利他的遺産動機モデルでの安定性分析
−対数線形型効用関数・コブ＝ダグラス型生産関数の場合−

仲　間　瑞　樹

１．はじめに

Barro（1974）による利他的遺産動機は，親世代が子世代以降の厚生を最大化するよう，遺産を子世代に与えるといった特徴を持つ遺産動機である。そのため例えば政府が定額の保険料を財源とする賦課方式の公的年金政策を行う場合，親世代は子世代による賦課方式の公的年金保険料負担を考慮し，その負担を相殺するように遺産を子世代に与えることから，賦課方式の公的年金政策は，資本ストックや効用に影響を与えないといったいわゆる政策無効論が導き出される。このような政策無効論を考慮するならば，そもそも利他的遺産動機を含むモデルにおいて政府の政策が資本ストック，遺産，効用に与える経済効果を分析する試み自体に，どれほどの意義があるのかといった疑問が生じることも不思議ではない。そして利他的遺産動機における動学式の安定性を把握する必要性もなくなる。

ただし Barro（1974）の利他的遺産動機モデルにおいて，上で述べた政策無効論が常に成立するわけではない。例えば政府が相続税を財源とする賦課方式の公的年金政策を行う場合，個人が効用最大化時にその公的年金給付を織り込み，自身の効用を最大化するか否かによって政策無効論を支持する経済効果，資本ストックや効用に影響を与える経済効果が生じることを容易に確認できる。このような点を考慮するならば，利他的遺産動機モデルにおける動学式の安定性を分析し，その上で比較静学，効用に与える効果を分析する余地も生じる。

仲間（2015）でも指摘，分析しているように，利他的遺産動機を含む2期間世代重複モデルでは，Diamond（1965）で展開された安定性分析のよう

に，今期と来期の2期間における資本ストックで動学式を表すことができず，それは今期，来期，その次の期といった3期間に及ぶ動学式となってしまう[1)]。そこで仲間（2015）では一般形の効用関数と生産関数を利用し，その3期間に及ぶ動学式つまり二階の定差方程式で表される動学式を，一階の定差方程式に変換し，動学体系の安定性を分析している[2)]。その際，一般形の効用関数と生産関数を利用して分析をする場合，特定化された効用関数と生産関数を利用して分析をする場合の2つがある。特定化された効用関数と生産関数を利用する場合，その経済効果や含意は，その効用関数と生産関数の範囲に限られてしまう反面，定常均衡や比較静学，効用に対する効果を，より明示的に導出することが可能となる。

そこで本論文では特定化された経済（対数線形型の効用関数，コブ＝ダグラス型の生産関数），利他的遺産動機を含むモデルを踏まえ，そのような特定化された経済における動学式の安定性を分析する。ただし一般形の効用関数，生産関数と異なり，効用関数と生産関数を特定化した上で効用最大化問題を解き，その動学式を求める場合，モデルに遺産動機を含めることも手伝い，その導出過程も含め動学式も複雑な形になるものと考えられる。しかし本論文では特定化された効用関数と生産関数でも，3期に渡る資本ストックのみで表された動学式を導くことができ，その安定性を確実に分析できることを示す。このことは特定化された経済において政府の政策の経済効果を分析する際，本論文で示された手順にしたがい動学式の安定性を把握することができ，様々な政策の経済効果を定性的に分析できる道筋があることを意味

１）田中（2006）では効用関数を対数線形型として，利他的遺産動機の動学体系を導いている。ただし田中（2006）の動学体系は，資本ストックと消費の2つから構成される。一方，本論文では，二階の定差方程式となる動学式を一階の定差方程式に変換するための人工変数を考慮しているものの，実質的には資本ストックから構成される動学体系である。この点が田中（2006）との大きな違いである。

２）公共経済学の文献において，このような手法での安定性分析はIhori（1996）で紹介されている。そこでは，遺産動機のない2期間世代重複モデルに労働供給を内生化することによって，動学式が資本ストックに関する二階の定差方程式となることを指摘している。そしてその二階の定差方程式を，資本ストックに関する人工変数を用いて一階の定差方程式に変換している。

している。

本論文の構成は次のとおりである。第2節では対数線形型の効用関数，コブ＝ダグラス型の生産関数といった特定化された経済環境において，利他的遺産動機を反映したモデルが設定される。第3節では動学式が導出され，動学体系の安定性を分析する。本論文のような特定化された経済においても，動学体系は定常均衡の近傍で鞍点となる動学体系であることが示される。第4節は本論文のまとめ，応用可能な論点を紹介している。

２．モデル

人口が一定率 $n > 0$ で成長する Diamond（1965）による2期間世代重複モデルを用いる。人口は一定率 $n > 0$ で成長するため，集計化された t 期の労働力を L_t と表し，集計化された（$t-1$）期の労働力を L_{t-1} と表すならば，$L_t = (1+n)L_{t-1}$ が成立する。

個人の効用関数は対数線形型の効用関数で表され，t 世代の効用関数は Barro（1974）の利他的遺産動機を反映した下の（1）で表されるものとする。

$$u_t = \varepsilon_1 \log c_{1t} + \varepsilon_2 \log c_{2t+1} + \varepsilon_3 \log u_{t+1} \tag{1}$$

ただし ε_1 は t 期 t 世代の消費 c_{1t} に対する選好，ε_2 は $(t+1)$ 期 t 世代の消費 c_{2t+1} に対する選好，ε_3 は t 世代による $(t+1)$ 世代の効用に対する関心の度合（利他度）である。そして $0 < \varepsilon_i < 1$，$i = 1, 2, 3$ をみたす。t 期 t 世代の個人は労働を非弾力的に供給し，賃金 w_t を受け取り，t 期 $(t-1)$ 世代の個人から遺産 b_t を受け取る。それらは消費 c_{1t} と貯蓄 s_t に充当される。その個人は $(t+1)$ 期に退職し，貯蓄の元利合計 $(1+r_{t+1})s_t$ を受け取る一方，貯蓄の元利合計は消費 c_{2t+1}，$(t+1)$ 期 $(t+1)$ 世代への遺産 $(1+n)b_{t+1}$ にすべて充当される。これより t 世代の個人の予算制約式は，下の（2）と（3）のように表される。

$$c_{1t} = w_t + b_t - s_t \tag{2}$$

$$c_{2t+1} = (1+r_{t+1})s_t - (1+n)b_{t+1} \tag{3}$$

この（2）と（3）から，t 世代の個人の生涯予算制約式として（4）を得る。

$$c_{1t}+\frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}}+\frac{1+n}{1+r_{t+1}}b_{t+1}=w_t+b_t \tag{4}$$

企業は新古典派型生産技術にしたがって生産を行い，その生産関数はコブ＝ダグラス型生産関数として表される。t 期における集計化された生産関数は，下の（5）として表される。

$$Y_t=L_t^{1-\alpha}K_t^{\alpha} \tag{5}$$

ただし Y_t は集計化された t 期の生産物，L_t は集計化された t 期の労働力，K_t は集計化された t 期の資本ストック，α は資本の分配率を表すパラメータで $0<\alpha<1$ をみたしている。一人当たりの生産関数は（6）のとおり表される。

$$y_t=k_t^{\alpha} \tag{6}$$

ただし $\frac{Y_t}{L_t}=y_t$，$\frac{K_t}{L_t}=k_t$ である。企業の利潤最大化問題から，資本と労働の限界生産物条件として $r_t=\alpha k_t^{\alpha-1}$，$w_t=(1-\alpha)k_t^{\alpha}$ を得る。一方，一人当たりで表された財市場の均衡式は下の（7）である。

$$c_{1t}+\frac{c_{2t}}{1+n}+(1+n)k_{t+1}=w_t+k_t+r_tk_t \tag{7}$$

t 期 t 世代による貯蓄は $(t+1)$ 期の資本ストックに吸収されるため，一人当たりで表された資本市場の均衡式は下の（8）として表される。

$$s_t=(1+n)k_{t+1} \tag{8}$$

３．安定性分析

　この節では前節でのモデルを用い，個人の効用最大化問題から動学式を求める。その動学式を利用し，安定性を分析する。

３．１　動学式

　t 期のラグランジュ関数を L_t とおくと，t 世代の個人の効用最大化問題は下のように定式化される。

$$L_t=\varepsilon_1\ log c_{1t}+\varepsilon_2\ log c_{2t+1}+\varepsilon_3\ log u_{t+1}-\lambda_t\left(c_{1t}+\frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}}+\frac{1+n}{1+r_{t+1}}b_{t+1}-w_t-b_t\right)$$

ただし λ_t は t 期のラグランジュ未定乗数である。この効用最大化問題から最適条件は下の（9）と（10）として導かれる。

$$c_{1t}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2(1+r_{t+1})}c_{2t+1} \tag{9}$$

$$c_{2t+1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3}(1+n)c_{1t+1} \tag{10}$$

（9）と（10）から

$$c_{1t}=\frac{1+n}{\varepsilon_3(1+r_{t+1})}c_{1t+1} \tag{11}$$

を得る。（10）と（11）を（4）に代入し，式を整理すると

$$b_{t+1}=\frac{1+r_{t+1}}{1+n}(w_t+b_t)-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3}c_{1t+1} \tag{12}$$

$$=\frac{1+r_{t+1}}{1+n}(w_t+b_t)-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3}[w_{t+1}+b_{t+1}-(1+n)k_{t+2}] \tag{13}$$

を得る。ただし $(t+1)$ 期における資本市場の均衡式 $s_{t+1}=(1+n)k_{t+2}$ を踏まえると，$(t+1)$ 期 $(t+1)$ 世代の予算制約式は

$$c_{1t+1}=w_{t+1}+b_{t+1}-(1+n)k_{t+2}$$

であるため，（12）を（13）のように書き換えている。

なお（12）は

$$\frac{1}{\varepsilon_3}c_{1t+1}=\frac{\varepsilon_1(1+r_{t+1})}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(1+n)}(w_t+b_t)-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}b_{t+1} \tag{14}$$

と書き換えられる。（8）と（11）を（2）に代入し，さらに（14）を代入し式を整理すると，

$$(1+n)k_{t+1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(w_t+b_t)+\frac{\varepsilon_1(1+n)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(1+r_{t+1})}b_{t+1} \tag{15}$$

である。一方，（13）は

$$w_t+b_t=\frac{1+n}{1+r_{t+1}}b_{t+1}+\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(1+n)}{\varepsilon_1\varepsilon_3(1+r_{t+1})}[w_{t+1}+b_{t+1}-(1+n)k_{t+2}] \tag{16}$$

として解くことが可能である。この（16）を（15）に代入し，式を整理することによって，$(t+1)$期における遺産関数 b_{t+1}として（17）を得る。

$$b_{t+1}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(1+r_{t+1})}{\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2}k_{t+1}+\frac{\varepsilon_2(1+n)}{\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2}k_{t+2}-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2}w_{t+1} \tag{17}$$

この$(t+1)$期における遺産関数 b_{t+1}を t 期における遺産関数として評価すると

$$b_t=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(1+r_t)}{\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2}k_t+\frac{\varepsilon_2(1+n)}{\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2}k_{t+1}-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2}w_t \tag{18}$$

である[3)]。労働と資本の限界生産物条件，(17)，(18）を（15）に代入し，式を整理するならば，

$$k_{t+2}=\frac{1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}}{1+n}(1+\varepsilon_3)k_{t+1}+\frac{1}{1+n}(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha}-\frac{1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}}{(1+n)^2}\varepsilon_3(k_t+k_t^{\alpha}) \tag{19}$$

を得る。(19）から効用関数が対数線形型効用関数，生産関数がコブ＝ダグラス型生産関数のとき，利他的遺産動機での動学式は資本ストックに関する二階の定差方程式で表される。そこで二階の定差方程式（19）を一階の定差方程式に変換するため，人工変数 $k_{t+1}=\rho_{\mathrm{t}}$ を導入し，それを動学式に適用する。

３．２　安定性分析

前節で導出した（19）と $k_{t+1}=\rho_t$ を用い，それらを動学体系として安定性分析を行う。ここで時間を通じて資本ストック，遺産が一定となる状態を定常状態と定義する。$k_t=k_{t+1}=k^*(\rho_{\mathrm{t}}=\rho_{t+1}=\rho^*)$をみたす資本ストック $k^*(\rho^*)$を定常状態の資本ストック（人工変数)，$b_t=b_{t+1}=b^*$ をみたす遺産 b^* を定常状態の遺産とする。定常状態で評価した（11）をみたす資本ストック k^* が定常均衡の資本ストック k_* であり，それは

3）個人は正の遺産を受け取り，正の遺産を子世代に与えるものとする。

$$k_{*}=\left(\frac{\alpha\varepsilon_3}{1+n-\varepsilon_3}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{20}$$

である。もちろん人口成長率がゼロの経済であったとしても，そのときの定常均衡の資本ストック $k_{*n=0}$は

$$k_{*n=0}=\left(\frac{\alpha\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{21}$$

であり，他の事情が一定であるならば，$k_{*n=0} > k_{*}$ であることも容易に確かめられる。人工変数 $k_{t+1}=\rho_t$ を（19）に適用するならば，（19）は

$$\rho_{t+1}=\frac{1+\alpha\rho_t^{\alpha-1}}{1+n}(1+\varepsilon_3)\ \rho_t+\frac{1}{1+n}(1-\alpha)\rho_t^{\alpha}-\frac{1+\alpha\rho_t^{\alpha-1}}{(1+n)^2}\varepsilon_3(k_t+k_t^{\alpha}) \tag{22}$$

と書き換えられる。この（22）と $k_{t+1}=\rho_t$ について，定常均衡の近傍で線形近似し，定常均衡で評価するならば

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\hat{k}_{t+1} \\ d\hat{\rho}_{t+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\hat{k}_{t} \\ d\hat{\rho}_{t} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$A_1=A_4=A_7=1, A_2=A_3=A_8=0,$$

$$A_5=\frac{1}{1+n}(1-\alpha)\alpha k_*^{\alpha-1}+\frac{1}{1+n}(1+\varepsilon_3)\,(1+\alpha^2 k_*^{\alpha-1})$$

$$+\frac{1}{(1+n)^2}\varepsilon_3\alpha(1-\alpha)\,(k_*^{\alpha-1}+k_*^{2\alpha-2})$$

$$A_6=-\varepsilon_3\frac{1}{(1+n)^2}(1+\alpha k_*^{\alpha-1})^2, d\hat{k}_{t+1}=k_{t+1}-k_*, d\hat{k}_t=k_t-k_*,$$

$$d\hat{\rho}_{t+1}=\rho_{t+1}-\rho_*, d\hat{\rho}_t=\rho_t-\rho_*$$

である。（23）は

$$\begin{bmatrix} d\hat{k}_{t+1} \\ d\hat{\rho}_{t+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\hat{k}_{t} \\ d\hat{\rho}_{t} \end{bmatrix}$$

と書き直され，J を以下のように定義する。

$$J\equiv\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 \end{bmatrix}$$

そして単位行列を

$$\mathrm{I} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と定義することによって，固有方程式 $\varphi(\lambda)=|J-\lambda I|$ を得る。

固有方程式 $\varphi(\lambda)$ は

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{A}_9\lambda+\frac{1}{\varepsilon_3}$$

$$\mathrm{A}_9=\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{1+n}\varepsilon_3(1+\alpha^2 k_*^{\alpha-1})+\frac{1}{(1+n)^2}\varepsilon_3\alpha(1-\alpha)(k_*^{\alpha-1}+k_*^{2\alpha-2})$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_3}+\alpha+\frac{1}{1+n}\varepsilon_3(1-\alpha)+\frac{1}{(1+n)^2\alpha\varepsilon_3}(1-\alpha)(1+n-\varepsilon_3)[1+n-\varepsilon_3(1-\alpha)]>0$$

である[4)]。この固有方程式 $\varphi(\lambda)$ の2つの解が実数解であるか否かを判別式D から確認をする。

$$\mathrm{D}=\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+A_{10}\right)^2-4\frac{1}{\varepsilon_3}$$

$$A_{10}=\alpha+\frac{1}{1+n}\varepsilon_3(1-\alpha)+\frac{1}{(1+n)^2\alpha\varepsilon_3}(1-\alpha)(1+n-\varepsilon_3)[1+n-\varepsilon_3(1-\alpha)]$$

この A_{10} は1より大きい値である。このことは背理法で容易に確認できる。

(証明)

この A_{10} は1より小さい値をとるものと仮定する。つまり

$$\alpha+\frac{1}{1+n}\varepsilon_3(1-\alpha)+\frac{1}{(1+n)^2\alpha\varepsilon_3}(1-\alpha)(1+n-\varepsilon_3)[1+n-\varepsilon_3(1-\alpha)]<1$$

である。これを整理すると

$$1-\varepsilon_3+n(1-\alpha\varepsilon_3)<0$$

あるいは

$$1+n-(1+n\alpha)\varepsilon_3<0$$

4）Wickens（2008）にならい，定常均衡（20）を A_9 に代入，整理している。

となる。しかし$1-\varepsilon_3>0$であり$n(1-\alpha\varepsilon_3)>0$でもあるため，$1-\varepsilon_3+n(1-\alpha\varepsilon_3)$の符号は正でなければいけない[5)]。そしてこのことは$1-\varepsilon_3+n(1-\alpha\varepsilon_3)<0$と矛盾する。この矛盾は，$A_{10}$が1より小さい値をとるものとする，といった仮定に誤りがあることに起因する。これより$A_{10}>1$である。

（証明終）

$A_{10}>1$であるため，判別式の値は正の値をとることが分かる。このことから固有方程式$\varphi(\lambda)$の2つの解は異なる実数解を持つことが分かる。

次に$\varphi(-1)$と$\varphi(1)$の符号を確かめる。$\varphi(-1)$は，

$$\varphi(-1)=1+A_9+\frac{1}{\varepsilon_3}>0$$

である。一方，$\varphi(1)$は

$$\varphi(1)=-\frac{1}{(1+n)^2\alpha\varepsilon_3}(1-\alpha)(1+n-\varepsilon_3)[1-\varepsilon_3+n(1-\alpha\varepsilon_3)]<0$$

である。

以上から，個人の効用関数が利他的遺産動機を反映した対数線形型の効用関数であり，コブ＝ダグラス型の生産関数である経済においては，その動学体系は定常均衡の近傍で鞍点となることが分かる。

命題１

個人の効用関数がBarro（1974）の利他的遺産動機を反映した対数線形型の効用関数であり，生産関数はコブ＝ダグラス型である経済においては，その動学体系は定常均衡の近傍おいて鞍点均衡となる動学体系である。

４．終わりに

本論文ではDiamond（1965）の2期間世代重複モデルにおいて，Barro（1974）の利他的遺産動機を反映した対数線形型の効用関数，コブ＝ダグラ

５）$1+n-(1+n\alpha)\varepsilon_3<0$が成立しないことも明らかである。

ス型の生産関数を導入し，その動学体系の安定性を分析した。すでに仲間(2015)では加法分離型ではあるものの，一般形の効用関数と生産関数を利用して，Barro（1974）の利他的遺産動機における動学体系の安定性を分析した。しかし利他的遺産動機を含む2期間世代重複モデルにおいて，特定化された経済を踏まえ，政府の政策を分析する余地もある。その場合，特定化された経済における動学式の安定性を把握した上で，政府の政策について比較静学などを行う必要がある。本論文のように効用関数が対数線形型の効用関数，生産関数がコブ＝ダグラス型生産関数であったとしても同様である。そこで本論文では，利他的遺産動機を反映した対数線形型の効用関数，コブ＝ダグラス型の生産関数に基づく経済での分析に対するニーズに対応するためにも，そのような経済における動学式を導出した。そして対数線形型の効用関数，コブ＝ダグラス型の生産関数から構成される経済においても，その動学体系の安定性は定常均衡の近傍で鞍点となることを示した。

本論文のような効用関数，生産関数の下で，様々な政策の経済効果を分析することは可能である。最もシンプルな分析ケースは賦課方式の公的年金政策であり，その財源を例えば消費税や相続税などに求める場合である。この場合，賦課方式の公的年金政策を含む利他的遺産動機モデルでの定常均衡を明示的に求められ，政策無効論とは一線を画す形で，その経済効果について，具体的な形で明らかにすることができるものと考えられる。

参考文献

Barro, R. J.（1974）“Are Government Bonds Net Wealth?”, *Journal of Political Economy*, Vol.82, pp.1095-1117.

Diamond, P.A.（1965）“National Debt in a Neoclassical Growth Model”, *American Economic Review*, Vol.55, pp.1126-1150.

Ihori, T.（1996）*Public Finance in an Overlapping Generations Economy*, London, Macmillan.

Wickens, M.（2008）*Macroeconomic Theory: A Dynamic General Equilibrium Approach*.

Princeton, Princeton University Press.

田中淳平（2006）「世代重複モデル」大住圭介・川畑公久・筒井修二編『経済成長と動学』勁草書房，pp.105-126。

仲間瑞樹（2015）「利他的遺産動機モデルでのより簡素な安定性分析」『弘前大学経済研究』第38号，pp.131-138。