山口大学教育学部研究論叢　第 68 巻　263 頁～ 267 頁　2019 年 1 月

中学校数学科図形の２つの論理の規則を用いた証明について

笠井　伸一

Proof Using Two Inference Rules in Junior High School Plane Geometry

KASAI Shinichi

（Received September 28, 2018）

概要

論理的な推論は，数学の主要な陶冶的価値の一つである。一方，中学校数学科教科書の証明においては，用いている論理の規則は記述されていない。本稿では，中学校数学科第２学年の平面図形の証明問題を題材に，演繹を規定する論理の規則（推論規則）の中から，２つの論理の規則に注目して，前提となる命題から論理の規則に従って結論となる命題を導き出す形で，証明を記述するモデルの一つを提示する。論理学の立場からの形式的証明のうち，論理の規則の記述を消去したものが中学校数学科の教科書における証明であると考えられる。

キーワード：証明，演繹

1　はじめに

論理的な思考力が数学の主要な価値であることは，『小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 算数編』の「筋道を立てて考えること」（36 頁）において，次のように解説されている。

> 算数科の目標の中核には，筋道を立てて考える力の育成を目指すことがある。これは論理的な思考力の育成が，数学の主要な陶冶的価値の一つだからである。

論理的思考の基礎である演繹的推論については，『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編』の「数学を活用して事象を論理的に考察する力」（26-27 頁）において，次のように解説している。

> 問題の解決に当たっては，解決の見通しをもつとともに，その解決の正しいことを確かな根拠から論理的に考察する力が必要である。そのような力を養う際に，一方では，直観的，帰納的，類推的に推論する力を養うとともに，他方では演繹的に推論する力を養うことも重要である。これらの二つの面を共に伸ばして，問題の発見と解決に役立てていくことが大切

さらに，演繹については，「数学的な推論」（35 頁）において，次のように解説している。

> 演繹は，前提となる命題から論理の規則に従って結論となる命題を導き出す推論である。

この解説に従う形で，本稿では２つの論理の規則（推論規則）に注目して，証明がどのように構成されていくのか，証明を記述するモデルの一つを提示する。２つの論理の規則を適用して，「前提となる命題から論理の規則に従って結論となる命題を導き出す」形で，中学校数学科の平面図形の問題の証明の記述を扱う。

2　特殊化の論理の規則

１つ目の論理の規則として，特殊化の論理の規則を採用する。この論理の規則は，$\forall$ の除去に関する推論規則である（前原昭二 (2005)，第２章第５節 $\forall$ について）。

（特殊化）任意の対象 α に対して，

$$\frac{\forall x P(x)}{P(\alpha)}$$

$P(x)$ を１変数述語とするとき，一般的な性質，条件，定理を述べている全称命題 $\forall x P(x)$ を定義域の任意の対象 α に特殊化して命題 $P(\alpha)$ が成り立つことを導く論理の規則である。

中学校数学科第２学年の図形領域（岡本和夫 (2016)）から，性質，条件，定理をいくつか選び，特殊化の明示の仕方を例示する。

2.1　対頂角の性質の特殊化

対頂角の性質は，全称命題

> 任意の２つの直線が交わるとき，向かいあっている角は等しい

が成り立つことである。

線分 AB と CD を延長した２つの直線に，特殊化を適用して，

$$\mathrm{AB}\ と\ \mathrm{CD}\ が点\ \mathrm{E}\ で交わるならば\ \angle\mathrm{AED} = \angle\mathrm{CEB}$$

が成り立つ。

2.2　合同な図形の性質の特殊化

合同な図形の性質は，全称命題

> すべての合同な図形では，対応する線分の長さはそれぞれ等しい

が成り立つことである。

２つの三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{PQR}$ に対して，対応する線分が AB と PQ のとき，特殊化を適用することにより，

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PQR}\ ならば\ \mathrm{AB} = \mathrm{PQ}$$

が成り立つ。

もうひとつの，合同な図形の性質は，全称命題

> すべての合同な図形では，対応する角の大きさはそれぞれ等しい

が成り立つことである。

２つの三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{PQR}$ に対して，対応する角が $\angle\mathrm{ABC}$ と $\angle\mathrm{PQR}$ のとき，特殊化を適用すると，

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PQR}\ ならば\ \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{PQR}$$

が成り立つ。

2.3　三角形の合同条件の特殊化

三角形の合同条件は，全称命題

> 任意の２つの三角形は，対応する３組の辺がそれぞれ等しいとき，合同である

が成り立つことである。

２つの三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{PQR}$ に対して，特殊化を用いると，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{PQ},\ \mathrm{BC} = \mathrm{QR},\ \mathrm{CA} = \mathrm{RP}\ ならば\ \triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PQR}$$

が成り立つ。

三角形の合同条件の２つ目は，全称命題

> 任意の２つの三角形は，対応する２組の辺がそれぞれ等しく，その間の角が等しいとき，合同である

が成り立つことである。

２つの三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{PQR}$ に対して，特殊化を適用すると，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{PQ},\ \mathrm{BC} = \mathrm{QR},\ \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{PQR}\ ならば\ \triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PQR}$$

が成り立つ。

2.4　二等辺三角形と２角が等しい三角形の定理の特殊化

二等辺三角形の底角の定理は，全称命題

> すべての二等辺三角形は２つの底角が等しい

が成り立つことである。

三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，特殊化を適用すると，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}\ ならば\ \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$$

が成り立つ。

２角が等しい三角形の定理は，全称命題

> ２つの角が等しい三角形はすべて，二等辺三角形である

が成り立つことである。

三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，特殊化を適用して，

$$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}\ ならば\ \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$

が成り立つ。

3　三段論法の論理の規則

２つ目の論理の規則として，構成的仮言的三段論法（略して三段論法と呼ぶ）の論理の規則を採用する。この論理の規則は，$\to$ の除去に関する推論規則である（前原昭二 (2005) 第２章第１節 $\to$ について）。

（三段論法）

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A\ ならば\ B \end{array}}{B}$$

A と $A \to B$ の両方が成り立つことから B の成立を導く論理の規則である。

三段論法（すなわち肯定式）は，紀元前３世紀のストア派の論理学以来，証明に用いられる論理の規則の基本である（カッツ（2005）２．３．１節）。

3.1　三段論法の記述

証明を記述する際に，三段論法の論理の規則の適用を，次のような形で表記する。

命題 A が正しいことを確認する。

$$A \qquad \cdots\cdots ⓐ$$

性質，条件または定理に，特殊化を適用して，

$$A\text{ ならば }B \qquad \cdots\cdots ⓑ$$

が成り立つ。

このとき，ⓐとⓑ に三段論法を用いて，

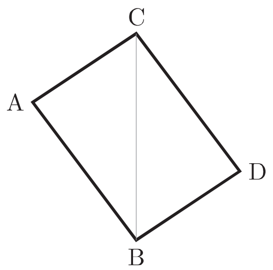
$$B \qquad \cdots\cdots ⓒ$$

（が成り立つ）と記述する。

この型の繰り返しで，中学校の証明は展開される。以下の問題で三段論法の記述を例示する。

3.2　問題１

図の四角形 ABCD において，AB = DC, AC = DB とする。そのとき，∠BAC = ∠CDB であることを三角形の合同条件と合同な図形の性質を用いて証明しなさい。



証明　対角線 BC を引く。
２つの三角形 △ABC と △DCB において，
仮定から，

AB = DC　……①
AC = DB　……②

共通な辺より，

BC = CB　……③

三角形の合同条件から，

> 任意の２つの三角形は，対応する３組の辺がそれぞれ等しいとき，合同である。

△ABC と △DCB に対して，特殊化を適用して，

AB = DC, AC = DB, BC = CB
ならば △ABC ≡ △DCB　……④

①, ②, ③ と ④ に三段論法を用いて，

△ABC ≡ △DCB　……⑤

合同な図形の性質から，

> すべての合同な図形では，対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

△ABC と △DCB に対して，特殊化を適用して，

△ABC ≡ △DCB ならば ∠BAC = ∠CDB …⑥

⑤ と ⑥ に三段論法を用いて，

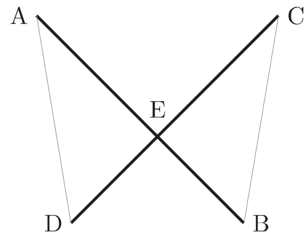
∠BAC = ∠CDB　……⑦

証明終わり。

注，AB = DC かつ AC = DB かつ BC = CB のことを，カンマを使って並記して AB = DC, AC = DB, BC = CB で表す。番号で引用する際は，①, ②, ③ となる。以下でも，同様に記述する。本稿では，かつに関する推論規則は用いない。

3.3　問題２

２本の線分 AB と CD が点 E で交わっている。AE = CE, DE = BE のとき，AD = CB であることを対頂角の性質，三角形の合同条件と合同な図形の性質を用いて証明しなさい。



証明　仮定から，

AB と CD が点 E で交わる　……①

対頂角の性質より，

> 任意の２つの直線が交わるとき，向かいあっている角は等しい。

線分 AB と CD を延長した２つの直線に，特殊化を適用して，

AB と CD が点 E で交わるならば ∠AED = ∠CEB
……②

① と ② に三段論法を用いて，

∠AED = ∠CEB　……③

仮定から，

$$AE = CE \qquad \cdots\cdots ④$$
$$DE = BE \qquad \cdots\cdots ⑤$$

三角形の合同条件から，

任意の２つの三角形は，対応する２組の辺がそれぞれ等しく，その間の角が等しいとき，合同である。

$\triangle$AED と $\triangle$CEB に対して，特殊化を適用して，

$$AE = CE, DE = BE, \angle AED = \angle CEB$$
$$\text{ならば } \triangle AED \equiv \triangle CEB \qquad \cdots\cdots ⑥$$

④, ⑤, ③ と ⑥ に三段論法を用いて，

$$\triangle AED \equiv \triangle CEB \qquad \cdots\cdots ⑦$$

合同な図形の性質から，

すべての合同な図形では，対応する線分の長さはそれぞれ等しい。

$\triangle$AED と $\triangle$CEB に対して，特殊化を適用して，

$$\triangle AED \equiv \triangle CEB \text{ ならば } AD = CB \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦ と ⑧ に三段論法を用いて，

$$AD = CB \qquad \cdots\cdots ⑨$$

証明終わり。

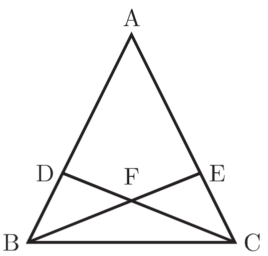
4　二等辺三角形の問題

4.1　問題

$\triangle$ABC において，AB = AC であるとする。辺 AB 上に任意の点 D をとる。辺 AC 上に点 E を，BD = CE を満たすようにとる。このとき，

（１） CD = BE が成り立つことを証明しなさい。

（２） CD と BE の交点を F とする。そのとき，BF = CF が成り立つことを証明しなさい。



4.2　（１）の証明

二等辺三角形の底角の定理，三角形の合同条件と合同な図形の性質を用いて証明する。

$\triangle$ABC において，仮定より，

$$AB = AC \qquad \cdots\cdots ①$$

二等辺三角形の底角の定理から，

すべての二等辺三角形は２つの底角が等しい。

$\triangle$ABC に対して，特殊化を適用して，

$$AB = AC \text{ ならば } \angle ABC = \angle ACB \cdots\cdots ②$$

① と ② に三段論法を用いて，

$$\angle ABC = \angle ACB \qquad \cdots\cdots ③$$

$\triangle$DBC と $\triangle$ECB において，
仮定より，

$$BD = CE \qquad \cdots\cdots ④$$

共通の辺より，

$$BC = CB \qquad \cdots\cdots ⑤$$

③ より，

$$\angle DBC = \angle ECB \qquad \cdots\cdots ⑥$$

三角形の合同条件から，

任意の２つの三角形は，対応する２組の辺がそれぞれ等しく，その間の角が等しいとき，合同である。

$\triangle$DBC と $\triangle$ECB に対して，特殊化を適用して，

$$BD = CE, BC = CB, \angle DBC = \angle ECB$$
$$\text{ならば } \triangle DBC \equiv \triangle ECB \qquad \cdots\cdots ⑦$$

④ , ⑤ , ⑥ と ⑦ に三段論法を用いて，

$$\triangle DBC \equiv \triangle ECB \qquad \cdots\cdots ⑧$$

合同な図形の性質から，

すべての合同な図形では，対応する線分の長さはそれぞれ等しい。

$\triangle$DBC と $\triangle$ECB に対して，特殊化を適用して，

$$\triangle DBC \equiv \triangle ECB \text{ ならば } CD = BE \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑧ と ⑨ に三段論法を用いて，

$$CD = BE \qquad \cdots\cdots ⑩$$

証明終わり。

4.3　（２）の証明

（１）の証明中の結果と合同な図形の性質，２角が等しい三角形の定理を用いて証明する。

（１）の証明の ⑧ から，

$\triangle$ECB と $\triangle$DBC に対して，

$$\triangle\mathrm{ECB} \equiv \triangle\mathrm{DBC} \qquad \cdots\cdots①$$

合同な図形の性質から，

> すべての合同な図形では，対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

$\triangle$ECB と $\triangle$DBC に対して，特殊化を適用して，

$$\triangle\mathrm{ECB} \equiv \triangle\mathrm{DBC} \text{ ならば } \angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{DCB} \cdots\cdots②$$

① と ② に三段論法を用いて，

$$\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{DCB} \qquad \cdots\cdots③$$

③ より，

$$\angle\mathrm{FBC} = \angle\mathrm{FCB} \qquad \cdots\cdots④$$

２角が等しい三角形の定理より，

> ２つの角が等しい三角形はすべて，二等辺三角形である。

$\triangle$FBC に対して，特殊化を適用して，

$$\angle\mathrm{FBC} = \angle\mathrm{FCB} \text{ ならば } \mathrm{FB} = \mathrm{FC} \qquad \cdots\cdots⑤$$

④ と ⑤ に三段論法を用いて，

$$\mathrm{FB} = \mathrm{FC} \qquad \cdots\cdots⑥$$

証明終わり。

5　おわりに

論理的な思考力の育成は，数学の主要な陶冶的価値の一つである。論理学の立場からの形式的証明のうち，論理の規則の記述を消去したものが中学校数学科の教科書における証明にあたるといえる。したがって，教科書を読む際には，省略された部分を補い，行間を読むことが必要となる。

推論規則の選び方にはある程度の任意性がある。しかし，正しい論理の規則を用いることが必要であり，間違ったパターンを論理の規則であると誤認するようなことがないように注意が必要である。教科書では明記されない論理の規則を正しく選び，証明を扱うことが望まれる。

参考文献

岡本和夫ほか（2016）『未来へひろがる 数学２』啓林館.

カッツ，ヴィクター J.（2005）『カッツ 数学の歴史』（上野健爾ほか監訳，中根美千代ほか訳）共立出版.

前原昭二（2005）『記号論理入門 [新装版]』日本評論社.

文部科学省（2017）『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編』.

文部科学省（2017）『小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 算数編』.