山口大学教育学部研究論叢　第 69 巻　137 頁～ 142 頁　2020 年 1 月

算数・数学教育における定義に関する注意点

数のひろがりに関連して

泉池　耕平・笠井　伸一・石原　海・飯寄　信保

Some remarks on Definitions in Mathematics Education
Relating to the Expansion of Numbers

IZUCHI Kouhei, KASAI Shin-ichi, ISHIHARA Kai, IIYORI Nobuo

（Received September 27, 2019）

1　はじめに

科学技術が発展し、情報化が進む現在の社会において、「思考・判断・表現」する力が求められている。このような背景から、現在の学校教育において、算数・数学では、小学校・中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説によると、中学校 1 年次までに筋道を立てて説明する活動を行い、中学校 2 年次以降に「論理的に考察する」、「論理的に確かめる」、「論理的に説明する」などの学習が行われている。

大学生に、高校までの数学の内容を尋ねると、様々な定理や公式をよく覚えているという印象である。しかし、それらの正しい理由や導き方についてきちんと説明することができない者が多いように思う。そもそも、それらを説明するには何をしたら良いかわからないと言う者も少なくない。この原因の一つとして、定義の本質が十分に理解されていないことがあるのではないかと考えられる。

算数・数学の教科書を全体的に眺めてみると、学習段階に合わせて定義の表現方法が変わったり、新しい概念を紹介する際に既知の事実と関連させるなど、定義や概念の導入時に様々な工夫を施している。しかし、児童・生徒が算数・数学をより深く理解し論理的に物事を考えるように指導していく上で、注意が必要と思われる内容がいくつかあるように思う。本論文では、その中から数にスポットを当てて、正の数・負の数、有理数や無理数の数のひろがりに関連した内容の中で注意が必要と思われるものを紹介する。

2　数のひろがり

算数・数学では、小・中・高を通して、多くの概念について学んでいく。そして、様々な活動を通して、それらの概念や様々な特殊な性質について厳密な議論が行われている。それらの議論を行っていく上で、数学的な表現を用語としてきちんと定義することは不可欠である。定義や仮定をもとに議論が積み上げられている数学の性質上、定義や仮定を確実に把握し、結果がそれらに矛盾していないことをしっかりと確認することが重要となる。

これらの議論を行っていく上で、最も大切なものの一つが数である。小学校算数で、最初に非負の整数を扱い、それらの演算について学習する。さらに、それらをもととして、分数や小数などの非負の有理数まで数の概念をひろげ、非負の有理数の演算の性質などについて学ぶ。算数では、ものの個数やものを分けたときの量など、比較的身近にある数の概念を扱っている。

中学校になると、算数から数学に変わり、徐々に学問的な内容にシフトする。中学校数学 1 年次に紹介される負の数は、その第一歩であるといえる。また、中学校 3 年次には平方根について学び、有理数以外の数まで数の概念がひろがる。これらの数は、小学校算数には登場しない新しい数であるため、当然これまでに学んだ数における様々な性質が一般的にそのまま適応できるとは限らない。それゆえ、新たな概念を導入する際には、十分な注意が必要である。

中学校数学・高等学校数学で、導入される新しい数の概念には次のようなものがある。

（ア）正の数、負の数

（イ）平方根、無理数

（ウ）複素数

（ア）、（イ）は、中学校数学で紹介される。小学校算数で学んだ非負の有理数の性質が児童・生徒に定着している状態の中で、負の数や平方根などの新しい数を加えた世界においても、それらが成り立つかどうか十分に気をつける必要がある。3章で正の数と負の数、4章で無理数についての注意点などを述べる。

（ウ）の複素数は、高校数学で初めて導入される。それまでに学んできた実数が数のすべてと考えられてきた状態の中で、得体の知れない数として苦手意識をもつ者も多く、大学生でも複素数を実数のように扱う者も少なくない。よく見かける誤りの一つが絶対値である。中学校数学では、

数直線上で、0 からある数までの距離を、絶対値といいます。

「数学1」(啓林館、2017b) から引用

と定義され、複素数の絶対値も同様に原点からの距離で定義される。しかし、実数において成立する性質を引きずり、複素数 α に対しても $|\alpha|^2 = \alpha^2$ としてしまうなどの勘違いがしばしば見受けられる。原因の一つとして、負の数や無理数が導入され、数の世界がひろがった際に、これまで学んだ様々な定義・性質を十分に吟味しないまま使っていることが考えられる。

有理数、実数、複素数、どの世界で考えるかによって、答え方が変わるケースがある。5章では、このような数のひろがりに関連した問題として、因数分解を紹介する。

3　有理数における演算

小学校算数ではものの個数から始まり、ものを分けた量、長さや面積などを考えることにより、非負（0以上の数）の世界に限定して、整数から小数や分数までの数を扱う。中学校数学1年次の「正の数と負の数」では、小学校算数で学んだ非負の有理数をもとにして、何かしらの基準を0と定めて、符号のついた数である正の数と負の数が導入される。さらに、負の数を含んだ有理数全体での四則演算について学んでいく。これまでに学んだ非負の有理数の世界における演算の性質が、よりひろい世界でも妥当であるかについて十分に吟味がすることが大切であり、それを意識した指導が重要となる。

3．1　演算の性質

代数学の基本概念の一つに環がある。次の (0)-(5) の性質を満たす集合 R 上の加法（$+$）・乗法（$\times$）が定まっているとき、$(R, +, \times)$ を環という。

(0) 任意の $a, b \in R$ に対して、$a + b \in R$、$a \times b \in R$

(1) 零元が存在する。つまり、$0 \in R$ で任意の $a \in R$ に対して $a + 0 = 0 + a = a$ となるものが存在する。

(2) 加法に関する逆元が存在する。つまり、各 $a \in R$ に対して、$a + b = 0$ となる $b \in R$ が存在する。

(3) 加法について交換法則が成り立つ。つまり、任意の $a, b \in R$ に対して $a + b = b + a$ が成り立つ。

(4) 加法・乗法それぞれに対して、結合法則が成り立つ。つまり、任意の $a, b, c \in R$ に対して

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \times (b \times c) &= (a \times b) \times c \end{aligned}$$

が成り立つ。

(5) 分配法則が成り立つ。つまり、任意の $a, b, c \in R$ に対して

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= a \times b + a \times c \\ (a + b) \times c &= a \times c + b \times c \end{aligned}$$

が成り立つ。

環の条件に加えて、集合 R が乗法の交換法則

(6) 任意の $a, b \in R$ に対して $a \times b = b \times a$

を満たすとき、R を可換環という。環についての解説書として、(永尾、1983) などがある。

整数、有理数の演算における基本かつ重要な性質を条件化しているもので、環はこれらを一般化した概念であるといえる。整数、有理数における加法・乗法はそれぞれ上記の条件を満たしており、どちらも可換環であることがわかる。整数、有理数以外に、可換環の代表例として、実数や複素数などがある。教科書を見ると、この可換環の条件を確認していく流れとなっている。

中学校数学のスタートの前段階で、既に (1) の零元 0 は小学校算数で導入されており、非負の有理数の世界で 0 の存在は確認されている状態である。ここから、この 0 を基準として (2) の負の数の導入が行われる。この際に、負の数を含む加法についてまだ取り扱っていないが、本質的には (2) が成り立つように導入されている。

最初に扱われる演算は加法である。小学校で学んだ正の数の加法をもとに、数直線を用いて、負の数を含む世界にひろげて加法の説明が行われる。さらに、算数で学んだ計算法則である加法の交換法則・結合法則が負まで範囲をひろげた世界でも成り立つことを学ぶ。つまり、(3) と (4) の加法について確認を行っている。その後、加法の逆演算として、減法が紹介される。

３．２　乗法

乗法は小学校算数で導入される。算数では、非負の整数で考え、かけられる数が何個あるか、その個数をかける数として考えて、そこから、面積などを利用して、非負の有理数の世界までひろげて乗法を考えている。小学校算数４年次の「計算のきまり」では、図をもとにして、非負の有理数で結合法則・交換法則・分配法則が成り立つことを確認する。

中学校数学１年次「正の数と負の数」で、負の数を含んだ乗法を学ぶ。導入では、整数の場合を例にして説明される。かける数が正の整数である場合は、もともとの小学校算数での考え方に当てはめ、$(-2) \times (+2)$ は -2 が $+2$ 個と考えることによって説明される。しかし、かける数が負の数である場合、もともとの小学校算数での考え方に当てはめれば、$(+2) \times (-2)$ は $+2$ が -2 個となってしまい、式が意味を成さない。そこで、「負の数をかけること」の項目では、図１のようにかける数を１ずつ小さく

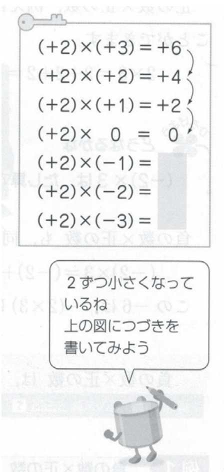

図 1: 「数学１」(啓林館、2017b) から引用

していくことで、その規則性から 図２のように説明して

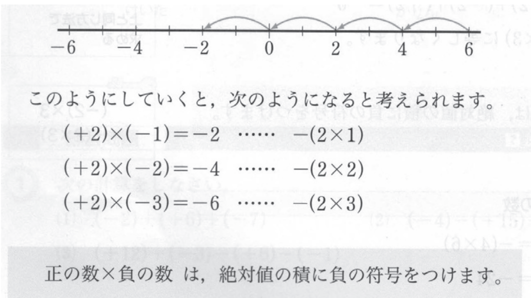

図 2: 「数学１」(啓林館、2017b) から引用

いる。また、負の数 × 負の数 のときも正の数 × 負の数のときと同様にして、図３のようにかける数を１ずつ小さくしていくことで、その規則性から図４のように説明される。 これによって、例えば $(-1) \times (-1) = +1$ が確認

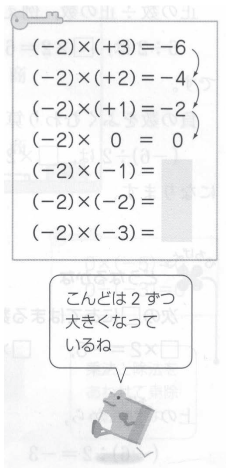

図 3: 「数学１」(啓林館、2017b) から引用

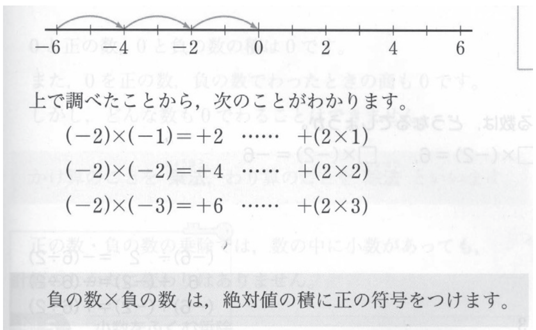

図 4: 「数学１」(啓林館、2017b) から引用

できたことになる。しかし、図２や図４にあるような「考えられます」や「わかります」という表現は誤解を招く可能性があり、注意が必要である。なぜなら、かける数が正の整数の場合と異なり、かける数が負の整数のときの乗法の意味づけがされていないからである。確かに、上記の方法は整数の世界への乗法の自然な拡張と捉えられるが、このように考えなければいけないという訳ではなく、上記のように考えることが正しいという根拠になっていない。そのため、「なぜそのように考えられるのか」という疑問を持つ生徒が出てくる可能性がある。実際には、上記の「となると考えられます」などは、非負の世界の性質を負の世界でもそのまま保存していると都合が良いので「となると考える」という意味で用いられていると考えられる。

整数の乗法を学んだ後に、「正の数・負の数でわること」でその逆演算として除法が紹介され、その直後に、“正の数・負の数の乗除（乗法・除法）では、数の中に小数・分数があっても、計算のしかたに変わりはありません” と説明される。これによって有理数の乗法が導入されたことになる。さらに、既に理解している性質として、可換環の条件 (4) の乗法の結合法則と (6) の乗法の交換法則が成り立つこと、さらに (5) の分配法則が成り立つことが紹介されるという流れで学んでいく。しかし、これらの説明の中には、計算方法や性質など事実のみ紹介する部分が多くあり、指導の際には注意が必要である。本来であれば行うべき事実確認などが省略されているため、生徒を「整数で成り立つ性質は有理数でも成り立つ」または「事実確認は重要ではない」などの誤った考え方に導いてしまう可能性がある。それらを回避するためにも、「有理数の世界」でも「非負の世界」や「整数の世界」と同じように考えてよいことを、生徒に十分に理解させることが大切である。

最後に、「数のひろがりと四則演算」で、自然数、整数、有理数の数のひろがりについて学び、それぞれの世界でどの演算が閉じているか確認する。結果として、条件 (0) が確認されている。

このように、中学校数学 1 年次「正の数と負の数」では、整数や有理数の世界で可換環の条件にあたる性質が成り立つことを、順番に確認しているといえる。しかし、乗法の関連した性質の説明の多くは事実のみの紹介となっている。(2) 以外すべての性質が小学校算数で学んだ非負の有理数の世界で成り立っているので、適切に説明を行わなければ、それらを根拠として良いと解釈される恐れがある。これらはどれも非常に重要な性質であり、生徒が整数や有理数がそれらの性質をもつことを確実に理解できるように考慮した指導を行っていくことが必要である。

４　実数における演算

中学校数学 3 年次「平方根」において、有理数以外の実数である『無理数』が新たに紹介される。この段階で方程式の解、あるいは剰余環などの概念を用いた説明を行うことが出来ないため、量を表す必然性によって無理数が導入されている。

４．１　無理数の導入

多くの場合、一辺の長さが 1 である正方形の対角線を用いて、有理数とは異なる新たな数である無理数の存在を紹介し、そこからより一般的な有理数の平方根を説明するといった導入が行われる。つまり、「一辺の長さが 1 である正方形の対角線の長さを x としたとき、一辺の長さが x である正方形の面積は 2 となる。よって、$x^2 = 2$ となるはずであり、このように二乗して 2 になる正の数を $\sqrt{2}$ と表す」という流れの説明である。

しかし、厳密に言えば、この説明には問題点がある。それは、“長さは常に数で表すことができるであろうか” という点である。上記の説明では、“長さは常に数で表すことができる” ことをもとに行われている。多くの生徒の数の認識が有理数（有限小数または循環小数）で止まっている中で、それが本当に可能であるのかという疑念を生徒に持たせる可能性がある。

また、$\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ のように得体の知れない 2 つの数を掛け合わせているが、これが可能であることの説明は正方形の面積の存在を根拠に行われている。しかし、有理数でない長さをもつ長方形の面積もまた「縦の長さ×横の長さ」であること、より根本的にいえば「面積とは何か」の説明が抜け落ちており、これについても生徒に疑念を持たせる危険性を秘めている。

このような事柄は、先入観をもたず、数学に対して純粋に発想する生徒にとって、疑問や躓きの原因となる可能性があり、指導する際には十分に注意する必要がある。

これらの導入を経て、一般の無理数は次のように定義される。

有理数でない数を無理数といいます。

「数学３」(啓林館、2017b) から引用

この段階の生徒にとっては、これまで有理数の世界がすべてであったことから、無理数を例外的な数という印象をもつかもしれない。しかし数学的に見れば、有理数の世界は実数全体の世界から見ると無視できるほど非常に小さなものである。当然、この有理数のような小さな世界で成り立つ事実を、確認することなく、実数のようによりひろい世界でも成り立つと主張することは数学的に大きな問題である。そのような主張をすれば、その考え方で良いと生徒に誤った認識を与える危険がある。

また、中学校数学 3 年次「平方根」で学習する一部の無理数（有理数と平方根を用いて表すことができる無理数）と有理数を合わせた世界でさえも、実数全体の世界から見ると、無視できるほど非常に小さなものである。例えば、この世界には、中学校で扱う円周率 π や高校数学で学ぶネイピア数 e などの無理数は含まれていない。上記の無理数の定義は、これら有理数と一部の無理数を学んだ段階で行われている。つまり、まだこの段階で「数」として有理数と一部の無理数を合わせた世界までしか知らない状況であり、無理数の定義にある「数」が何であるのかわからない状況である。教科書「数学３」(啓林館、2017b) を見ると、上記の無理数の定義の次ページで初めて、有限小数または無限小数で表せる数全体を「数」と考えていることがわかる。先に「数」の定義をハッキリさせなければ

混乱の原因となりうるため、十分に注意が必要である。

４．２　無理数の加法・乗法

無理数を含んだ加法・乗法は、「平方根の値」の後に学習する。「平方根の値」で、$\sqrt{2}$ や $\sqrt{5}$ を電卓などを用いて調べ、生徒が $\sqrt{2}$ などはこれまでに学んできた数とは異なる数であることを理解する。線分を用いた量で数の存在は理解できても、具体的に（小数のレベルでの）計算方法を学んでいないため、困惑する生徒が出てくる可能性がある。これらの値を理解するためには、高校数学の知識が必要になり、より厳格に理解するためには大学で学習する級数の収束に関する知識が必要になる。

無理数を含む乗法については、長方形の面積を用いて導入されることが多いが、先に指摘したように、辺の長さが無理数であるような長方形の面積の定義が正確になされていないため注意が必要である。また、$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ の値を縦と横の長さがそれぞれ $\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ であるような長方形を用いて説明した場合、後に $(\sqrt{2}\times\sqrt{5})^2$ のようなものを扱うと面積の二乗と認識される可能性があるため、これらの説明をする際に注意が必要になる。

以上のように、「小学校で習った長方形の面積の求め方が、長さが無理数であるような辺を持つ長方形の面積を求めるときに使える」、または「有理数における加法・乗法の性質が無理数を含む計算でも正しい」という仮定の上で、無理数を含む四則演算の説明がされている場合が多い。そのため、これら 2 つの仮定が正しいことを確実に理解し、これを意識した指導・説明を行うことが重要である。

５　因数分解

本章では、数のひろがりに関連した問題として、考える対象の世界によって、扱いの変わる例として因数分解を紹介する。

多項式の因数分解は、方程式の解や関数のグラフを考える上で重要な概念である。しかし、考える多項式の定義によって因数分解の扱いが変わってくる。そのため、数のひろがりに伴い、因数分解の形も変化することを意識した指導が重要である。

例えば、多項式 $4x^2-4$ の因数分解は

$$4(x+1)(x-1)$$

とするのが普通であると考えられる。一方で、多項式 $4x^2-1$ の因数分解は、上の例と同様に、最高次の係数が 1 の多項式に帰着させて、

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

とすることがもできるが、整数係数多項式の積で

$$(2x+1)(2x-1)$$

と表すこともできる。そもそも、因数分解は式の展開の逆操作として定義されるが、式の展開が一意的に表されるのに対して、因数分解はこのように定数倍の扱いにおいて自由度がある。

また、考える世界によって因数分解の形がまったく異なるものとなる場合もある。多項式 x^2+2x-1 の因数分解は、整数係数多項式や有理数係数多項式の世界では 1 次式の積としては表せない。しかし、実数まで世界をひろげて考えれば、

$$(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$$

と因数分解できる。さらに、多項式 x^4-1 の因数分解は実数の世界では

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

となるが、複素数まで世界をひろげて考えれば、

$$(x-1)(x+1)(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$$

と 1 次式の積として表せる。

このように、数のひろがりに伴い、因数分解の形も変化する。これらのことを十分に意識した指導が重要である。

６　おわりに

現行の大学入試センター試験が、2021 年 1 月に実施される試験から大学入試共通テストに移行される。「思考力・判断力・表現力」がより求められる現在の社会において、教育現場においても、それらの力が重視されている証であるといえる。その中で算数・数学教育では、「論理的に考察する」、「論理的に説明する」などを目標として、日々の指導・学習が行われている。

大学生の現状を見ると、定理や公式などを論理的に正しく説明できない大学生は少なくない。また、「仮定は何か」、「仮定を満たしているか」などの確認をすることなく、知っている定理や性質などを機械的に当てはめてしまうケースも見受けられる。２章で例に挙げたような「複素数を実数と同じ性質を持つかのように扱ってしまう」などは、その典型的な例である。これらの事例は、数学の本質が一部の学生に誤解もしくは軽視されている証と見ることができる。数のひろがりに関連した問題には、対応を誤ればこのように生徒が誤った認識をもつことに繋がりかねない内容を多く含んでいる。

その中で、３章では有理数の演算に関して注意点を紹介した。中学校数学１年次の負の数の導入時には、新しい概念をもとに数の世界をひろげているので、これまで成り立つ性質がそのまま保存される保証はないことを認識させることが重要である。しかし、３．２で述べたように、

負の数を含む乗法の説明は導かれたものであるか定義であるのか分かりづらい部分があり、また乗法を導入後の説明には省略されている部分が多い。指導を行う際には、数学のスタートの単元として、生徒に定義は何かをしっかり把握させた上で、性質が成り立つという事実だけでなく、分配法則などの性質が正しいことを認識できるように十分に配慮した指導を行う必要がある。

４章では、無理数に関する注意点を紹介した。４．１と４．２で紹介したように、「長方形の面積の公式が無理数の場合でも正しい」または「有理数における計算の性質が無理数を含む世界でも正しい」という仮定の上で、無理数を含む四則演算の説明がされている部分が多い。これらは、生徒が「有理数で成り立つならば無理数でも成り立つ」と誤った認識をもつことに繋がりかねない。実際に、生徒がこの誤った考え方を持ったとしても、すぐに問題に直面するとは限らない。高校生や大学生がこの考え方を中学校の内容まで戻って補正することは決して容易いことではない。教師は「無理数の長さをもつ長方形の面積でも有理数の長さをもつ長方形と同じように考えてよい」、「有理数における計算の性質が無理数を含む世界でも正しい」の仮定が正しいことを確実に理解し、これらの注意点を十分に考慮した指導・説明を行っていくことが非常に重要である。

５章では、数のひろがりに関連した問題として、因数分解を挙げた。具体的な例で示したように、因数分解には定数倍の扱いにおいて自由度があるだけでなく、どの世界で考えるかによって因数分解は全く異なる形になる場合がある。そのため、因数分解の定義を明確にし、どの世界で考えているのかを示さなければ、同じ答え方をしても、あるときは正しいとされ、またあるときには間違いであるとされるケースが出てくる可能性があり、生徒の混乱を招くことに繋がりかねない。指導の際には、数のひろがりによって因数分解の形が変化することを十分に意識することが大切である。

このように、数のひろがりには、様々な注意すべき内容がある。新しい数が導入して扱う数の世界がひろがれば、それに伴って、それまでにあった概念がひろがった世界で妥当であるか確認し、必要に応じて新たに定義しなければならない。また、それまでにあった概念から派生する様々な性質についても同様に、ひろがった世界で妥当であるか十分に確認することが大切である。算数・数学を指導する際には、これらの注意点を十分に認識し、数のひろがりを十分に意識することが重要である。そのためにも、児童・生徒に定義をしっかり把握させ、それらの重要性を理解させることが重要である。さらに、確認することの大切さを十分に認識させることで、「論理的に考察する」、「論理的に確かめる」、「論理的に説明する」などの力を身に付けさせることができると考える。

参考文献

[1] 永尾 汎（1983)、「代数学」、朝倉書店

[2] 文部科学省、「学習指導要領解説」、http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/index.htm

[3] 文部科学省検定済教科書　小学校算数科用、2017、「わくわく算数 1-6」、啓林館

[4] 文部科学省検定済教科書　中学校数学科用、2017、「未来へひろがる　数学 1-3」、啓林館