i(\kappa^n, o)) = \{\langle o_1, ..., o_{i-1}, o_{i+1}, ..., o_n\rangle \mid (\forall o)(\langle o_1, ..., o_{i-1}, o, o_{i+1}, ..., o_n\rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\kappa^n))\}$ [*9]

たとえば、$\mathscr{UNIV}_2(\kappa^2)$ は、直観的に言えば、すべてのものに対して κ^2 の関係にある、という属性である。

(c) $\mathscr{CONV}_{i,j}$ は、それぞれの i, j（ただし $1 \leq i < j$）について、（$\mathscr{R}_j \cup \mathscr{R}_{j+1} \cup ...$）を（$\mathscr{R}_j \cup \mathscr{R}_{j+1} \cup ...$）へ写像する。
ただし、$\mathscr{CONV}_{i,j}$ は次の条件を満たさなければならない：
$ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{CONV}_{i,j}(\kappa^n)) =$
$\{\langle o_1, ..., o_{i-1}, o_j, o_{i+1}, ..., o_{j-1}, o_i, o_{j+1}, ..., o_n\rangle \mid \langle o_1, ..., o_i, ..., o_j, ..., o_n\rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\kappa^n)\}$

これによって、たとえば、$\langle o_1, o_2\rangle$ が $\mathscr{CONV}_{1,2}$（κ^2）の事例化外延に入っているのは、$\langle o_2, o_1\rangle$ が κ^2 の事例化外延に入っている時、そしてその時のみであることが保証される。

(d) $\mathscr{REFL}_{i,j}$ は、それぞれの i, j（ただし $1 \leq i < j$）について、（$\mathscr{R}_j \cup \mathscr{R}_{j+1} \cup ...$）を（$\mathscr{R}_{j-1} \cup \mathscr{R}_j \cup ...$）へ写像する。
ただし、$\mathscr{REFL}_{i,j}$ は次の条件を満たさなければならない：
$ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{REFL}_{i,j}(\kappa^n)) =$
$\{\langle o_1, ..., o_i, ...o_{j-1}, o_{j+1}, ..., o_n\rangle \mid \langle o_1, ..., o_i, ..., o_j, ..., o_n\rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\kappa^n)$ かつ $o_i = o_j\}$

これによって、たとえば、対象 o が $\mathscr{REFL}_{1,2}(\kappa^2)$ の事例化外延に入っているなら、o は自分自身に対して κ^2 の関係にあること、すなわち、$\langle o, o\rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\kappa^2)$ であることが保証される。

[*9] p.21 のこの項目の最後の "ext" は "$ext_{\mathscr{R}}$" の誤植である。

(e) $\mathscr{COND}$ は（$\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup ...$）を（$\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup ...$）へ写像する関数である。
ただし、$\mathscr{COND}$ は次の条件を満たさなければならない：

$$\mathscr{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{COND}(\mathscr{r}^n, \mathscr{s}^m)) =$$

$$\{\langle o_1, ..., o_n, o'_1, ..., o'_m \rangle \mid \langle o_1, ..., o_n \rangle \notin \mathscr{ext}\mathscr{R}(\mathscr{r}^n) \text{ または } \langle o'_1, ..., o'_m \rangle \in \mathscr{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{s}^m)\}$$

これによって、たとえば、$\langle o_1, o_2 \rangle$ が $\mathscr{COND}(\mathscr{r}^1, \mathscr{s}^1)$ の事例化外延に入るのは、o_1 が $\mathscr{r}^1$ の事例化外延に入っていないか、o_2 が $\mathscr{s}^1$ の事例化外延に入っている時、そしてその時のみであることが保証される。

(f) $\mathscr{NEG}$ は（$\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup ...$）を（$\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup ...$）へ写像する関数である。
ただし、$\mathscr{NEG}$ は次の条件を満たさなければならない：

$$\mathscr{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{NEG}(\mathscr{r}^n)) = \{\langle o_1, ..., o_n \rangle \mid \langle o_1, ..., o_n \rangle \notin \mathscr{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{r}^n)\}$$

$\mathscr{NEG}(\mathscr{r}^n)$ は n-座の関係であり、その事例化外延には $\mathscr{r}^n$ の事例化外延に含まれない n 個組がすべて、そしてそれらだけが含まれる。

2.1.4　プリミティブな名辞に指示を与える関数

関数 $\mathscr{F}$ は、言語の単純な（プリミティブな）名辞に適切な領域の要素を割り当てる。それぞれの対象名辞 k について、$\mathscr{F}(k) \in \mathscr{D}$ であり、それぞれの関係名辞 k^n について $\mathscr{F}(k^n) \in \mathscr{R}_n$ である。“$E!$” は単純な属性（1-座の関係）名辞なので、$\mathscr{F}(E!) \in \mathscr{R}_1$ であり、それゆえ、$\mathscr{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{F}(E!)) \subseteq \mathscr{D}$ である。$\mathscr{D}$ のこの部分集合は、「存在する対象の集合（“$\mathscr{E}$”）」と呼ばれる。$\mathscr{E}$ の $\mathscr{D}$ 上の補集合、すなわち、$\mathscr{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{NEG}(\mathscr{F}(E!)))$ は、「抽象的対象の集合（“$\mathscr{A}$”）」と呼ばれる。

2.2　B. 割当てと指示（ASSIGNMENTS AND DENOTATIONS）

通例に習って、ある解釈 $\mathscr{I}$ についての割当て（an assignment）とは、それぞれのプリミティブな変項に、その変項の変域に当たる領域の要素を割り当てる任意の関数 $\mathscr{f}_{\mathscr{I}}$ である。そして、ある解釈 $\mathscr{I}$ とある $\mathscr{I}$-割当て $\mathscr{f}_{\mathscr{I}}$ についての指示関数（denotation function）とは、以下の三つの条件を満たす任意の関数 $\mathscr{d}_{\mathscr{I},\mathscr{f}}$ であり、言語の名辞上に定義される。

(1) $\mathscr{d}_{\mathscr{I},\mathscr{f}}$ は、プリミティブな名辞については $\mathscr{F}_{\mathscr{I}}$ に一致しなければならない。

(2) $\mathscr{d}_{\mathscr{I},\mathscr{f}}$ は、プリミティブな変項については、$\mathscr{f}_{\mathscr{I}}$ に一致しなければならない。

(3) $d_{\mathscr{I},f}$ は、複合的な項については、その構成部分の指示とその配列のされ方に基づいて、指示（denotation）を割り当てなければならない。

ここで、たとえば、“$[\lambda xPx \rightarrow Syx]$” に何が指示として割り当てられるかを考えてみる。（以下では $f_{\mathscr{I}}$ の 下付け $_{\mathscr{I}}$ は省略し、単に f と表記する。）$\mathscr{F}_{\mathscr{I}}(P)$ が絵画であるという属性であり、$\mathscr{F}_{\mathscr{I}}(S)$ が習作であるという関係であるとする。すなわち、$\mathscr{F}_{\mathscr{I}}(P)$=*paintingfood*, $\mathscr{F}_{\mathscr{I}}(S)$=*study* とする。上の条件（1）によって、

$d_{\mathscr{I},f}(P)$=*paintinghood*

$d_{\mathscr{I},f}(S)$=*study*

とわかる。さらに、条件（2）から、$d_{\mathscr{I},f}$ は “y” の割当てについて f と一致しなければならないので、

$d_{\mathscr{I},f}(y)$ = o

と仮定する。しかし、問題の λ-表現の指示には次の三つが等しく候補として挙げられる。

$$\mathscr{REFL}_{1,2}(\mathscr{COND}(\mathit{paintinghood}, \mathscr{PLUG}_1(\mathit{study}, o)))$$
$$\mathscr{PLUG}_2(\mathscr{REFL}_{1,3}(\mathscr{COND}(\mathit{paintinghood}, \mathit{study})), o)$$
$$\mathscr{REFL}_{1,2}(\mathscr{PLUG}_2(\mathscr{COND}(\mathit{paintinghood}, \mathit{study}), o))$$

これらの三つがすべて同じ関係（属性）であるというテーゼは興味深いが、それを支持する理論はまだ組み立てられていない。なので、この三つのうちのどれが［$\lambda xPx \rightarrow Syx$］という λ-表現の指示であるかを決定する機械的な手続きが提供される。それは λ-表現を七つの統語論的な等値集合に分けることで達成される。七つの内六つは、$\mathscr{L}$ の六つの要素に対応するものであり、最後の七つ目は単純な λ-表現に対応する。

2.2.1　λ- 表現の分割（partitioning）

μ, ξ, ζ を λ-表現を表すメタ変項とする。μ を任意の λ-表現とすると、ある ϕ, $v_1, ..., v_n$ について $\mu = [\lambda v_1 ... v_n \phi]$ である。（1）から（5）の規則によって、μ を次の七つに分割する。

- ξ の i, j 番目-交換（i, jth-conversion）
- ξ の否定（negation）
- ξ と ζ の条件化（conditionalization）
- ξ の i 番目-普遍化（ith-universalization）
- ξ の i, j 番目-反射（i, jth-reflection）
- ξ の i 番目-差し込み（ith-plugging）
- 基本的（elementary）

(1) $(\exists i)(1 \leq i \leq n$ であり、v_iがϕの中の i 番目の自由対象変項でなく、i がそのような最小の数である）ならば、μ は

$$[\lambda v_1 \ldots v_{i-1} v_j\, v_{i+1} \ldots v_{j-1} v_i v_{j+1} \ldots v_n \phi]$$

の **i, j 番目-交換**である。ただし、ここでは v_j は ϕ の中の i 番目の自由対象変項である。

(2) μ がいかなる λ-表現の i, j 番目-交換でもない場合、

(a) $\phi = (\sim \psi)$ ならば、μ は $[\lambda v_1 \ldots v_n \psi]$ の**否定**である。

(b) $\phi = (\psi \rightarrow \chi)$ であり、かつ、ψ と χ に共通の自由対象変項がないならば、μ は

$$[\lambda v_1 \ldots v_p \psi] \text{ と } [\lambda v_{p+1} \ldots v_n \chi]$$

の**条件化**である。ただし、ここでは $v_1, \ldots, v_p$ は ψ の中の対象変項であり、$v_{p+1}, \ldots, v_n$ は χ の中の対象変項である。

(c) $\phi = (\forall v) \psi$ であり、かつ、v が ψ の中の[*10] i 番目の自由対象変項であるならば、μ は

$$[\lambda v_1 \ldots v_{i-1} v v_i v_{i+1} \ldots v_n \psi]$$

の **i 番目-普遍化**である。

(3) μ が上のどれでもない場合、$(\exists i)(1 \leq i \leq n$ であり、かつ、ϕ の中で v_iが二箇所以上出現し、かつ、i がそ のような最小の数である）なら、μ は

$$[\lambda v_1 \ldots v_{i+k}\, v v_j\, \ldots v_n \phi']$$

の **i, j 番目-反射**である。ただし、ここでは

(a) k は v_i の最初と二番目の出現の間にある自由対象変項の個数であり、

(b) ϕ' は、ϕ から（ϕ の中の）二番目の v_i の出現を新しい変項 v で置き換えて得られた式であり、

(c) $j = i + k + 1$

である。

(4) μ が上のどれでもない場合、o が ϕ の中の一番左に出現している対象項であるなら、μ は

$$[\lambda v_1 \ldots v_j\, v v_{j+1} \ldots v_n \phi']$$

の o による **i 番目-差し込み**である。ただし、ここでは

---

*10 原文で “in ϕ” となっているのは “in ψ” の誤植であると思われる。

(a) j は o の前に出現している自由変項の個数であり、
(b) ϕ'は、o の最初の出現を新しい変項 v で置き換えて得られた式であり、
(c) $i=j+1$
である。
(5) μ が上のどれでもない場合、
(a) ϕ は原子的（atomic）であり、
(b) $v_1, ..., v_n$ はこの順序で ϕ の中で出現し、
(c) ある関係項 ρ^n について、$\mu = [\lambda v_1...v_n\rho^n v_1...v_n]$ であり、
(d) μ は**基本的**と呼ばれる。

この規則によって、たとえば、
- $[\lambda xRxb]$ は、b による $[\lambda xyRxy]$ の2番目-差し込みである。[*11]
- $[\lambda x(Px \rightarrow Skx)]$ は、$[\lambda xy(Px \rightarrow Sky)]$ の1,2番目-反射である。[*12]
- $[\lambda xy(\forall w)Bxwy]$ は、$[\lambda xwyBxwy]$ の2番目-普遍化である。[*13]
- $[\lambda xy(Rxx \rightarrow Syy)]$ は、$[\lambda xRxx]$ と $[\lambda ySyy]$ の条件化である。[*14]

などが導かれる。

2.2.2 $\mathscr{I}$-割当て（$\mathscr{I}$-assignment）

解釈 $\mathscr{I}$が与えられた時、プリミティブな変項上に定義された任意の関数で以下の二つの条件を満たすものは、$\mathscr{I}$-割当てfである。
(1) v が任意の対象変項である時、$f(v) \in \mathscr{D}$
(2) π^n が任意の関係変項である時、$f(\pi^n) \in \mathscr{R}_n$

2.2.3 指示（denotation）

解釈 $\mathscr{I}$と $\mathscr{I}$-割当てfが与えられた時、解釈 $\mathscr{I}$と $\mathscr{I}$-割当てfにおける、項 τ の**指示（denotation）**“$d_{\mathscr{I},f}(\tau)$” は次のように再帰的に定義される。
(1) κ がプリミティブな名辞である時、$d_{\mathscr{I},f}(\kappa) = \mathscr{F}_{\mathscr{I}}(\kappa)$

---

*11 さらに、$[\lambda xyRxy]$ は基本的である。

*12 さらに、$[\lambda xy(Px \rightarrow Sky)]$ は、$[\lambda xPx]$ と $[\lambda ySky]$ の条件化である。さらに、$[\lambda xPx]$ は基本的であり、$[\lambda ySky]$ は $[\lambda yxSxy]$ の k による2番目-差し込みである。さらに、$[\lambda yxSxy]$ は、$[\lambda xySxy]$ の1,2番目-交換である。さらに、$[\lambda xySxy]$ は基本的で ある。

*13 さらに、$[\lambda xwyBxwy]$ は基本的である。

*14 さらに、$[\lambda xRxx]$ と $[\lambda ySyy]$ は、それぞれ $[\lambda xyRxy]$ と $[\lambda yxSyx]$ の1,2番目-反射である。さらに、$[\lambda xyRxy]$ と $[\lambda yxSyx]$ はどちらも基本的である。

(2) v が対象変項である時、$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(v)=\mathscr{f}(v)$

(3) π^n が関係変項である時、$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\pi^n)=\mathscr{f}(\pi^n)$

(4) $[\lambda v_1...v_n\rho^n v_1...v_n]$ が基本的 λ-表現である時、$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}([\lambda v_1...v_n\rho^n v_1...v_n])=\mathscr{f}(\rho^n)$

(5) μ が o による ξ の i-番目差し込みである時、$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\mu)=\mathscr{PLUG}_i(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\xi), d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(o))$

(6) μ が ξ の i-番目普遍化である時、$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\mu)=\mathscr{UNIV}_i(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\xi))$

(7) μ が ξ の i, j-番目交換である時、$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\mu)=\mathscr{CONV}_{i,j}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\xi))$

(8) μ が ξ の i, j-番目反射である時、$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\mu)=\mathscr{REFL}_{i,j}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\xi))$

(9) μ が ξ と ζ の条件化である時、$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\mu)=\mathscr{COND}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\xi), d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\zeta))$

(10) μ が ξ の否定である時、$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\mu)=\mathscr{NEG}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\xi))$

λ-表現とその指示の例には以下のようなものが挙げられる。[*15]

$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}([\lambda xRxa])=\mathscr{PLUG}_2(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(R), d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(a))$

$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}([\lambda xSxbd])=\mathscr{PLUG}_2(\mathscr{PLUG}_3(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(S), d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(d)), d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(b))$

$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}([\lambda xPx\rightarrow Skx])=\mathscr{REFL}_{1,2}(\mathscr{COND}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(P), \mathscr{PLUG}_1(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(S), d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(k))))$

$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}([\lambda xy(\forall w)Bxwy])=\mathscr{UNIV}_2(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(B))$

$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}([\lambda xyRxx\rightarrow Syy])=\mathscr{COND}(\mathscr{REFL}_{1,2}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(R)), \mathscr{REFL}_{1,2}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(S)))$

$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}([\lambda xBx\rightarrow(\forall y)(Wyx\rightarrow Lmy)])=\mathscr{REFL}_{1,2}(\mathscr{COND}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(B), \mathscr{UNIV}_1$
$(\mathscr{REFL}_{1,3}(\mathscr{COND}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(W), \mathscr{PLUG}_1$
$(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(L), d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(m)))))))$

2.3 C. 充足 (SATISFACTION)

解釈 $\mathscr{I}$ と割当て $\mathscr{f}$ が与えられた時、**$\mathscr{f}$ が ϕ を充足する**、は次のように再帰的に定義される。

(1) $\phi=\rho^n o_1...o_n$ ならば、$\mathscr{f}$ が ϕ を充足するのは $\langle d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(o_1), ..., d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(o_n)\rangle \in ext_{\mathscr{R}}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\rho^n))$ のとき、そしてそのときのみである。

(2) $\phi=o\rho^1$ ならば、$\mathscr{f}$ が ϕ を充足するのは $d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(o) \in ext_{\mathscr{A}}(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(\rho^1))$ のとき、そしてそのときのみである。

(3) $\phi=(\sim\psi)$ ならば、$\mathscr{f}$ が ϕ を充足するのは $\mathscr{f}$ が ψ を充足しないとき、[*16] そ

[*15] 2.2.1 の最後の四つの例の最初については、次のようになる。
$d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}([\lambda xRxb])=\mathscr{PLUG}_2(d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(R), d_{\mathscr{I},\mathscr{f}}(b))$

[*16] p.27のこの項目の記述において、“iff $\mathscr{f}$ fails to satisfy ϕ” となっているのは誤植で、正しくは “iff $\mathscr{f}$ fails to satisfy ψ” であると思われる。

してそのときのみである。

(4) $\phi = (\psi \rightarrow \chi)$ ならば、$\mathscr{f}$が ϕ を充足するのは、$\mathscr{f}$が ψ を充足しないか、あるいは、$\mathscr{f}$が χ を充足するとき、そしてそのときのみである。

(5) $\phi = (\forall \alpha)\psi$ ならば、$\mathscr{f}$が ϕ を充足するのは、$(\forall \mathscr{f}')(\mathscr{f}' {}_{\tilde{a}} \mathscr{f} \rightarrow \mathscr{f}'$ が ϕ を充足する）ときそしてそのときのみである。ただし、ここでは、$\mathscr{f}' {}_{\tilde{a}} \mathscr{f}$は次の意味である。

$\mathscr{f}' {}_{\tilde{a}} \mathscr{f} =_{df} \mathscr{f}'$は、$\alpha$ への割当てにおいて $\mathscr{f}$と異なっている可能性があることを除いて、$\mathscr{f}$とまったく同じ割当てである。

2.4　D. 解釈下の真理（TRUTH UNDER AN INTERPRETATION）

ϕ **が解釈** $\mathscr{I}$**の下で真である**のは、すべての $\mathscr{I}$-割当$\mathscr{f}$が ϕ を充足するとき、そしてそのときのみである。ϕ **が解釈** $\mathscr{I}$**の下で偽である**のは、いかなる $\mathscr{I}$-割当$\mathscr{f}$も ϕ を充足しないとき、そしてそのときのみである。ϕ **が 妥当である**（**valid**）（**論理的に真である**（**logically true**））のは、ϕ がすべての解釈の下で真であるとき、そしてそのときのみである。次の節に出てくる論理的公理（logical axioms）はすべて妥当である。解釈 $\mathscr{I}$が基 本的対象理論の**モデルである**のは、その理論の固有公理（proper axioms）のすべてが $\mathscr{I}$の下で真であるとき、そのときのみである。

3　論理（THE LOGIC）

論理の節（28-32）は、A. 論理的公理、B. 推論規則の二つの部分からなる。

3.1　論理的公理（Logical Axioms）

命題的公理型、量化公理型、ラムダ公理型の三つのグループに分けられる。

3.1.1　命題的公理型（Propositional Schemata）

LA1: $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

LA2: $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$

LA3: $(\sim \phi \rightarrow \sim \psi) \rightarrow ((\sim \phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi)$

3.1.2　量化公理型（Quantificational Schemata）

LA4: τ が α と置き換え可能であるとき、$(\alpha)\phi \rightarrow \phi^{\tau}_{\alpha}$

LA5: α が ϕ の中で自由でないとき、$(\alpha)(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\alpha)\psi)$ *17

3.1.3　ラムダ公理型（Lambda Schemata）

λ-表現に関して **λ-等値**の公理と **λ-同一性**の公理の二つを置く。*18

■λ-等値（λ-EQUIVALENCE）　ϕ が命題式であるとき、次は公理である：

$$(x_1) \ldots (x_n)([\lambda v_1 \ldots v_n \phi] x_1 \ldots x_n \equiv \phi^{x_1, \ldots, x_n}_{v_1, \ldots, v_n})$$

これにはたとえば、$(x)([\lambda y \sim Ry]x \equiv \sim Rx)$(「任意の対象 x について、R を事例化しないという属性を x が事例化するのは、x が R を事例化しないとき、そしてそのときのみである」)、$(u)(v)([\lambda xyP\, x \ \& \ Syx]uv \equiv Pu \ \& \ Svu)$(「任意の二つの対象 u, v について、一つ目の対象が P を事例化し、二つ目の対象が一つ目に対して S の関係を持つような二つの対象であるという関係を u と v が事例化するのは、u が P でありかつ v が u に対して関係 S をもつとき、そしてそのときのみである」）のような例がある。

■関係の同一性の定義　λ-同一性の公理の導入のために、次の二つを定義する。

定義2（D_2）

$$F^1 = G^1 =_{df} (x)(xF^1 \equiv xG^1)$$

定義3（D_3）

$$\begin{aligned} F^n = G^n =_{df} \ & (\text{ただし } n > 1) \\ & (x_1) \ldots (x_{n-1})([\lambda y F^n y x_1 \ldots x_{n-1}] = [\lambda y G^n y x_1 \ldots x_{n-1}] \ \& \\ & [\lambda y F^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}] = [\lambda y G^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}] \ \& \\ & \ldots \ \& \\ & [\lambda y F^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y] = [\lambda y G^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y]) \end{aligned}$$

定義2により、1-座の関係が同一なのは、それらのエンコード外延が等しいとき、そしてそのときのみである。また、定義3により、n-座の二つの関係が等

*17 LA1 から LA5 が妥当であることは、通常の論理学における標準的な方法で証明可能である。

*18 この二つの公理が妥当であることの証明については6.2を参照。

しいのは、二つの関係に$n-1$個の対象がどのような仕方であれ（同じやり方で）差し込まれて出来た1-座の関係が同一である（すなわち、エンコード外延が等しい）とき、そしてそのときのみである。

■λ-同一性（λ-IDENTITY） ρ^n が関係項であり、$v_1, \ldots, v_n$ が対象項なら、次は公理である：

$$[\lambda v_1 \ldots v_n \rho^n v_1 \ldots v_n] = \rho^n$$

3.2　推論規則（Rules of Inference）

(1) 矢印除去（Arrow Elimination（"→E"））
　ϕ と $\phi \rightarrow \psi$ から ψ を推論できる。[*19]

(2) 普遍導入（Universal Introduction（"UI"））
　ϕ から（α)(ϕ) を推論できる。

公式に必要な規則はこの二つだけである。[*20] 開放式（open formulas）は叙述できる。$\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ の**普遍閉鎖（the universal closure）**を（α_1)…(α_n)ϕ と定義する。開放式が真であるのは、その普遍閉鎖が真であるとき、そしてそのときのみであることは容易に示せる。通常どおり、**証明（proof）**とは、それぞれの i について ϕ_i が論理的公理であるか、または、先行する式のいくつかから推論規則によって推論されるような式の有限の並び $\phi_1, \ldots, \phi_n$ のことである。ϕ が**論理的定理（theorem of logic, logical theorem）**であるのは、ϕ が最後の要素であるような証明が存在するとき、そしてそのときのみである。ϕ が集合 Γ の**証明論的帰結（から導出可能、から証明可能）(a proof-theoretic consequence of, derivable from, provable from)**であるのは、$\phi = \phi_i$ であり、それぞれの i について (a) ϕ_i が Γ の要素であるか、(b) ϕ_i が論理的公理であるか、(c) ϕ_i が先行する式のいくつかから推論規則によって推論できるかのいずれかであるとき、そして そのときのみである。そのような並びを ϕ の Γ からの証明と呼び、"$\vdash_\Gamma \phi$" または "$\Gamma \vdash \phi$" と表記する。

Γ の中の式がなんらかの理論の固有公理を構成し、$\Gamma \vdash \phi$ であるが $\vdash \phi$ ではないとき、ϕ は Γ の**固有定理（proper theorem）**であると言う。論理的定理と固有定理を区別することが重要である。論理的定理が論理的公理と推論規則

*19 肯定式 Modus Ponendo Ponens である。
*20 これらの推論規則が真理を保存することも通常の仕方で証明できる。

のみによって導かれるのに対して、固有定理は固有公理のいずれかに依存する。この依存関係を次のように定義する。ψ を Γ の中の式とする。Γ からの証明 $\phi_1, ..., \phi_n$ と、その証明のそれぞれのステップの正当化が与えられたとする。ϕ_i が ψ に**依存する（depens uopn）**のは、次の（a),(b）のいずれかのとき、そしてそのときのみである：(a) ϕ_i が ψ であり、ϕ_i の正当化がそれが Γ に属するということである；(b) ϕ_i が直接的には → E もしくは UI によって並びの中のいくつかの先行する式の帰結として正当化されているが、それらの先行する式の少なくとも一つが ψ に依存している。

上の正式な推論規則に基づいて、その他の通常の推論規則*[21]を用いる。*[22]

これらを用いて λ-等値により、次の簡略化した推論規則が得られる。ϕ が命題式で、$o_1, ..., o_n$ が対象項で、$v_1, ..., v_n$ が $o_1, ..., o_n$ のそれぞれに置き換え可能な対象変項であるとき、次の二つは推論規則である。

λ-導入（λ-Introduction）

ϕ から $[\lambda v_1...v_n\phi^{v_n,...,v_n}_{o_1,...,o_n}]o_1...o_n$ を推論できる。

λ-除去（λ-Elimination）

$[\lambda v_1...v_n\phi^{v_n,...,v_n}_{o_1,...,o_n}]o_1....o_n$ から ϕ を推論できる。

また、$[\lambda v_1...v_n\phi]$ は n-座の関係項（“F^n”）なので、λ-等値に存在量化導入（EI）を適用して、次の定理が得られる。

関係定理（“RELATIONS”）

ϕ が命題式で、その中で F^n が自由ではなく、$x_1, ..., x_n$ が自由ならば、次は定理である。

$$(\exists F^n)(x_1) ... (x_n)(F^n x_1...x_n \equiv \phi)$$

この定理の例はたとえば次のようなものである。

(a) $(\mathrm{y})(\exists F)(\mathrm{x})(Fx \equiv Gyx)$(by **UI**)

(b) $(\exists F)(x)(Fx \equiv \sim Gx)$

(c) $(\exists F)(x)(Fx \equiv Gx \,\&\, Hx)$

(d) $(\exists F)(x)(Fx \equiv Gx \vee Hx)$

(e) $(\exists F)(x)(y)(Fxy \equiv Gyx)$

(f) $(\exists F)(x)(Fx \equiv (\forall y)\, Gxy)$

---

*[21] **UE, EI, EE, QN, RAA, DN, &I, &E, vI, vE** など

*[22] p.31の6行目の v は $\vee$ の誤植であろう。

等値な関係は同一とは限らない。なので、例えば「理性を持つ動物である」という属性と「羽をもたない二本足の動物である」という属性が全く同じ対象によって事例化されていたとしても、この二つの属性は同一 であることは帰結しない。

「F は G と等値（equivalent）である」には二つの意味がある。一つは「F と G は同じ対象によって事例化されている」で、もう一つは「F と G は同じ対象によってエンコードされている」である。後者のみが属性 の同一性 (identity) を含意する。

ここまでのシステムを「対象計算（object calculus）」のシステムと呼ぶ。

4　固有公理（THE PROPER AXIOMS）

この節（32-37）では、ここまでのシステムに、さらに、論理的に真であるわけではないが、それでもアプリオリに真であると考えられる公理が四つ加えられる。

4.1　公理1:「*E*-同一性」（“*E*-IDENTITY”）

$$x =_E y \equiv E!x \; \& \; E!y \; \& \; (F)(Fx \equiv Fy)$$

この公理は、二つの対象が同一$_E$ 関係を持つのは、二つがどちらも存在し、かつ、二つが同じ属性を事例化するとき、そして、そのときのみであることを述べている。

4.2　公理2:「存在者にエンコードなし」（“NO-CODER”）

$$E!x \rightarrow {\sim}(\exists F)\, xF$$

この公理は存在する対象はいかなる属性もエンコードしないことを述べている。

4.3　公理3:「同一性」（“IDENTITY”）

4.3.1　対象の同一性の定義と同一性導入の定理

定義1より、抽象的対象は存在しないという属性を事例化する対象であった。

以下の定義が一般的な対象の 同一性を与える。

定義4（D_4）

$$x = y =_{df} x =_E y \vee (A!x \,\&\, A!y \,\&\, (F)(xF \equiv yF))$$

同一性導入の定理（“IDENTITY INTRODUCTION”, “**=I**”）

α が任意の変項の時、

$$\alpha = \alpha$$

4.3.2 同一性の公理 :（“IDENTITY”）

$$\alpha = \beta \rightarrow (\phi(\alpha, \alpha) \equiv \phi(\alpha, \beta))$$

ここでは、$\phi(\alpha, \beta)$ は $\phi(\alpha, \alpha)$ の中の α の自由な出現のいくつか（必ずしもすべてではない）を β で置き換えた結果を表す。ただし、β が α に置き換えられたところでは、それが置き換え可能でなければならない。

4.4 公理4:「抽象的対象」（“A-OBJECTS”）

ϕ の中で x が自由でないならば、次は公理である。

$$(\exists x)(A!x \,\&\, (F)\,xF \equiv \phi)$$

4.4.1 丸い四角

たとえば、“R” が丸いという属性、“S” が四角いという属性を表すとすると、$(\exists x)(A!x \,\&\, (F)(xF \equiv F = R \vee F = S))$ は公理なので、「⟨丸くて四角い⟩」という抽象的存在があることが保証される。そして、この対象は一つだけある。

「ψ であるようなものはひとつ、そしてひとつだけある」を意味する “$(\exists!x)\,\psi$” は、$(\exists x)(\psi \,\&\, (y)(\psi^y_x \rightarrow y = x))$ の省略形であるとする。そのとき、次が帰結する。

4.4.2 定理 :「唯一性」“UNIQUENESS”

いかなる ϕ をとっても、その中で x が自由でなければ、次が導ける。

$$(\exists!x)(A!x \,\&\, (F)(xF \equiv \phi))$$

4.4.3 存在する黄金の山

“G” が黄金であるという属性、“M” が山であるという属性を表すとすると、

$$(\exists x)(A!x \,\&\, (F)(xF \equiv F = G \vee F = M \vee F = E!))$$

が得られる。この対象は、それがエンコードしている属性をすべて事例化しているわけではない。一方、この対象がエンコードしている属性をすべて事例化している対象は存在しないが、それは偶有的事実である。

4.4.4　空対象と普遍対象（the empty object, the universal object）

$\phi = \ulcorner F \neq F \urcorner$ とすれば、空対象、すなわち、どんな属性もエンコードしていない対象が得られる。また、$\phi = \ulcorner F = F \urcorner$ とすれば、普遍対象、すなわち、あらゆる属性をエンコードしている対象が得られる。

4.4.5　青写真（blueprint）と相関者（correlate）

a_5 をソクラテスとすると、次の A-OBJECTS の事例は、ソクラテスが事例化する属性をすべて、そしてそ れだけをエンコードする対象である。この対象を「ソクラテスの青写真（blueprint）」と呼ぶ。

$$(\exists x)(A! \,\&\, (F)(xF \equiv Fa_5))$$

そして、ソクラテスをこの青写真の相関者（correlate）と呼ぶ。

■定義5: 青写真と相関者　x は y の青写真であり（“$Blue(x, y)$”）、y は x の相関者である（“$Cor(y, x)$”）$=_{df} (F)(xF \equiv Fy)$

A-OBJECTS によりすべての対象は、存在するものであれ、抽象的なものであれ、唯一の青写真を持つことが保証される。

$$(y)(\exists! x)(A!x \,\&\, (F)(xF \equiv Fy))$$

4.4.6　さらにいくつかの抽象的対象の例

- 対象 b が事例化していないすべての属性をエンコードする対象[*23]
- 対象 b, c について、
  - b と c がどちらも事例化している属性をすべて、そしてそれらだけをエンコードしている対象[*24]
  - b と c のどちらかが事例化している属性をすべて、そしてそれらだけをエンコードしている対象[*25]

[*23] $(\exists x)(A!x \,\&\, (F)(xF \equiv {\sim} Fb))$ より。

[*24] $(\exists x)(A!x \,\&\, (F)(xF \equiv (Fb \,\&\, Fc)))$ より。

[*25] $(\exists x)(A!x \,\&\, (F)(xF \equiv (Fb \vee Fc)))$ より。

―b が c に対して持っている（事例化している）関係的属性をすべて、
そしてそれらだけをエンコードしている対象

$$(\exists x)(A!x \,\&\, (F)(xF \equiv (\exists G^2)((Gbc \,\&\, F = [\lambda xGxc]) \vee (Gcb \,\&\, F = [\lambda xGcx]))))$$

この節の四つの固有公理を合わせて、「抽象的対象の基本理論（the elementary theory of abstract objects）」
と呼ぶ。

5　一つの補助的仮説（AN AUXILIARY HYPOTHESIS）

この節（37-39）では核内性についての一つの補助的仮説が提示される。

■核内性（Nuclearity），核外性（Extra-nuclearity）　直観的には、抽象的対象は以下のような属性を事例化することはないように思われる。

丸い、形を持つ、赤い、色を持つ、大きい、大きさを持つ、柔らかい、手触りがある、質量を持つ、時間空間の中に位置を持つ、視覚で捉えられる、思考能力を持つ、感覚能力を持つ、等

また、直観的には二つの抽象的対象は、出会ったり、蹴り合ったり、キスしたり等は決してすることはないようにも思われる。ここから、抽象的対象はこれらの属性や関係の否定を事例化することが帰結する。例えば、抽象的対象は時間空間の中に位置を持たないという属性を事例化する。これも私たちの持つ直観に合致するように思われる。

核内属性（nuclear properties）　ordinary properties, characterizing properties
上のような属性。
抽象的対象はこのタイプの属性を事例化することはできない。

核外属性（extra-nuclear properties）たとえば、
抽象的である、思考の対象になる、それについて書かれる、崇拝されている、～よりも有名である、等。抽象的対象はこれらの属性を事例化することがありうる。

核外属性の多くは志向的（intentional）属性である。

そこで、次の補助的仮説を立てる：

補助的仮説　$(F^n)(x_1)\dots(x_n)(A!x_1 \,\&\, \dots \,\&\, A!x_n \,\&\, Nuclear(F^n) \rightarrow \sim F^n x_1 \dots x_n)$

> $x_1 \dots x_n$ がすべて抽象的対象であり、F^n が核内属性であるなら、$x_1 \dots x_n$ は F^n という関係を事例化しない。

6　付録

6.1　クラークのパラドックスについて

プリーストは「二つの述語を想定する考えに反論するクラークの議論」を次のように記述している。

> P を、事例化していないある属性をエンコードしているという属性とする。t をこの属性によって性格付けられている（characterized）対象とする。特に、その対象はその属性をエンコードする。もし、その対象がその属性を事例化していなかったなら、それはそれが事例化していないある属性、すなわち P をエンコードしていることになってしまう。ゆえに、それはその属性を事例化することになってしまう。したがって、t は P を事例化する。ここから、それは、それが事例化していないある属性をエンコードする。そして、それがエンコードしている唯一の属性は P であるのだから、それは P を事例化していない。これは矛盾である。（Priest 2016: 247, n.38）

これは Zalta のシステムの用語を用いれば、次のような議論であると解釈できる。

> $[\lambda x(\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]$ という属性を許容したとする。この属性を P とする。対象 t が P を、そして P のみをエンコードしているとする。(1) $\sim Pt$ と仮定する。t は P をエンコードしているので、tP である。ゆえに、$tP \,\&\, \sim Pt$ であり、ここから EI により、$(\exists F)(tF \,\&\, \sim Ft)$ が導ける。さらに、λI により、$[\lambda x(\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]t$, すなわち、$Pt$ が帰結する。これは $Pt \,\&\, \sim Pt$ の矛盾である。(2) そこで、Pt と仮定する。つまり、$[\lambda x(\exists F)(xF \,\&\, \sim Fx)]t$ である。λE により、$(\exists F)(tF \,\&\, \sim Ft)$ が導けるが、これは、t はそれが事例化していないある属性をエンコードしていることを意味

する。その属性は P でしかありえない。t がエンコードしている属性は P だけだからである。したがって、tP & ~ Ptから ~ Pt であり、これも Pt & ~ Pt の矛盾である。

意味論的に論じると、次のようである。

$[\lambda x(\exists F)(xF\ \&\ {\sim}Fx)]$ という表現を許容したとする。これを P とする。$\mathit{tee} \in \mathscr{D}$ とし、$d_{\mathscr{I},f}(t) = \mathscr{F}(t) = \mathit{tee}$ とする。$d_{\mathscr{I},f}(\mathrm{P}) = \mathit{clark}$ とする。ここで、次の（A)(B）を仮定する。

(A）$\mathit{tee} \in ext_{\mathscr{A}}(\mathit{clark})$

(B）clark 以外 のいかなる $r \in \mathscr{R}$ についても、$\mathit{tee} \notin ext_{\mathscr{A}}(r)$

さて、$\mathit{tee} \in ext_{\mathscr{R}}(\mathit{clark})$ であるか、あるいは、$\mathit{tee} \notin ext_{\mathscr{R}}(\mathit{clark})$ であるかのどちらかである。

(1）まず、$\mathit{tee} \notin ext_{\mathscr{R}}(\mathit{clark})$ であるとする。この場合、P の意味から、任意の $r^1 \in \mathscr{R}_1$ について、$\mathit{tee} \notin ext_{\mathscr{A}}(r^1)$ であるか、あるいは、$\mathit{tee} \in ext_{\mathscr{R}}(r^1)$ であるかのどちらかであると思われる。したがって、clark について も、$\mathit{tee} \notin ext_{\mathscr{A}}(\mathit{clark})$ であるか、$\mathit{tee} \in ext_{\mathscr{R}}(\mathit{clark})$ であるかのどちらかである。しかし、どちらにしても矛盾が避けられない。後者は前提に反するし、前者は (A）に反する。

(2）そこで、$\mathit{tee} \in ext_{\mathscr{R}}(\mathit{clark})$ であるとする。この場合、P の意味から、ある $r^1 \in \mathscr{R}_1$ について、$\mathit{tee} \in ext_{\mathscr{A}}(r^1)$ かつ、$\mathit{tee} \notin ext_{\mathscr{R}}(r^1)$ が帰結すると思われる。この r^1 を $\mathit{relation}$ とする。ところが、(B）によって、$\mathit{relation} = \mathit{clark}$ である。したがって、$\mathit{tee} \notin ext_{\mathscr{R}}(\mathit{clark})$ が帰結し、これは仮定に矛盾する。

1.2.4 節で見たように、Zalta のシステムでは λ-表現の生成に制限を設けることによって、また、それに応じた意味論を設計することによって、このパラドックスは回避される。仮に Zalta のシステムを修正して［$\lambda x(\exists F)(xF\ \&\ {\sim}Fx)$］のような表現を許容した場合、上の意味論的な議論の中に二度出てくる「P の意味から、... と思われる」という部分の推論を阻止するような意味論が構築できるかどうかが問題になると思われる。これについては今後の検討課題としたい。

6.2　ラムダ公理型の妥当性

6.2.1　λ- 等値の公理

この公理は次のようなものであった。

λ-等値　ϕ が命題式であるとき、

$$(x_1)\ldots(x_n)([\lambda v_1\ldots v_n\phi]x_1\ldots x_n \equiv \phi x_1,\ldots,x_n)$$

任意の解釈 $\mathscr{I}$ について、任意の $\mathscr{I}$-割当 f をとる。この公理の妥当性を証明するには、f がこの公理を充足することを証明すればよい。そのためには、$x_1, \ldots, x_n$ への割当てを除いて f と同等な任意の割当て f' が $[\lambda v_1\ldots v_n\phi]x_1\ldots x_n \equiv \phi x_1,\ldots,x_n$ を充足することを示せばよい。充足の規則（4）と "≡" の定義から、これは f' がこの式の右辺を充足することと、左辺を足することが必要十分の関係であることを示すことに等しい。以下では、$d_{\mathscr{I},f'}$ は省略して単に d と書くことにする。充足の規則（1）より、

f' が $[\lambda v_1\ldots v_n\phi]x_1\ldots x_n$ を充足する

iff　$\langle d(x_1), \ldots, d(x_n)\rangle \in ext_{\mathscr{R}}(d([\lambda v_1\ldots v_n\phi]))$

である。

$[\lambda v_1\ldots v_n\phi]$ を μ と略記する。証明は以下のとおり帰納的に行われる。ξ と ζ を λ-表現とし、それぞれについてこの公理が満たされると仮定する。つまり、ψ と χ が命題式で、$\xi = [\lambda v_1\ldots v_n\psi], \zeta = [\lambda v_1\ldots v_n\chi]$ とするなら、

$$(x_1)\ldots(x_n)([\lambda v_1\ldots v_n\psi]x_1\ldots x_n \equiv \psi^{x_1,\ldots,x_n}_{v_1,\ldots,v_n})$$
$$(x_1)\ldots(x_n)([\lambda v_1\ldots v_n\chi]x_1\ldots x_n \equiv \chi^{x_1,\ldots,x_n}_{v_1,\ldots,v_n})$$

であるとする。この仮定を「仮定 H」と呼ぶことにする。

（1）μ が基本的であるなら、$\phi = \rho^n v_1\ldots v_n$ であり、指示の規則（4）により、$d([\lambda v_1\ldots v_n\phi]) = d(\rho^n)$ である。したがって、

$\langle d(x_1), \ldots, d(x_n)\rangle \in ext_{\mathscr{R}}(d([\lambda v_1\ldots v_n\phi]))$

iff　$\langle d(x_1), \ldots, d(x_n)\rangle \in ext_{\mathscr{R}}(d(\rho^n))$

iff　f' は $\rho^n x_1\ldots x_n$ を充足する　　　（充足の規則（1）による）

iff　f' は $\phi x_1, \ldots, x_n$ を充足する

（2）μ が ξ の o による i 番目-差し込みであるとき、指示の規則（5）により、$d([\lambda v_1\ldots v_n\phi]) = \mathscr{PLUG}_i(d(\xi), d(o))$ である。ただし、o が ϕ の中で一番左に出てくる対象項で、ϕ' を ϕ の中の最初の o の出現を新しい変項 v で置き換えたもの

とすれば、$\xi = [\lambda v_1 \ldots v_j v v_{j+1} \ldots v_n \phi']$ であり、j は o の前に現れる自由変項の個数であり、$i = j+1$ である。したがって、

$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in \mathit{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi]))$

iff　$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in \mathit{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{PLUG}_i(\mathscr{d}(\xi), \mathscr{d}(\mathrm{o})))$

iff　$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_j), \mathscr{d}(o), \mathscr{d}(x_{j+1}), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in \mathit{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}(\xi))$　（$\mathscr{PLUG}_i$ の条件より）

iff　$\mathscr{f}'$ は $\xi x_1 \ldots x_j\ o\ x_{j+1} \ldots x_n$ を充足する　（充足の規則（1）による）

iff　$\mathscr{f}'$ は $\phi'^{x_1,\ldots,x_j,o,x_{j+1},\ldots,x_n}_{v_1,\ldots,v_j,v,v_{j+1},\ldots,v_n}$ を充足する　（仮定 H による）

iff　$\mathscr{f}'$ は $\phi^{x_1,\ldots,x_n}_{v_1,\ldots,v_n}$ を充足する

（3）μ が ξ の i 番目-普遍化であるとき、指示の規則（6）により、$\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi])$ $= \mathscr{UNIV}_{\mathrm{i}}(\mathscr{d}(\xi))$ である。ただし、$\xi = [\lambda v_1 \ldots v_{i-1} v v_i v_{i+1} \ldots v_n \psi]$ であり、ここで $\phi = (\forall v)\psi$ であり、v は ψ の中の i-番目の自由対象変項である。したがって、

$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in \mathit{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi]))$

iff　$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in \mathit{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{UNIV}_i(\mathscr{d}(\xi)))$

iff　$(\forall o)(\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(\mathrm{x}_{i-1}), \mathscr{d}(o), \mathscr{d}(x_i), \mathscr{d}(x_{i+1}) \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in \mathit{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}(\xi)))$

（$\mathscr{UNIV}_i$ の条件より）

iff　$(\forall o)$（$\mathscr{f}'$ は $\xi x_1 \ldots x_{i-1} o\ x_i x_{i+1} \ldots x_n$ を充足する）　（充足の規則（1）による）

iff　$(\forall o)$（$\mathscr{f}'$ は $\psi^{x_1,\ldots x_{i-1},o,x_i,x_{i+1},\ldots,x_n}_{v_1,\ldots v_{i-1},v,v_i,v_{i+1},\ldots,v_n}$ を充足する）　（仮定 H による）

iff　$\mathscr{f}'$ は $(\forall v)\,\psi^{x_1,\ldots,x_n}_{v_1,\ldots,v_n}$ を充足する

（4）μ が ξ の i, j 番目-交換であるとき、指示の規則（7）により、$\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi])$ $= \mathscr{CONV}_{i,j}(\mathscr{d}(\xi))$ である。ただし、$\xi = [\lambda v_1 \ldots v_{i-1} v_j v_{i+1} \ldots v_{j-1} v_i v_{j+1} \ldots v_n \phi]$ であり、v_j は ϕ の中の i 番目の自由対象変項である。したがって、

$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in \mathit{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi]))$

iff　$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in \mathit{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{CONV}_{i,j}(\mathscr{d}(\xi)))$

iff　$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_{i-1}), \mathscr{d}(x_j), \mathscr{d}(x_{i+1}), \ldots, \mathscr{d}(x_{j-1}) \ldots, \mathscr{d}(x_i), \mathscr{d}(x_{j+1}) \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in \mathit{ext}_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}(\xi))$

（$\mathscr{CONV}_{i,j}$ の条件より）

iff　$\mathscr{f}'$ は $\xi x_1 \ldots x_{i-1} x_j x_{i+1} \ldots x_{j-1} x_i x_{j+1} \ldots x_n$を充足する　（充足の規則（1）による）

iff　$\mathscr{f}'$ は $\phi^{x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_n}_{v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_n}$ を充足する　（仮定 H による）

iff　$\mathscr{f}'$ は $\phi^{x_1,\ldots,x_n}_{v_1,\ldots,v_n}$を充足する

（5）μ が ξ の i, j 番目-反射であるとき、指示の規則（8）により、$\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi])$ $= \mathscr{REFL}_{i,j}(\mathscr{d}(\xi))$ である。ただし、k が ϕ の中で二度以上出現する最も左にあ

る変項 v_i の最初と二番目の出現の間にあるの自由変項の個数であり、ϕ' が ϕ の中の二番目の v_i の出現を新しい変項 v で置き換えたものであり、$j = i + k + 1$ とするなら、$\xi = [\lambda v_1 \ldots v_{i+k} v v_j \ldots v_n \phi']$ である。したがって、

$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi]))$

iff $\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{REFL}_{i,j}(\mathscr{d}(\xi)))$

iff $\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_{i+k}), \mathscr{d}(x), \mathscr{d}(x_j), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}(\xi))$ かつ、$\mathscr{d}(x_i) = \mathscr{d}(x)$

($\mathscr{REFL}_{i,j}$ の条件より)

iff f' は $\xi x_1 \ldots x_{i+k} x x_j \ldots x_n$ を充足し、かつ、$\mathscr{d}(x_i) = \mathscr{d}(x)$

(充足の規則 (1) による)

iff f' は $\phi'^{x_1, \ldots, x_{i+k}, x, x_j, \ldots, x_n}_{v_1, \ldots, v_{i+k}, v, v_j, \ldots, v_n}$ を充足し、かつ、$\mathscr{d}(x_i) = \mathscr{d}(x)$ (仮定 H による)

iff f' は $\phi^{x_1, \ldots, x_n}_{v_1, \ldots, v_n}$ を充足する

(6) μ が ξ と ζ の条件化であるとき、指示の規則(9)により、$\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi]) = \mathscr{COND}(\mathscr{d}(\xi), \mathscr{d}(\zeta))$ で ある。ただし、$\phi = (\psi \to \chi)$ で、ψ の中の自由変項が $v_1, \ldots, v_p$ であり、χ の中の自由変項が $v_{p+1}, \ldots, v_n$ のとき、$\xi = [\lambda v_1 \ldots v_p \psi]$, $\zeta = [\lambda v_{p+1} \ldots v_n \chi]$ である。したがって、

$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi]))$

iff $\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{COND}(\mathscr{d}(\xi), \mathscr{d}(\zeta)))$

iff $\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_p) \rangle \notin ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}(\xi))$ または $\langle \mathscr{d}(x_{p+1}), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}(\zeta))$

($\mathscr{COND}$ の条件より)

iff f' は $\xi x_1 \ldots x_p$ を充足しないか、または、f' は $\zeta x_{p+1} \ldots x_n$ を充足する。

(充足の規則 (1) による)

iff f' は $\psi^{x_1, \ldots, x_p}_{v_1, \ldots, v_p}$ を充足しないか、または、f' は $\chi^{x_{p+1}, \ldots, x_n}_{v_{p+1}, \ldots, v_n}$ を充足する

(仮定 H による)

iff f' は $\psi^{x_1, \ldots, x_p}_{v_1, \ldots, v_p} \to \chi^{x_{p+1}, \ldots, x_n}_{v_{p+1}, \ldots, v_n}$ を充足する (充足の規則 (4) による)

iff f' は $(\psi \to \chi)^{x_1, \ldots, x_n}_{v_1, \ldots, v_n}$ を充足する

iff f' は $\phi^{x_1, \ldots, x_n}_{v_1, \ldots, v_n}$ を充足する

(7) μ が ξ の否定であるとき、指示の規則 (10) により、$\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi]) = \mathscr{NEG}(\mathscr{d}(\xi))$ である。ただし、$\phi = (\sim \psi)$ のとき、$\xi = [\lambda v_1 \ldots v_n \psi]$ である。したがって、

$\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}([\lambda v_1 \ldots v_n \phi]))$

iff $\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \in ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{NEG}(\mathscr{d}(\xi)))$

iff $\langle \mathscr{d}(x_1), \ldots, \mathscr{d}(x_n) \rangle \notin ext_{\mathscr{R}}(\mathscr{d}(\xi))$ ($\mathscr{NEG}$ の条件より)

iff　$\mathscr{f}'$ は $\xi x_1 \ldots x_n$ を充足しない　(充足の規則 (1) による)
iff　$\mathscr{f}'$ は $\psi^{x_1,\ldots,x_p}_{v_1,\ldots,v_p}$ を充足しない　(仮定 H による)
iff　$\mathscr{f}'$ は $\sim\psi^{x_1,\ldots,x_p}_{v_1,\ldots,v_p}$ を充足する　(充足の規則 (3) による)
iff　$\mathscr{f}'$ は $\phi^{x_1,\ldots,x_n}_{v_1,\ldots,v_n}$ を充足する

6.2.2　λ- 同一性の公理

この公理は次のようなものであった。

λ-IDENTITY　ρ^n が関係項であり、$v_1, \ldots ,v_n$ が対象項なら、

$$[\lambda v_1 \ldots v_n \rho^n v_1 \ldots v_n] = \rho^n$$

(1) まず $n = 1$ のとき、公理が妥当であることを証明する。この場合、定義2より、$(x)(x[\lambda v \rho^1 v] \equiv x\rho^1)$ が公理である。これが妥当であることについては、Zalta が「いかなる解釈においても、[$[\lambda v \rho^1 v] = \rho^1$ の] 等号の両側に置かれている項の指示は同一であり、それゆえ、それらは同じエンコード外延をもつはずである」と述べているとおりである (Zalta 1983: 29)。任意の解釈 $\mathscr{I}$ をとり、それについての任意の割当て $\mathscr{f}$ をとる。さらに x の割当て以外において $\mathscr{f}$ と全く同じ任意の割当て $\mathscr{f}'$ を取った時、$\mathscr{f}'$ が $x[\lambda v \rho^1 v]$ を充足することと、$\mathscr{f}'$ が $x\rho^1$ を充足することが必要十分であることが示せればよい。$[\lambda v \rho^1 v]$ は基本的な λ-表現であるの で、指示の規則 (4) により $\mathscr{d}([\lambda v \rho^1 v]) = \mathscr{d}(\rho^1)$ である。したがって、

　　$\mathscr{f}'$ は $x[\lambda v \rho^1 v]$ を充足する
iff　$\mathscr{d}(x) \in ext_{\mathscr{A}}(\mathscr{d}([\lambda v \rho^1 v]))$　(充足の規則 (2) による)
iff　$\mathscr{d}(x) \in ext_{\mathscr{A}}(\mathscr{d}(\rho^1))$
iff　$\mathscr{f}'$ は $x\rho^1$ を充足する　(充足の規則 (2) による)

(2) $n > 1$ のとき、$[\lambda v_1 \ldots v_n \rho^n v_1 \ldots v_n]$ を μ^n と略記すると、定義3より公理は、

$(x_1) \ldots (x_{n-1})([\lambda y \mu^n y x_1 \ldots x_{n-1}] = [\lambda y \rho^n y x_1 \ldots x_{n-1}]$ &
$[\lambda y \mu^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}] = [\lambda y \rho^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}]$ &
... &
$[\lambda y \mu^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y] = [\lambda y \rho^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y])$

である。充足の規則(3)(4)(5) と "&" の定義から、証明のためには、$x_1, \ldots, x_{n-1}$ の割当て以外で $\mathscr{f}$ と同じ割当て $\mathscr{f}''$ が、連言で繋がれた n 個の式 $[\lambda y \mu^n y x_1 \ldots x_{n-1}] = [\lambda y \rho^n y x_1 \ldots x_{n-1}], \ldots, [\lambda y \mu^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y] = [\lambda y \rho^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y]$ のすべてを充足することが示せればよい。以下では $\mathscr{d}_{\mathscr{I},\mathscr{f}''}$ を $\mathscr{d}$ と略記する。μ は基本的な λ-表現なので、

指示の規則（4）より、$\mathscr{d}(\mu^n)=\mathscr{d}(\rho^n)$ である。それゆえ、n 個の式のそれぞれについて、等号の両側に置かれている λ-表現の指示は同一であるはずである。なぜなら、それらはそれぞれ $\mathscr{d}(\mu^n)$ と $\mathscr{d}(\rho^n)$ に対して同じ論理関数（$\mathscr{PLUG}_i$）を同じやり方で $n-1$回適用して決定される 1-座の関係であるからである。たとえば、二番目の ［$\lambda y\mu^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}$］ の指示は次のように決定される。

$$
\begin{aligned}
& \mathscr{d}([\lambda y\mu^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}])\\
= \quad & \mathscr{PLUG}_1(\mathscr{d}([\lambda y_1 y\mu^n y_1 y x_2 \ldots x_{n-1}]), \mathscr{d}(x_1))\\
= \quad & \mathscr{PLUG}_1((\mathscr{PLUG}_3(\mathscr{d}([\lambda y_1 y y_2 \mu^n y_1 y y_2 \ldots x_{n-1}]), \mathscr{d}(x_2)), \mathscr{d}(x_1))\\
& \ldots\\
= \quad & \mathscr{PLUG}_1((\mathscr{PLUG}_3((\ldots\mathscr{PLUG}_n(\mathscr{d}([\lambda y_1 y y_2 \ldots \mathrm{y}_{n-1}\mu^n y_1 y y_2 \ldots y_{n-1}]), \mathscr{d}(x_{n-1}))\ldots),\\
& \mathscr{d}(x_2))), \mathscr{d}(x_1))\\
= \quad & \mathscr{PLUG}_1((\mathscr{PLUG}_3((\ldots\mathscr{PLUG}_n(\mathscr{d}(\mu^n), \mathscr{d}(x_{n-1}))\ldots), \mathscr{d}(x_2))), \mathscr{d}(x_1))
\end{aligned}
$$

（［$\lambda y_1 y y_2 \ldots y_{n-1}\mu^n y_1 y y_2 \ldots y_{n-1}$］ が基本的であることによる）

$$
= \quad \mathscr{PLUG}_1((\mathscr{PLUG}_3((\ldots\mathscr{PLUG}_n(\mathscr{d}(\rho^n), \mathscr{d}(x_{n-1}))\ldots), \mathscr{d}(x_2))), \mathscr{d}(x_1))
$$

同じやり方で ［$\lambda y\rho^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}$］ の指示がこれと同じ関係に帰着することが示せる。したがって、［$\lambda y\mu^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}$］ の指示と ［$\lambda y\rho^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}$］ の指示は同一である。残りの $n-1$個のケースについても同様に指示が同一であることが示せる。

これらの指示の同一を用いて、$\mathscr{f}''$ が、たとえば ［$\lambda y\mu_n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}$］ = ［$\lambda y\rho^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}$］、すなわち、

$(z)(z[\lambda y\mu^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}] \equiv z[\lambda y\rho^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}])$ を充足することは以下のように示すことができる。$\mathscr{f}'''$を z への割当てを除いて $\mathscr{f}''$ とまったく同じ割当てとする。

$\mathscr{f}'''$ は $x[\lambda y\mu^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}]$ を充足する

iff $\mathscr{d}_{\mathscr{I},\mathscr{f}'''}(x) \in \mathscr{ext}_{\mathscr{A}}(\mathscr{d}_{\mathscr{I},\mathscr{f}'''}([\lambda y\mu^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}]))$ （充足の規則（2）による）

iff $\mathscr{d}_{\mathscr{I},\mathscr{f}'''}(x) \in \mathscr{ext}_{\mathscr{A}}(\mathscr{d}_{\mathscr{I},\mathscr{f}'''}([\lambda y\rho^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}]))$ （指示の同一による）

iff $\mathscr{f}'''$ は $x[\lambda y\rho^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}]$ を充足する （充足の規則（2）による）

残りの $n-1$ のケースについても同様である。

参照文献

Pelletier, F. J. and Zalta, E. N.（2000）, “How to Say Goodbye to the Third Man”, *Noûs*, 34/2）: 165-202.

Priest, G.（2016）, *Towards Non-Being: The Logic and Metaphysics of Intentionality,*

2nd edition (Oxford: Oxford University Press).
Reicher, M. (2019), “Nonexistent Objects”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL =<https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/nonexistent-objects/>.
Zalta, E. (1983), *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics* (Dordrecht: Reidel).