



YAMAGUCHI UNIVERSITY

山口大学

博士学位論文

ブラックホールとブラックホール擬似天体の観測
的検証に対する理論研究

(Theoretical study for observational tests of black holes and quasi-black
hole objects)

山口大学大学院 理工学研究科

自然科学基盤系専攻

理論宇宙物理学研究室

学籍番号 15-9351-501-1

著者名：大神 隆幸

指導教員：坂井 伸之

平成 30 年 3 月

目次

第 1 章	導入	1
1.1	重力理論の歴史	1
1.2	強重力天体	3
1.3	本論文の目的と構成	4
第 2 章	重力を利用した天体観測	7
2.1	弱い重力による現象	7
2.1.1	天体のケプラー運動	7
2.1.2	光の湾曲とマイクロレンズ	8
2.2	強い重力による現象	13
2.2.1	重力波	13
2.2.2	ブラックホールシャドウ	15
第 3 章	ブラックホール擬似天体	17
3.1	ブラックホール観測に対する課題	17
3.2	ブラックホールの構造に関する研究	17
3.3	ブラックホール擬似天体	21
3.3.1	グラバスター	21
3.3.2	エリスワームホール	24
3.3.3	ブレーンワールドブラックホール	27
第 4 章	ブラックホール擬似天体の観測的検証法	31
4.1	グラバスター	31
4.1.1	坂井らによるグラバスターのシャドウに関する先行研究	31
4.1.2	久保らによるグラバスターのマイクロレンズに関する先行研究	32
4.1.3	グラバスターのシャドウ	36
4.2	エリスワームホール	40
4.2.1	阿部によるエリスワームホールのマイクロレンズに関する先行研究	40
4.2.2	エリスワームホールのシャドウ	43
4.3	ブレーンワールドブラックホール	48
4.3.1	Majumdar らによるブレーンワールドブラックホール周辺の光の湾曲に関する先行研究	48
4.3.2	ブレーンワールドブラックホールのマイクロレンズとシャドウ	48
第 5 章	まとめ	51
5.1	グラバスターのシャドウ	51
5.2	エリスワームホールのシャドウ	51

5.3	ブレンワールドブラックホールの電磁波観測	52
5.4	判別可能性	53
5.5	今後の課題	53
付録 A	相対性理論	55
A.1	相対性原理	55
A.1.1	ガリレイの相対性原理	55
A.1.2	特殊相対性原理	56
A.1.3	一般相対性原理	57
A.2	歪んだ空間の幾何学	58
A.2.1	ユークリッド空間	58
A.2.2	曲がった空間上の線素	59
A.2.3	ミンコフスキー空間	60
A.2.4	基底ベクトルと微分	60
A.2.5	曲率テンソル	61
付録 B	基礎方程式	63
B.1	一般相対性理論における基礎方程式	63
B.1.1	測地線方程式	63
B.1.2	アインシュタイン方程式	64
B.2	流体方程式	65
付録 C	諸々の考察	67
C.1	グラバスターのドップラー効果	67
C.2	近似計算による強度分布の解析	67

第1章 導入

1.1 重力理論の歴史

地球上で生活する我々にとって“重力”とは最も身近に感じる力であろう。地面にある石を持ち上げても、支えている手を離せばまた地面に向かって落ちてしまう。この性質を現代では“万有引力”と呼ぶ。多くの科学者たちは、古くは古代ギリシャの時代からこの万有引力について考察してきた。古代ギリシャの哲学者アリストテレスは、四元素と呼ばれる火・水・土・風の四つの元素によって世界が構成されているという考えから、「石は土の元素によってできており、本来の場所である地へ帰ろうとする性質を有する」と考えた。中世ヨーロッパではアリストテレスのこの考え方を広く支持しており、この時代での万有引力に対する考え方は次のようなものであった。

あらゆる物体はその性質(構成元素)に応じて本来の位置をそれぞれ持っており、そこから離されると出来るだけ早急に元に戻ろうとする。例えば土の性質を持つ石は本来の位置を地に持っているために地面に落ち、火の性質を持つ炎はその位置を天に持っているために上に立ち上る。

しかし、天体のある天上の世界は霊的な存在であり、我々のいる地上の世界とは別の世界であると考えられていたため、そこでは第五の元素が存在し、天体は地上とは異なった性質を持つとされていた。また、アリストテレスの考え方では土の元素が多いものが重く、それが重いものほど早く落ちるだろうと考えられていたが、自然学者のガリレオ・ガリレイはこの点に疑問を持ち、苦悩の末 1604 年に「落下速度は時間のみに比例し、重さには依存しない」という仮説にたどり着いた。彼は斜面で球を転がす実験において球が水平面では等速になることから、「加速・減速のような外的な要因がない場合に限り、一度物体に与えられた速度は不変に保たれる。」という現代における慣性の法則の原型を考え出していた。しかし、この考えも古代ギリシャでの一般的な考えに則り、天上にある天体は別の性質(円運動を行う性質)を持っているだろうと考えていた。

ところで、惑星の運動についてはケプラーが観測から導き出した三つの法則があった。

- 惑星は太陽を焦点とした楕円軌道をえがく。(1609年)
- 惑星は太陽に近い軌道上では早く、遠いところではゆっくり動くが、惑星と太陽とを結ぶ直線が等しい時間に等しい面積を掃くように動く。<面積速度一定>(1609年)
- 惑星が太陽を一周する時間の二乗は、惑星と太陽との平均距離の三乗に比例する。(1619年)

では、どうして天上の存在である惑星がこのケプラーの法則に従うのだろうか。当時の研究者たちはガリレイらが作り上げてきた地上での力学を用いることで、天文学と力学を結びつけようとした。例えば惑星が慣性の法則に従うと考えれば、外力が無ければ直線運動を続けるはずである。しかし楕円運動を描くことから、常に太陽の方向への引力が働いていなければならない。ロバート・フックはこの引力の正体について石が地面に落ちる時に働く力“重力”と同じものだと考えており、1666年に王立協会と交わした書簡で世界の仕組みについて次の事を述べている [1]。

- 全ての天体は引力 (gravity) によってその各部分を中心に引き付けているだけでなく、天体間で相互に引き付けあって運動する。
- 外部から力が継続的に加わらない限り、天体は単純に直進し続けるが、引力によって天体は円軌道や楕円軌道などの曲線を描く。
- 引力は天体同士が近いほど強くなる。

この引力がどのような性質を持つのかという点について、フックは1679年にアイザック・ニュートンへ意見を求める手紙を送っており、ニュートンは月と地球の運動から、これらの間に働く引力が距離の二乗に反比例するという逆二乗の法則を数学的に導き出した。しかしこれは地球と月の間の引力についてであり、同じ逆二乗の法則が太陽と惑星間にも働いている事を確かめなければならなかった。ここで、クリスティアーン・ホイヘンスによる振り子の研究と1659年頃の円運動の研究が結びつく事で、1673年の「振り子時計」において円運動の中心の引力は半径に比例し周期の二乗に反比例するということが公表された。この成果とケプラーの第三の法則とを組み合わせる事で、引力は半径の二乗に反比例するという事が算出できるようになっていた。

残る問題はケプラーの第三の法則から残る二つの法則をどのようにして導くのかという点であった。ニュートンは独自にこの問題を解決しており、その事を知ったエドモンド・ハレーは1684年に原稿出版を勧め、こうして「プリンキピア」が出来上がったのである。「プリンキピア」では、天体や流体の運動で示される力学現象を数学を使って厳密で抽象的なものにし、力学の基本原則を引き出すようにした。例えば、面積速度一定の証明や逆二乗の引力を受けて運動する物体は楕円や放物線、双曲線を描くことが証明されているが、これは天体の運動そのものでなく数学を使って抽象的に示されたものである。さらにこれらをもっと基本的なたった三つの法則

- 慣性の法則
- 運動の変化は力に比例し、力の及ぼす直線の方向に行われる
- 作用・反作用の法則

から導いてみせた。よって「プリンキピア」では、天体や流体の力学的現象がわずか三つの基本法則から導き出されるように組み立てられている^{*1}。ニュートンがここで開示した力学体系を“ニュートン力学”と呼ぶ。ニュートン力学において、距離 r だけ離れた質量 M, m の二つの物体間に働く万有引力の大きさ F を式で表すと

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

となる。 G は万有引力定数と呼ばれる比例定数である。 M を地球の質量、 m を小石の質量、 r を地球の中心からの距離だとすれば小石の運動方程式は上の万有引力を用いて $mg = GMm/r^2$ となる。すると地球の重力による小石の受ける重力加速度 g は

$$g = \frac{GM}{r^2} \sim 9.8 \text{ m s}^{-2}$$

となり小石の質量に依存しないため、地表から大きく離れない限り全ての物質について同じ値になる。ちなみにニュートンの万有引力の考え方は大きな議論を呼んだ。当時の物体の運動の説明

^{*1}ニュートンが天と地をつらぬく力学体系を作ったと呼ばれる所以である。

は近接作用論^{*2}で考えられており、万有引力はそれに対して遠隔作用論^{*3}を提示した形となったためである。イギリス側の自然哲学者はニュートンの説を支持する者が多かったが、その後数十年以上の議論を経て徐々に大陸側でも支持者が増え、現代の物理学では自然界に存在する基本的な力だとみなされるようになっていった。(以上、[2, 3]を参考にした。)

その後、アルベルト・アインシュタインは重力場を時空の幾何学として扱う方法を考え出し、1916年に一般相対性理論を発表した。この理論における重力場の方程式(アインシュタイン方程式)では万有引力が時空の歪みであるとされる。アインシュタイン方程式は次のように書かれる。

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

左辺の $G_{\mu\nu}$ は時空の曲率で表される幾何学的なテンソル量であり、アインシュタインテンソルと呼ばれる。右辺の $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれ、物質の分布や状態を表す量である。さらに係数 κ はアインシュタインの重力定数で、 $\kappa = 8\pi G/c^4$ と与えられている。この式を大雑把に説明すると、物質の存在によってその周囲の時空の幾何学的な形状が歪むということを表している。ニュートン力学では、万有引力が有質量の物体同士の間働く力であるために無質量な物体には働かないと解釈されるが、一般相対性理論では重力が時空の歪みによるものであるとしているために、質量を持たない光も重力の影響を受けるという事を予言する。実際にアーサー・エディントンは1919年に皆既日食を用いた太陽近くに見える恒星の観測を行い、この現象を実証している。また、一般相対性理論では強い重力を記述することが可能であり、例えばブラックホールのようなニュートン力学では説明されない天体の存在が許される。ブラックホールのような非常に強い重力を持つ天体を“強重力天体”と呼び、現代の天文学や宇宙物理学の分野において多くの謎を孕んだ研究対象として取り組まれている。

1.2 強重力天体

一般相対性理論を用いて議論するためにはアインシュタイン方程式を解く必要があるが、これは計量と呼ばれる時空の幾何学量 $g_{\mu\nu}$ の二階偏微分方程式であるため一般的に解くことが困難である。そこでカール・シュバルツシルトは1916年に「静的」「真空」「球対称」の三つの条件を課すことでこの方程式を解くことに成功した。それを線素を用いて表現すると

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad f(r) \equiv 1 - \frac{r_g}{r}$$

となる。ここで $r_g \equiv 2MG/c^2$ はシュバルツシルト半径と呼ばれ、中心にある質量 M のみに依存する長さの次元を持った量である。このシュバルツシルト時空上での光子の軌道を考察すると、シュバルツシルト半径の内側からの光子は外に出ることができない。つまりこれより内側 ($r < r_g$) から放射される光は外にいる観測者に届くことはないため、暗く見えると考えられる。よって観測者から見ると半径 r_g の黒い球(穴)のように見え、この穴をブラックホールと読んでいます。一般的な天体はシュバルツシルト半径よりも大きなサイズを持つためブラックホールになることはないが、核燃焼による圧力や縮退圧でも自身の重力を支えられないほど重くなった天体はサイズがシュバルツシルト半径より小さく収縮し、ブラックホールを生成することができると考えられている。

^{*2}力は媒質を通じて伝わるという描像。

^{*3}物体が空間を隔てて直接力を及ぼす描像。

シュバルツシルト解は天体が重く、かつ小さい(コンパクトである)ほど重力の影響が大きくなることを示している。例えば月、太陽、いて座 A*(Sgr A*) における重力の大きさの度合いを図示すると Fig.1.1(左) のようになる。横軸は天体表面で 1 になるように規格化した距離である。どの天体においても表面から離れるほど重力が小さくなることを示している。しかし月や太陽程度のコンパクトさの天体では表面においてもせいぜい小数点以下 5 桁程度にしか影響が出ない。対していて座 A* はブラックホールであると考えられており、重力の度合いは表面(シュバルツシルト半径)付近で急激に増加し、ちょうど表面で無限に発散している。月 → 太陽 → いて座 A* の順に重力が大きくなっていることから、天体の持つ重力の大きさの度合いはその天体のコンパクトさに依存していることがわかる。このコンパクトさをコンパクトネス $C \equiv r_g/R (\propto M/R)$ として定義し、 C と天体表面での重力の大きさの度合いを示したものが Fig.1.1(右) である。コンパクトネスは定義から $0 < C \leq 1$ の範囲を取り、 $C = 1$ でブラックホールを示す。赤い線で囲んだ領域は典型的な惑星における領域で、緑の線は恒星におけるものである。ブラックホールや白色矮星などのコンパクトな天体は重力が明らかに大きく、一般相対性理論の効果が顕著に現れる。

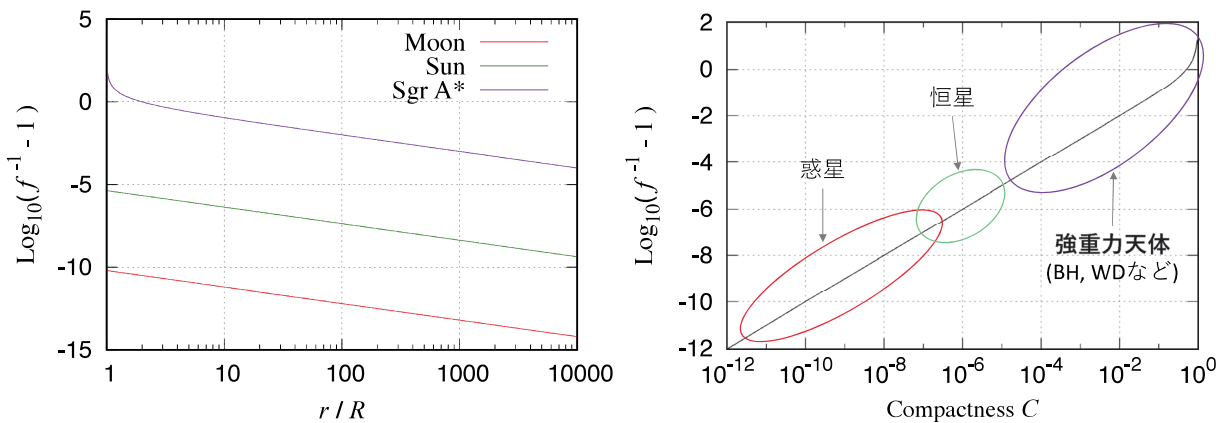


Fig. 1.1: 左: 月、太陽、いて座 A* における重力の大きさの度合い。それぞれの天体の半径を R (いて座 A* では $R = r_g$) とし、表面からの距離による依存を示す。右: コンパクトネス C と天体表面での重力の大きさの関係

ここまではシュバルツシルト時空を用いて天体周囲の重力を議論したが、アインシュタイン方程式から予想される天体にはそれ以外の解によって記述される物も多数存在する。そのため一般相対性理論を議論する上ではそれらの存在も考慮しなければならないことは明らかである。

1.3 本論文の目的と構成

そこで本論文ではシュバルツシルト時空以外でも「大きく歪んだ時空によって記述される天体^{*4}」を総じて「強重力天体」と呼び、これら強重力天体同士が観測的に判別可能なのかどうかを議論する。具体的には、シュバルツシルト時空によって引き起こされる現象とその他の時空によって引き起こされる現象の間の観測的な判別可能性を明らかにすることを目的とする。

また、本論文は本章を含めて全 5 章から成る。第 2 章では、弱重力と強重力の二つの視点から重力由来の物理現象をいくつか紹介する。特に、これらの現象の観測的な側面も述べる。第 3 章では、前章で紹介した内容から本論文の視座を示す。さらに、ブラックホールと似た観測的帰結

^{*4}厳密な定義がないため、多少荒っぽい導入をさせてもらうことにする。

を示す天体であるブラックホール擬似天体として、グラバスター、エリスワームホールそしてブレンワールドブラックホールの導入を行う。第 4 章では、まずマイクロレンズとシャドウに注目してこれらの天体周囲の時空における光学的な現象の先行研究のレビューを行う。それらの研究を踏まえて、本論文ではグラバスターのシャドウ、エリスワームホールのシャドウそしてブレンワールドブラックホールのマイクロレンズおよびシャドウの特徴を発見し、それぞれシュバルツシルトブラックホールとの比較を行う。最後に第 5 章では、前章での結果に基づいてシュバルツシルトブラックホールとの定性的な判別可能性について考察する。

第2章 重力を利用した天体観測

重力は我々にとって身近な力であるが、注意深く考察すると興味深い現象がいくつも現れてくる。ここではそれらの特異な現象やそれらを用いた天体観測について紹介する。

2.1 弱い重力による現象

2.1.1 天体のケプラー運動

まずは弱重力下での現象を紹介するが、一般相対性理論はこの近似の下でニュートン重力を再現するように構築されている。そのため、はじめに弱い重力での天体同士の運動についてニュートン力学を用いて議論することができる。

ニュートン力学において物体の運動は

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.1)$$

に従う。また、距離 r だけ離れた二つの物体 (質量はそれぞれ M_1, M_2) の間には大きさが

$$F = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad (2.2)$$

の引力 (万有引力) が働く。ここで G は万有引力定数である。これらの二つの式から得られる微分方程式

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.3)$$

を解くことによって、 M_2 の物体が M_1 から受ける重力による運動を記述することができる。

ここで、ニュートンがプリンキピアにおいて運動方程式等を論ずるより以前に、惑星の運動に対する観測からケプラーが三つの法則を発見していた。

- 第一法則- 惑星は、太陽を焦点のひとつとする楕円軌道をえがく
- 第二法則- 太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に描く面積は、一定である
- 第三法則- 惑星の公転周期の2乗は、軌道長半径の3乗に比例する

当時はどうして惑星がこのような法則に従って運動をするのかについて議論となったが、運動方程式 (2.3) において、 M_1 を太陽質量、 r を太陽から惑星までの距離とすることでニュートン力学を用いて説明できる。

こうして万有引力の考えは我々の触れることのできない天上の世界の存在である天体においても同様に適用できる事が分かった。そこで運動方程式 (2.3) を用いることで重力を受けた天体の運動を記述することができるようになったが、逆に観測によって天体の運動から重力源の情報を引き

出すことも可能であると理解できるだろう。例えばケプラーの第一法則により天体は重力源の周囲を楕円軌道を描きながら運動するため、楕円軌道上を運動する天体が発見されればその焦点に重力源が存在するはずである。すると恒星のように目で見ることのできる天体でなくとも重力源となる天体の存在 (位置や質量) を推定することができる。Fig.2.1 はブラックホール (いて座 A*) 周辺で起こる増光現象を捉えるために行われた観測結果 [4] であるが、ここではその固有運動に注目する。左の図は赤 → 緑 → 青と星間ガスが運動している様子を示しており、右の図の赤線はその運動にケプラー運動 (楕円軌道) を仮定してフィッティングしたものである。ブラックホール自体は光を発することがないため直接観測することができないが、左の図の白い+記号の位置に重力源が存在することが予想される。

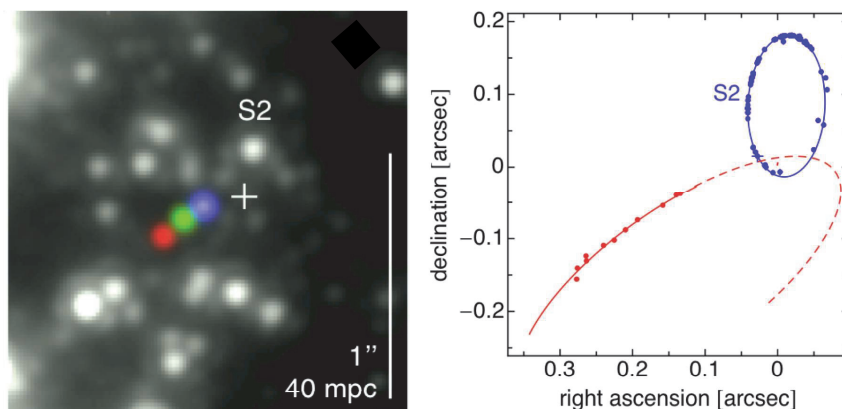


Fig. 2.1: 左: いて座 A*(+の位置) 周囲の星間ガスの固有運動 (赤 2004.5, 緑 2008.3, 青 2011.3)。右: ケプラー運動を仮定した軌道のフィッティング ([4] の Fig.1 に加筆)

2.1.2 光の湾曲とマイクロレンズ

万有引力を受けた物体の軌道を求める式 (2.3) を光の軌道にまで拡張して議論してみよう^{*1}。観測者に対して太陽の後方にある恒星から放たれた光が通常の物質と同様に万有引力の法則に従うと仮定した場合は、太陽の重力によって屈折して観測者に届く。その屈折角を δ とする。太陽の位置を原点とし、光の軌道を x - y 平面上にとると、Fig.2.2 のように示される。ここで太陽の半径を R とし、光線は太陽の表面を通過すると考える^{*2}。この場合の光線の軌道はニュートンの運動方程式を用いて、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4)$$

と書くことができる。これらは二階の微分方程式であり、二つずつ初期条件を与えることで厳密に解を得ることもできるが、ここでは光の速度が大きく光線はわずかにしか屈折しないという条件を課すことによって近似的に解く。まず光線が Fig. 2.2 のように点 $(x, y) = (R, 0)$ を通る場合を考える。

^{*1}本来この考えには大きな問題があるが、後で考察する。

^{*2}最接近距離 = 太陽の半径とするのと同義である。

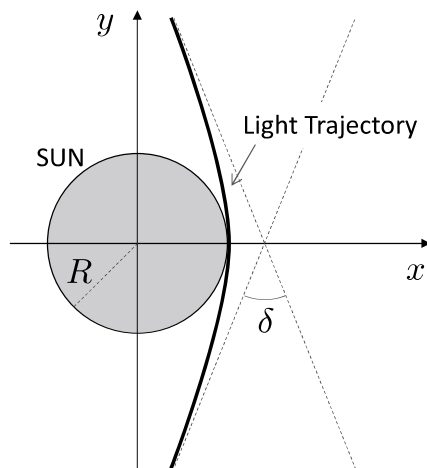


Fig. 2.2: 太陽の重力によって曲げられた光線の模式図

屈折がわずかな場合は

$$y \simeq ct \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \simeq c \frac{d}{dy} \quad (2.5)$$

が成り立ち、 $x \simeq R$ とすることができる。この近似下では (2.4) の一つ目の式は

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{GM R}{c^2 (R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.6)$$

と書ける。まずはこれを y で積分すると

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{GM y}{c^2 \sqrt{R^2 + y^2}} + C_1 \quad (2.7)$$

が得られる。ここで C_1 は積分定数であるが、 $y = 0$ の点では $dx/dy = 0$ なので $C_1 = 0$ となる。さらにもう一度積分すると

$$x = -\frac{GM}{c^2 R} \sqrt{R^2 + y^2} + C_2 \quad (2.8)$$

が得られる。 C_2 もまた積分定数だが、 $y = 0$ で $x = R$ であることから $C_2 = R + GM/c^2$ となる。よって光線がレンズ天体から十分離れると ($y \rightarrow \infty$)

$$x \simeq -\frac{GM}{c^2 R} |y| + R + \frac{GM}{c^2} \quad (2.9)$$

となり、光線の進行方向の変化が

$$\frac{|x - R|}{|y|} = \frac{GM}{c^2 R} \left| 1 - \frac{R}{|y|} \right| \simeq \frac{GM}{c^2 R} \quad (2.10)$$

と求められる。ただしこの値は光線がレンズ天体に最接近して以降の変化である。Fig. 2.2 から明らかなように、求める屈折角はこの値を二倍したものである。

$$\delta_{\text{Newton}} = \frac{2GM}{c^2 R} \sim 0.9'' \quad (2.11)$$

同様の状況を一般相対性理論を用いて議論する。一般相対性理論的な運動方程式は測地線方程式と呼ばれ、光の軌道に関しては

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu k^\nu k^\rho = 0, \quad k^\mu k_\mu = 0 \quad (2.12)$$

という形で表される^{*3}。ここで $k^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$ は光の四元ベクトルである。この式に太陽の作る重力場の時空計量を適用するのだが、太陽の外側では真空、静的、球対称という条件がよく成立しているため、次のようなシュバルツシルト時空を使うことができる。

$$ds^2 = -f_{\text{Sch}}(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f_{\text{Sch}}(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad f_{\text{Sch}}(r) \equiv 1 - \frac{r_g}{r} \quad (2.13)$$

ここで、 $r_g = 2GM/c^2$ はシュバルツシルト半径と呼ばれ、考えている天体の質量 M に比例した距離の次元を持つ量である。まず、静的で球対称な時空上では光線軌道を一つの平面上のみで記述することができ、その平面を $\theta = \pi/2$ の赤道面にとる。すると (2.12) の一つ目の式の内 t, φ 成分は次のように書き下される。

$$\frac{d}{d\lambda} (f_{\text{Sch}} k^t) = 0, \quad \frac{d}{d\lambda} (r^2 k^\varphi) = 0 \quad (2.14)$$

これらの式から次のような二つの保存量が定義される。

$$f_{\text{Sch}} k^t \equiv E = \text{const.}, \quad r^2 k^\varphi \equiv L_z = \text{const.} \quad (2.15)$$

また、この二つ目の式を用いると k^r は次のように書くことができる。

$$k^r = -L_z \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2.16)$$

これらを (2.12) の二つ目の式に代入すると

$$-\frac{E^2}{f_{\text{Sch}}} + \frac{L_z^2}{f_{\text{Sch}}} \left\{ \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}^2 + \frac{L_z^2}{r^2} = 0 \quad (2.17)$$

となり、さらにこれを整理して φ で微分することで次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{3r_g}{2r} \right) \quad (2.18)$$

これを $1/r$ に関して逐次的に解こう。まずは、弱重力近似 ($r \gg r_g$) を仮定して右辺の二項目を無視して積分することで

$$\frac{1}{r} \simeq \frac{\cos \varphi}{R} \quad (2.19)$$

という解が得られる。ただし、 $\varphi = 0$ で $r = R$, $dr/d\varphi = 0$ を要請して積分定数を決めている。この解をもう一度 (2.18) に代入して近似的な微分方程式を得ることができ、それを解くと

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi}{R} + \frac{GM}{c^2 R^2} \left(\frac{3}{2} - \cos \varphi - \frac{\cos^2 \varphi}{2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right) \quad (2.20)$$

^{*3}付録 B.1.1 で詳しく紹介する。

が得られる。 $r \cos \varphi = x$, $r \sin \varphi = y$ を用いてこの解を書き換えると

$$x = R + \frac{GM}{c^2 R} \left(x - \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (2.21)$$

となり、光線の進行方向の変化が

$$\frac{|x - R|}{|y|} = \frac{GM}{c^2 R} \left| \frac{x}{|y|} - \frac{2 + (x/|y|)^2}{\sqrt{1 + (x/|y|)^2}} \right| \simeq \frac{2GM}{c^2 R} \quad (2.22)$$

と求められ、ニュートンの運動方程式から導出した場合と同様にこの値を 2 倍したものが求める屈折角であるため

$$\delta_{\text{GR}} = \frac{4GM}{Rc^2} \sim 1.8'' \quad (2.23)$$

となり、ちょうどニュートン力学の場合の 2 倍の値が得られる。

エディントンのはどちらの値が正確なのかを観測から検証した。1919 年の 5 月 29 日に起こった日食を用いて二箇所の観測地点で屈折角を求めたところ Table 2.1 という結果となった。

Table 2.1: エディントンの観測による屈折角の値 ([5] より引用)

観測地点	δ
ソブラル島 (ブラジル)	$1.98 \pm 0.16''$
プリンシペ島 (ギニア)	$1.61 \pm 0.40''$

これらは一般相対性理論によって求められた屈折角 δ_{GR} の値に近く、 δ_{Newton} とは明らかに異なる。この観測により一般相対性理論が正しそうであると注目されるようになった。このような重力による光の屈折現象を一般に重力レンズと呼ぶ。

ところで、重力レンズによって光線が曲がると光源の見かけの位置が変わるだけでなく、観測される像が歪むことや、複数の軌道を通る光が一つの観測点に集まることで増光して見える現象が考えられている [8]。Fig. 2.3(上) に示すように観測者と光源天体の間を惑星や銀河のような天体が通過する場合、重力の影響で光線軌道が曲がることで観測イメージが弧状やリング状^{*4}となる。歪んだ像の面積変化が観測される光度の変化だとすると、重力源の移動に伴って光度が変化する。光度の時間変化を示したグラフを光度曲線と呼び、この場合の光度曲線は Fig. 2.3(下) のようになる。特に観測機器の分解能に対してレンズ天体が十分に小さく、このような光度曲線のみが得られる場合をマイクロレンズと呼ぶ。この現象は現在、系外惑星の探査に用いられている。恒星をレンズ天体とし、その恒星に惑星が存在した場合 Fig. 2.3(下) のような光度曲線に加えて惑星起因の増光が現れるはずである。実際に MOA(Microlensing Observations in Astrophysics) を含むいくつかの観測グループによる 2005 年の観測で惑星起因の増光が発見された。その観測結果を Fig. 2.4 に示す。銀河中心方向に存在する、ある恒星の増光ピークに遅れて、小さな増光が数日間にわたって起きているのが確認できる。

^{*4}このようにしてできたリング状の像はアインシュタインリングと呼ばれる。

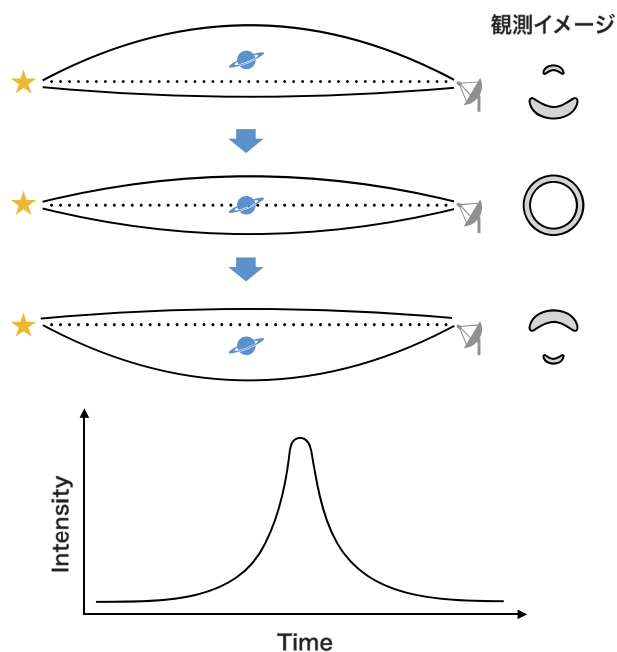


Fig. 2.3: 上: 重力レンズの模式図と観測される像。下: マイクロレンズで予想される光度曲線。

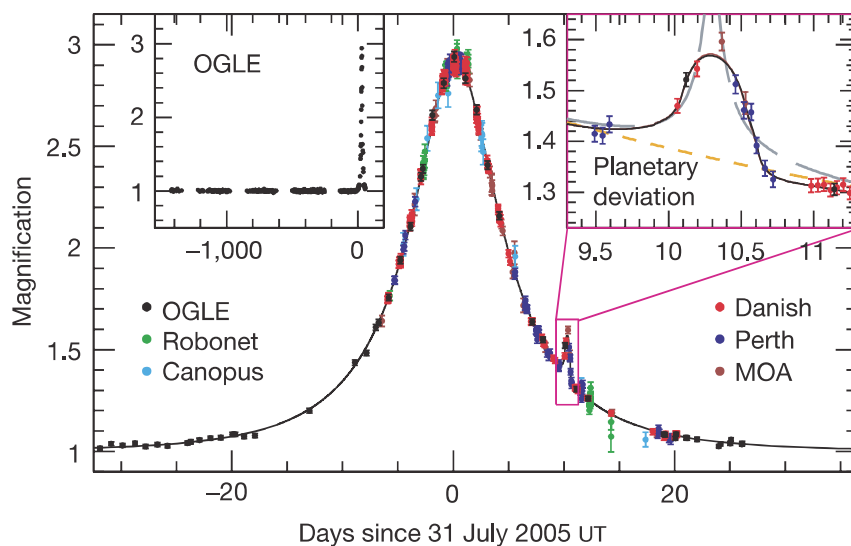


Fig. 2.4: 重力マイクロレンズを用いた系外惑星 OGLE-2005-BLG-390Lb の観測結果。右側の小さなコブ状の増光が惑星の存在を示す。([9] より引用)

2.2 強い重力による現象

強重力天体ではより一般相対性理論の効果が顕著となり、いくつかの特異な現象が現れる。そこで次のステップとして強重力下での現象を紹介する。

2.2.1 重力波

一般相対性理論によりアインシュタインが予言した現象の中に重力波 [10, 11] がある。重力波とは時空の歪みが水面のさざ波のように伝搬される現象であり、アインシュタイン方程式から導かれる。背景時空を平坦 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ とし、そこからの摂動を $h_{\mu\nu}$ で表すと時空計量は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

となり*5、この摂動に対して線形なアインシュタイン方程式を次のように書き下すことができる。

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

ただし、 $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ 、 $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h/2$ である。この式にはゲージ自由度 (座標の取り方の自由度) が残っているため、うまくゲージを固定することで簡単な形にすることができる。まず微小なゲージ変換 (座標変換) $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$ を考える。この変換に対して $h_{\mu\nu}$ と $\bar{h}_{\mu\nu}$ はそれぞれ次のように変換される。

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} h_{\alpha\beta} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (2.26)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\sigma \xi^\sigma \eta_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

ここで、 $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}$ に関する変換は

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu \quad (2.28)$$

となり、 $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ と仮定することは $\square \xi_\mu = 0$ とゲージを固定することと同義であることが分かる。このように取られたゲージをローレンツゲージと呼び、このゲージを選んだ上で真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) を仮定するとアインシュタイン方程式 (2.25) は

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.29)$$

と書ける。これは明らかに波動方程式の形になっており、時空が波のように光速で伝播することを表している。

1960 年代にウェーバーによって始められた実験から半世紀以上経った 2015 年に、アメリカの LIGO がマイケルソン干渉計を用いた観測によって初めて重力波の直接検出に成功している [12]。この時に検出された重力波のイベントは $36M_\odot$ と $29M_\odot$ の質量を持つブラックホール連星が合体した際に生じたものであった。さらに、2017 年に LIGO とイタリアの Virgo が中性子連星の合体によって生じた重力波を検出することに成功した [13]。それまでに観測された重力波イベントは全てブラックホール連星からのものであったことに対して、このイベントの特徴は電磁波なども同様に放出することができる中性子星からの放射だったことである。実際にこの重力波イベントが検出された直後に出されたアラートに対して、いくつかのグループが追観測を行い、電磁波を用いて対応天体を検出することに成功している。これらの観測成果から、今後は電磁波やニュートリノだけでなく、重力波も含めたマルチメッセンジャー観測が始まることが期待される。

*5 添字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$ で行う。

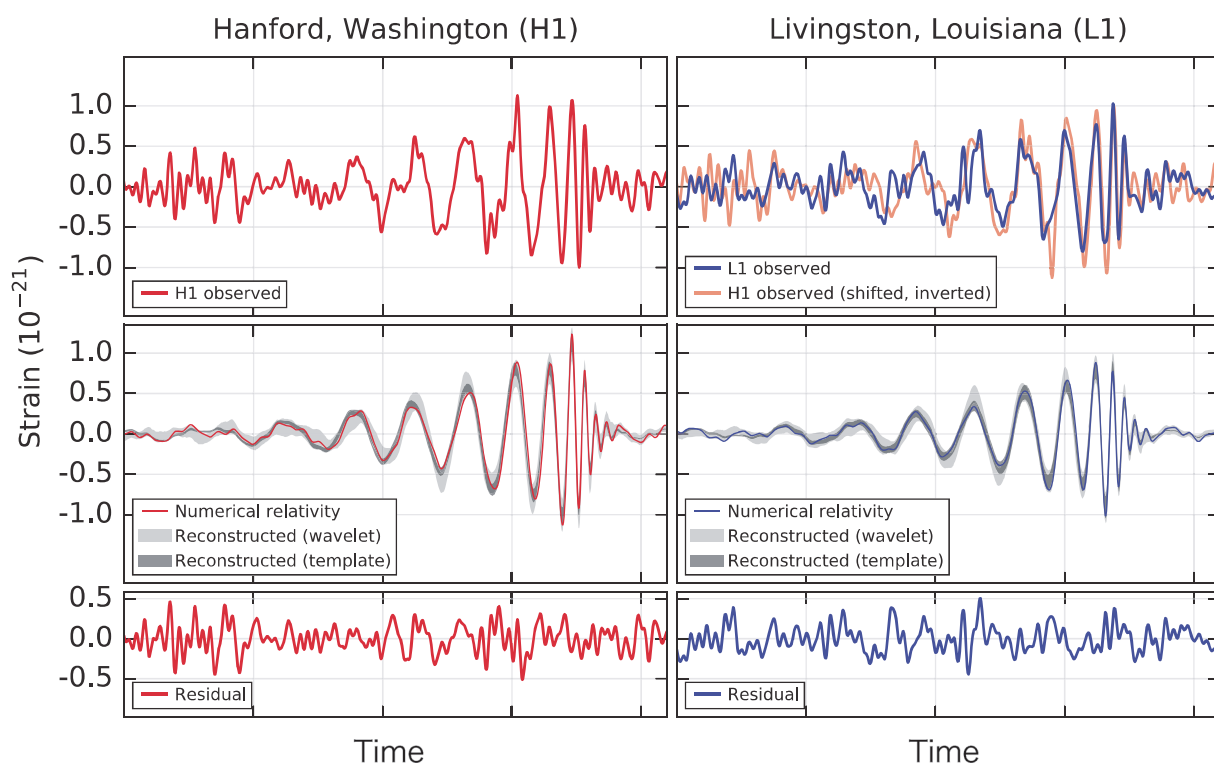


Fig. 2.5: LIGO によって史上初めて観測された重力波の波形。左右はそれぞれ Hanford と Livingston における重力波望遠鏡による結果である。([12] より引用)

2.2.2 ブラックホールシャドウ

次に、ブラックホールの付近のような強重力下での光線の振る舞いについて議論する。以降簡単のため特に明記しない限りは $c = 1$ の単位系を使い、ブラックホールは静的なシュバルツシルト時空 (2.13) によって導入されるものを考える。この時空を背景時空として光の測地線方程式 (2.12) を考えよう。(2.12) の二つ目の式に (2.15) で定義した保存量を代入して整理することで、次のようなニュートン力学でのエネルギー保存に似た形式で光線軌道を議論することができる。

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = E^2, \quad V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (2.30)$$

ここで E, L_z はそれぞれ光線の運動エネルギーと角運動量に相当する量として扱われる。 V_{eff} は有効ポテンシャルと呼ばれ、考えている時空上での光線軌道を議論する上で有用である。Fig. 2.6(左) は V_{eff} を示したグラフであり、シュバルツシルト半径の少し外側 $r = 1.5r_g$ にピークが現れている。遠方からやってきた光線の軌道を考えると、3種類に分類される。まず1種類目は L_z の値が大きく、ポテンシャルの壁に衝突してもう一度無限遠に飛んでゆく軌道 (A) である。次はちょうどポテンシャルのピークに到達して円軌道を描く軌道であるが、これはわずかにでもずれると他の軌道になってしまうため不安定な軌道 (B) である。最後は L_z の値が小さく、ポテンシャルの壁を乗り越えてブラックホールへ吸い込まれる軌道 (C) である。

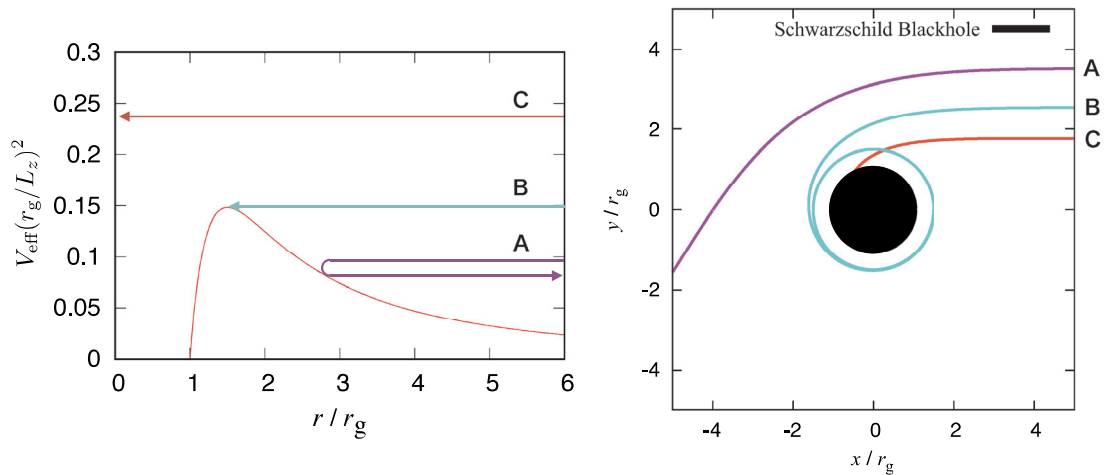


Fig. 2.6: 左: シュバルツシルト時空における光線の有効ポテンシャル。右: ブラックホール周辺の光線軌道 (A: 散乱軌道, B: 不安定円軌道, C: 落下軌道)

そもそも、遠方から来た光線はインパクトパラメータによって特徴付けられる。まず、Fig. 2.7 のように観測者のいる点における光線の接線は $(x_0, 0)$ と $(0, \alpha)$ の二点を通るため、この線分上の任意の点を $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ と極座標を用いて表すと、次のような直線を表す式が得られる。

$$\frac{r \cos \varphi}{x_0} + \frac{r \sin \varphi}{\alpha} = 1 \quad (2.31)$$

ここで、光線の屈折の効果により光源の位置は図に示す場所には観測されない。観測者にとっては上の式で示される直線を通して光線が来たように感じるため、像ができる平面^{*6}を $x = 0$ の面にとると、 $(0, \alpha)$ の点に光源があるように見える。

*6例) 天球面上の接平面

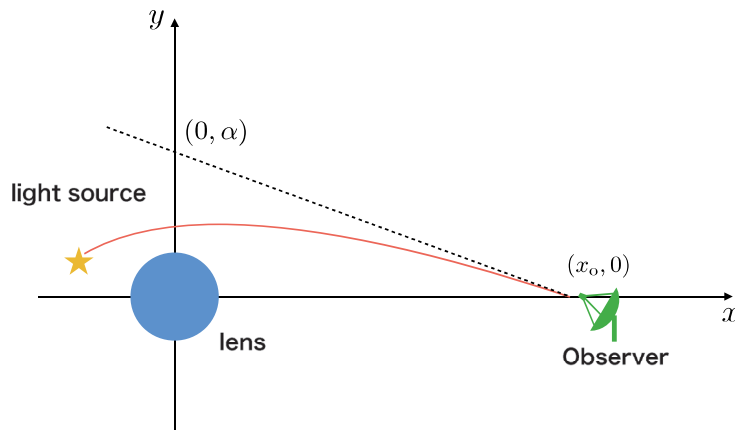


Fig. 2.7: 光源, レンズ天体, 観測者の間の位置関係

次に観測者とレンズ天体の間の距離が十分に離れている場合 ($x_0 \rightarrow \infty$) を考える。するとこの直線は x 軸と平行になり、 α は光線のインパクトパラメータと一致する。また、直線の式 (2.31) を微分し、観測者の位置への極限を取ると

$$\alpha = \frac{L_z}{E} \tag{2.32}$$

という式が得られ、光線の保存量である L_z と E のみからインパクトパラメータが与えられるようになる。

このインパクトパラメータを使って三つの光線軌道を議論する。Fig. 2.6(右) に示すように B の軌道は円軌道を描き、この場合のインパクトパラメータの値は測地線方程式に $k^r = 0$ を代入することで $\alpha = 3\sqrt{3}r_g/2 \sim 2.6r_g$ と求められる。また $\alpha < 3\sqrt{3}r_g/2$ は C の軌道、 $\alpha > 3\sqrt{3}r_g/2$ は A の軌道にそれぞれ相当する。シュバルツシルト時空自体は静的な解であるため、これらの議論は時間を反転させても成り立つ。例えば不安定円軌道上にある光源はあらゆる方向に光を放射するが、少しでも外側に向いた成分を持っているものは何度も巻き付くような軌道を通った後、そのうちのいくつかが観測者まで届く。対して少しでも内側に向いた成分を持っているものは全てブラックホールに吸い込まれてしまう。ブラックホール周辺に光源ガスが分布している場合、観測される光線の強度は光源を通過する軌道距離によって与えられる。B の軌道は他の軌道に比べて長い距離を稼ぐことができるため、他の軌道を通るものに比べて明るくなる。つまりブラックホールに星間ガスが落下する際、表面付近 (不安定円軌道上) で増光する現象を示す。また C の軌道はその他の軌道に比べて光源を通過する軌道距離が小さくなり、この部分が影のように観測される。このような現象をブラックホールシャドウと呼んでおり、多くの研究者がブラックホールの種類や周囲の光源を様々に仮定して、観測されるであろうシャドウの形状を計算している [14, 15]。ブラックホールシャドウはシュバルツシルト半径程度のサイズが分解できなければ観測することができず、銀河中心にあるいて座 A* では数マイクロ秒角程度の分解能が必要となる。現在、サブミリ波 VLBI^{*7} プロジェクトである EHT (Event Horizon Telescope) がブラックホールの撮像を目指して進行中であり、日本時間で 2017 年 4 月 10 日に観測がスタートしている。

^{*7}Very Long Baseline Interferometer

第3章 ブラックホール擬似天体

3.1 ブラックホール観測に対する課題

ブラックホールのようなコンパクトな天体は時空を大きく歪めるため、一般相対性理論の効果が顕著に現れやすい。そのため、現在多くの研究者がブラックホールを発見することを目標としている。しかしブラックホールとは別の大きく歪んだ時空構造を持つ強重力天体が理論的にいくつも考えられており、中にはブラックホールと似た観測的帰結をもたらすと予言されているものも存在する。我々はこのような天体をブラックホール擬似天体と呼んでいる。ブラックホール探査を行うにあたって、この天体の存在を無視することはできない。そこで、ブラックホール擬似天体による観測的帰結を理論的に予測しておくことで、観測結果がブラックホール由来か擬似天体由来かを判断する基準の一つになる。本論文では、擬似天体の引き起こす現象が観測的に判別できるかという点に注目する。

3.2 ブラックホールの構造に関する研究

ブラックホール擬似天体の理解を円滑にするために、まずは話題となっているブラックホールの構造に関して理論的な研究を紹介しよう。ブラックホールはアインシュタインの提唱した一般相対性理論での基礎方程式であるアインシュタイン方程式の解から予言された。アインシュタイン方程式自体は二階偏微分方程式であるため、一般に解くことは難しい。そこでシュバルツシルトは静的・球対称・真空の三つの条件を課すことで厳密解を得ることに成功した。これが(2.13)で紹介したシュバルツシルト時空である。

$$ds^2 = -f_{\text{Sch}}(r)dt^2 + \frac{1}{f_{\text{Sch}}(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad f_{\text{Sch}}(r) \equiv 1 - \frac{r_g}{r}$$

特徴としてシュバルツシルト半径 $r_g = 2GM$ という長さの次元を持つ量が出てくるが、これを半径とした球面を事象の地平面と呼ぶ。この座標系で議論をする場合 $r = r_g$ で $f_{\text{Sch}} = 0$ となるため、地平面での時間や空間の座標が破綻する。そこでクルスカール-スゼッケル座標と呼ばれる次の座標を用いて地平面付近での因果関係を議論する。

$$T = \sqrt{\frac{r}{r_g} - 1} e^{\frac{r}{2r_g}} \sinh\left(\frac{t}{2r_g}\right), \quad R = \sqrt{\frac{r}{r_g} - 1} e^{\frac{r}{2r_g}} \cosh\left(\frac{t}{2r_g}\right) \quad (r > r_g) \quad (3.1)$$

$$T = \sqrt{1 - \frac{r}{r_g}} e^{\frac{r}{2r_g}} \cosh\left(\frac{t}{2r_g}\right), \quad R = \sqrt{1 - \frac{r}{r_g}} e^{\frac{r}{2r_g}} \sinh\left(\frac{t}{2r_g}\right) \quad (r < r_g) \quad (3.2)$$

地平面の内側と外側で別々に定義したが、次のように記述することで全ての領域に拡張して議論することができる。

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} e^{-\frac{r}{r_g}} (-dT^2 + dR^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{r_g}\right) e^{\frac{r}{r_g}} \quad (3.3)$$

特に $r = r_g$ では $T = \pm R$ となるため、事象の地平面がこの座標における時空図で光円錐として描かれる。この光円錐によって時空図が次の四つの領域に分類される。

領域 I ($T^2 - R^2 < 0, R > 0$) : 外部領域

領域 II ($0 < T^2 - R^2 < 1, T > 0$) : ブラックホール内部領域

領域 III ($T^2 - R^2 < 0, R < 0$) : 領域 I に似た構造を持つ別の世界

領域 IV ($0 < T^2 - R^2 < 1, T < 0$) : ホワイトホール内部領域

Fig. 3.1 にこの座標系での時空図を示す。右側の図は第一象限のみ抜き出したものである。領域 I のある点から内向きと外向きに同時に光線を放つ場合を考えると、Fig. 3.1 右図の (1) のように描くことができる。左上に向いた矢印は内向き、右上に向かうものは外向きの光線である。すると内向きの光線はやがてブラックホール内部 ($r < r_g$) に入り、外向きの光線は無限遠に飛んでゆることが理解される。次に領域 II でも同様に、光線を (2) のように考える。どちらの光線もブラックホールの外側に出ることはなく、必ず中心 ($r = 0$) に向かう。つまりブラックホール内部から外部へ因果関係を持つことができず、外にいる観測者からはブラックホールの中は見ることができないため、地平面が黒い球のように見える。さらに領域 III では領域 I と同様な議論をすることで構造的には全く同じものであることが理解される。しかし領域 I と領域 III の間では因果関係を持ってないため、別の世界として解釈することができる。最後に領域 IV だが、 $r < r_g$ の領域で放たれたものは全て外側 (領域 I または領域 III) に出てくるため、この領域をブラックホールとは逆にホワイトホールと呼ぶこともある。

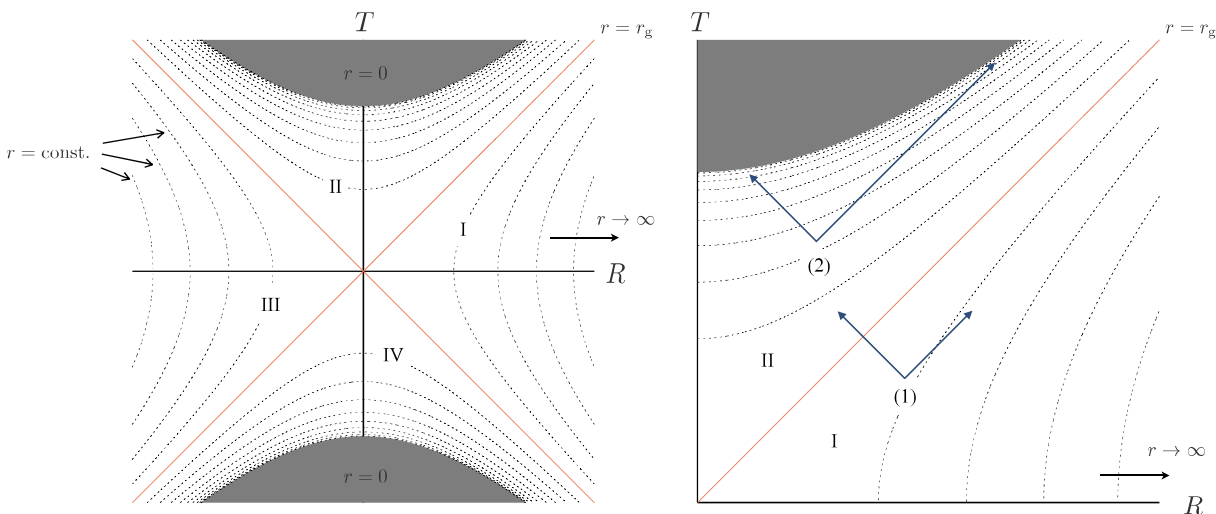


Fig. 3.1: クルスカル-スゼッケル座標での時空図。右図は第一象限のみ抜き出したものである。矢印はある点で放たれた光線の世界線を示す。左上に向いた矢印は内向き、右上に向いた矢印は外向きに放たれた光線である。点線は r の値が一定となる面を示すが、領域 II と領域 IV では時間座標と空間座標が入れ替わるため、この領域では r 一定面は同時刻面を表す。

このようにブラックホール内部も含めたシュバルツシルト時空の構造を理解することができたが、どのような座標系を取っても $r = 0$ にある特異点を取り除くことはできない。これは次のような特異点定理^{*1}と呼ばれる定理からも説明される。

^{*1}ここで紹介する特異点定理は主にブラックホールに対して使われるもので、他にも宇宙論で使われるものなど幾つか種類がある。

特異点定理 (Penrose 1965 [16])

アインシュタイン方程式に従い、光的エネルギー条件を満足し、非コンパクトなコーシー面 Σ を持つ大域的に双曲的な時空 (M, g) を考える。ここで、もし捕獲面 T が存在するならば、アフィン長が $2/|\hat{\theta}_0|$ よりも短い延長不可能な光的測地線が存在する。ここで $\hat{\theta}_0$ は T から未来向きに垂直に出た光的測地線束の膨張率 $\hat{\theta}|_T$ の最小値である。([17] より抜粋)

この定理を簡単に説明すると、自然な物質を伴うようなアインシュタイン方程式の解はこの理論自身が破綻するような特異点を持つということである。ただし、この定理では特異点の存在を述べているだけで、その形状や位置については何も述べていない。実際シュバルツシルト時空における特異点は事象の地平面で覆われているため、外側での物理現象に限定して議論する上では問題はない。言い換えると、物体がブラックホールに吸い込まれるまでの過程は議論できるが、その後最終的にどうなるのかということ議論することはできないということである。

シュバルツシルト時空では静的・球対称・真空の三条件を課したが、より一般的に静電場を伴った軸対称な解として次のカー・ニューマン時空が考えられている。

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.4)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2GMr + a^2 + Q^2, \quad \rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad a \equiv \frac{S}{M}, \quad Q = \sqrt{\frac{4\pi G}{\mu_0}} q$$

ただし S および q はそれぞれブラックホールの角運動量および電荷である。正確にはこれは、アインシュタイン方程式に電磁場も含めたアインシュタイン・マクスウェル方程式から導かれた、回転する電荷を帯びたブラックホールの時空計量であり、 $q = 0$ の場合はカー解と呼ばれ、 $S = 0$ の場合はライスナー・ノルドシュトロム解と呼ばれる。さらに両方ともゼロの場合はシュバルツシルト解を再現する。この解に関して次の定理がある。

ブラックホール唯一性定理

アインシュタイン・マクスウェル方程式において定常な漸近平坦・軸対称解はカー・ニューマン解のみに限られる。

つまり普通の物質を考える場合には、カー・ニューマン時空のみを取り扱えば良いということになる。さらに星の重力崩壊の最終状態としてブラックホールができるとすると、ほとんどのブラックホールが電荷を持たないため、カー時空になると考えられる。この時空上に乗った物体は回転の効果によって時空に引きずられる。引きずりの効果は中心に行くほど大きく、空間の回転の速度が光速以上になることで、あらゆる物体が静止できなくなる回転楕円体型の領域が現れる。この境界面のことを静止限界と呼び、その境界と事象の地平面の間の領域はエルゴ領域と名付けられた。Fig. 3.2 にエルゴ領域の定性的な模式図を示す。エルゴ領域は極 ($\theta = 0, \pi/2$) の部分で地平面と接している。このように軸対称に回転するブラックホールには球対称なものとは比べて特異な性質があるが、本論文では球対称な時空解にのみ注目する。つまりシュバルツシルトブラックホールとその他の球対称天体を比較するということである。

また、ブラックホールの外側から何か物質を落とすと、質量がその物質の分だけ増加し、 $A = 4\pi r_g^2 = 16\pi G^2 M^2$ に従って表面積も増加する。表面積をエントロピー、増加の比例定数を温度と

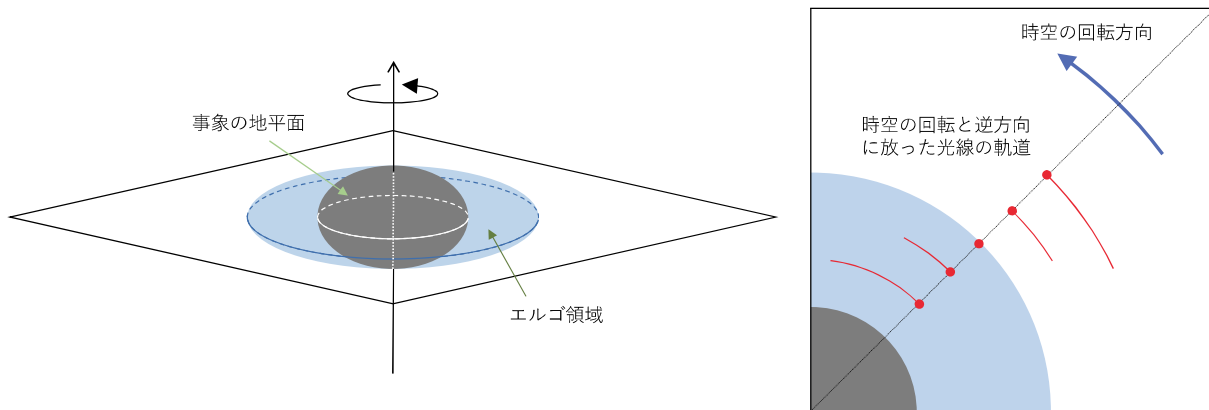


Fig. 3.2: 事象の地平面とエルゴ領域の定性的な模式図。右図は時空の回転と逆方向に放った光線の軌道を定性的に図示したものである。エルゴ領域の内部では引きずりが強く、外にいる観測者からは時空の回転方向と同じ向きに運動しているように見える。

それぞれみなすことで質量の増加に関する関係式を熱力学第一法則と解釈することができる。

$$dE = dM = \frac{1}{32\pi G^2 M} dA = T dS$$

$$T \equiv \frac{\hbar}{8\pi k_B G M}, \quad S \equiv \frac{k_B A}{4G\hbar} \quad (3.5)$$

さらに一般的な過程としてブラックホール同士が合体した場合のエントロピーの変化から、エントロピー増大則 (熱力学第二法則) が得られる。合体前のブラックホールのエントロピーをそれぞれ S_1, S_2 とし、合体後のブラックホールのエントロピーを S_{1+2} とすると、

$$S_1 + S_2 \propto M_1^2 + M_2^2, \quad S_{1+2} \propto (M_1 + M_2)^2$$

$$\delta S = S_{1+2} - (S_1 + S_2) \propto 2M_1 M_2 \geq 0 \quad (3.6)$$

となり、合体後のエントロピーは合体前のものよりも必ず大きくなる。他にも様々な観点からブラックホールを一つの熱力学系とみなすことができる。統計力学の観点ではブラックホールがエントロピーを持つことが、あらゆる微視的状态の重ね合わせで記述できることを述べており、ブラックホールに吸い込まれた物質の情報が何らかの形で保存されるはずである。量子力学的に微視的状态が表されるならば、ブラックホール内部で保存された情報がユニタリな時間発展によって外部へ取り出すことができるはずである。しかし、ホーキングは量子論を部分的に取り入れることで、ブラックホールが上で定義した温度 $T (\propto M^{-1})$ での黒体放射を起こすことを示した [18]。つまり質量以外の情報を外部へ出さないままエネルギーを放出することでやがて蒸発すると考えられ、あたかもブラックホールに落ちた物質の情報が消失したように見える。これをブラックホール情報パラドックスと呼ぶ。

3.3 ブラックホール擬似天体

この節では三つのブラックホール擬似天体を紹介するが、その前に本論文における定義を行っておく。3.1 節ではブラックホールと似た観測的帰結をもたらす天体をブラックホール擬似天体と説明していた。そこで前章で紹介したマイクロレンズ効果とシャドウ現象に注目しよう。まずマイクロレンズ効果はレンズ天体周辺の時空構造に起因したものであるため、時空が漸近的に平坦である必要がある。もし平坦ではない場合、遠方の構造によっては天体から大きく離れた場所を通る光も観測者まで届く可能性があり、ブラックホールとは明らかに異なる結果が予測される。そもそも本論文で議論しているブラックホールが漸近平坦を仮定しているため、擬似天体にもこの条件を課すことは自然であろう。次にシャドウ現象であるが、前章ではブラックホール地平面付近からの放射は暗く観測されることからシャドウの成り立ちを説明した。しかし本来シャドウ現象に最も重要なのは光線の不安定円軌道の存在である。不安定円軌道上から放射される光線が非常に明るく観測されるということは説明した。すると不安定円軌道上から出た光線と、その内側から出た光線は大きなコントラストを生み出し、シャドウが明確な輪郭を持つことになる。この不安定円軌道の存在は有効ポテンシャルから簡単に確認できる。Fig. 2.6 のように上に凸の形をしていれば良い。以上を踏まえてブラックホール擬似天体を次のように定義しよう。

ブラックホール擬似天体の定義

光的測地線における動径方向の有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ について次の二つの条件を満たす時空のうち、カー・ニューマン時空以外の時空解を持つ天体。

- $r \rightarrow \infty$ で漸近平坦である。
- 次の式を同時に満たす r が $0 \leq r < \infty$ で少なくとも一つ存在する。

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0, \quad \frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} < 0$$

ただし、 $r \equiv \sqrt{g_{\theta\theta}}$ である。

ブラックホール唯一性定理から、ブラックホール擬似天体は自然ではない物質や重力理論の変更を伴うという性質を持つ。

3.3.1 グラバスター

まずはじめに、グラバスターと呼ばれる天体を紹介しよう。この天体は星の重力崩壊における最終状態の一つとして Mazur と Mottola により考え出された [19]。Fig. 3.3 のように、彼らはシュバルツシルト時空において、特異点と事象の地平面が存在する領域を次の線素で表されるド・ジッター時空で置き換え、さらに硬い物質でできた球殻で区切るというモデルを紹介している。

$$ds^2 = -f_{\text{ds}}(r)dt^2 + \frac{1}{f_{\text{ds}}(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad f_{\text{ds}}(r) \equiv 1 - H^2r^2 \quad (3.7)$$

ド・ジッター時空は正の宇宙定数 Λ を持つアインシュタイン方程式の真空解として導出され、現在の宇宙の加速膨張を説明する一つのモデルとして宇宙論の分野で広く知られている。また、 $H (\propto \sqrt{\Lambda})$ は膨張の程度を表す量であり、ハッブル定数と呼ばれる。そもそも 3.2 節で述べたように、通常の物質のみで妥当な時空解を作ると特異点が必ず現れるのであった。それに対してこのモデルでは、

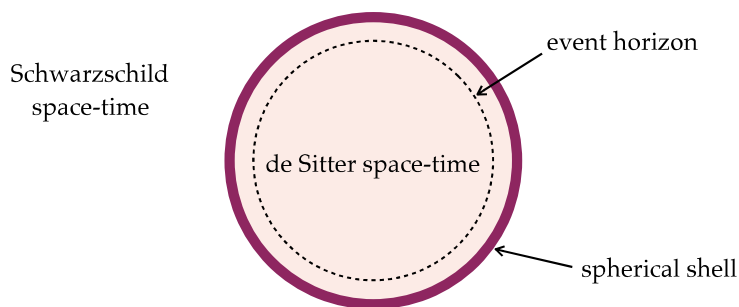


Fig. 3.3: グラバスターの模式図

宇宙定数の導入によってこの特異点定理を破ることで、特異点を回避することができる。さらに、この天体には事象の地平面も存在せず、天体内部の情報を外に出す事ができるため、情報消失のパラドックスも生じることがなくなる。このように考えられた天体は、内部が真空であることから gravitational vacuum star、略して gravastar(グラバスター) と名付けられた。

Visser と Wiltshire は球殻が薄い場合の球対称モデル [20] を考え出し、このモデルが動径方向摂動に対して安定になる条件を Fig. 3.4 のように坂井らが示している [21]。また、グラバスターは光の軌道を議論する際に、球殻がどのような物質でできているのかによって三つのモデルに分類される。

モデル 1 球殻が光子と相互作用し、球殻自身が放射する。

モデル 2 球殻が光子と相互作用し、球殻自身は放射しない。

モデル 3 球殻が光子と相互作用しない。

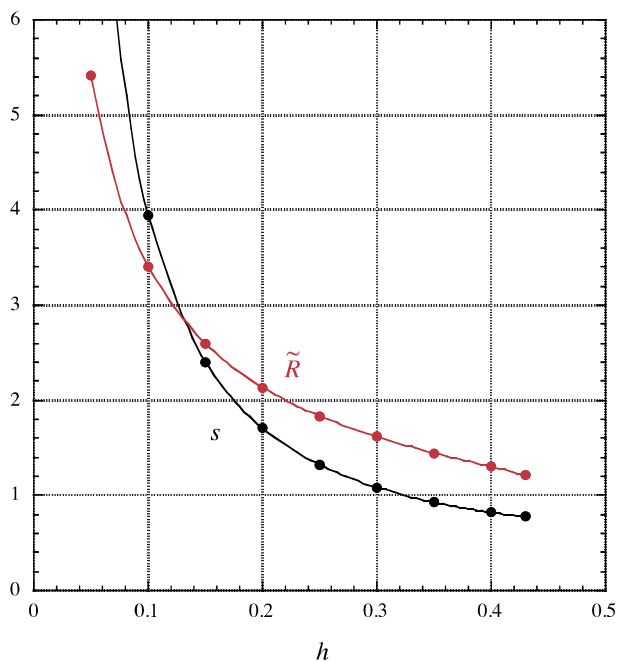


Fig. 3.4: グラバスターが安定となる条件。ただし $\tilde{R} \equiv R/r_g$, $s \equiv 4\pi G\sigma R^4/r_g^3$, $h \equiv Hr_g$ であり、 σ は球殻のエネルギー面密度である。([21] より引用)

モデル 1 では球殻自体が放射することから、普通の天体と区別がつかないだろうと考えられる。さらに、モデル 2 では球殻が光を吸収し暗い天体のように見えるため、観測的にブラックホールと区別がつかない。対して、モデル 3 では光線が天体内部を通過することが可能であることから、予測される観測的現象が自明でないため、久保らはこのモデルでの光線軌道を数値的に求めた [22]。また、彼らは天体のサイズ R によってこれをさらに二つのモデルに分類している。

モデル A $r_g < R < 3r_g/2$: 光の不安定円軌道が存在する。

モデル B $R > 3r_g/2$: 光の不安定円軌道が存在しない。

モデル B は今回設定したブラックホール擬似天体の定義に合わず、シャドウの輪郭ができないことから明らかにブラックホールと異なる結果を示すため、本研究では取り扱わないことにする。モデル A での光線軌道は Fig. 3.5(右) のように示される。天体外部はシュバルツシルト時空であるためほとんどブラックホールの場合と同様の議論ができるが、インパクトパラメータが $3\sqrt{3}r_g/2$ より小さい光線は別に扱わなければならない。ブラックホールの場合では地平面を通過してそのまま外に出てくることがないのに対し、このモデル 3 のグラバスターでは全ての光線が球殻を通り抜けてド・ジッター時空を通過し、もう一度外に出ることができる。また、有効ポテンシャルの形は天体外部でシュバルツシルト時空 (2.30) と一致し、内部は

$$V_{\text{eff}}(r) = L_z^2 \frac{f_{\text{Sch}}(R)}{f_{\text{dS}}(R)} \left(\frac{1}{r^2} - H^2 \right) \quad (3.8)$$

で与えられる [21]。全領域での有効ポテンシャルは Fig. 3.5(左) のようになる。上に凸の点の他にも下に凸の点 ($r = R$) が確認できる。この事実からは安定な円軌道の存在が示唆されるが、このような軌道は観測者まで届くことはないため、本研究においては無視することができる。

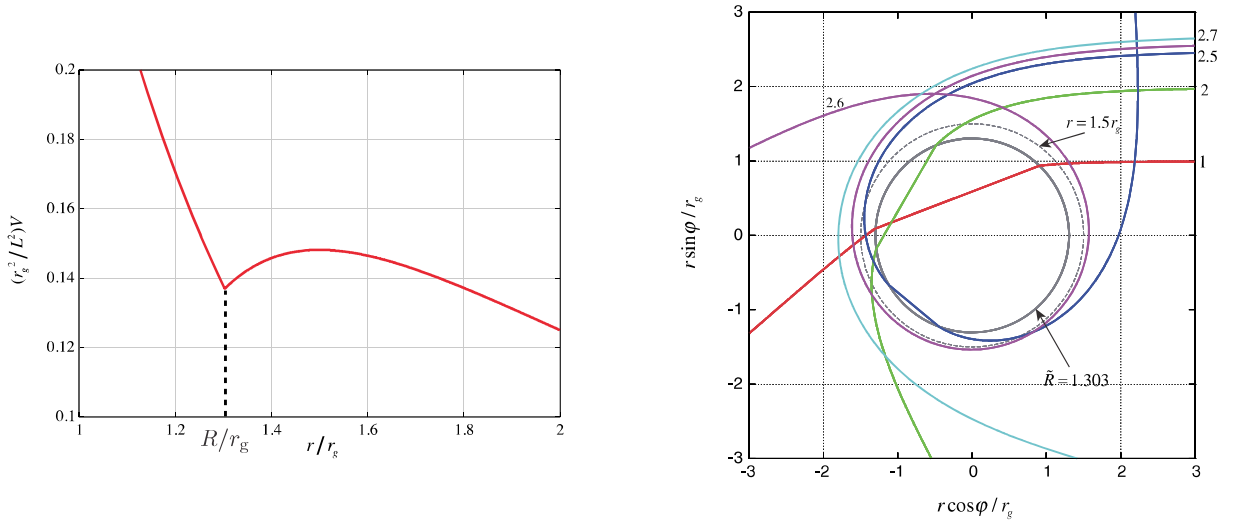


Fig. 3.5: Model A; 左: グラバスター時空上の光線の有効ポテンシャル。右: グラバスター時空上の光線軌道 (光線に付く数値はそれぞれインパクトパラメータの値)。それぞれ天体の大きさを $R \sim 1.303r_g$ としている。 ([22] に加筆)

3.3.2 エリスワームホール

次にワームホールを紹介しよう。ワームホールとは時空の二点間を直接つなぐトンネル状構造のことである。最初のワームホール解はブラックホールとそれを時間反転させたホワイトホールを繋げたものとして紹介され、アインシュタイン・ローゼンブリッジとも呼ばれる。このようにして作られたワームホールでは、ブラックホールに吸い込まれた物質がホワイトホールから放出されると説明されていたが、特異点の存在によって吸い込まれた後の物質の状態を説明できないという問題があるため、アインシュタイン方程式の数学的な解釈の一つでしかないと考えられている。また、ホワイトホールはその特徴から内部のエネルギーを保つことができないため、すぐに潰れてしまうはずである。そこで、通過可能なワームホールは進行方向に対して地平面を持たず、特異点も持たないような時空構造として与えられる。このような天体はタイムマシンやワープ航法^{*2}などの実現を可能にするかもしれない夢のある研究対象であるにもかかわらず、理論的なモデルの域を出ていないのが現状である。

球対称静的な時空解は一般的に次のような形で表される [23]。

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r^*)} dt^2 + \left(1 - \frac{\ell(r^*)}{r^*}\right)^{-1} dr^{*2} + r^{*2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.9)$$

ここで $\Phi(r^*)$ は重力赤方偏移の大きさを決め、 $\ell(r^*)$ は空間的な形状を定義する。 ℓ が一定の場合は、これを時間一定面におけるシュバルツシルト半径のようにみなすことができ、空間的な形状がブラックホールに似る。本研究では簡単のために重力赤方偏移がないモデル $\Phi = 0$ を仮定する。さらに、長さの次元を持つ量 a を用いて $\ell(r^*) = a^2/r^*$ という形を仮定することで次のような簡単な形に書き換えることができる。

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + a^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad r^2 \equiv r^{*2} - a^2 \quad (3.10)$$

この形のワームホール解を一般にエリスワームホールと呼ぶ。この時空解は最初のワームホール解として次のような流れで求められた [24, 25]。まず負の運動項を持つスカラー場 ϕ を導入したアインシュタイン方程式と、場の方程式が次のように与えられる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -16\pi G \left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\sigma\phi\partial_\sigma\phi \right), \quad (3.11)$$

$$\square\phi = 0 \quad (3.12)$$

この方程式に球対称・静的・漸近平坦を仮定することで次のような解が得られる。

$$ds^2 = \frac{r^2 + a^2 - m^2}{|r^2 + a^2 - m^2|} \left[-e^{-\frac{2m\phi(r)}{a}} dt^2 + e^{\frac{2m\phi(r)}{a}} \{dr^2 + (r^2 + a^2 - m^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} \right],$$

$$\phi(r) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - m^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{r}{\sqrt{a^2 - m^2}} \right] \quad (3.13)$$

ここで m と a は積分定数として与えられる。この時空は $r \rightarrow +\infty$ とすると質量 m でのシュバルツシルト時空に近づき、 $r \rightarrow -\infty$ とすると $-m \exp(m\pi/a)$ の質量を持つシュバルツシルト時空に近づく。よって m の値をゼロにすることは漸近的な無質量の時空を意味し、この時の時空は (3.10) と同じ形になる。もし m の値がゼロでなければ時空の構造が r の正負に対して非対称となる^{*3}ため、本論文では最も単純なワームホールであるエリスワームホール時空につ

^{*2}短時間長距離移動の手法の一つ。

^{*3}特に $r < 0$ では負の質量となり、解釈が難しい。

いて取り扱うことにする。また、エリスワームホールの通過可能性については Morris と Thorne が議論している [26]。

エリスワームホールを視覚的に認識するためには、高次元空間における埋め込み図として描くことが有効である。 $t = \text{一定}$ で $\theta = \pi/2$ での二次元ワームホールの線素を考えるが、(3.9) の座標系を用いることで次のように書くことができる。

$$ds^2 = \frac{1}{1 - a^2/r^{*2}} dr^{*2} + r^{*2} d\varphi^2 \quad (3.14)$$

この二次元曲面に対して、仮想的に r と直行した座標 z を加えた次のような円筒座標を用いて三次元のユークリッド空間を考える。

$$ds^2 = dz^2 + dr^{*2} + r^{*2} d\varphi \quad (3.15)$$

二つの線素 (3.14), (3.15) が一致するという条件から三次元ユークリッド空間における曲面の方程式

$$z = \pm a \cdot \operatorname{arccosh} \frac{r^*}{a} \quad (3.16)$$

が得られる。この結果を用いて二次元ワームホールを三次元ユークリッド空間に埋め込んだ図を Fig. 3.6 に示す。上下二つの時空面がトンネル状の構造で接続されているのが見て取れるだろう。トンネル状構造のちょうど真ん中の部分の半径が a と一致することから、この量は喉半径と呼ばれている。

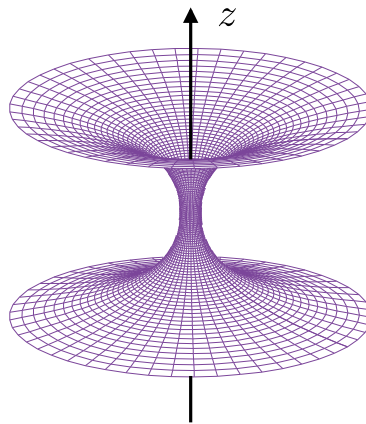


Fig. 3.6: 二次元ワームホールの三次元埋め込み図 ([27] より引用)

ここではスカラー場 ϕ の存在を仮定してエリスワームホールを導出したが、このようにして与えられた時空解は球対称摂動・軸対称摂動両方に対して不安定であることが示されている [28, 29]。Bronnikov らは次のようなエネルギー・運動量テンソルによって求められるエリスワームホール時空が、球対称・軸対称両方の線形摂動に対して安定であることを示した [30]。

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{a^2}{8\pi(a^2 + r^2)^2} \cdot \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1) + \varepsilon \cdot \operatorname{diag}(1, 0, 0, 0), \quad \varepsilon \equiv -\frac{2a^2}{8\pi(a^2 + r^2)^2} \quad (3.17)$$

一項目は a を有効的な磁荷とした場合での静的な磁場、二項目は負のエネルギー密度 ε を持つダストとそれぞれみなすことができる。これは一般相対性理論の範囲で初めての、安定なワームホー

ルの例である。このように、特異点定理に出てきたエネルギー条件を破るような物質を考える事で、安定なワームホールを導出できる。

次にエリスワームホール時空中での光線軌道を確認する。有効ポテンシャルは次のように与えられる。

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{r^2 + a^2} \tag{3.18}$$

Fig. 3.7は光線の有効ポテンシャルの概形(左)と $(x, y) = (\sqrt{r^2 + a^2} \cos \varphi, \sqrt{r^2 + a^2} \sin \varphi)$ の座標系で見た光線軌道(右)である。この座標系では $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ で張られる球面が、ある種の地平面のように扱われ、 $\sqrt{x^2 + y^2} < a$ の領域へは空間的に入ることができない。ワームホールは二つの時空を繋いだ構造であるため、 $r > 0$ の領域と $r < 0$ の領域とでそれぞれの異なる時空^{*4}を表現している。有効ポテンシャルに注目すると $r = 0$ の喉の部分にピークが現れ、インパクトパラメータが a となる時に喉の部分で不安定円軌道となる。また、インパクトパラメータが a より大きければワームホールを通過することはなく、 a より小さければワームホールを通過してあちらの世界へ渡る。このようにエリスワームホールの場合もブラックホールの場合と同様に光線軌道が3種類に分類されるが、ワームホールにはあちらの世界が存在するため Fig.3.7(右)の紫の点線で示すように落下軌道をとる光線は喉を通過してあちらの世界へ渡ってゆく。この現象は時間反転させることで別の現象を予測する。あちらの世界に存在する光源が喉を通して観測されるということである。これはワームホール特有の現象であり、その他の天体と観測的に大きな差異をもたらすと考えられる。

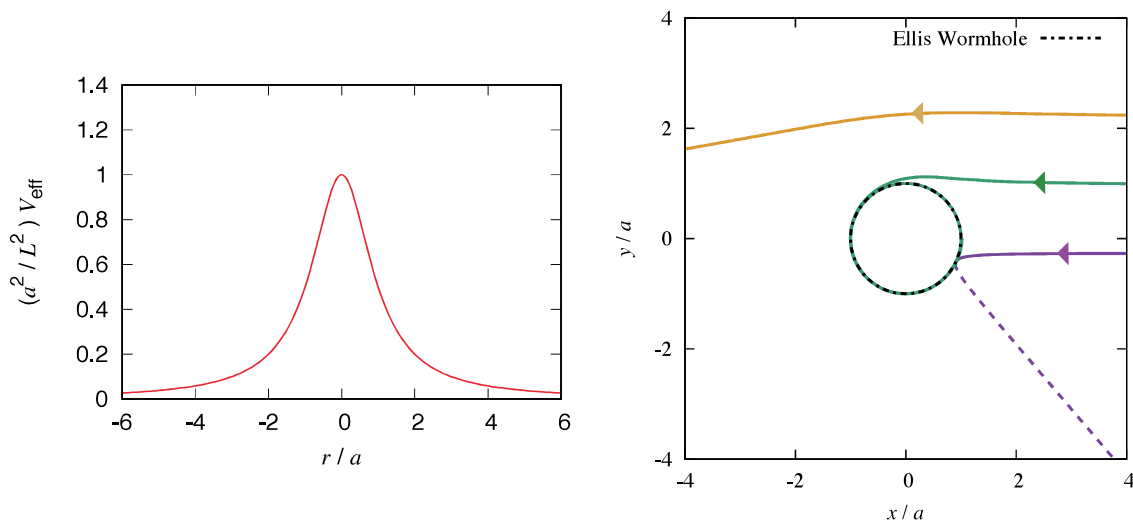


Fig. 3.7: 左: エリスワームホール周辺の光線の有効ポテンシャル。右: エリスワームホール周辺の光線軌道。 $r = 0$ でワームホールの喉を示し、 $(x, y) = (\sqrt{r^2 + a^2} \cos \varphi, \sqrt{r^2 + a^2} \sin \varphi)$ と定義している。実線と点線は r の正負の違いを表す。([27] より引用)

^{*4}便宜上 $r > 0$ の領域を「こちらの世界」、 $r < 0$ の領域を「あちらの世界」と呼ぶことにする。また、観測者は「こちらの世界」に存在しているとする。

3.3.3 ブレーンワールドブラックホール

最後に高次元時空でのブラックホールを紹介する。アインシュタインの提唱した相対性理論では、私たちは空間三次元と時間一次元の計四次元時空の中に存在していると考えられており、事実多くの重力現象を説明・予言してきた。しかし超弦理論^{*5}や M 理論^{*6}などの場の統一理論を構築する上で高次元空間の存在が必要であると考えられており、その可能性が活発に議論されている。しかし、私たちの検証できるスケールでは観測的・実験的に余剰次元空間の存在は確認されていないため、何らかの方法で制限を加えなければならない。その一つのアイデアとして、高次元空間は存在しているが、我々の宇宙を作る物質場は四次元時空上に束縛されているというブレーン理論 [31] が考えられている。特に Randall-Sundrum II モデル [32] (以下、RS II モデルと呼ぶ。) では無限大に広がった余剰次元を持つにもかかわらず、ブラックホールから十分離れた場所ではニュートン重力を再現する。また、重力レンズや重力波などで宇宙論的に興味深い結果を示すため、多くの研究が行われている。

本研究では RS II モデルに基づき、バルクと呼ばれる五次元時空の中に我々の住む四次元超曲面が埋め込まれていると考える。この超曲面をブレーンと呼び、空間が三次元の場合を 3 ブレーンと呼んでいる。物質場はブレーン上に閉じ込められており、さらにブレーンを中心とした左右の対称性 (Z_2 対称性) を課す。このようにしてブレーン上に投影されたアインシュタイン方程式は白水らによって次のように与えられている [33]。

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G_{(4)}T_{ab} - \Lambda_{(4)}g_{ab} + (8\pi G_{(5)})^2\Pi_{ab} - E_{ab} \quad (3.19)$$

ここで左辺と右辺二項目まで見ると、宇宙項付きのアインシュタイン方程式と同じ形をしている。ただし、 $G_{(4)}$ と $\Lambda_{(4)}$ はそれぞれ 3 ブレーン上の万有引力定数と宇宙項で、バルクでの万有引力定数 $G_{(5)}$ と宇宙項 $\Lambda_{(5)}$ さらに 3 ブレーンの張力 σ を用いて

$$G_{(4)} = \frac{4\pi}{3}G_{(5)}^2\sigma, \quad \Lambda_{(4)} = \frac{1}{2}\Lambda_{(5)} + 4\pi G_{(4)}\sigma \quad (3.20)$$

と表される。また、 Π_{ab} はエネルギー・運動量テンソル T_{ab} の二次からなる非線形な項である。さらに、 E_{ab} は五次元のワイルテンソル ${}^{(5)}C^a{}_{bcd}$ を用いて

$$E_{ab} = {}^{(5)}C^c{}_{def}n_c n^e g_a{}^d g_b{}^f \quad (3.21)$$

と表されている。ここで n^a は超曲面 (3 ブレーン) に直行する正規ベクトルである。これは高次元重力の情報を四次元に投影したのと言い換えることができる。次に具体的に 3 ブレーン上のアインシュタイン方程式 (3.19) でのブラックホール解を求めよう。 T_{ab} , Π_{ab} , $\Lambda_{(4)}$ をゼロとし、球対称で静的な場合を考える。3 ブレーン上の線素を

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.22)$$

と仮定する。この場合の (3.19) の解は Dadhich らにより求められている [34]。

$$f(r) = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \quad (3.23)$$

^{*5}物質の基本単位を点ではなく一次元のひものようなものであると考える理論。

^{*6}十次元空間+一次元時間の計十一次元の理論。異なる種類の超弦理論を統一するとされる。

ブラックホールから十分離れた場所 ($r \rightarrow \infty$) でニュートン重力を再現するためには、 $\alpha = 2G_{(4)}M$ と与えればよい。また、 β のある項は E_{ab} から出て来たものであり、高次元重力の情報が反映されている。ところで、(3.23) はライスナー・ノルドシュトロム解 ((3.4) において $S = 0$ とした場合) と同じ形をしており、 β をブラックホールの電荷とみなすことができる。そのことから β を潮汐電荷と呼ぶこともある。しかし、ライスナー・ノルドシュトロム解ではこの項を負にすることはできない。 $\beta = -r_\beta^2$ とすると、地平面付近で

$$f(r) \sim 1 - \frac{r_\beta^2}{r^2} \quad (3.24)$$

と書ける。また、軽いブラックホールを考える場合でも α が小さいことから上の近似が有効である。軽いブラックホールの候補として、原始ブラックホール^{*7}が挙げられる。原始ブラックホールのうち $10^{15}g$ より軽いものは、ブレーンが存在していない場合に予想されるホーキング放射では現在までに蒸発してしまう [35]。対して RS II ブレーン上での原始ブラックホールの宇宙論的進化には周囲の熱浴からのエネルギー吸収が優勢となるため、寿命が長くなる事が示されている [36, 37]。このようなブラックホールが現在まで存在していれば、マイクロレンズによる増光が観測される可能性がある。また、四次元の質量がない場合 ($\alpha = 0$)、ブレーン上のブラックホールは完全に五次元ブラックホール解 [38] と一致する。これはバルクの中にブラックホールが存在し、私たちのいるブレーンがちょうど五次元ブラックホールの赤道面を横切っている場合に相当する。そのような場合には、四次元ブラックホールとの違いが最も顕著に現れる。シャドウ観測における両者の間の定性的な違いを明らかにするため、本論文では $\alpha = 0$ の場合を考える。

では、(3.24) のように与えた時空中での光線軌道を確認しよう。ブレーンワールドブラックホール周辺の光線軌道とシュバルツシルトブラックホール周辺の光線軌道について、地平面の半径がそれぞれ 1 になるような座標系で計算したものを Fig. 3.8(上) に示す。線の色が同じものはインパクトパラメータの値が同じものを表しており、同じインパクトパラメータでもブレーンワールドブラックホールの場合の方が屈折が小さいことが見て取れる。これはブレーンワールドブラックホールは同じ大きさでも重力が小さいことを意味している。また、有効ポテンシャルは次のように与えられる。

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_\beta^2}{r^2} \right) \quad (3.25)$$

Fig. 3.8(下) に示すようにシュバルツシルト時空と概形が同じであるが、そのピークの位置は $r = \sqrt{2}r_\beta \sim 1.4r_\beta$ とわずかに内側になり、不安定円軌道の半径が小さくなっている。この不安定円軌道を通るインパクトパラメータ (見かけの大きさ) は $2r_\beta$ で与えられ、シュバルツシルトブラックホールの時の値 $3\sqrt{3}/2r_g \sim 2.6r_g$ よりも小さくなっている。

^{*7}宇宙初期に形成された可能性のあるブラックホール。ダークマターの候補として考えられている。

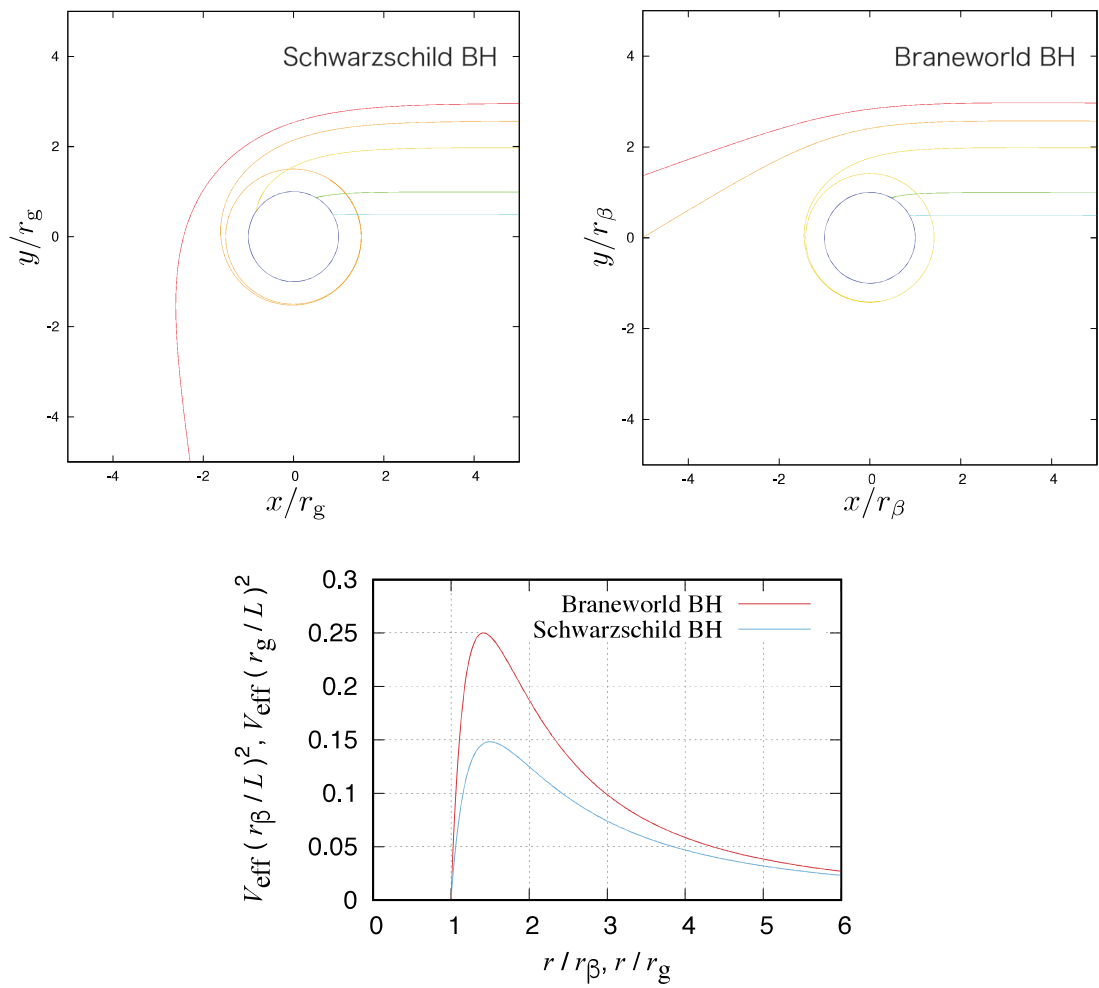


Fig. 3.8: 左上: シュバルツシルトブラックホール周辺の光線軌道。右上: ブレーンワールドブラックホール周辺の光線軌道。下: それぞれの時空での有効ポテンシャルの概形。

第 4 章 ブラックホール擬似天体の観測的検証法

本章では、先述したブラックホール擬似天体の観測的検証法を議論する。この主題に関する研究はすでに幾人かの研究者により報告されている。それらを基に本研究の視座を示し、本研究結果の報告を行う。

4.1 グラバスター

4.1.1 坂井らによるグラバスターのシャドウに関する先行研究

グラバスターのシャドウは坂井らによって [21] で議論されている。グラバスターは硬い物質でできた球殻を持つため、それを構成する物質と光子の間の相互作用も考慮する必要があった。彼らは、モデル 1(球殻が光子と相互作用し、球殻自身が放射する) の場合はグラバスター自身の放射によって影ができないためにブラックホールと明らかに異なる観測的帰結を示し、モデル 2(相互作用し、放射しない) の場合には表面が暗くなることからブラックホールと区別できないだろうと考えた。そこで、非自明なモデルであるモデル 3(相互作用しない) での光線軌道を数値的に計算し、グラバスター内部を通過する光線も含めたマイクロレンズによる増光を調べている [22]。彼らは不安定円軌道を持つグラバスターモデルを仮定し、その天体の背後に無限に広い光源が分布している場合を仮定した。そして、その光源から観測者まで届くであろう光の軌道からシャドウの形状を推論した。このモデルのグラバスター周囲の光線軌道は Fig. 3.5(右) のようになる。図の左側 ($r \cos \varphi < 0$) をグラバスターの後方だとし、逆側遠方に観測者がいると考える。後方に無限に広いシート状の光源を置いた場合、観測者から飛ばした光線の中で光源に届くものだけが実際に観測されるものであると推論される。そこで観測者から飛ばした光線のインパクトパラメータ L/Er_g と屈折角 Φ の依存性を調べたものが Fig. 4.1 である。 Φ は測地線上の座標 $\varphi(r)$ を用いて $\Phi = \varphi(r = 1000r_g) - \pi$ と定義されている。 Φ の値が $0 \leq \Phi < \pi/2$, $3\pi/2 < \Phi < 5\pi/2$, \dots を満たす光線が光源から観測者まで届いていると考えられるため、 $\Phi = \pi(n - 1/2)$ となる点を a_n, b_n ($a_n < b_n$) とすると、この点で明暗が入れ替わる。

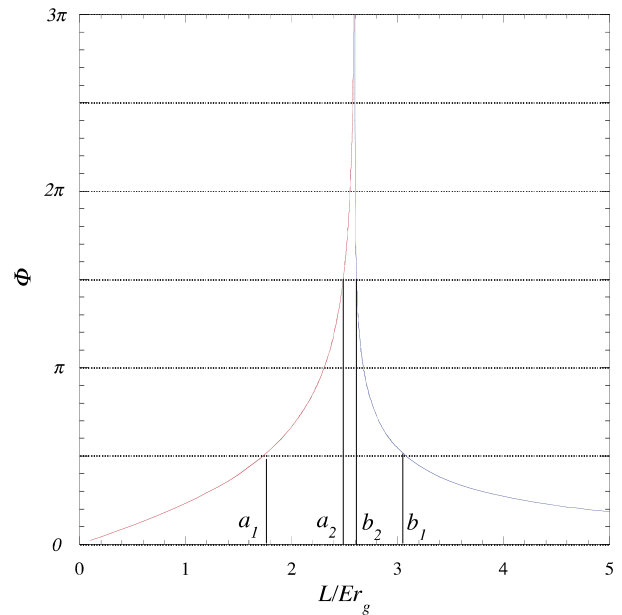


Fig. 4.1: 図のインパクトパラメータと屈折角の関係。 $\Phi = \pi(n - 1/2)$ となる点 a_n, b_n ($a_n < b_n$) で明暗が入れ替わる。([21] より引用)

つまりこの議論により Fig. 4.2 のようなシャドウの模式図が得られる。Fig. 4.1 の赤い線は天体の内部を通過する光線による結果でグラバスター特有のものであり、Fig. 4.2 における中心の明るい領域に相当する。また、 a_2 と b_2 の間には $3\pi/2 < \Phi < 5\pi/2, 7\pi/2 < \Phi < 9\pi/2, \dots$ と明るくなる領域が複数存在するため、実際は極めて細いリングが幾重にも重なっている。

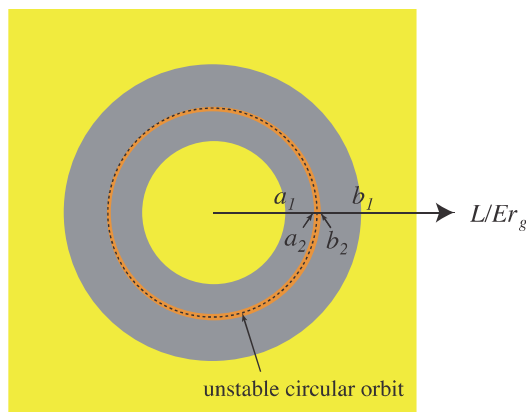


Fig. 4.2: グラバスターシャドウの模式図 ([21] より引用)

4.1.2 久保らによるグラバスターのマイクロレンズに関する先行研究

ここで、グラバスター時空中での弱い重力下による光線の屈折角を考える。これは計算せずとも明らかであり、天体の外側を通る光線はシュバルツシルト時空のみを考慮すれば良いため、(2.23) より最近距離を R_c として

$$\delta = \frac{2r_g}{R_c} \tag{4.1}$$

と与えられる。この事実は、マイクロレンズを観測する際に弱重力な効果が主に効いているのであれば、シュバルツシルト時空と区別がつかないということの意味する。シュバルツシルト時空とグラバスター時空の異なる点は、中央に時空の地平面があるのか、またはその代わりにド・ジッター時空になっているのかという点であったが、この影響を見るためには強重力下での光線についても考慮しなければならない。そこで、久保らは先述したシャドウの研究 [21] と同様のグラバスターモデル (光線がグラバスター内部を通過する。) を仮定し、グラバスターと光源天体の間の距離が近い場合の像の歪みによる増光現象を調べた [22]。

まず Fig. 4.3 のようにグラバスターのある位置を原点とし、光源となる伴星が $x-y$ 面上で z 軸を中心に半径 $10r_g$ の円運動をしている場合を考える。その位置は δ^{*1} で表される。観測者の位置を十分遠方 (ここでは x 軸上の $1000r_g$ 離れた点) に置くと、伴星の見かけの位置は $y-z$ 面上の点として観測され、インパクトパラメータ α によって記述される。また、彼らは [21] に示されているグラバスターが安定となる条件を用いて、次の二つのモデルを仮定した。

モデル 1 光の不安定円軌道を持つ。 ($H = 0.4r_g^{-1}, R = 1.303r_g$)

モデル 2 光の不安定円軌道を持たない。 ($H = 0.1r_g^{-1}, R = 3.410r_g$)

*¹屈折角と同じ記号を用いているが別物である。

Fig. 4.4 はそれぞれのモデルにおける δ と α の関係である。ただし、 α は負の値も取るため、実際は $\alpha = 0$ を軸として反転させたものが $\alpha < 0$ の結果となる。ある α でピークが現れているが、これは不安定円軌道または天体表面を通過する軌道が要因である。また、ピークよりも内側は全てグラバスターの内部を通過しており、外側では全てシュバルツシルト時空のみを通過している。この計算結果からは、ある伴星の位置 δ に対応する複数の α が与えられることになり、一つの天体から複数の像が観測されることを示している。

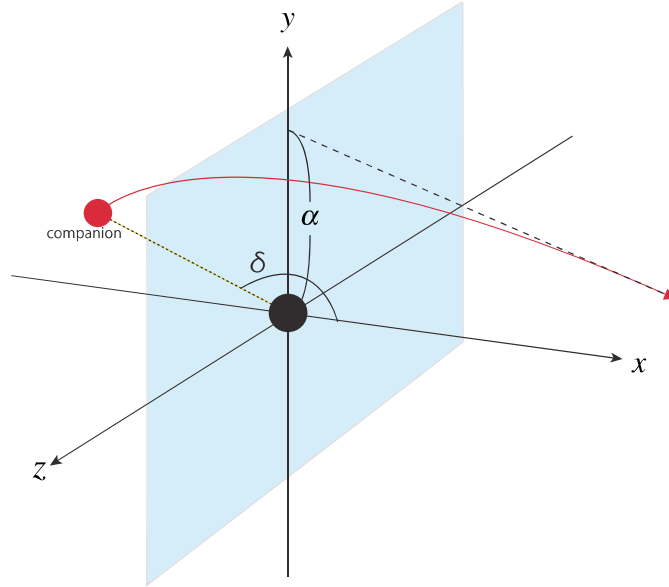


Fig. 4.3: 久保らの仮定した状況設定 ([22] より引用)

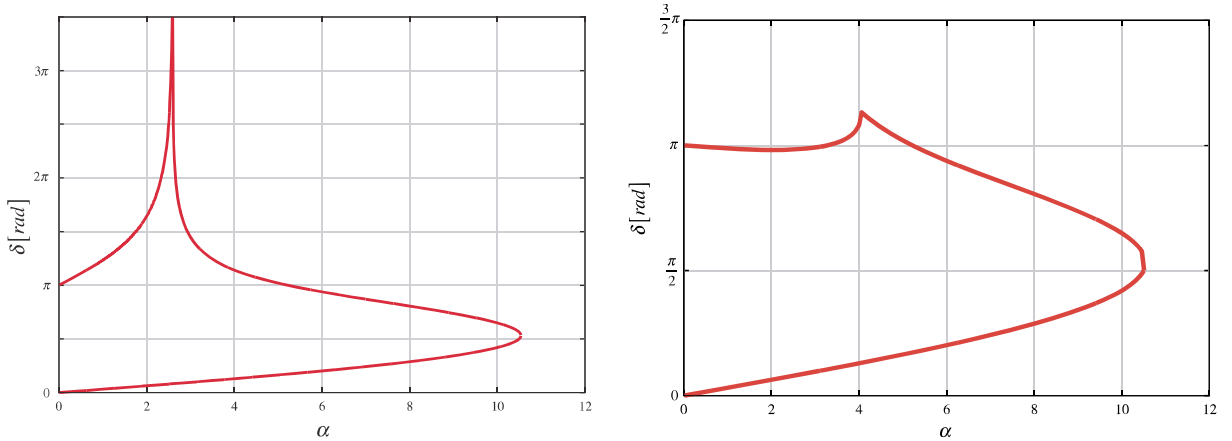


Fig. 4.4: δ と α の関係 (右: Model 1, 左: Model 2)。観測者の位置と伴星の位置をそれぞれ $1000r_g$, $10r_g$ としている。 ([22] より引用)

さらにこの結果を用いることで、観測者から見た伴星の像を描くことができる。伴星の大きさを $2r_g$ とした場合のモデル 1 とモデル 2 の結果をそれぞれ Fig. 4.5 と Fig. 4.6 に示す。黒い点線は実際の伴星の位置を表し、青色の領域はシュバルツシルト時空のみを通過する光線によってできる像、赤色はグラバスター内部を通る光線によってできる像をそれぞれ表している。重力レンズの影響で歪んだ像が複数個でき、伴星がグラバスターの後ろに回り込むにつれて大きなリング

(アインシュタインリング) とその内側に円形の像ができることがわかる。色分けしたことで理解されるようにシュバルツシルトブラックホールの場合にできる像は青い部分のみになるため、赤い部分はグラバスター特有の像である。観測される明るさは像の面積とみなすことができ、赤い像の分だけグラバスターの方が明るくなる。しかしモデル 1 のグラバスターでは、天体内部を通る光線によって作られる像は小さく、シュバルツシルトブラックホールの場合とあまり差が見られない。対してモデル 2 のグラバスターの場合では赤い色の像が大きく、シュバルツシルトブラックホールの場合よりもはっきりとした明るさの違いが期待される。Fig. 4.7 はモデル 2 のグラバスターとシュバルツシルトブラックホールの光度曲線を比較したグラフである。このモデルでの増光率はシュバルツシルトブラックホールのもので比べて約 2 倍となっており、連星を成した場合の重力レンズ効果では光度曲線からこれら二つの天体を判別することが可能である。

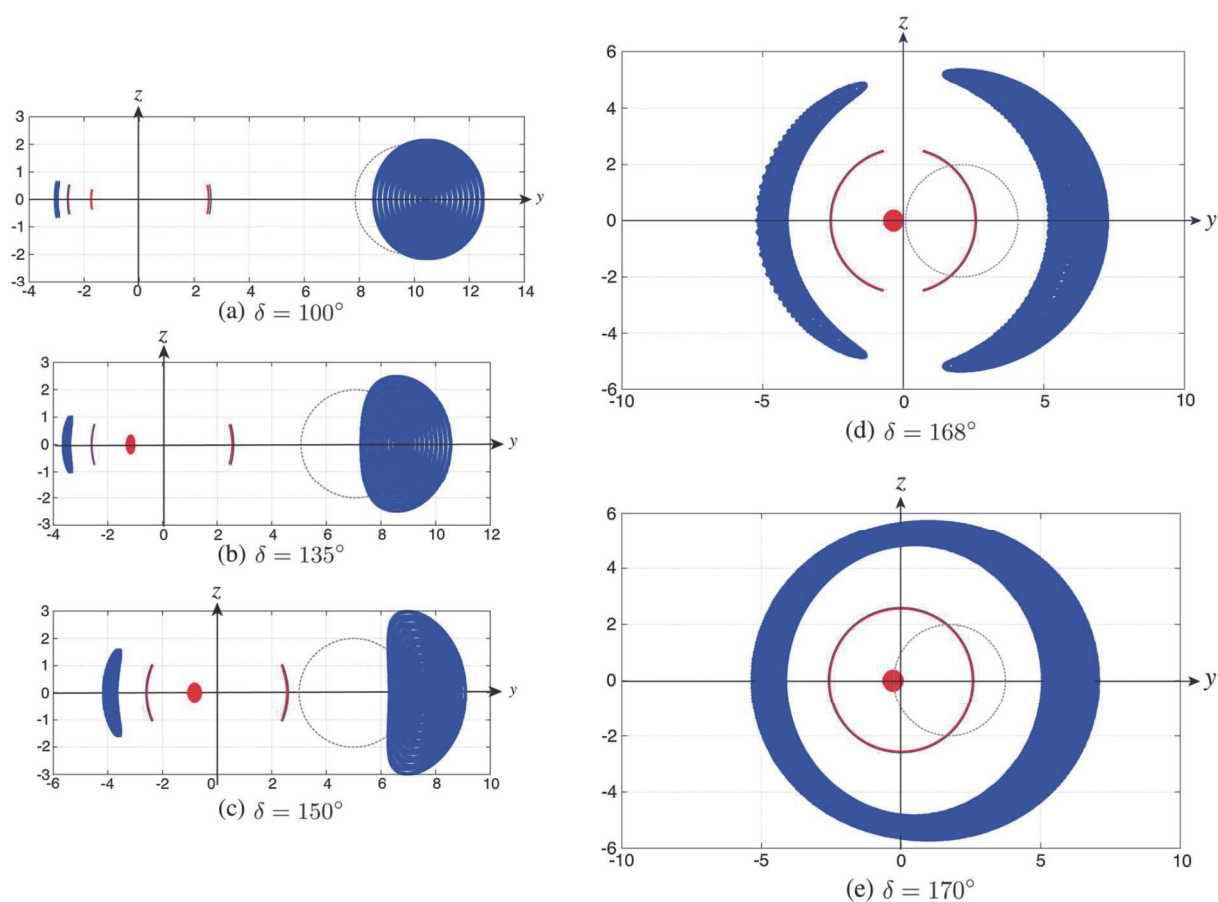


Fig. 4.5: モデル 1 における伴星の位置 (黒点線) と重力の効果で歪められた像 (青, 赤)。青い像はシュバルツシルト時空のみを通る光線の作る像であり、赤い像はグラバスターの中を通る光線の作る像である。伴星の半径は $2r_g$ としている。([22] より引用)

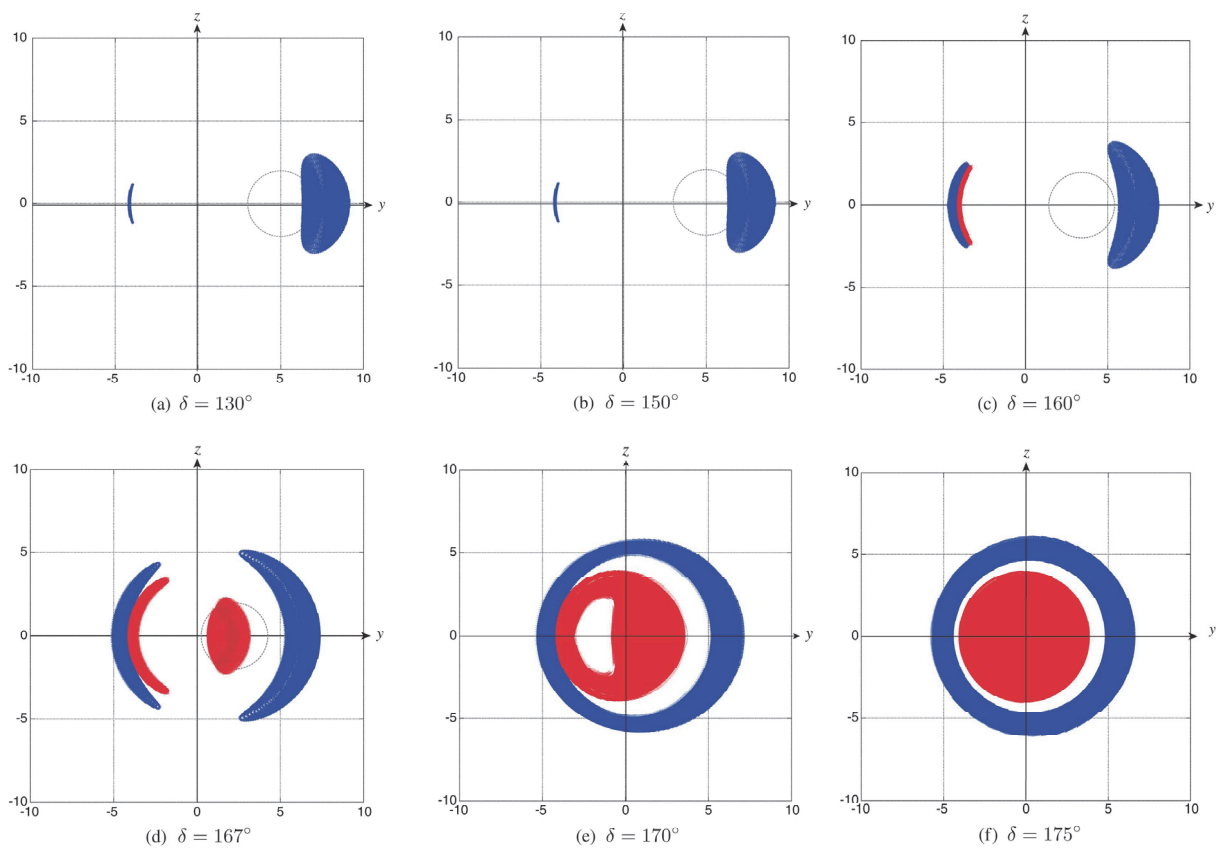


Fig. 4.6: モデル 2 における伴星の位置 (黒点線) と観測される像 (青, 赤)。([22] より引用)

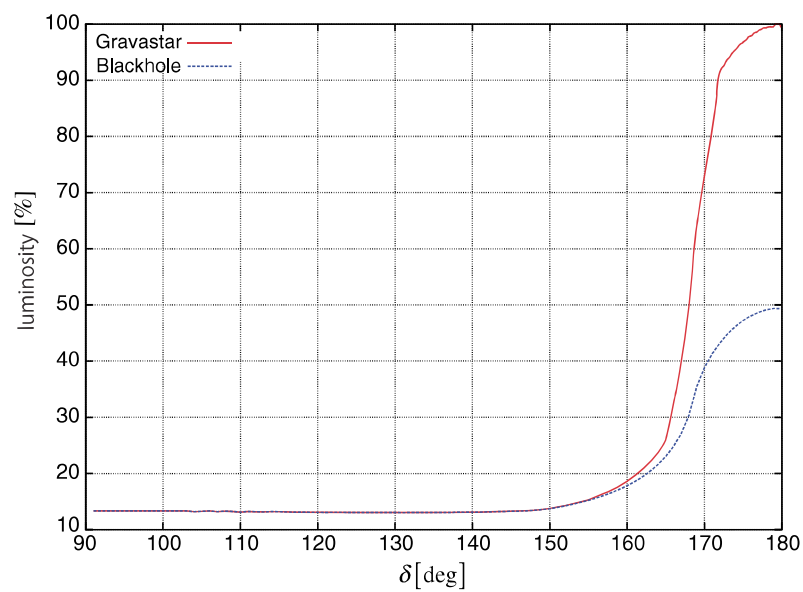


Fig. 4.7: モデル 2 のグラバスター (赤実線) とシュバルツシルトブラックホール (青点線) の光度曲線の比較 ([22] より引用)

4.1.3 グラバスターのシャドウ

グラバスターの外側はシュバルツシルト時空であるため、周囲の物質はグラバスターに向かって落下すると考えられる。そのため、坂井らが仮定したように背後に広がった光源を考えるよりも、グラバスター周囲に光源が分布していると考えの方が自然である。そこで、本研究ではグラバスター周囲の星間ガスが重力によってグラバスターに落下する場合を仮定し、そこからの放射が観測者にどう見えるかを議論する。落下する際に角運動量が保存されることから、シュバルツシルトブラックホールの場合と同様に降着円盤を作ることが予想されるため、本来であれば星間ガスの軸対称な運動を議論するべきであろう。しかしここでは計算の簡単化のために球対称な運動をするトイモデルで計算し、そこから軸対称な運動をする場合を考察しよう。

星間ガスの運動は次に示す流体力学の相対論的な基礎方程式を解くことで理解される。

$$(\rho + P)(\nabla_\nu u_\mu)u^\nu = -\partial_\mu P - u_\mu(\partial_\nu P)u^\nu \quad (4.2)$$

$$\nabla_\mu (n u^\mu) = 0 \quad (4.3)$$

一つ目はオイラー方程式と呼ばれる流体の運動方程式である。二つ目は連続の方程式で、粒子数の保存を表す。 ρ , P , u^μ , n はそれぞれエネルギー密度、圧力、四元ベクトルそして粒子数密度である。また、 ∇_μ は x^μ 方向の共変微分を表す。四元ベクトルに関しては、流体要素が時間的な測地線に従うはずなので、

$$u^\mu u_\mu = -1 \quad (4.4)$$

を満たしている。さらに簡単のために星間ガスがダストでできていると仮定しよう。するとダスト同士の相互作用は無視できるため $P = 0$ となり、さらにダストに乗った観測者の座標系ではダストの質量 m を用いて $\rho = mn$ とすることができる。また、球対称・定常な運動を仮定すると

$$u^\mu = (u^t(t), u^r(r), 0, 0), \quad n = n(r) \quad (4.5)$$

と書くことができる。定常でない場合はダストの運動の任意性が高く、モデルの自由度が大きくなるため、ここでは定常を仮定した^{*2}。この条件下で(4.2)~(4.4)を解くが、内側のド・ジッター時空に関しては定性的な推論によっても求められる。ド・ジッター時空は3.3.1でも紹介したが、宇宙の加速膨張を説明することのできる解である。つまり球殻の内側にあるダストは全て外側に向かって押し出されると考えられる。もしダストと球殻が相互作用すれば、ダストは球殻に押し付けられる形になり、相互作用しない場合でも外側がシュバルツシルト時空であるため外に出たダストがもう一度落下するだろう。どちらにしても最終的に球殻の部分にダストが集まり、内部は極端に密度の低い状態になると考えられる。次に外側のシュバルツシルト時空について考えよう。この時空での解は次のようになる。

$$u \equiv |u^r| \propto r^{-\frac{1}{2}}, \quad \rho \propto r^{-\frac{3}{2}} \quad (4.6)$$

u^t に関しては(4.4)から求められるため、ここでは割愛した。この解から、ダストは表面に近づくほど流れが早くなり、密度も高くなるということが理解される。二つの時空でのダストの振り舞いを総合すると、無限遠からやってきたダストは球殻の表面に降り積もり、表面での密度が大きくなってゆくと考えられる。そこで Fig. 4.8 のようなダストの密度分布を考えよう。天体の半径

^{*2}実際の天文現象の多くは定常ではないが、そのような現象は(周期的なものを除いて)時間が経つことで別の状態へ移る。そのため定常な現象は比較的観測される確率が高くなるだろう。

R の外側では (4.6) に従い、それを ρ_{Sch} とする。また、外から降り積もることによって高くなった表面の密度を ρ_{shell} とし、 $\rho_{\text{Sch}}(R)$ との比によって表面密度の高さを特徴付けることができる。さらに表面に降り積もったダストの厚さを $10^{-2}r_g$ とする。本来ならばデルタ関数などで与えるべきであるが、後の数値計算では無限に薄い厚さを取り扱うことはできないため、ここではこのように仮定した。

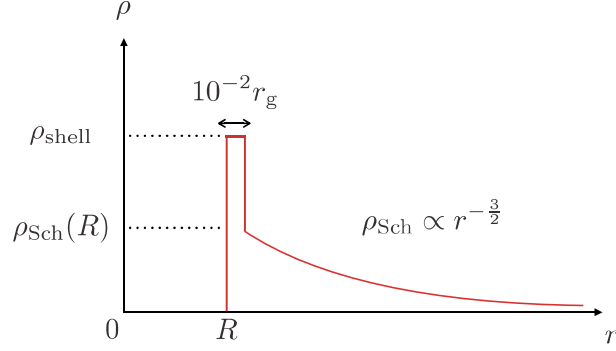


Fig. 4.8: グラバスター周辺のダストの密度分布

光源の分布が分かったため、次に光線の強度 I を議論する。相対論的な輸送方程式は次の式で与えられる [39]。

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\lambda} = \frac{\eta(\nu)}{\nu^2} - \nu\chi(\nu)\mathcal{J}, \quad \mathcal{J} \equiv \frac{I(\nu)}{\nu^3} \quad (4.7)$$

λ, ν はそれぞれアフィンパラメータと光線の周波数である。また、右辺一項目と二項目の係数 η, χ はそれぞれ放射係数と吸収係数であり、物質に依存する。簡単のためにここでは吸収を無視し、放射項は密度 ρ に比例していると仮定する。

$$\eta(\nu)d\lambda = -S(\nu)\rho u_\mu dx^\mu \quad (4.8)$$

$S(\nu)$ はスペクトルの形状を決める係数である。つまり不変強度 \mathcal{J} は測地線に沿った積分

$$\mathcal{J} = - \int \frac{S(\nu)}{\nu^2} \rho u_\mu dx^\mu \quad (4.9)$$

として計算できる。また、光源と共同な座標によって測られる振動数は $\nu = -u_\mu k^\mu$ で定義される。ダストの分布が球対称であれば点対称な像ができるため、一つのインパクトパラメータに対する光線の強度を求めればよい。よって強度分布は次のような手順で求められる。

- (i) 観測者の位置 r_o を決める。
- (ii) 見かけの位置 (インパクトパラメータ) $\alpha = L_z/E$ を与え、それを満たす測地線方程式 (2.12) を解く。
- (iii) 測地線に沿って光線の強度 (4.9) を求める。
- (iv) 見かけの位置を変えて (ii), (iii) を繰り返す。

では、実際に計算するためにグラバスターのモデルを設定しよう。天体の大きさ R と膨張パラメータ H については、坂井らの示した安定な条件を満たすものとして $H = 0.4r_g^{-1}$, $R \sim 1.3r_g$ を採用する。また、3.3.1 で紹介したように、グラバスターの球殻を構成する物質と光子の相互作用によって次の三つのモデルが考えられる。

モデル 1 球殻が光子と相互作用し、球殻自身が放射する。

モデル 2 球殻が光子と相互作用し、球殻自身は放射しない。

モデル 3 球殻が光子と相互作用しない。

坂井らの研究 [21] における議論では、グラバスターシャドウはモデルに大きく依存し、モデルによっては異なる結論を示すと述べている。しかし、Fig. 4.8 のような光源の分布を仮定すれば、全てのモデルにおいて球殻付近 (または球殻自身) からの放射によってブラックホールとは異なる光学的な像を示すことが予測される。また、モデル 1 はモデル 2 と定性的に同じものとして扱うことができ^{*3}、便宜上これらのモデルをまとめてモデル 2 と呼ぶ。そこで、モデル 2 とモデル 3 の相違点は自明でないため、以下ではこの二つのモデルに注目する。また、球殻上のダストの密度 ρ_{shell} に関して

$$\frac{\rho_{\text{shell}}}{\rho_{\text{Sch}}(R)} = 10, 100, 1000$$

の三つの場合を考えよう。 $r_o = 1000r_g$, $S(\nu) = \text{const.}$, $u_{\text{Sch}}(r_g) = 1$ として計算した結果を Fig. 4.9, Fig. 4.10 に示す。Fig. 4.9 は球殻上のダストの密度が低い場合 ($\rho_{\text{shell}}/\rho_{\text{Sch}}(R) = 10, 100$) の結果であり、点線は同様の条件で計算したシュバルツシルト時空の場合の結果である。今回のグラバスターの大きさでは光の不安定円軌道が存在し、その軌道上にあるダストからの放射が $\alpha \sim 2.6r_g$ の強度ピークに対応している。また、モデル依存性が大きいことが見て取れる。モデル 2 では $\alpha < 3\sqrt{3}r_g/2$ の範囲で大きな強度を示し、モデル 3 ではこの範囲で暗くなっている (シャドウができています)。モデル 2 では光線が球殻を通過できるため天体とは反対側にあるダストからの放射も同時に観測されるが、対してモデル 3 では光線が球殻で遮られ、天体とは反対側にあるダストからの放射は観測者に届かないためである。また、Fig. 4.10 は球殻上のダストの密度が高い場合 ($\rho_{\text{shell}}/\rho_{\text{Sch}}(R) = 1000$) の結果である。この場合はモデルによる定性的な違いは現れず、どちらも $\alpha < 3\sqrt{3}r_g/2$ の範囲で大きな強度を示しており、シュバルツシルトブラックホールのように観測される像に暗い部分が現れない。Fig. 4.10 の結果を用いて強度を色で表すことで、観測されるであろう像を Fig. 4.11 のように描くことができる。どの場合でも明るいリング状の像が現れているが、シュバルツシルトブラックホールでは中心部分が暗くなっているのに対し、グラバスターではどちらのモデルでも明るい球状の天体のようになっている。

本研究では無限遠からダストが落下して球殻に降り積もってゆくプロセスを仮定しているため、時間が経つことで ρ_{shell} の値は十分大きくなると考えられる。つまり、どのモデルでも最終的にはグラバスターの表面の光源の量が多くなり、リング状の像の内側が明るくなることで、見かけ上普通の天体のようになると予測される。しかし、通常の天体では光の不安定円軌道が存在せず明るいリング状の像が現れないため、グラバスターとの判別は容易であろう。また、ここではダストの運動を球対称として計算を進めたが、先述したように実際は降着円盤のような軸対称な運動をすると考えられる。もしグラバスターの周りに降着円盤が存在し、その円盤から物質が落ちてゆく場合、グラバスターの表面に物質が降り積もると考えられるため、球対称の場合と同様に明るい球状天体のように見えるだろう。

^{*3}本来ならばモデル 1 では球殻とダストのそれぞれの放射スペクトルの違いが現れるはずである。そこで、本研究ではこの二つが同様のスペクトルを示すと仮定する。

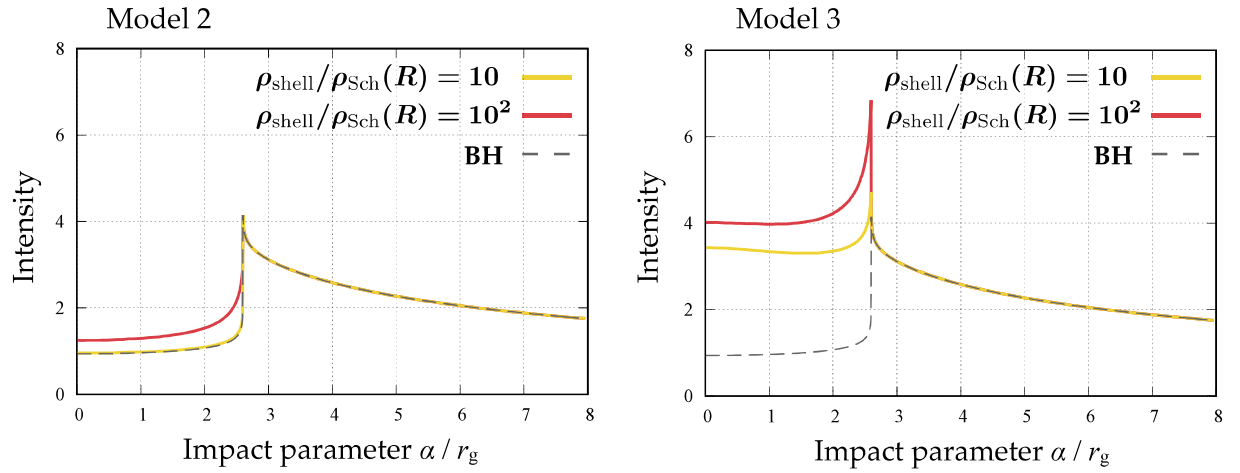


Fig. 4.9: 低密度 ($\rho_{\text{shell}}/\rho_{\text{Sch}}(R) = 10, 100$) の場合の結果。点線は同様の条件で計算したシュバルツシルト時空の場合の結果である。

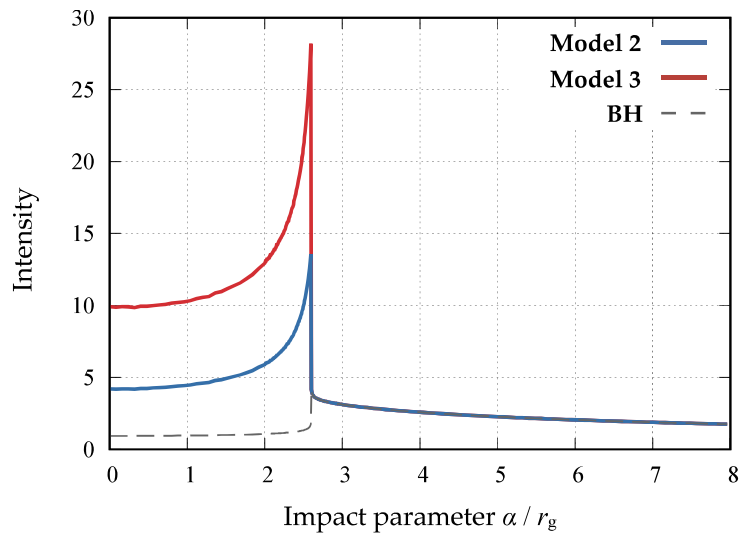


Fig. 4.10: 高密度 ($\rho_{\text{shell}}/\rho_{\text{Sch}}(R) = 1000$) の場合の結果。

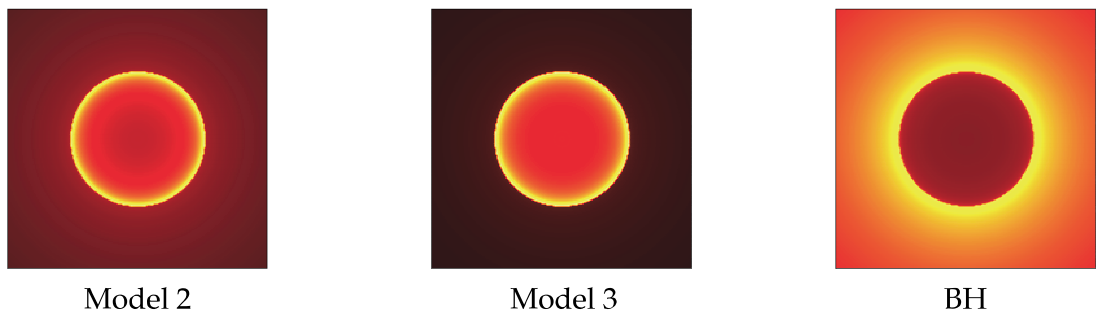


Fig. 4.11: 高密度 ($\rho_{\text{shell}}/\rho_{\text{Sch}}(R) = 1000$) の場合の結果を用いて描かれた像。

4.2 エリスワームホール

4.2.1 阿部によるエリスワームホールのマイクロレンズに関する先行研究

次に、エリスワームホールの重力マイクロレンズ効果に関する阿部の研究 [40] を紹介しよう。彼はシュバルツシルト時空で行われていたものと同様の手法 [41, 42, 43] を用いている。この手法では弱重力近似での光の屈折角が必要となるが、エリスワームホールでの一般的な屈折角は Dey と Sen によって [44] で求められている。

$$\delta(R_c) = \pi \left\{ \sqrt{\frac{2(R_c^2 + a^2)}{2R_c^2 + a^2}} - 1 \right\} \quad (4.10)$$

光線がワームホールから十分離れている場所を通過する場合は $a/R_c \ll 1$ と近似することができ、

$$\delta(R_c) = \frac{\pi}{4} \frac{a^2}{R_c^2} + O\left(\frac{a^4}{R_c^4}\right) \quad (4.11)$$

と求められる。興味深いことにシュバルツシルト時空の場合が R_c に反比例していたのに対し、 R_c^2 に反比例している。観測者を中心としたレンズ天体と背景天体の間の角度 β は

$$\beta = \frac{b}{D_L} \pm \frac{D_{LS}}{D_S} \delta(R_c) \quad (4.12)$$

と与えられる。ここで、 D_L, D_{LS}, D_S はそれぞれ観測者とレンズ天体の距離、レンズ天体と背景天体の距離そして観測者と背景天体の距離である。さらに、 b は $b = \sqrt{R_c^2 + a^2}$ で定義されるインパクトパラメータである。二項目の符号が \pm となっているのは、像が二つできることを意味している。エリスワームホール時空における弱重力近似の場合、インパクトパラメータが $b \sim R_c$ ($R_c/a \gg 1$) となる。また、背景天体とレンズ天体が同一直線上 ($\beta = 0$) にある場合アインシュタインリングができ、その半径は

$$R_E = \left(\frac{\pi D_L D_{LS}}{4 D_S} a^2 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.13)$$

と与えられる。ここで $\theta = R_c/D_L, \theta_E = R_E/D_L$ とすることで規格化した量 $\hat{\beta} = \beta/\theta_E, \hat{\theta} = \theta/\theta_E$ を定義でき、(4.12) を単純な形式

$$\hat{\theta}^3 - \hat{\beta} \hat{\theta}^2 \pm 1 = 0 \quad (+ : \hat{\theta} < 0, - : \hat{\theta} > 0) \quad (4.14)$$

に書き換えることができる。この方程式の物理的な実数解は

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\hat{\beta}}{3} + U_{1+} + U_{1-} \quad (\hat{\theta} > 0) \quad (4.15)$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\hat{\beta}}{3} + U_{2+} + U_{2-} \quad \left(\hat{\theta} < 0, \hat{\beta} < \left(\frac{27}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 1.89 \right) \quad (4.16)$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\hat{\beta}}{3} + e^{i\frac{2}{3}\pi} U_{2+} + U_{2-} \quad \left(\hat{\theta} < 0, \hat{\beta} > \left(\frac{27}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \quad (4.17)$$

となる。ただし

$$U_{1\pm} = \left(\frac{\hat{\beta}^3}{27} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{2\hat{\beta}^3}{27} \right)^2 - \frac{\hat{\beta}^6}{27^2}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.18)$$

$$U_{2\pm} = e^{i\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{\hat{\beta}^3}{27} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{2\hat{\beta}^3}{27} \right)^2 - \frac{\hat{\beta}^6}{27^2}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.19)$$

である。 $\hat{\theta}_1$ はアインシュタインリングよりも外側にできる像であり、 $\hat{\theta}_2$ は内側にできる像を表す。さらに背景天体の運動は

$$\hat{\beta}(t) = \sqrt{\hat{\beta}_0^2 + \frac{(t-t_0)^2}{t_E^2}}, \quad t_E = \frac{R_E}{v_T} \quad (4.20)$$

で与えられる。ただし $t = t_0$ の時に背景天体はレンズ天体に最接近し、その時の $\hat{\beta}$ を $\hat{\beta}_0$ としている。さらに v_T は天球面上での背景天体の速度である。このような設定の元での背景天体の軌跡とレンズ天体の位置関係を Fig. 4.12(左) に示す。右図は (4.15)~(4.17) を用いて計算された像である。

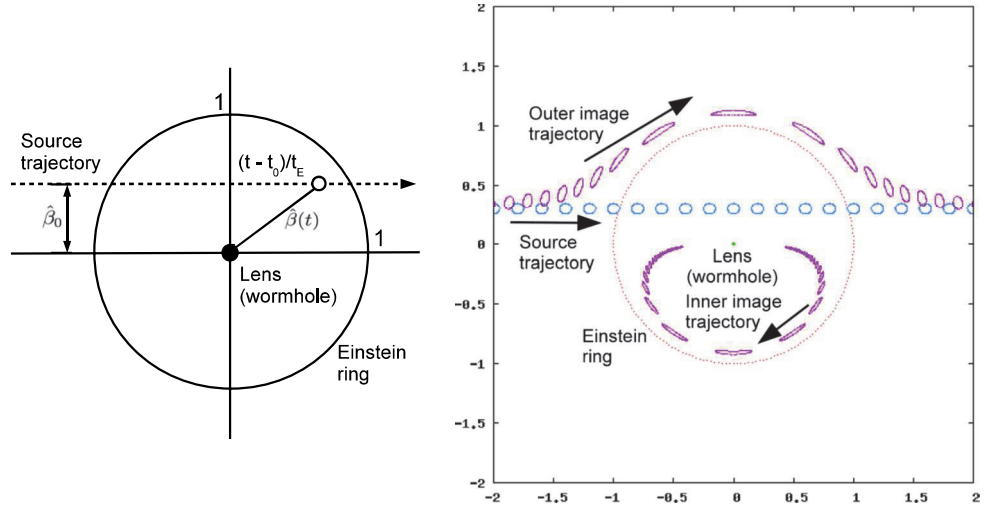


Fig. 4.12: 左: 背景天体の軌跡とレンズ天体の位置関係。右: 観測される歪んだ像 (紫) と背景天体の軌跡 (青)([40] より引用)

このようにしてできた像の増幅率は次の式によって求められる [41]。

$$A = A_1 + A_2 = \left| \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\beta}} \frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{\beta}} \right| + \left| \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\beta}} \frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{\beta}} \right| \quad (4.21)$$

求められた光度曲線を Fig. 4.13 に示す。右上の値は $\hat{\beta}_0$ の値である。緑色の細い線はシュバルツシルト時空での結果で、赤い太線はエリスワームホール時空での結果である。特徴的なのは、シュバルツシルト時空によるレンズ効果では増光のみしか現れないのに対して、増光の極大の前後で減光が起こることである。

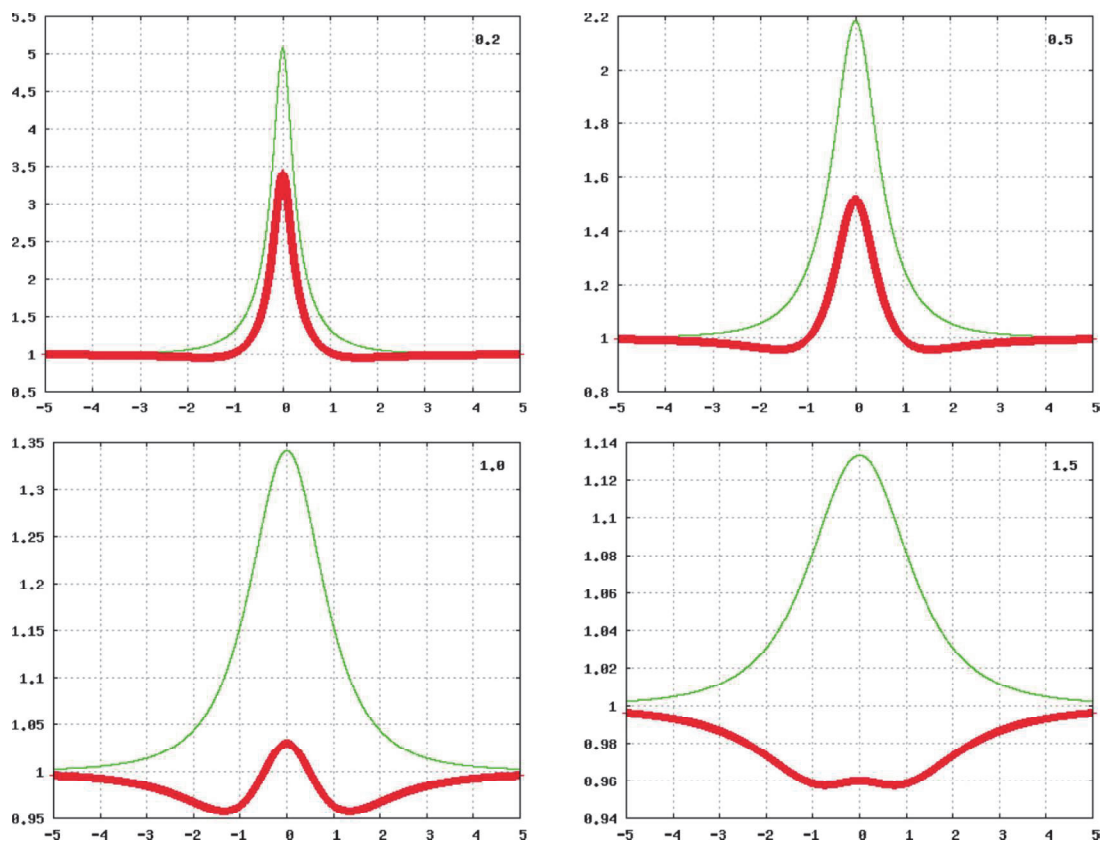


Fig. 4.13: エリスワームホール時空 (赤太線) とシュバルツシルト時空 (緑細線) のマイクロレンズによる光度曲線。各グラフ上の右上の数値は $\hat{\beta}_0$ の値である。 ([40] より引用)

4.2.2 エリスワームホールのシャドウ

本研究では、エリスワームホールによるシャドウ現象を議論する。軸対称な回転ワームホール解は Teo によって [45] で示されており、その解を用いて Nedkova らはシャドウの形状の回転による変化を数値的に計算している [46]。

しかし、彼らの研究では輪郭のみしか分からないため、本研究では像の強度分布を放射輸送方程式 (4.7) を数値的に解いて求める。そこで、坂井との共同研究 [47]^{*4}では流体方程式から光源の分布を調べ、その状況下での観測される像を調べた。エリスワームホールは漸近的に無質量な天体であるため、周囲の星間物質は降着円盤のような対称性の高い分布を取らない。しかし、相対論的な流体方程式を一般的に解くことは難しいため、本研究ではトイモデルとして、球対称・定常に落下するダストを仮定する。この仮定の下で (4.2) 及び (4.3) は

$$\frac{n'}{n} + \frac{u'}{u} + \frac{2r}{r^2 + a^2} = 0 \quad (4.22)$$

$$uu' = 0 \quad (4.23)$$

のように書ける。ただしプライム記号は r での微分を示す。これらの解は積分によって簡単に求められる。

$$u = \text{const.}, \quad \dot{M} \equiv 4\pi\rho u(r^2 + a^2) = \text{const.} \quad (4.24)$$

ここで \dot{M} は質量降着率である。これらの解は次の二つの状態が存在することを示している。

- $u = 0$ で ρ は r の任意関数: 密度は任意の分布をとり、静止している。
- $u \neq 0$ で $\rho \propto (r^2 + a^2)^{-1}$: 無限遠からの流速を保存し、喉で最も密度が高くなる。

しかし、一つ目の結果は静止し続けなければやがて二つ目の結果になってしまうため、物理的ではないことを [27] で示した。 $r_0 = 300a$, $S(\nu) = \text{const.}$, $u = 10^{-7}$ として計算した結果を Fig. 4.14(左) に示す。ブラックホールの際と同様に不安定円軌道の存在によってピークが現れる。しかしピークより内側の強度は外側の強度に比べて大きくなっている。これはあちらの世界からの放射の分だけ明るくなっていることが要因となっている。また、Fig. 4.14(右) は左のグラフを元に強度を色で表現した二次元イメージである。

次に光源が軸対称で静的に運動している場合を [27] で示した。この場合は四元運動量と数密度をそれぞれ $u^\mu = (u^t(r, \theta), u^r(r, \theta), u^\theta(r, \theta), u^\varphi(r, \theta))$, $n = n(r, \theta)$ と置くことができる。すると方程式 (4.2), (4.3) は次のように書き下される。

$$\frac{\partial}{\partial r} [n u^r (r^2 + a^2) \sin \theta] + \frac{\partial}{\partial \theta} [n u^\theta (r^2 + a^2) \sin \theta] = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial u^t}{\partial r} u^r + \frac{\partial u^t}{\partial \theta} u^\theta = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial u^r}{\partial r} u^r + \frac{\partial u^r}{\partial \theta} u^\theta - r(u^\theta)^2 - r \sin^2 \theta (u^\varphi)^2 = 0 \quad (4.27)$$

$$(r^2 + a^2) \frac{\partial u^\theta}{\partial r} u^r + (r^2 + a^2) \frac{\partial u^\theta}{\partial \theta} u^\theta + 2r u^\theta u^r - (r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta (u^\varphi)^2 = 0 \quad (4.28)$$

$$(r^2 + a^2) \sin^2 \theta \frac{\partial u^\varphi}{\partial r} u^r + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \frac{\partial u^\varphi}{\partial \theta} u^\theta + 2r \sin^2 \theta u^\varphi u^r + 2(r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta u^\varphi u^\theta = 0 \quad (4.29)$$

^{*4}この論文は博士前期課程の2年次に投稿したものである。

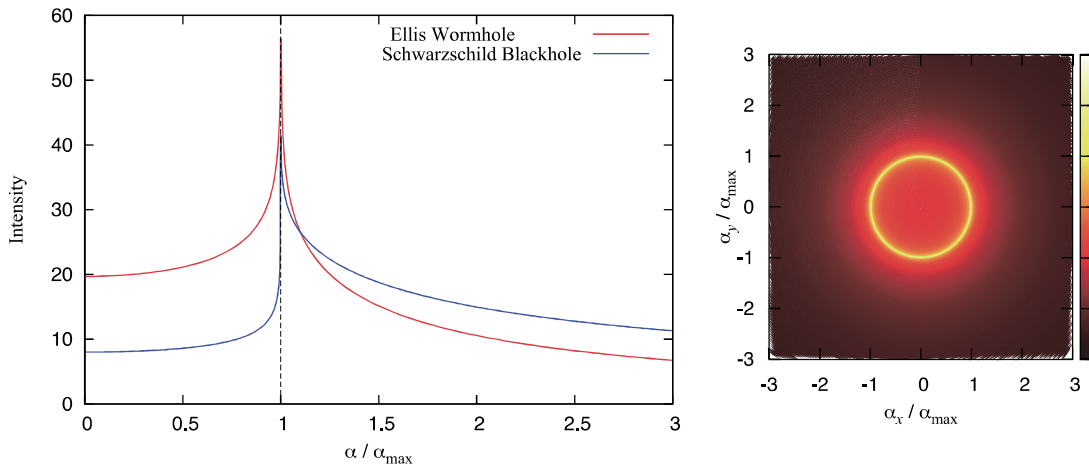


Fig. 4.14: 左: 見かけの位置 α と強度 I の関係。右: ワームホールシャドウ ([47] より引用)

これらの式は厳密に解くことが難しいため、ダストの角運動量が小さい場合を仮定して、次のように球対称解 (4.24) からの摂動を考える。

$$u^t = u_0^t + u_1^t(r, \theta) \quad (4.30)$$

$$u^r = u_0^r + u_1^r(r, \theta) \quad (4.31)$$

$$u^\theta = u_1^\theta(r, \theta) \quad (4.32)$$

$$u^\varphi = u_1^\varphi(r, \theta) \quad (4.33)$$

$$n = n_a \frac{a^2}{r^2 + a^2} + n_1(r, \theta) \quad (4.34)$$

u_0^t, u_0^r, n_a はそれぞれ定数で、1 の添え字がついたものは全て摂動量である。(4.30)~(4.34) を (4.25)~(4.29) に代入して解くことで

$$u_1^t = \frac{u_0^r}{u_0^t} f^r(\theta) \quad (4.35)$$

$$u_1^r = f^r(\theta) \quad (4.36)$$

$$u_1^\theta = \frac{a^2}{r^2 + a^2} f^\theta(\theta) \quad (4.37)$$

$$u_1^\varphi = \frac{a^2}{r^2 + a^2} f^\varphi(\theta) \quad (4.38)$$

$$n_1 = \frac{n_a}{u_0^r} \frac{a^2}{r^2 + a^2} \left[a \cdot \tan^{-1} \left(\frac{r}{a} \right) + C(\theta) \right] N(\theta), \quad N(\theta) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[f^\theta(\theta) \sin \theta \right] \quad (4.39)$$

が得られる。ただし、 $f^r, f^\theta, f^\varphi, C$ は θ の関数であり、軸対称の運動を仮定した場合に残る自由度である。ここでさらに N について考察する。密度が極 ($\theta = 0, \pi$) で正則であることを仮定すると N は次のような条件を満たさなければならない。

$$\left. \frac{dN}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{dN}{d\theta} \right|_{\theta=\pi} = 0 \quad (4.40)$$

これを満たすような f^θ の一つに

$$f^\theta(\theta) = f_0^\theta \sin(k\theta), \quad \{k \in \mathbb{Z}\} \quad (4.41)$$

を選ぶことができる^{*5}。 f_0^θ は無次元の定数である。すると N は

$$N(\theta) = -f_0^\theta [k \cos(k\theta) + \sin(k\theta) \cot \theta] \quad (4.42)$$

と書くことができる^{*6}。もし光源の分布が $\theta = \pi/2$ の面で対称であれば、 k の値は偶数と限定できる。Fig. 4.15 は $x-z$ 面上の密度 $n(r, \theta)/n_a$ を色によって表現したものであり、 $u_0^r = -0.1$ としている。(a.1), (a.2), (b.1), (b.2) はそれぞれ $(f_0^\theta, k) = (-0.02, 2), (0.02, 2), (-0.02, 4), (0.02, 4)$ の場合の結果である。 (f_0^θ, k) の組み合わせによって密度の高い部分の形状が変化していることが見て取れる^{*7}。また、ダストの密度分布に球対称を仮定した場合には r の正負に対して解が対称であったが、軸対称を仮定すると摂動部分が非対称となっている。

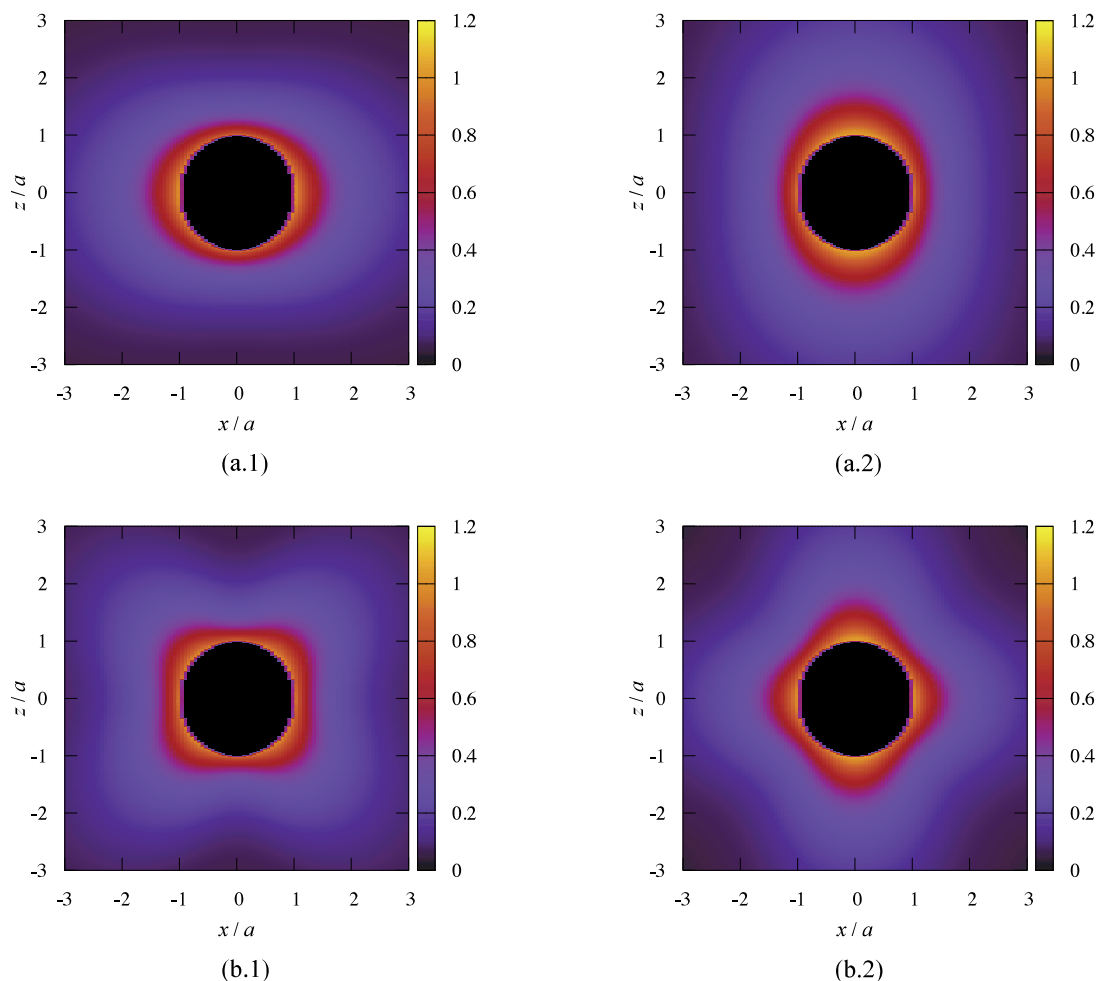


Fig. 4.15: $y = 0$ の面における密度分布 $n(r, \theta)/n_a$ を色で表現した二次元グラフ。Fig. 3.7 と同じ座標系を用いているため、 $x^2 + z^2 < a^2$ の領域は物理的な空間ではない。(a.1), (a.2), (b.1), (b.2) はそれぞれ $(f_0^\theta, k) = (-0.02, 2), (0.02, 2), (-0.02, 4), (0.02, 4)$ の場合の結果である。([27] より引用)

^{*5}線型性から $f^\theta(\theta) = \sum_k f_{0(k)}^\theta \sin(k\theta)$ と本来はするべきかもしれないが、密度分布に関する θ 方向の自由度を k によって議論するために (4.41) としている。

^{*6}ただし、 f^r のような残りの θ 方向の自由度に関しても同様に正則性を課すべきであるが、強度分布を計算するには密度分布が最も大きな役割を持つため、本研究ではこれらの量を定数として考える。

^{*7}実際は $C(\theta)$ の関数型や f^θ の解の線型性により、複雑な模様を描くはずである。

さらに注意しなければならないのが、この場合の観測イメージは一般的に点対称とならない。また、観測者の位置と運動の対称軸との関係も考慮に入れなければならない。光源の運動の対称軸を z 軸に取り、観測者の位置 \vec{r}_0 とのなす角を i とする。すると観測イメージは重力源の位置 (原点) を通る \vec{r}_0 に垂直な面上 A に投影される。A 上のベクトルを $\vec{\alpha} = (\alpha_y, \alpha_z)$ とすると、 α_y, α_z はインパクトパラメータとしてそれぞれ扱うことができる。観測者の位置が十分離れている場合

$$\alpha_y = -r_0^2 \sin i \frac{k^\varphi(\vec{r}_0)}{k^r(\vec{r}_0)}, \quad \alpha_z = r_0^2 \frac{k^\theta(\vec{r}_0)}{k^r(\vec{r}_0)} \quad (4.43)$$

となる。これによって球対称の場合と同様の手順で観測イメージを得ることができる。Fig. 4.16 は $u_0^r = -0.1, f^r = 0, f^\varphi = 0.02, C(\theta) = 0, i = 90^\circ$ とした場合の計算結果である。(a.1), (a.2), (b.1), (b.2) はそれぞれ $(f_0^\theta, k) = (-0.02, 2), (0.02, 2), (-0.02, 4), (0.02, 4)$ の場合であり、影の部分に複雑な模様が現れる。また $i = 45^\circ$ の場合の結果を Fig. 4.17 に示す。

球対称モデルで内側が明るくなることや、軸対称モデルで複雑な模様が現れることは、どちらもあちらの世界の光源からの放射によるものである。ブラックホールの地平面に落下した物体からの放射は観測者に届くことはないため、この結果はワームホール特有の現象を示したものだと言える。今回は簡単のために光源の運動に球対称や軸対称を仮定したが、ワームホールに星間ガスの塊が落下するような場合でも同様に、落下した後の放射も観測できる事が予測される。

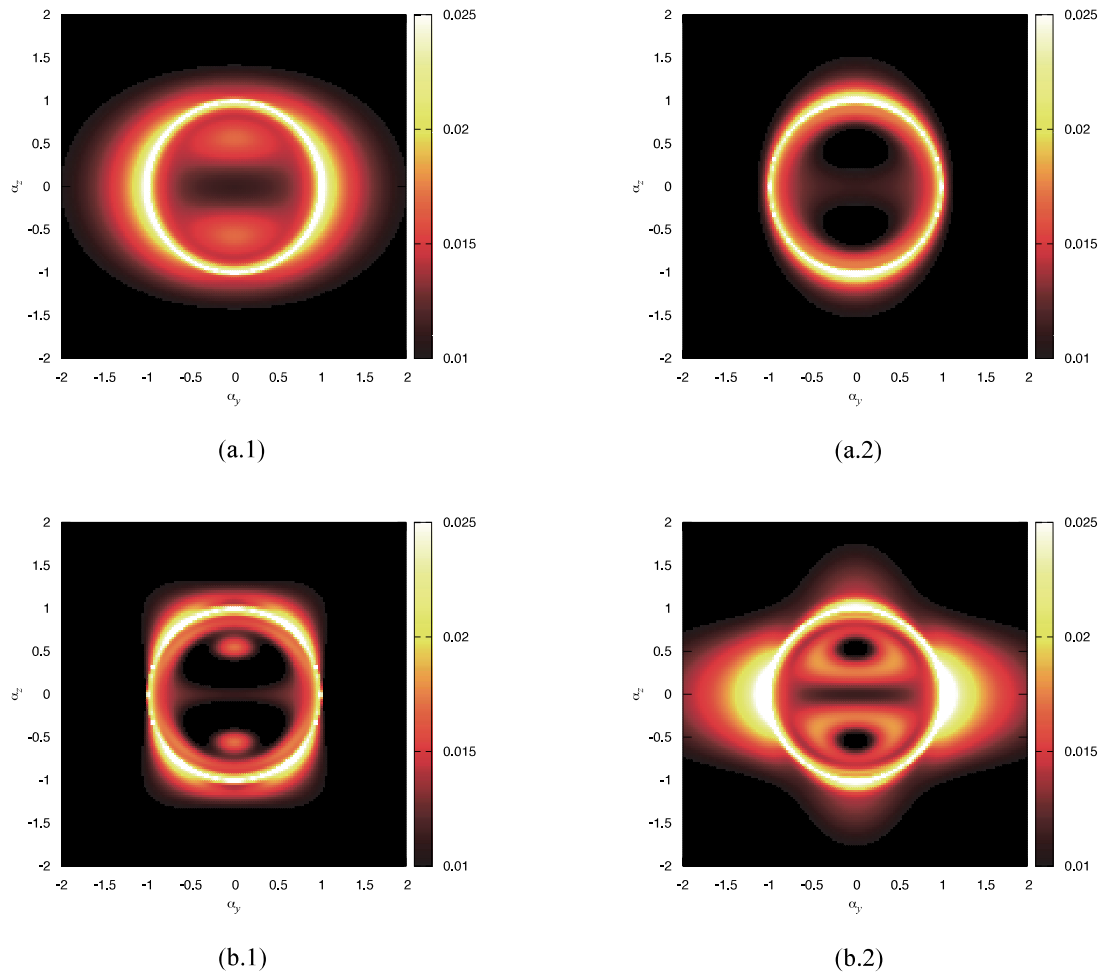


Fig. 4.16: $i = 90^\circ$ の時のワームホールシャドウ。(a.1), (a.2), (b.1), (b.2) はそれぞれ $(f_0^\theta, k) = (-0.02, 2), (0.02, 2), (-0.02, 4), (0.02, 4)$ の場合の結果である。([27] より引用)

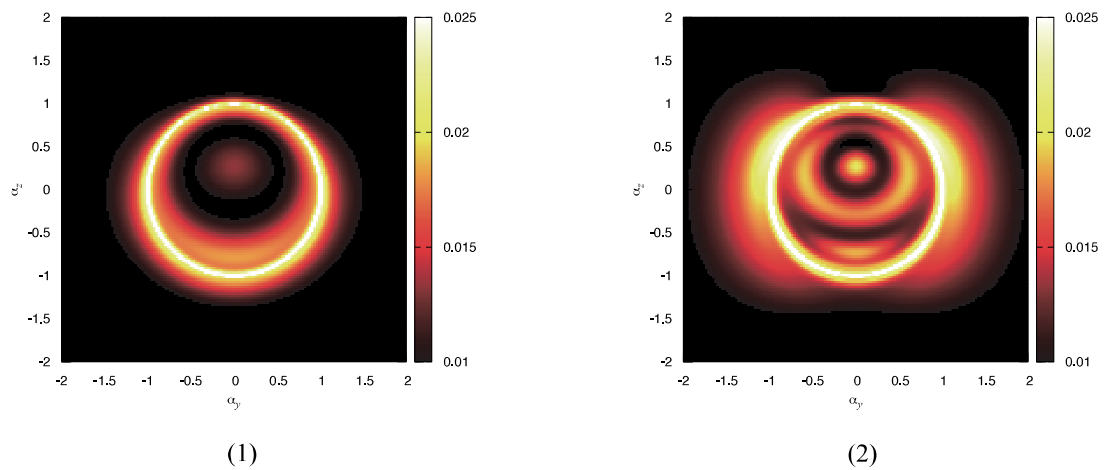


Fig. 4.17: $i = 45^\circ$ の時のワームホールシャドウ。(1), (2) はそれぞれ $(f_0^\theta, k) = (-0.02, 2), (-0.02, 4)$ の場合の結果である。([27] より引用)

4.3 ブレーンワールドブラックホール

4.3.1 Majumdar らによるブレーンワールドブラックホール周辺の光の湾曲に関する先行研究

弱い重力下でのマイクロレンズはエリスワームホールで用いたものと同様の手法によって議論できる。そのためには弱重力下での光の屈折角が必要である。ブレーンワールドブラックホール周囲の光線の屈折角は Majumdar と Mukherjee によって [48] で求められているため、ここではそれを紹介しよう。

まず、線素が (3.22), (3.24) のように書ける時、2.1.2 で行った手順を用いることで光の測地線方程式 (2.12) より

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u + r_\beta^2 u^3 \quad (4.44)$$

という関係式が得られる。ここで、 $u \equiv 1/r$ という変数変換を行なっている。この微分方程式に関して、 $r_\beta/r = r_\beta u \ll 1$ と考えて逐次的に解くことで

$$u = u_0 \cos(\varphi) + r_\beta^2 u_0^3 \left[\frac{3}{4} \varphi \sin \varphi - \frac{1}{16} \cos(3\varphi) \right] \quad (4.45)$$

という近似解が得られる。ただし、 $u_0 = 1/R_c$ である。これは光が最接近した後の光線軌道を表す式である。十分遠方 ($r \rightarrow \infty$) の観測者に光が届くと考えると、最接近した後の光線の微小な屈折角 δ' は $\varphi = \pi/2 + \delta'$ と $u = 0$ を (4.45) に代入する事で求められる。現在考えている屈折角はこの値を二倍すればよく、結果として

$$\delta(R_c) = \frac{3\pi}{4} r_\beta^2 u_0^2 = \frac{4\pi r_\beta^2}{3R_c^2} \quad (4.46)$$

が得られる。この解の注目すべき点は、エリスワームホール時空と同様に R_c^2 に反比例している点である。つまり阿部が用いた方法と同様の手法で光度曲線を求めると、減光が現れる事が明らかとなる。

4.3.2 ブレーンワールドブラックホールのマイクロレンズとシャドウ

上述の議論では、弱重力下の光の屈折によって光度曲線に減光が現れることを示した。しかし、強重力下で同様の現象が起こることは自明ではない。ブレーンワールドブラックホールにおける強重力下でのマイクロレンズ効果による増光率と観測可能性については [49, 50] で議論されており、同質量のシュバルツシルトブラックホールと比べて距離のオーダーが大きくなることから、異なる観測結果が予測されると述べているが、彼らは減光については述べていなかった。そこで南里らとの共同研究では、強重力下の光の屈折によっても減光が現れるのかを数値計算によって確かめた。その手法および結果を紹介しよう。まずブレーンワールドブラックホールを原点に置き、伴星が $x-y$ 面上で z 軸を中心に半径 $10r_g$ の円運動をしているとする。また、伴星の位置は x 軸の正の方向を 0 とした角度 φ で与えられる。観測者の位置を十分遠方 (ここでは x 軸上の $300r_g$) に置くと伴星の見かけの位置は $y-z$ 平面上の点として観測され、インパクトパラメータ $\vec{\alpha} = (\alpha_y, \alpha_z)$ で記述される。あらゆるインパクトパラメータを初期条件として観測者の位置から伴星まで逆に測地線を解くことで、Fig. 4.18 のように観測される歪んだ像を得ることができる。

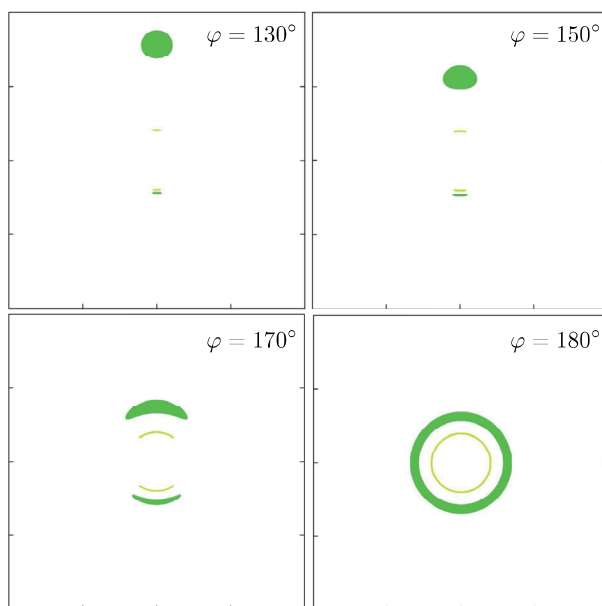


Fig. 4.18: ブレーンワールドブラックホールの重力によって歪んだ伴星の像。

また、像の面積は観測される光度を表すため、伴星の位置 φ と面積の関係を示したグラフは光度曲線と対応する。Fig. 4.19 はシュバルツシルトブラックホール、ブレーンワールドブラックホールそしてエリスワームホールのそれぞれの光度曲線を示したグラフで、縦軸は像の面積を $\varphi = 110^\circ$ の時の面積で規格化することで求めた増光率を表している。右図の灰色の破線は重力の影響を受けていない場合の値であり、この線より上であれば増光を、下であれば減光を表している。シュバルツシルトブラックホールの場合では増光のみを示しているが、ブレーンワールドブラックホールとエリスワームホールでは増光の前には必ず減光しているのが確認できる。

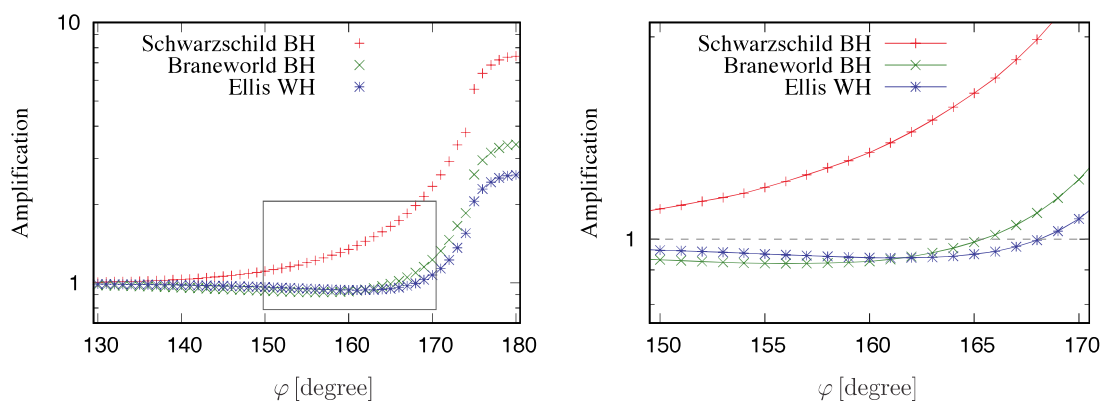


Fig. 4.19: 光度曲線 (緑: ブレーンワールドブラックホール、赤: シュバルツシルトブラックホール、青: エリスワームホール)。右図は $150^\circ \sim 170^\circ$ の範囲を拡大したもので、破線より上は増光、下は減光をそれぞれ表す。

上の議論により、マイクロレンズによる光度曲線からはブレーンワールドブラックホールとエリスワームホールは判別できない事がわかった。そこで、これらがシャドウ現象を用いて判別が可能なのかどうかを議論する。回転するブレーンワールドブラックホールや、それに宇宙項を加えたものに関するシャドウは [51, 52] などで議論されている。しかしそれらの研究も回転の影響によ

るシャドウの輪郭の変化を調べており、強度分布に関しては述べていない。よって南里らとの共同研究では、グラバスターやエリスワームホールと同様の手法で、球対称・定常なダストによる放射の強度分布を得た。

無質量なブレーンワールドブラックホール時空 ((3.22) かつ (3.24)) において球対称・定常なダストを仮定すると、流体方程式 (4.2) と (4.3) から次の解が得られる。

$$u \propto r^{-1}, \quad \rho \propto r^{-1} \tag{4.47}$$

この解をシュバルツシルト時空の場合の解 (4.6) と比較した図が Fig. 4.20 である。動径方向の流速 u はシュバルツシルト時空の場合に比べて変化が急になっており、地平面付近で大きな加速をすることを表している。また、エネルギー密度の分布に関してはシュバルツシルト時空に比べて緩やかであるため、観測される強度分布では明るい領域が広がることが予測される。

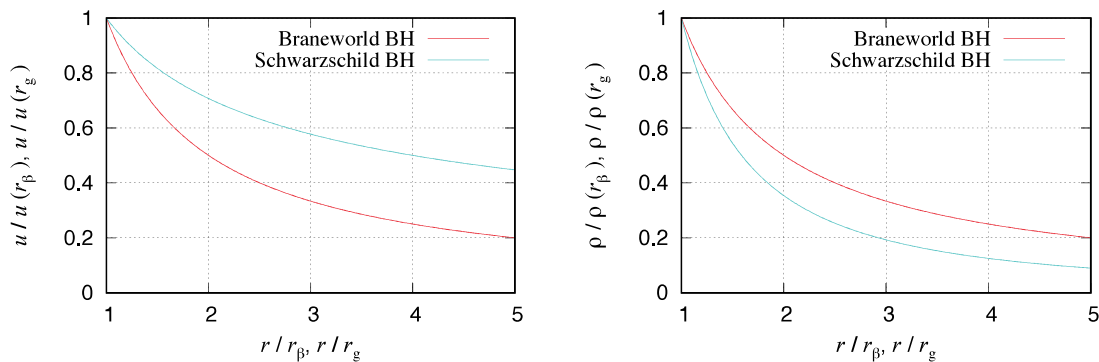


Fig. 4.20: 動径方向の流速 u とエネルギー密度 ρ 。縦軸は地平面での値で規格化している。

これらの解を用いてインパクトパラメータ α と光線強度 I の関係を計算した結果が Fig. 4.21(左) である。ただし、観測者の位置を $r_o = 500r_\beta$ としている。シュバルツシルトブラックホールの場合と比べ、シャドウの部分と外側の明るい部分との強度の比が小さくなっているが、定性的には同じ振る舞いを示している。つまり、この強度分布のみではこの二つを区別することが難しいことを意味している。また、エリスワームホールの場合はピークの内側の領域が外側よりも明るくなるため、エリスワームホールとブレーンワールドブラックホールを定性的に判別する事が可能であると言える。

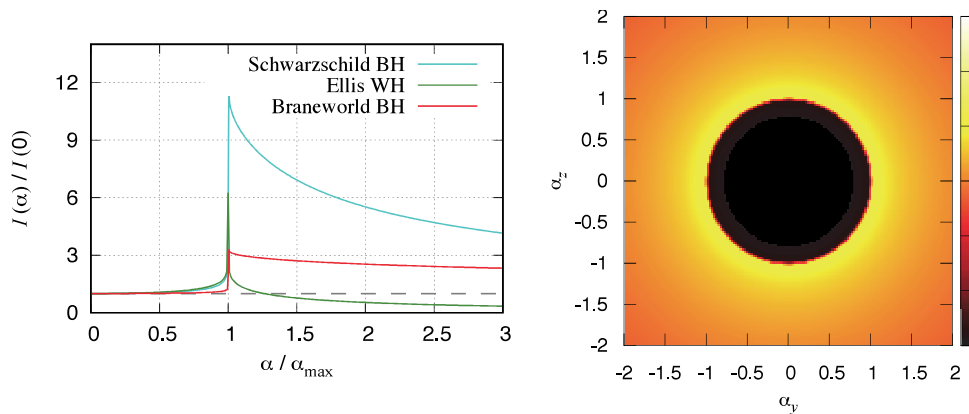


Fig. 4.21: 左: 見かけの位置 α と強度 I の関係。右: ブレーンワールドブラックホールシャドウ

第5章 まとめ

本研究では、シュバルツシルトブラックホールと似た観測的帰結を示す擬似天体として、グラバスター、エリスワームホールそしてブレーンワールドブラックホールの三つを考え、それらのマイクロレンズ効果やシャドウ現象を理論的に議論した。以下では前章で述べた研究結果を天体モデルごとにまとめ、シュバルツシルトブラックホールとの定性的な考察を行う。

5.1 グラバスターのシャドウ

本研究では、球対称摂動に対して安定で光の不安定円軌道を持つようなグラバスターモデルを仮定した。この天体の周囲で光を放ちながら落下するダストを考え、相対論的な流体力学方程式の球対称・定常解を得た。その結果、グラバスターの外側ではシュバルツシルト時空の重力によって落下し、内側ではド・ジッター時空の膨張効果で球殻に貼り付くことが分かった。

さらに、このダストの分布と運動を用いて光の輸送方程式を数値的に解くことで、直接撮像で得られるであろう強度分布を得た。特に、シュバルツシルトブラックホールと同じく光の不安定円軌道を持つモデルでは、像に明るいリング状の構造が現れる。ここではリング状の像の内側とその外側の像にそれぞれ注目して議論する。リングの外側の像を作る光線は全てシュバルツシルト時空のみを通るため、シュバルツシルトブラックホールと同じ強度分布を示す。対してリングの内側の像は、グラバスターを支える球殻と光子の間の相互作用や、その球殻上の光源の量によって異なる結果を示した。球殻を構成する物質が光子を吸収する場合は、球殻上の光源物質の量が少なければリングの内側の像が外側の像に比べて暗くなり、多ければ明るくなった。また、球殻を構成する物質が光子を吸収しない場合は、球殻上の光源物質の量が少なくてもリングの内側の像が外側の像に比べて明るくなった。

球殻表面の物質の量は時間経過と共に増加するため、球殻と光子の間の相互作用がどのようになっているとも、明るく光る球殻状天体ようになり、シュバルツシルトブラックホールと直接観測によって判別可能となるだろう。また、本研究では球対称なダストの運動を仮定したが、グラバスターが質量を持つために降着円盤を作ることができる。そのような場合でも、円盤から落下した物質がグラバスター表面に降り積もることが予測されるため、上記と同じ議論ができる。

5.2 エリスワームホールのシャドウ

次に本研究では、観測者側の世界にある星間物質がエリスワームホールを通過してあちらの世界に渡る状況を仮定した。エリスワームホールは漸近的に無質量な天体であるため、周囲の星間物質は降着円盤のような対称性の高い分布を取らない。本研究では Toy Model として、まず球対称・定常に落下するダストを仮定する事で相対論的流体力学方程式の解析解を得た。その解は、遠方からやって来た物質は重力によって加速される事なく、等速でワームホールを通過するということを表していた。また、喉の部分で密度が最も大きくなる。さらに、グラバスターのシャドウ

を議論した時と同じ手法によって、直接撮像で得られるであろう強度分布を得た。エリスワームホールはちょうど喉の部分に光の不安定円軌道を持ち、明るいリング状の像が現れる。リングより外側の光線強度はリングから離れるほど弱くなり、その勾配はシュバルツシルト時空のものよりわずかに急であった。また、リングの内側の光線強度は外側のものよりも強くなった。これはブラックホールとは明らかに異なる特徴であり、ワームホールを通過してあちらの世界へ行った後のダストからの放射が観測者に届く事が要因である。

さらに本研究ではダストの運動に軸対称を仮定し、球対称からの摂動解を得た。球対称を仮定した場合には r の正負に対して解が対称であったが、軸対称を仮定すると密度分布の摂動部分が非対称となった。また、 θ 方向の自由度はパラメータ k を導入する事で議論した。この解を用いて、この条件下で直接撮像によって得られるであろう強度分布を得た。回転の効果によるリング状構造の形の変化だけでなく、内側の領域に複雑な模様が見れた。その模様はワームホールの向こう側の世界のダストの密度分布を反映しており、ワームホール特有の像である事が分かった。模様の形状は k の値に依存するが、解の線型性から θ 方向の分布には任意性が残るため、実際には様々な形状の模様が観測されるだろう。

球対称モデルで内側が明るくなることや、軸対称モデルで複雑な模様が見れることは、どちらもあちらの世界の光源からの放射によるものである。ブラックホールに落下した物体からの放射は観測者に届くことはないため、この結果はワームホール特有の現象を示したものと言える。今回は簡単のために光源の運動に球対称や軸対称を仮定したが、ワームホールに星間ガスの塊が落下するような場合でも同様に、落下した後の放射も観測できる事が予測される。

5.3 ブレーンワールドブラックホールの電磁波観測

最後に南里らとの共同研究として、高次元の情報が顕著に現れたブレーンワールドブラックホールモデルとその他のブラックホール擬似天体モデルとの判別可能性を議論した。この天体の弱重力下での光線の屈折によってマイクロレンズの光度曲線に減光が見れる。本研究ではブレーンワールドブラックホールと光源天体が連星を成している場合を仮定し、強重力下での光の屈折によっても同様に減光が見れる事を示した。しかし、エリスワームホールの場合でも同じ結果を示すため、マイクロレンズの観測によってこれら二つを判別できない。

そこで、我々は直接撮像によってこれら二つを判別出来るのかを確かめた。まずブレーンワールドブラックホールに球対称・定常で落下するダストを仮定し、相対論的流体力学方程式の解を得た。動径方向の流速はシュバルツシルト時空の場合に比べて変化が急になっており、地平面付近で大きな加速をする事を表している。対してダストの分布はシュバルツシルト時空に比べて緩やかである。この解を用いて光の輸送方程式を数値的に解く事で、直接撮像で得られるであろう強度分布を得た。光の不安定円軌道の存在によって明るいリング状の像が見れた。また、ブレーンワールドブラックホールは事象の地平面を持つため、リング状の像の外側よりも内側の方が暗くなり、シュバルツシルトブラックホールのような暗い影が見れた。これは上述したエリスワームホールの場合の強度分布とは逆の特徴であるため、直接撮像によってこれら二つの天体を定性的に判別する事が可能である事が分かった。

上記の結果をまとめると、シュバルツシルトブラックホール、エリスワームホールそしてブレーンワールドブラックホールの三つの天体モデルを電磁波観測によって判別すること考えた場合、マイクロレンズによってシュバルツシルトブラックホールが切り分けでき、直接撮像ではエリスワームホールが切り分け出来る。

5.4 判別可能性

上記の考察をもとに各天体間の判別可能性を次にまとめた^{*1}。本研究では全ての天体間において、マイクロレンズまたはシャドウの観測によってそれぞれが判別できることを示すことができた。

各天体間の判別可能性

		Sch BH	GVS	EWH	BW BH
Sch BH	マイクロレンズ	—	×	○	○
	シャドウ	—	○	○	×
GVS	マイクロレンズ	×	—	○	○
	シャドウ	○	—	×	○
EWH	マイクロレンズ	○	○	—	×
	シャドウ	○	×	—	○
BW BH	マイクロレンズ	○	○	×	—
	シャドウ	×	○	○	—

5.5 今後の課題

本論文ではブラックホール擬似天体として球対称な天体のみに注目して研究を行った。しかし、自然なブラックホールモデルはカー時空で与えられるため、軸対称な天体モデルを考えるのが妥当であろう。すると時空自体の回転の効果によって現れる観測的な現象は自明ではなく、非常に興味深い。

さらに、本論文では電磁波観測に注目して研究を行ったが、ブラックホール探査には重力波観測も有効である。現在までに観測された重力波はブラックホール連星や中性子星連星の合体によるものであった。しかしこれからの観測器の進化によって、他の天体からの重力波が発見される可能性がある。例えばブラックホール擬似天体同士の衝突によって何が観測されるのか、またLIGOの観測した波形とどのように異なるのかは自明でない。その理論的な準備として、様々な天体モデルからの重力波の波形を予測しておくことが重要となる。また、重力波は他の物体との相互作用が極めて小さく、ほとんど減衰せずに地球まで届く。その特徴から電磁波では観測できないような天体を発見することができるかもしれない。もしこれらの天体が見つければ、未だに謎の多い重力の理解に大きな進展をもたらすだろう。

^{*1}グラバスター：GVS、エリスワームホール：EWH、ブレンワールドブラックホール：BW BH

付 録 A 相 対 性 理 論

ここでは本論文の内容に必要な相対性理論について述べる。相対性理論は特殊相対性理論・一般相対性理論の大きく二つに分類されるが、ここでは特殊相対性理論の説明は簡単などころに留めておき、一般相対性理論についてしっかりと触れておく。本文中では $c = 1$ の単位系を用いたが、説明の明瞭化のためにここでは復活させる。

A.1 相対性原理

A.1.1 ガリレイの相対性原理

イタリアの物理学者であるガリレオ・ガリレイは、次の相対性原理を提案した。

- 互いに等速直線運動している二つの慣性系において、物理法則は同一である。

これは物理学が普遍的・客観的な法則を自然界から見つけ出すことを目的とした学問であるという考え方に基づいている。イギリスの物理学者であるニュートンは、このガリレイの相対性原理に基づいた力学法則を表した。3次元ユークリッド空間と絶対時間で記述される絶対時空を導入し、物体の運動を時間 t の関数である位置座標 $\vec{r}(t) = (x, y, z)$ で記述した。慣性質量が m である物体(質点)に外力 \vec{F} を加えると、物体の運動は

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (\text{A.1})$$

のように \vec{r} の時間二階微分によって記述され、ニュートンの運動方程式と呼ばれる。外力 \vec{F} が慣性系の選び方に依存しないと仮定すると、運動方程式 (A.1) はガリレイの相対性原理を満たす。これは、ある系 $S(x, y, z)$ と $t = 0$ で一致し、 S 系に対して一定の速度 \vec{v} で運動する系 $S'(x', y', z')$, t' を考えると、座標変換

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \quad t' = t \quad (\text{A.2})$$

に対して運動方程式 (A.1) の形が不変となるということである。また、この座標変換のことをガリレイ変換と呼ぶ。しかし、これらは不変的・客観的な法則として考えられたものであるが、電磁気現象を記述するマクスウェル方程式は、ガリレイの相対性原理を満たさない。例えばマクスウェル方程式から得られる真空の電磁波の方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \Delta \vec{B} \quad (\text{A.3})$$

はガリレイ変換に対して不変にならない。これは、ガリレイ変換では粒子の波の速さが座標系に依存するのに対して、電磁波の方程式 (A.3) の中に含まれる電磁波の伝搬速度 c はどの座標系での物なのかという問題とも捉えられる。1887年にアメリカの物理学者であるマイケルソンとモーレイの実験により、光の速さが慣性系に依らず一定であることが示された。この実験事実により、電磁波の方程式 (A.3) はどの慣性系でも成り立つことになる。

A.1.2 特殊相対性原理

マクスウェル方程式がガリレイの相対性原理を満たさないという問題を解決するため、ドイツの物理学者であるアインシュタインは1905年に次の相対性原理を提案した。

- 全ての慣性系において物理法則は同一である。
- 全ての慣性系において光の速さは同一である。

これらの原理のことを特殊相対性原理と呼ぶ。 x 軸方向に等速相対運動する二つの系 (S, S') を考えると、上記の二つの原理を満たすのは次の座標変換 (ローレンツ変換) である。

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (\text{A.4})$$

ここで γ はローレンツ因子と呼ばれ、

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{A.5})$$

と定義される。このローレンツ変換に対してマクスウェル方程式は不変となる。物体の運動が光速と比べてそれほど速くない場合 ($v \ll c$)、 $\gamma \sim 1$ となりローレンツ変換 (A.4) はガリレイ変換 (A.2) と一致する。人類の搭乗可能な乗り物の中でも比較的高速で動くことのできるスペースシャトルでも、速さが約 8000 m/s であることに対して光速が 299792458 m/s であるため、ローレンツ因子の作用は $\gamma \sim 1.0000000004$ と非常に小さくなる。つまり相対論の効果が現れてくるのは非常に特殊な場合^{*1}であることが分かる。

時間 t と位置座標 (x, y, z) をまとめて一つの空間上の座標ベクトル $\vec{x} = (ct, x, y, z)$ として表し、その新しい空間を時空と呼ぶ。ローレンツ変換を時空上のある点から別の点へ移る変換であると考え、その変換行列を Λ とおいて式 (A.4) を

$$\vec{x}' = \Lambda \vec{x}, \quad \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \quad (\text{A.6})$$

のように表す場合もある。また、新しいパラメータ $\theta = \text{arctanh } \beta$ と虚数時間 it を導入することで、ローレンツ変換が

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\theta) & i \sin(i\theta) & 0 & 0 \\ i \sin(i\theta) & \cos(i\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\theta) & -\sin(i\theta) & 0 & 0 \\ \sin(i\theta) & \cos(i\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

^{*1}GPS (Global Positioning System) のように高精度な値を必要とする場合など、ローレンツ因子の値が小さくても相対論的な補正を必要とする場合もある。

と書け、 (ict, x, y, z) 空間における虚数角 $i\theta$ の回転変換に相当することが理解できる。この特殊相対性原理は前述のとおり慣性系で議論しているため、非慣性系では成り立たないという問題がある。特殊という文字がつくのはそのためである。よってこの相対性原理を拡張し、より広い議論ができるようにしたものが次に紹介する一般相対性原理である。

A.1.3 一般相対性原理

前小節で特殊相対性原理が非慣性系では成り立たないと述べたが、その他にも重力を考慮すると、どの系が慣性系か分からないという問題も考えられる。重力が他の力と大きく異なる点は等価原理にある。ある物質の慣性質量を m_I 、重力質量を m_G 、地球の中心からの距離を R 、地球の質量を M 、重力定数を G とすると、ニュートンの重力理論から物体の加速度 a は次の運動方程式で与えられる。

$$m_I a = \frac{GMm_G}{R^2} \quad \therefore a = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{m_G}{m_I} = g \cdot \frac{m_G}{m_I} \quad (\text{A.9})$$

ここで $g \equiv GM/R^2 = \text{const.}$ とおいた。ニュートン理論において $m_I = m_G$ である必然性はなく、 m_G/m_I の値が物質固有で異なるものであれば、物質の種類によって重力から生じる加速度の大きさ a が異なることになる。しかし、ピサの斜塔に始まるこれまでの実験は全て、実験精度の範囲で $a = \text{const.}$ すなわち $m_I = m_G$ を示している。そこで、等価原理では任意の物質について $m_I = m_G$ が成り立つということを原理にしてしまったのである。この等価原理によって、加速度系に移ることで重力を発生・消滅させることができる。例えば、自由落下するエレベーターの内部では無重力状態になる。式として表せば、デカルト座標で物体が y 方向に $-g$ の加速度で落下しているとき、 $y' = y - gt^2/2$ という座標変換をすると加速度がゼロになるということである。このように y' で表される系では慣性系に見えるが、 y で表される系においては明らかに非慣性系であるため、特殊相対性原理で考えている慣性系が重力下では一般的なものでなくなり、普遍的・客観的な法則を記述することができない。

そこで等価原理を理論の出発点にしようというのが一般相対性原理である。まず重力についての考え方を直視してみる。ニュートン重力理論では、電磁気学における電磁場と同じように質量を持つ物体が周囲に重力場を作ることによって、その重力場に存在する別の有質量物体が力を受ける^{*2}という考えに基づいている。ここでボールを地面に対して水平方向に投射する場合を考える。地球のように曲率を持っているような地面ではなく限りなく平坦な地面であるとし、重力は地面に対して垂直下向きとする。重力がないと仮定すると、ボールは投射された後無限に遠くまで直線的な運動を続けると考えられるが、重力があると地面に向かって落ちてゆく。この地面に向かって落ちてゆくという現象を、ボールが力を受けて下向きの加速度が発生していると考えerのではなく、ボールはまっすぐに進んでいるにもかかわらず空間自体が歪んでいる^{*3}ために外から見ると下向きに落ちてゆくように見えていると捉えることもできる。このように重力を空間の歪みと考えることによって、同じ場所では全ての物質に同じ重力加速度が働いて見えることが必然となる。さらに、一般相対論では局所慣性系の概念を導入する。局所慣性系とは、物体と共に自由落下するような座標系である。1915年アインシュタインは特殊相対性原理の考え方を局所慣性系に拡張し、次の一般相対性原理を提案した。

- 全ての局所慣性系において物理法則は同一である。

^{*2}この力を万有引力とも呼ぶ。

^{*3}この空間の歪みは正確には時空間の歪みであるが、詳しくは後述する。

- 全ての局所慣性系において真空中の光の速さは同一である。

特殊相対性原理との違いは慣性系の局所化のみである。しかし、時空を物理現象を記述するための不変不動の入れ物ではなく、歪んだり伸縮したりする動的な物理的対象と見る画期的な考え方であった。

A.2 歪んだ空間の幾何学

前節で述べたように重力を時空の歪みとして考えると、歪みの形を幾何学的に考える必要がある。本節では幾何学を考える上で重要となる線素や計量などの考え方について紹介する。

A.2.1 ユークリッド空間

$x-y$ 平面において二点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ の間の距離 s_{12} は、三平方の定理より

$$s_{12} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (\text{A.10})$$

で表される。このように n 次元空間 $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ に二点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ の間の距離 $d(x, x')$ を

$$d(x, x')^2 = (x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2 \quad (\text{A.11})$$

で定義した空間をユークリッド空間と呼ぶ。ここで $\Delta x \equiv x_2 - x_1$, $\Delta y \equiv y_2 - y_1$, $\Delta s \equiv s_{12}$ とおくと三平方の定理 (A.10) は

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad (\text{A.12})$$

となる。(A.12)において極限 $\Delta s \rightarrow 0$ をとった無限小量を線素と呼び、次のように表す。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (\text{A.13})$$

直線距離の無限小極限として線素を定義することで、第一に曲線の長さを求めることができるようになる。例えば点 A と点 B の二点間を結ぶ曲線がパラメータ t により $x = x(t)$, $y = y(t)$ のように与えられているとき、その曲線の長さを次式により求めることができる。

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (\text{A.14})$$

また、線素 (A.13) は極座標にも適用できる。例えば $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ で定義される二次元極座標 (r, φ) について、線素は次のようになる。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (\text{A.15})$$

ここまでの議論は平面上の座標に限定したが、(A.11) のように三次元ユークリッド空間に拡張することは容易である。 (x, y, z) デカルト座標における線素は

$$dx^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.16})$$

である。また、三次元極座標 (r, θ, φ) を $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ で定義すると、線素の極座標表示は次のようになる。

$$dx^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{A.17})$$

A.2.2 曲がった空間上の線素

例として原点を中心とする半径 a の球面を考える。その球面を表す方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (\text{A.18})$$

であり、(A.17) で $r = a$ とおくと球面上の線素が得られる。

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{A.19})$$

次に四次元ユークリッド空間内の半径 a の三次元球面を考える。四次元時空の座標を (x, y, z, w) とすると、四次元ユークリッド空間の線素は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \quad (\text{A.20})$$

と表され、三次元球面のパラメータ表示は三次元極座標表示を四次元に拡張して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ a \sin \chi \cos \theta \\ a \cos \chi \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

となる。すると (A.20) と (A.21) より三次元球面上の線素が得られる。

$$ds^2 = a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{A.22})$$

一般的に線素は座標 $x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ について次の形で表現される。

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.23})$$

この係数 g_{ij} を計量と呼び、 ds をこのように表すことのできる空間をリーマン空間と呼ぶ。例えば二次元線素 (A.13), (A.15), (A.19) について計量を行列として表すと

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

となる。計量は線素と同じ情報を持つため、二つの用語は区別せずに用いられることがある。計量や線素は空間の幾何学的性質を表すものであるが、(A.13) と (A.15) のように同じ空間でも座標によって表現が異なることに注意が必要である。

なお、「同じ添え字が下付と上付で現れる場合その添え字で和をとり、和記号を省略する。」というアインシュタインの縮約記法がある。

$$A^i B_i \equiv \sum_i A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + \dots \quad (\text{A.24})$$

この記法を採用すると、一般的な線素 (A.23) は

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

と書く事ができる。

A.2.3 ミンコフスキー空間

再び $x-y$ 平面に戻り、二点間の距離を考える。一般に、ある法則や公式が特別な座標系でしか成り立たないのであれば、その法則や公式は物理的にはあまり意味がない。そこでどのような座標変換 $(x, y) \rightarrow (x', y')$ に対して、距離を表す式の形が不変になるかを考えることは意味が有る。

はじめの議論ではユークリッド幾何学で成り立つ三平方の定理に基づいて距離を (A.12) の形で定義した。ここで逆に考えると、(A.12) の形で距離というものを定義し、それを満たす空間のことをユークリッド空間として定義することもできる。このように考えると、別の形で距離を定義し、それを満たすものを新しい空間として定義することができる。先に述べたが、ニュートンの運動方程式はローレンツ変換に対して不変にならない。これはローレンツ変換に対してユークリッド空間が満たすべき距離の式 (A.12) が不変にならない^{*4}ことに起因している。そこでローレンツ変換に対して不変になるような距離を定義する。

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - \Delta y^2 = \Delta x'^2 - \Delta y'^2 \quad (\text{A.25})$$

このように一つだけ逆符号で距離が定義される空間をミンコフスキー空間と呼ぶ。またローレンツ変換 (A.4) において $\tanh \alpha \equiv -\beta$ とおくと、(A.6) より次の表現となる。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

連続群をなす一次変換に限れば、この変換はユークリッド空間における座標回転変換に対応し、線素

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.27})$$

を不変に保つ。このように定義される時空をミンコフスキー時空と呼び、(A.27) で定義される長さを空間的距離と区別して世界間隔と呼ぶ。ミンコフスキー時空を表す計量は特別に

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

と η の文字を用いる。

A.2.4 基底ベクトルと微分

あるベクトル \vec{A} に対して (\vec{e}_x, \vec{e}_y) のような基底を採用すれば $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y$ という表現となり、一般的には $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ と表される。ユークリッド空間における直線座標の基底は自然に定義できるが、曲線座標や曲がった空間における基底は自明でない。そこで、便宜的に

$$\vec{e}_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{A.29})$$

^{*4}しかし速度が光速より十分小さい場合 ($v \ll c$) は、ローレンツ変換は近似的にガリレイ変換を再現し、ニュートンの運動方程式の形を不変にする。

と定義しよう。このように定義された基底ベクトルに対して、任意の座標変換 $x^i \rightarrow x'^j$ に対する変換則

$$\vec{e}'_j = \frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \vec{e}_i \quad (\text{A.30})$$

が得られ、これはユークリッド幾何学とも辻褄が合っている。次にベクトルの内積を次のように定義する。

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} \quad (\text{A.31})$$

さらに任意のベクトル $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ について、座標 x^j での偏微分 $\vec{A}_{,j} \equiv \partial \vec{A} / \partial x^j$ ^{*5} を考える。

$$\vec{A}_{,j} = (A^i \vec{e}_i)_{,j} = A^i_{,j} \vec{e}_i + A^i \vec{e}_{i,j} \quad (\text{A.32})$$

この計算を実行するために、基底の微分 $\vec{e}_{i,j}$ を求める必要がある。展開係数を Y^k_{ij} とすると、一般に

$$\vec{e}_{i,j} = Y^k_{ij} \vec{e}_k \quad (\text{A.33})$$

と表される。この Y^k_{ij} を求めるために、 $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ を微分する。

$$g_{ij,k} = \vec{e}_{i,k} \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \vec{e}_{j,k} = Y^l_{ik} g_{lj} + Y^l_{jk} g_{il} \quad (\text{A.34})$$

i, j, k を入れ替えた式も用いて Y^k_{ij} について解くと、

$$Y^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \quad (\text{A.35})$$

となる。これは後で紹介するクリストッフエル記号 Γ^k_{ij} と同じものである。この結果、ベクトル \vec{A} の微分は次のように表される。

$$\vec{A}_{,j} = A^i_{,j} \vec{e}_i, \quad A^i_{,j} \equiv A^i_{,j} + \Gamma^i_{jk} A^k \quad (\text{A.36})$$

ここで \vec{e}_i と $\vec{A}_{,j}$ いずれも変換則 (A.30) に従うので、 $A^i_{,j}$ はテンソルの変換性を持つ。一方、ベクトルの偏微分 $A^i_{,j}$ はテンソルの変換性を持たない。そこで、この $A^i_{,j}$ を共変微分^{*6}と呼ぶ。ベクトルやテンソルの変換性を持つことを、共変性を持つまたは共変的であると言う。

A.2.5 曲率テンソル

等価原理により、局所的にクリストッフエル記号がゼロとなるような座標系が存在する。そこで、時空の曲率を共変的な量としてリーマンテンソルと呼ばれるものを次のように定義する。

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\alpha = R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta A_\beta \quad (\text{A.37})$$

これは、曲がった時空上においてベクトルの共変微分の交換関係がゼロにならないことを用いた定義である。リーマンテンソルはクリストッフエル記号を用いる事で

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = \partial_\nu \Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \partial_\mu \Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \Gamma^\rho_{\mu\alpha} \Gamma^\beta_{\nu\rho} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \Gamma^\beta_{\mu\rho} \quad (\text{A.38})$$

^{*5} $\partial_j \vec{A}$ と書いて偏微分を表す場合もある。

^{*6} $\nabla_j \vec{A}$ と書いて共変微分を表す場合もある。

と書くこともできる。局所慣性系では $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = 0$ となり (A.38) の第三項目と第四項目が消えるが、第一項目と第二項目は一般的に消える事がない。このテンソルには次のような対称性がある。

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{A.39})$$

さらに、ビアンキ恒等式と呼ばれる次の関係式もある。

$$\nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} + \nabla_{\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.40})$$

この関係式に $g^{\mu\alpha}$ と $g^{\nu\beta}$ を作用させて縮約を取ると

$$\begin{aligned} & g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} + \nabla_{\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu}) \\ &= \nabla^{\alpha} (g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta\nu\sigma}) + \nabla^{\beta} (g^{\mu\alpha} R_{\alpha\beta\sigma\mu}) + \nabla^{\lambda} (g_{\lambda\sigma} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu}) \\ &= \nabla^{\alpha} (-R^{\nu}{}_{\alpha\nu\sigma}) + \nabla^{\beta} (-R^{\mu}{}_{\beta\mu\sigma}) + \nabla^{\lambda} (g_{\lambda\sigma} g^{\nu\beta} R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}) \\ &= -\nabla^{\alpha} R_{\alpha\sigma} - \nabla^{\beta} R_{\beta\sigma} + \nabla^{\lambda} (g_{\lambda\sigma} g^{\nu\beta} R_{\beta\nu}) \\ &= -2\nabla^{\alpha} R_{\alpha\sigma} + \nabla^{\lambda} (g_{\lambda\sigma} R^{\nu}{}_{\nu}) \\ &= -2\nabla^{\alpha} \left(R_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} R \right) = 0 \quad \therefore \nabla^{\alpha} \left(R_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} R \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

となる。ただし $R_{\mu\nu}$ と R は

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \quad (\text{A.42})$$

$$R \equiv R^{\mu}{}_{\mu} \quad (\text{A.43})$$

と定義され、それぞれリッチテンソルとリッチスカラーと呼ばれる。

付 録 B 基礎方程式

B.1 一般相対性理論における基礎方程式

B.1.1 測地線方程式

測地線は世界間隔の極小値として定義される。よって測地線を記述する方程式は世界間隔を作用とする最小作用の原理から導かれる。

$$S = \int_{s_1}^{s_2} ds, \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B.1})$$

測地線がパラメータ λ によって $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ と表されるとき、作用 S は

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L} d\lambda, \quad \mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad (\text{B.2})$$

と表され、ラグランジアン \mathcal{L} が定義される。この λ をアフィンパラメータと呼ぶ。表記を簡単にするために $dx^\mu/d\lambda \equiv \dot{x}^\mu$ とおくと、作用の変分がゼロ ($\delta S = 0$) から導かれるオイラー＝ラグランジュ方程式は、次のように表される。

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\sigma} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} = 0 \quad (\text{B.3})$$

質量のある粒子の運動は時間的な測地線 ($ds^2 < 0$) で表される。粒子の固有時間を τ とすると $\lambda = \tau$ と選ぶのが自然であり、次の関係が成り立つ。

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \rightarrow \quad g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2 \quad (\text{B.4})$$

また、光子の運動は光的な測地線 ($ds^2 = 0$) で表され、次の関係が成り立つ。

$$ds^2 = 0 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \rightarrow \quad g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (\text{B.5})$$

よって、いずれの場合でも測地線に沿って次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = 0 \quad (\text{B.6})$$

この条件下で (B.3) を書き下すと、次の式が得られる。

$$g_{\mu\sigma} \ddot{x}^\sigma + \left(g_{\mu\sigma,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\sigma} \right) \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = 0, \quad g_{\mu\sigma,\nu} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \quad (\text{B.7})$$

ここで $g_{\mu\nu}$ の逆行列 $g^{\mu\nu}$ とクリストッフエル記号 $\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$ を

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} (g_{\nu\mu,\sigma} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}) \quad (\text{B.8})$$

のように定義すると、(B.7) は

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = 0 \quad (\text{B.9})$$

と表される。(B.7) または (B.9) を測地線方程式と呼ぶ。測地線が時間的でも光的でも (B.9) は共通であり、その違いは拘束条件である (B.4) や (B.5) に現れている。測地線方程式 (B.9) は次のラグランジアンを用いてオイラー＝ラグランジュ方程式 (B.3) を書き下すことでも導かれる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (\text{B.10})$$

B.1.2 アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式は、物質場と重力場とを結びつける方程式である。そこで、作用の変分原理からこの式を導出してみよう。計算の流れは [17] を参考にした。

まず、重力場の作用を考える。重力場は計量 $g_{\mu\nu}$ によって表され、作用の中には微分を含んだ形で入っているはずである。さらに、一般相対性原理よりラグランジアン密度 \mathcal{L} はスカラー量として書かれる。これらを満たす最も単純な形式はリッチスカラーを用いた $\mathcal{L} = R$ である。そこで、作用を

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} dx^4 \quad (\text{B.11})$$

として考えてみる。計量の変分 $\delta g_{\mu\nu}$ をとるのだが、この変分を背景時空の計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ と微小に変化させた時空の計量 $g_{\mu\nu}$ の差として次のように書こう。

$$\delta g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} \quad (\text{B.12})$$

すると $h_{\mu\nu}$ の二次以降を無視して

$$\delta g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} \quad (\text{B.13})$$

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (\text{B.14})$$

$$\delta R = -R^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu h_{\mu\nu} - \Delta h \quad (\text{B.15})$$

と書く事ができる。ただし、添字の上げ下げは $g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ によって行い、 $h = h^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ である。すると、作用 (B.11) に対して計量の変分をとったものは

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left[-R^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu h_{\mu\nu} - \Delta h + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} R \right] \sqrt{-g} dx^4 \quad (\text{B.16})$$

となる。ただし、被積分関数の第二項目と第三項目は全積分であるため、境界がない、あるいは時空が遠方で漸近的に平坦となる場合には、運動方程式に効いてこない。

次に物質場の作用について考えるが、作用の変分からエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を次のように定義しよう。

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} dx^4 = \frac{1}{2c} \int T^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \sqrt{-g} dx^4 \quad (\text{B.17})$$

例えば電磁場を考えると、ベクトルポテンシャル A_μ を用いて物質場の作用を

$$S_{\text{EM}} = \frac{1}{4\mu_0} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} dx^4, \quad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (\text{B.18})$$

のように書く事ができる。この作用の変分をとると

$$\delta S_{\text{EM}} = \frac{1}{2\mu_0} \int \left[F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 \right] \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} dx^4, \quad F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{B.19})$$

となるため、定義 (B.17) から

$$T^{\mu\nu} = \frac{c}{\mu_0} \left(F_{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right) \quad (\text{B.20})$$

のように電磁場によるエネルギー・運動量テンソルを得ることもできる。

全作用 $S = S_g + S_m$ での変分原理 $\delta S = 0$ から次のアインシュタイン方程式が得られる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{B.21})$$

ここで、(B.21) の左辺をまとめて

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (\text{B.22})$$

と定義し、 $G_{\mu\nu}$ をアインシュタインテンソルと呼ぶ。縮約をとったビアンキ恒等式 (A.41) より、このテンソルには $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ という特徴がある。また、宇宙論的な観点から、重力場の作用 (B.11) に定数 -2Λ を加えることもある。その場合のアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{B.23})$$

となり、 Λ を宇宙項 (宇宙定数) と呼ぶ。

B.2 流体方程式

次に流体力学における基礎方程式を、一般相対性理論を基盤として考えよう。物体の平均自由行程が全体のスケールに対して十分短ければ、その物体を流体として近似できる。さらに流体の静止系において圧力が等方で粘性もない場合には、完全流体として扱う事ができる。この場合はエネルギー・運動量テンソルを次のように仮定できる。

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} \quad (\text{B.24})$$

ここで、 ρ , P , u^μ はそれぞれエネルギー密度, 圧力, 四元速度ベクトルである。特に、 u^μ は $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ と定義され、(B.4) より $u^\mu u_\mu = -c^2$ という関係式がある。

では、エネルギー・運動量テンソルの保存則に対応する式

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.25})$$

に (B.24) を適用してみよう。まず、(B.24) の μ の文字を下げると

$$\begin{aligned} T^\nu{}_\mu &= g_{\mu\eta} T^{\eta\nu} = g_{\mu\eta} [(\rho + P) u^\eta u^\nu + P g^{\eta\nu}] \\ &= (\rho + P) u_\mu u^\nu + P \delta^\nu{}_\mu \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

となる。これを (B.25) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= [(\rho + P)u_\mu u^\nu + P\delta_\mu^\nu]_{;\nu} \\ &= (\rho_{,\nu} + P_{,\nu})u_\mu u^\nu + (\rho + P)u_{\mu;\nu}u^\nu + (\rho + P)u_\mu u^\nu_{;\nu} + P_{,\mu} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

となる。ここで、流体粒子と共動な局所ローレンツフレームを仮定し、物理量が基準座標系によって測られるとすると、熱力学第一法則は

$$dQ = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + Pd\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{B.28})$$

のように書かれる。ここで dQ は外部から与えられる一粒子あたりの熱量変化であり、 ρ/n および $1/n$ はそれぞれ一粒子あたりのエネルギーと体積である。過程が準静的・断熱的に行われるとすると、 $dQ = Tds = 0$ とできる。ここで、 T と s はそれぞれ温度および一粒子あたりのエントロピーである。すると

$$0 = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + Pd\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{B.29})$$

この方程式はエネルギー保存を示しており、次のように簡単な形へ書き直すことができる。

$$0 = \frac{1}{n}d\rho - \frac{\rho}{n^2}dn - \frac{P}{n^2}dn \quad \therefore \frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + P}{n} \quad (\text{B.30})$$

これを (B.27) に代入すると

$$\rho_{,\nu} = \frac{\partial n}{\partial x^\nu} \frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + P}{n} n_{,\nu} \quad (\text{B.31})$$

なので

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\rho + P}{n} n_{,\nu} u_\mu u^\nu + P_{,\nu} u_\mu u^\nu + (\rho + P)u_{\mu;\nu}u^\nu + (\rho + P)u_\mu u^\nu_{;\nu} + P_{,\mu} \\ &= \frac{\rho + P}{n} (n_{,\nu} u^\nu + n u^\nu_{;\nu}) u_\mu + P_{,\nu} u_\mu u^\nu + (\rho + P)u_{\mu;\nu}u^\nu + P_{,\mu} \\ &= \frac{\rho + P}{n} (n u^\nu)_{;\nu} u_\mu + P_{,\nu} u_\mu u^\nu + (\rho + P)u_{\mu;\nu}u^\nu + P_{,\mu} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

となる。さらにこの式に粒子数保存の式

$$(n u^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (\text{B.33})$$

を代入することで

$$\begin{aligned} 0 &= P_{,\nu} u_\mu u^\nu + (\rho + P)u_{\mu;\nu}u^\nu + P_{,\mu} \\ \therefore (\rho + P)u_{\mu;\nu}u^\nu &= -P_{,\mu} - u_\mu P_{,\nu} u^\nu \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

と相対論的オイラー方程式が得られる。

付 録 C 諸々の考察

C.1 グラバスターのドップラー効果

ここではグラバスターの球殻から放射して観測者に届くまでのドップラー効果を考察する。シャドウ観測では 4.1.3 で述べたように、グラバスターの球殻上に降り積もったダストからの放射によって、ブラックホールとの差異が現れると予想される。しかし球殻のサイズ(半径 R) は非常にコンパクトであるため、重力的なドップラー効果によって波長が伸び、光子の持つエネルギーが小さくなるはずである。では、実際にどの程度小さくなるのかを見積もってみる。

共動な座標によって測られる振動数は次のように定義される。

$$\nu = -u_\mu k^\mu \quad (\text{C.1})$$

球殻上のダストは静止しているため、四元速度は $u^\mu = (u^t, 0, 0, 0)$ で与えられ、

$$u_\mu u^\mu = -\left(1 - \frac{r_g}{R}\right) (u^t)^2 = -1 \quad \therefore u^t = -\left(1 - \frac{r_g}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{C.2})$$

である。すると放射される周波数 ν_e は (C.1) より

$$\nu_e = \left(1 - \frac{r_g}{R}\right)^{\frac{1}{2}} k^t = \left(1 - \frac{r_g}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} E \quad (\text{C.3})$$

となる。また、観測者も静止系にいるため、観測者の位置を r_o とすると

$$\nu_o = \left(1 - \frac{r_g}{r_o}\right)^{-\frac{1}{2}} E \quad (\text{C.4})$$

のように与えられる。天体と観測者の位置が十分離れている場合 ($r_o \rightarrow \infty$)、 $\nu_o = E$ となる。すると、球殻から観測者までの周波数の変化は

$$\frac{\nu_o}{\nu_e} = \left(1 - \frac{r_g}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.5})$$

によって求められる。本研究で用いたモデルでは、 $R \sim 1.3$ であるため、 $\nu_o/\nu_e \sim 0.48$ となる。これを波長に換算すると約 2 倍になり、光子の持つエネルギーが約 1/2 倍になる。

C.2 近似計算による強度分布の解析

本研究では光線の輸送方程式を数値的に解いたが、インパクトパラメータが大きい光線は屈折角が小さく光線の軌道を直線として近似できるため、代数的に解くことができる。

まず、本研究で用いた輸送方程式 (4.9) は

$$\mathcal{J} = -S \int \frac{1}{\nu^2} \rho u_\mu k^\mu d\lambda \quad (\text{C.6})$$

のように書かれる。ここで、ダストの速度が十分遅く、光線が天体から十分遠い場所を通るならば

$$u_\mu k^\mu d\lambda \simeq \sqrt{(k^r)^2 + r^2(k^\varphi)^2} d\lambda = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

とすることができる。また、光線のインパクトパラメータ α と天体との最接近距離 R_c の間には次の関係がある。

$$\alpha = \sqrt{\frac{g_{\varphi\varphi}(R_c)}{-g_{tt}(R_c)}} \quad (\text{C.7})$$

これより、漸近平坦な時空を考えている場合には、十分大きなインパクトパラメータに対して $\alpha \simeq R_c$ となる。すると Fig. C.1 のように、二本の半直線と半径 α の円弧によって光線の軌道を近似することができる。

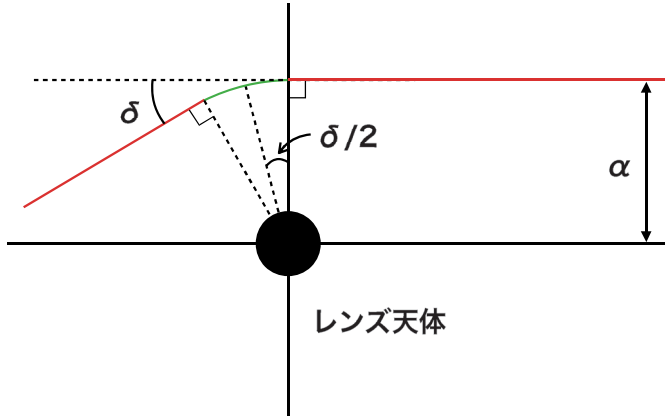


Fig. C.1: 光線軌道を直線で近似した模式図

光線の軌道は屈折の前後で対称であるため、輸送方程式は (C.6) 次のように書ける。

$$\mathcal{J} = -2 \frac{S}{\nu^2} \left[\int_\alpha^\infty \rho(r) \frac{r}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}} dr + \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho(\alpha) \alpha d\varphi \right] \quad (\text{C.8})$$

ただし、周波数 ν の変化は天体から十分離れた光線軌道上では変化しないと仮定し、積分の外に出している。

では、この近似された輸送方程式 (C.8) をエリスワームホール時空に適用してみる。エリスワームホール時空では

$$\rho = \rho_0 \frac{a^2}{r^2 + a^2}, \quad \delta \sim \frac{\pi a^2}{4 R_c^2} \sim \frac{\pi a^2}{4 \alpha^2}$$

であるため、

$$\mathcal{J}(\hat{\alpha}) = \frac{a \rho_0 S \pi}{\nu^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \hat{\alpha}^2}} + \frac{1}{4 \hat{\alpha} (1 + \hat{\alpha}^2)} \right] \quad (\text{C.9})$$

となる。ただし、 $\hat{\alpha} \equiv \alpha/a$ と定義した。

また、 $\alpha = 0$ では光線が屈折せず直線になるため、この場合も代数的に解くことができる。エリスワームホール時空は質量を持たないため重力的なドップラー効果が現れず、周波数を積分の外に出すことができる。すると、 $\alpha = 0$ の場合の輸送方程式は

$$\mathcal{J} = -\frac{S}{\nu^2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) dr \quad (\text{C.10})$$

となり、

$$\mathcal{J}(0) = \frac{a\rho_0 S\pi}{\nu^2} \quad (\text{C.11})$$

と計算される。Fig. C.2 は (C.9) を (C.11) で割ったものを表したグラフであり、点は 4.2.2 で示した数値的な結果である。 $\hat{\alpha}$ の値が大きい領域では近似が良く成り立っているが、屈折角の大きくなる $\hat{\alpha}$ の小さい領域では光線軌道が直線から大きくずれるため、近似が上手く成り立っていないことが確認できる。

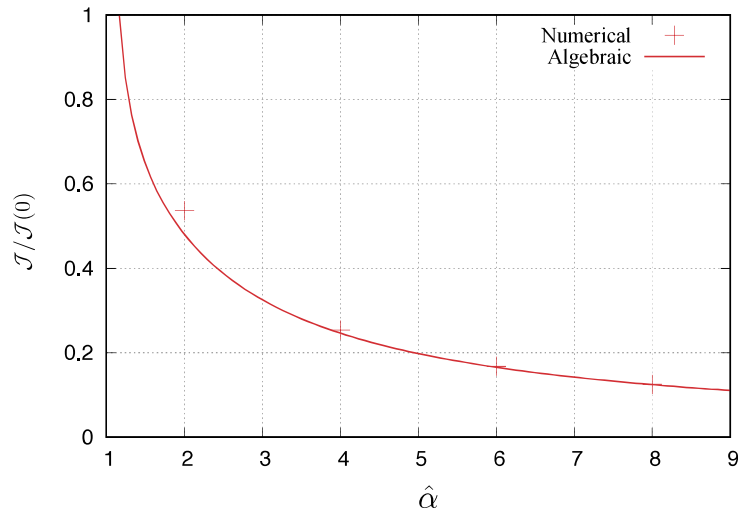


Fig. C.2: 代数的な解と数値的な解との比較

謝辞

本論文は筆者が山口大学大学院理工学研究科自然科学基盤系専攻博士後期課程に在籍中の研究成果をまとめたものです。同大学院創成科学研究科教授・坂井伸之先生には5年もの間、指導教員として忍耐強くご指導戴いただけでなく、本研究遂行にあたっての機会や環境も与えて戴きました。ここに深謝の意を表します。同研究科教授・白石清先生、同研究科助教・齊藤遼先生、元木業人先生並びに同大学時間学研究所教授・藤澤健太先生には副査としてご助言を戴くとともに本論文の細部にわたりご指導を戴きました。ここに深謝の意を表します。日本学術振興会には特別研究員 (DC2) として採用して戴くとともに公私にわたって資金的な援助をして下さったことに厚く感謝致します。本研究の一部は日本学術振興会科学研究費 (課題番号 No.17J00547) の助成を受けています。最後に、本論文を作成するにあたって、家族や多くの友人、他にも多くの方々からご支援ご助力を賜りました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] D. Stewart, *Elements of the Philosophy of the Human Mind*, Vol. 2, Ch. 2, Section 4.2 (p.304 f.).
- [2] 矢野健太郎, 「アインシュタイン」, (講談社, 1991), pp.128-134.
- [3] 大沼正則, 「科学の歴史」, (青木書店, 1978), pp.126-132.
- [4] S. Gillessen *et al.*, *nature* 481, 51-54 (2012).
- [5] P. Coles, arXiv:astro-ph/0102462v1 (2001).
- [6] G. V. Chibisov, *Soviet Physics Uspekhi* 19, 624 (1976).
- [7] E. Williams, J. Faller and H. Hill, *Phys. Rev. Lett.* 26, 721 (1971).
- [8] A. Einstein, *Science* 84, 506 (1936).
- [9] J. -P. Beaulieu *et al.*, *Nature* 439, 437-440 (2006).
- [10] A. Einstein, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.* 1, 688 (1916).
- [11] A. Einstein, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.* 1, 154 (1918).
- [12] B. P. Abbott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102 (2016), arXiv:1602.03837 [gr-qc].
- [13] B. P. Abbott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 119, 161101 (2017).
- [14] J. M. Bardeen, in *Black Holes*, edited by C. DeWitt and B. S. DeWitt, (Gordon and Breach, New York, 1973), p. 215.
- [15] R. Takahashi, *Astrophys. J.* 611, 996 (2004); *Publ. Astron. Soc. Jpn.* 57, 273 (2005).
- [16] R. Penrose, *Phys. Rev. Lett.* 14, 57 (1965).
- [17] 白水徹也, 「アインシュタイン方程式」, (サイエンス社, 2012), p. 107.
- [18] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* 43, 199 (1975).
- [19] P. O. Mazur and E. Mottola, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 101, 9545 (2004), arXiv:0109035 [gr-qc].
- [20] M. Visser and D. L. Wiltshire, *Class. Quantum Grav.* 21, 1135 (2004).
- [21] N. Sakai, H. Saida and T. Tamaki, *Phys. Rev. D* 90, 104013 (2014).
- [22] T. Kubo and N. Sakai, *Phys. Rev. D* 93, 084051 (2016).

-
- [23] C. A. Picon, Phys. Rev. D 65, 104010 (2002), arXiv:0201027 [gr-qc].
- [24] H. G. Elis, J. Math. Phys. (N.Y.) 14, 104 (1973).
- [25] K. A. Bronnikov, Acta Phys. Pol. B 4, 251 (1973).
- [26] M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. 56, 395 (1988).
- [27] T. Ohgami and N. Sakai, Phys. Rev. D 94, 064071 (2016).
- [28] H.-a. Shinkai and S. A. Hayward, Phys. Rev. D 66, 044005 (2002).
- [29] J. A. González, F. S. Guzmán, and O. Sarbach, Class. Quantum Grav. 26, 015010 (2009), arXiv:0806.0608v2 [gr-qc]; ibid., 015011 (2009), arXiv:0806.1370v2 [gr-qc].
- [30] K. A. Bronnikov, L. N. Lipatova, I. D. Novikov and A. A. Shatskiy, Grav. Cosmol. 19, 269 (2013), arXiv:1312.6929v1 [gr-qc].
- [31] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. B436, 257 (1998).
- [32] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999).
- [33] T. Shiromizu, K. Maeda and M. Sasaki, Phys. Rev. D 62, 024012 (2000), arXiv:9910076v3 [gr-qc].
- [34] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos and V. Rezanian, Phys. Lett. B 487, 1 (2000).
- [35] B. J. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda and J. Yokoyama, Phys. Rev. D 81, 104019 (2010), arXiv:0912.5297 [astro-ph.CO].
- [36] A. S. Majumdar, Phys. Rev. Lett. 90, 031303 (2003).
- [37] R. Guedens, D. Clancy and A. R. Liddle, Phys. Rev. D66, 083509 (2002).
- [38] R. C. Myers and M. J. Perry, Ann. Phys. 172, 304 (1986).
- [39] D. Mihalas and B. W. Mihalas, *Foundations of Radiation Hydrodynamics* (Dover Publications, New York, 1999).
- [40] F. Abe, Astrophys. J. 725, 787 (2010).
- [41] B. Paczyński, Astrophys. J. 304, 1 (1986).
- [42] S. Liebes, Phys. Rev., 133, 835 (1964).
- [43] S. Refsdal, MNRAS, 128, 295 (1964).
- [44] T. K. Dey and S. Sen, Mod. Phys. Lett. A, 23, 953 (2008), arXiv:0806.4059v1 [gr-qc].
- [45] E. Teo, Phys. Rev. D 58, 024014 (1998).
- [46] P. G. Nedkova, V. Tinchev, and S. S. Yazadjiev, Phys. Rev. D 88, 124019 (2013).
- [47] T. Ohgami and N. Sakai, Phys. Rev. D 91, 124020 (2015).

- [48] A. S. Majumdar and N. Mukherjee, *Mod. Phys. Lett. A* 20, 2487 (2005).
- [49] E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* 71, 083010 (2005).
- [50] R. Whisker, *Phys. Rev. D* 71, 064004 (2005).
- [51] L. Amarilla and E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* 85, 064019 (2012), arXiv:6349v2 [gr-qc].
- [52] E. F. Eiroa and C. M. Sendra, (2017), arXiv:08380v1 [gr-qc].