消費遺産動機を含む資産バブルモデル
−資産バブル課税の場合

仲　間　瑞　樹

1．はじめに

仲間（2018）では，Tirole（1985）の古典的な資産バブルを含むモデルに消費遺産動機を導入し，政府が利子所得課税を行っている場合を二つの政策（政府支出政策と若年世代への公的移転政策）に分けて定性的に分析した。資産バブルを含むモデルの場合，考慮すべき変数が資本ストック，厚生に加え，資産バブルまで加わる。政策効果を考えるならば，厚生を阻害することなく遺産，資本ストック，資産バブルをコントロールすべきか，それとも厚生を阻害してでも，まずは資産バブルを抑制すべきかといったように，政府が考えるべき政策目標は複数生じる。当然，資産バブルを含むモデルにおいては，資産バブルが加わるため，課税対象となりうる変数も増える。どのような税を，どのような政策のために用い，どのような政策効果が期待できるのかといった事柄が問われる。

本論文では資産バブルが存在しているモデルにおいて，政府が資産バブルそのものに課税をする場合に焦点をあてる。Blanchard＝Fischer（1989）らが説明しているように，Tirole（1985）の資産バブルは無価値の紙切れのようなものであり，それがあたかも価値をもってしまう場合を想定している。もし政府が資産バブルそのものの抑制を考えるならば，それが一時的な課税になるかもしれないにせよ，資産バブルそのものに取引規制や課税をすることも近道である。もちろん資産バブルを含むモデルにおいて労働所得税，消費税，相続税，貯蓄への利子所得税などを課す場合，資本ストック，資産バブル，遺産などに何らかの経済効果をもたらすものと考えられる。しかしそれらは資産バブルに対して間接的な税であり，資産バブルに対して直接的な

税とは言えない。そこで本論文では資産バブルに対して直接的な税として資産バブルへの課税を導入し，資本ストック，資産バブル，厚生への効果を定性的に分析する。そして仲間（2018）で分析した貯蓄への利子所得税に対する経済効果と比較する。

本論文は次のような構成をとる。第2節は資産バブル，遺産を含むモデルを提示する。第3節では，資産バブル税財源による政府支出政策を反映した動学体系の安定性を分析する。第4節では，資産バブル税財源による政府支出政策に関する経済効果を定性的に分析する。第5節はまとめである。

2．モデル

仲間（2017），仲間（2018）と同様，Diamond（1965）による2期間世代重複モデルに，Yaari（1964）による消費遺産動機，Tirole（1985）による資産バブルを加える。人口は一定率 n ただし n>0で成長するものと仮定する。L_{t+1}を$(t+1)$期，L_tをt期における労働力人口とするので，両者の間には$L_{t+1}=(1+n)L_t$が成立する。

消費遺産動機を含むｔ世代の効用関数を，下の対数線形型の効用関数u_tで表す。

$$u_t=\varepsilon_1\ logc_{1t}+\varepsilon_2\ logc_{2t+1}+\varepsilon_3\ logb_{t+1} \tag{1}$$

$$0<\varepsilon_i<1,\ i=1,\ 2,\ 3$$

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=1$$

ただしε_1，ε_2，ε_3はc_{1t}，c_{2t+1}そしてb_{t+1}に対するｔ世代の個人の選好を表している。次に政府は資産バブルに税を課し，その資産バブル課税による収入を政府支出政策に充当する。この場合のｔ期ｔ世代の個人の予算制約式は，下の（2）と（3）として表される。

$$c_{1t}=w_t+b_t-s_t \tag{2}$$

$$c_{2t+1}=(1+r_{t+1})s_t-(1+n)b_{t+1} \tag{3}$$

ｔ期ｔ世代の個人は労働を非弾力的に供給し，その対価として賃金w_tを受け取る。ｔ期(t－1)世代の個人から遺産b_tを相続する。そして消費c_{1t}，貯蓄s_t

をする。この個人は(t+1)期に退職し，貯蓄の元利合計$(1+r_{t+1})s_t$を受け取る。さらに消費c_{2t+1}をし，資産バブル税τv_{t+1}を支払い，遺産$(1+n)b_{t+1}$を(t+1)世代に与える。

企業は新古典派型生産技術にしたがって生産を行う。生産関数はコブ＝ダグラス型生産関数として表される。t期における集計化された生産関数は，下の（4）として表される。

$$Y_t=L_t^{1-\alpha}K_t^{\alpha} \tag{4}$$

Y_tは集計化されたt期の生産物，K_tは集計化されたt期の資本ストック，αは資本の分配率を表すパラメータで$0<\alpha<1$をみたす定数である。t期における一人あたりの生産関数は（5）のとおり表される。

$$y_t=k_t^{\alpha} \tag{5}$$

ただし$y_t=\dfrac{Y_t}{L_t}$，$k_t=\dfrac{K_t}{L_t}$である。企業の利潤最大化問題から，資本と労働の限界生産物条件として$r_t=\alpha k_t^{\alpha-1}$，$w_t=(1-\alpha)k_t^{\alpha}$を得る。

財市場の均衡式は下の（6）である。

$$c_{1t}+\frac{c_{2t}}{1+n}+(1+n)k_{t+1}+\tau v_t=w_t+k_t+r_tk_t \tag{6}$$

政府は資産バブルに税を課し，それを政府支出政策財源として支出している。一人あたりの政府支出額をg_tと表すならば，政府の予算制約式として$g_t=\tau v_t$を得る。

すでに述べたとおり，資産バブルについてはBlancard＝Fischer（1989），仲間（2017），仲間（2018）などで説明されているように，総量Mの無価値の紙切れと仮定する。p_tをt期における消費財で測った無価値の紙切れ1枚あたりの正の価格とする。V_tはt期におけるバブルの総価値である。t期における集計化されたバブルの価値は$V_t=p_tM$である。個人は資本ストック，または資産バブルを保有することによって貯蓄が可能である。ただし政府は(t+1)期に資産バブルの果実に対して税率τの資産バブル税を課す。$(1-\tau)V_{t+1})=(1+r_{t+1})V_t$を一人あたりの式で表すならば

$$(1-\tau)v_{t+1}=\frac{1+r_{t+1}}{1+n}v_t \tag{7}$$

を得る。ただし $v_{t+1}=\dfrac{V_{t+1}}{L_{t+1}}$, $v_t=\dfrac{V_t}{L_t}$である。資本市場の均衡式は下の（8）である

$$s_t=(1+n)k_{t+1}+v_t \tag{8}$$

3．最適化と安定性分析

（2）と（3）から，t世代の個人の生涯予算制約式として

$$c_{1t}+\frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}}+\frac{1+n}{1+r_{t+1}}b_{t+1}=w_t+b_t$$

を得る。（1）を目的関数，上の生涯予算制約式を制約式として効用最大化問題を解く。t期におけるラグランジュ関数をL_t^1と表すならば，t期t世代の効用最大化問題は下のように定式化される。ただしλ_tはt期におけるラグランジュ未定乗数である。

$$L_t^1=u_t-\lambda_t A^1 \tag{9}$$

$$A^1=c_{1t}+\frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}}+\frac{1+n}{1+r_{t+1}}b_{t+1}-w_t-b_t$$

（9）をc_{1t}, c_{2t+1}, b_{t+1}について最大化することによって下の最適条件（10）と（11）を得る。

$$c_{1t}=\frac{\varepsilon_1(1+n)}{\varepsilon_3(1+r_{t+1})}b_{t+1} \tag{10}$$

$$c_{2t+1}=\frac{\varepsilon_2(1+n)}{\varepsilon_3}b_{t+1} \tag{11}$$

（10）と（11）を個人の生涯予算制約式に代入，整理することによって下の（12）を得る。（12）を（10）に代入，整理することによって（13）を得る。

$$b_{t+1}=\frac{1+r_{t+1}}{1+n}\varepsilon_3(w_t+b_t) \tag{12}$$

$$c_{1t}=\varepsilon_1(w_t+b_t) \tag{13}$$

(2), (8) そして (13) から下の (14) を得る。

$$(1+n)k_{t+1}+v_t=(\varepsilon_2+\varepsilon_3)(w_t+b_t) \tag{14}$$

(12) と (14) から，遺産関数 (15) を得る。

$$b_{t+1}=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}(1+r_{t+1})k_{t+1}+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}(1-\tau)v_{t+1} \tag{15}$$

上の (15) を t 期について評価するならば，下の (16) を得る。

$$b_t=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}(1+r_t)k_t+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}(1-\tau)v_t \tag{16}$$

労働の限界生産物条件，(14)，(16) から

$$(1+n)k_{t+1}=\varepsilon_3k_t+[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]k_t^{\alpha}-(1-\varepsilon_3+\varepsilon_3\tau)v_t \tag{17}$$

この (17) と (7) が動学体系となる。動学体系 (17) と (7) を用い，動学体系の安定性を分析する。$k_{t+1}=k_t=k^*$ を定常状態での資本ストック，$v_{t+1}=v_t=v^*$ を定常状態での資産バブルと呼ぶ。(17) と (7) を定常均衡の近傍 (k_* と v_*) で線形近似すると下の (18) を得る。

$$\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\hat{k}_{t+1}\\ d\hat{v}_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_5 & A_6\\ A_7 & A_8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\hat{k}_t\\ d\hat{v}_t\end{bmatrix} \tag{18}$$

$A_1=\alpha(1-\alpha)k_*^{\alpha-2}v_*$, $A_2=(1-\tau)(1+n)$, $A_3=1+n$,

$A_4=A_5=0$, $A_6=1+\alpha k_*^{\alpha-1}$

$A_7=\varepsilon_3+[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]\alpha k_*^{\alpha-1}$

$A_8=-(1-\varepsilon_3+\varepsilon_3\tau)$, $d\hat{k}_{t+1}=k_{t+1}-k_*$, $d\hat{k}_t=k_t-k_*$,

$d\hat{v}_{t+1}=v_{t+1}-v_*$, $d\hat{v}_t=v_t-v_*$

(18) から

$$\begin{bmatrix}d\hat{k}_{t+1}\\ d\hat{v}_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A_5 & A_6\\ A_7 & A_8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\hat{k}_t\\ d\hat{v}_t\end{bmatrix}$$

と書き直され，$J \equiv \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 \end{bmatrix}$，そして単位行列を$I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$と定義することによって，固有方程式$\varphi^1(\lambda) = |J - \lambda I|$を得る。固有方程式$\varphi^1(\lambda)$は以下のとおりである。

$$\varphi^1(\lambda) = \lambda^2 - A_9\lambda + A_{10}$$

$$A_9 = 1 + \varepsilon_3(1+n)^{-1} + [\varepsilon_2(1-\alpha) + \varepsilon_3](1+n)^{-1}\alpha k_*^{\alpha-1} + (1-\varepsilon_3+\varepsilon_3\tau)\alpha(1-\alpha)k_*^{\alpha-2}v_*(1+n)^{-2}(1-\tau)^{-1}$$

$$A_{10} = \varepsilon_3(1+\mathrm{n})^{-1} + [\varepsilon_2(1-\alpha) + \varepsilon_3]\alpha k_*^{\alpha-1}(1+n)^{-1}$$

判別式D_1を固有方程式$\varphi^1(\lambda)$に適用するならば，その値は

$$D_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{1+n} - \frac{Z_1}{1+n}\right)^2 + \left[\frac{\alpha(1-\alpha)k_*^{\alpha-2}v_*Z_2}{(1+n)^2(1-\tau)}\right]^2 + 2\frac{\alpha(1-\alpha)k_*^{\alpha-2}v_*Z_2}{(1+n)^3(1-\tau)}(1+n+\varepsilon_3+Z_1)$$

$$Z_1 = [\varepsilon_2(1-\alpha) + \varepsilon_3]\alpha k_*^{\alpha-1} > 0$$

$$Z_2 = 1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_3\tau > 0$$

である。正の資産バブルを考慮することから，判別式D_1の値は正である。よって固有方程式の2つの解は，異なる2つの実数解であることがわかる。そこで固有方程式の2つの解をλ_1およびλ_2と表す。固有方程式から

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A_9 > 0$$

$$\lambda_1\lambda_2 = A_{10} > 0$$

であるので，固有方程式の2つの解λ_1およびλ_2は正の実数解である。さらに

$$\varphi^1(-1) > 0$$

$$\varphi^1(1) = -\alpha(1-\alpha)k_*^{\alpha-2}v_*Z_2(1+n)^{-2}(1-\tau)^{-1} < 0$$

を得る。以上から固有方程式の2つの解のうち1つの解は1より大きく，もう1つの解は正であるものの1より小さい。そして政府が政府支出政策財源として資産バブル税を課す場合，定常均衡における資本ストック，資産バブルは鞍点均衡であることがわかる[1)]。

1）位相図を用いて安定性分析を説明しなおすことも可能である。

4．比較静学と厚生分析

この節では定常状態に限定し，政府支出政策としての資産バブル税重課が資本ストック，資産バブル，厚生にもたらす効果を定性的に分析する。定常均衡における資本ストック，資産バブルで評価した（17）と（7）は以下のとおりである。

$$(1+\mathrm{n})k_* = \varepsilon_3 k_* + [\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]k_*^{\alpha} - (1-\varepsilon_3+\varepsilon_3\tau)v_* \tag{19}$$

$$(1-\tau)(1+\mathrm{n}) = 1+\alpha k_*^{\alpha-1} \tag{20}$$

（20）から定常均衡における資本ストックは，資産バブル税の影響を受ける。明らかに資産バブル税率の重課は資本ストックを高める。

$$\frac{dk_*}{d\tau} = \frac{1+n}{\alpha(1-\alpha)k_*^{\alpha-2}} > 0 \tag{21}$$

この理由は資産バブル税財源による政府支出政策によって，資産バブルから資本ストックへと需要がシフトしているからである。

次に（21）を考慮しながら（19）を用いることで，資産バブル税の重課が資産バブルに与える影響は

$$\frac{dv_*}{d\tau} = -\frac{1}{1-\varepsilon_3+\varepsilon_3\tau}[n-\alpha k_*^{\alpha-1}+\varepsilon_1(1+\alpha k_*^{\alpha-1})+\varepsilon_2(1+\alpha^2 k_*{}^{\alpha-1})] - \frac{\varepsilon_3 v_*}{1-\varepsilon_3+\varepsilon_3\tau} < 0$$

である。以上から資産バブル税率の重課は資産バブルを減らす。この場合，資産バブル税財源による政府支出政策が資本ストックを刺激する一方，その分だけ資産バブルが阻害されることを反映している。これは資本ストックと資産バブルが代替関係にあるものと解釈できよう。

次に定常均衡で評価した効用関数は下の（22）のとおりである。

$$u^* = \varepsilon_1 logc_{1*} + \varepsilon_2 logc_{2*} + \varepsilon_3 logb_* \tag{22}$$

$$b_* = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}(1+\alpha k_*^{\alpha-1})k_* + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}(1-\tau)v_*$$

定常均衡での資本ストック k_*，資産バブル v_* で評価した遺産が b_*，若年期の消費が c_{1*}，老年期の消費が c_{2*} である。遺産に対する資産バブル税重課による影響は

$$\frac{db_*}{d\tau}=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}(1+\alpha^2k_*^{\alpha-1})\frac{dk_*}{d\tau}-\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}v_*+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}(1-\tau)\frac{dv_*}{d\tau}$$

である。しかし遺産に対する資産バブル税重課による効果は，一意に定まらない。上の式の第1項は正，第2項と第3項は負である。もし第2項と第3項の負の効果が第1項の正の効果を上回るならば，資産バブル税重課によって遺産は減少する。言うまでもなく，第1項の正の効果が，第2項と第3項の負の効果を大きく上回るならば，資産バブル税重課によって遺産は増加する。この遺産に対する影響を考慮しながら，資産バブル税が厚生に与える効果を求めると

$$\frac{du_*}{d\tau}=\frac{\varepsilon_2}{c_{2*}}Z_3$$

$$Z_3=-(n-\alpha k_*^{\alpha-1})(1-\alpha)\alpha k_*^{\alpha-1}\frac{dk_*}{d\tau}+(1+\alpha k_*^{\alpha-1})\frac{db_*}{d\tau}-(1+\mathrm{n})v_*$$

である。もし資産バブル税重課が遺産を減少させるならば，Z_3の符号は負となる。このとき，資産バブル税重課による政府支出政策は厚生を阻害する。以上から，下の命題1を得る。一方，資産バブル税重課が遺産を増加させるならば，Z_3の符号は一意に決定しない。

命題1

個人の効用関数が消費遺産動機を含む対数線形型効用関数，企業の生産関数が新古典派型のコブ＝ダグラス型生産関数である。資産バブル税重課の政府支出政策によって，資本ストックは増加し，資産バブルは減少する。もし資産バブル税重課の政府支出政策によって遺産が減少するならば，厚生も減少する。

5．終わりに

本論文では，消費遺産動機を含む Tirole（1985）の資産バブルモデルに資産バブルへの税を導入し，それを財源とする政府支出政策に関する経済効果を定性的に分析した。仲間（2018）では本論文と同じモデルの下で，利子所

得税財源による政府支出政策を定性的に分析している。両者の経済効果を表にするならば，下の表1のようになる。まず厚生に与える効果については，利子所得に課税しようと，（条件付きながらも）資産バブルに課税しようと大きな違いが見られない。資産バブルに対する効果についても同様であり，政府が利子所得税を課しても，資産バブル税を課しても，確実に資産バブルを減らす。資本ストックについてのみ，利子所得税は資本ストックと独立である一方，資産バブル税は資本ストックを刺激するといった違いが生じる。仲間（2018）での利子所得課税政策において，政府にとって期待できることは何か？それは資本ストックに影響を与えることなく，資産バブルを抑制することである。しかしその場合，厚生を阻害するといった副作用に直面する。もし政府がその副作用を許容するならば，資産バブル抑制策としての利子所得税財源による政府支出政策を用いる余地が生まれる。それでは資産バブルへの課税についてはどうか？表1から分かるように，資産バブルから資本ストックへの代替が発生するため，資産バブルへの課税は資本ストックを刺激する。この効果を政府がどのように評価するかが問われる。厚生の阻害を許容しつつも，政府が資産バブルから資本ストックへと貯蓄の流れを確実に変化させたい場合，政府支出政策財源としての資産バブル税を課す余地が生まれる[2]。

一般に資産バブルが生じた場合，政策対応としては資産バブル抑制が求められよう。そのためには，資産バブルへの課税といった直接的な方法がイメージされやすい。しかし仲間（2018）及び本論文の経済環境下では，資産バブルそのものに対して課税しても，利子所得税を課しても，資産バブル抑制といった役目を果たすのである。あとは利子所得税，資産バブル税のどちらがより大きく資産バブルを抑制し，そしてどちらの税が厚生を大きく阻害しないかを見極め，税を選択するといった作業が政府に課されるのである[3]。

2）しかし動学的非効率に状態にある中で，資本ストックを増やす方向に誘導することの意義について考慮する必要がある。

表1：利子所得税と資産バブル税の比較

	資本ストック	資産バブル	厚生
利子所得税	＝0	＜0	＜0
資産バブル税	＞0	＜0	＜0 資産バブル税の重課で遺産が減少する場合

参考文献

Blanchard, O.J. and Fischer, S. (1989), *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge, The MIT Press.

Diamond, P.A. (1965), "National Debt in a Neoclassical Growth Model," *American Economic Review*, Vol.55, pp.1126-1150.

Tirole, J. (1985), "Asset Bubbles and Overlapping Generations," *Econometrica*, Vol.53, pp.1499-1528.

Yaari,M.E. (1964), "On the Consumer's Lifetime Allocation Process," *International Economic Review*, Vol.5, pp.304-317.

仲間　瑞樹 (2017)「2つの中立性－Tirole (1985) の資産バブルモデルによる分析－」, 山口経済学雑誌第66巻第4号, pp1-12。

仲間　瑞樹 (2018)「消費遺産動機を含む資産バブルモデル－利子所得課税の場合」, 山口経済学雑誌第66巻第６号, pp○-○掲載予定。

3）この点については，定量的な分析に委ねる方がより明確な結論が得られるものと考えられる。