The 30th Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2007)
Kashikojima, Mie, Japan, Nov. 27–30, 2007

# ガウス型通信路の容量に関する不等式について
# On Inequality related to Capacity of Gaussian Channel

柳　研二郎*
Kenjiro Yanagi

**Abstract**— There are several inequalities related to capacity of Gaussian channel with feedback. We give an answer for unsolved problem under some condition. And also we give a new inequality in the case of $MA(1)$ Gaussian noise.

**Keywords**— Gaussian channel, capacity, feedback

## 1　はじめに

次のようなフィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路を考える．

$$Y_n = S_n + Z_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ただし $Z = \{Z_n; n = 1, 2, \ldots\}$ は雑音を表す退化していない平均 0 のガウス過程、$S = \{S_n; n = 1, 2, \ldots\}$ と $Y = \{Y_n; n = 1, 2, \ldots\}$ はそれぞれ入力信号と出力信号を表す確率過程である．通信路は雑音のかからないフィードバックをもつとする．したがって $S_n$ は送信するメッセージと出力信号 $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ の函数であるとして表される．レート $R$, 長さ $n$ の符号語 $x^n(W, Y^{n-1})$, $W \in \{1, \ldots, 2^{nR}\}$ と復号函数 $g_n : \mathbb{R}^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ に対して、誤り確率は

$$Pe^{(n)} = Pr\{g_n(Y^n) \neq W; Y^n = x^n(W, Y^{n-1}) + Z^n\},$$

で定義される．ただし $W$ は $\{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ 上の一様分布で雑音 $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ とは独立である．入力信号には平均電力制限が課せられる．即ち

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[S_i^2] \leq P$$

である．またフィードバックは causal である．つまり $S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z_1, \ldots, Z_{i-1}$ に従属している．同様にフィードバックがない場合は $S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ と独立である．フィードバックをもつ有限ブロック長容量は次のように定義される．

$$C_{n,FB,Z}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|R_X^{(n)} + R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし $|\cdot|$ は行列式を表し、最大値は

$$Tr[(I+B)R_X^{(n)}(I+B)^t + BR_Z^{(n)}B^t] \leq nP$$

を満たす狭義下三角行列 $B$ と非負対称行列 $R_X^{(n)}$ についてとる．同様にフィードバックがないときには容量 $C_{n,Z}(P)$ は $B = 0$ としたときの最大値である．これらの条件の下で Cover and Pombra [6] は次を得た．

**Proposition 1 (Cover and Pombra [6])** 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n = 1, 2, \ldots$ でブロック長 $n$ で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P)-\epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n \to \infty$ のとき $Pe^{(n)} \to 0$ とできる．逆に任意の $\epsilon > 0$ とブロック長 $n$ で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P)+\epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $Pe^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立たない．これはフィードバックをもたない場合も成り立つ．

$C_{n,Z}(P)$ は正確に得られている．

**Proposition 2 (Gallager [10])**

$$C_{n,Z}(P) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{k} \log \frac{nP + r_1 + \cdots + r_k}{kr_i},$$

ただし $0 < r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値、$k(\leq n)$ は $nP + r_1 + r_2 + \cdots + r_k > kr_k$ を満たす最大整数である．

ところで $C_{n,FB,Z}(P)$ は正確には得られていないので、今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている ([1],[2],[3], [6],[8],[9],[14], [15],[17],[18],[19], [4])．以下計算の都合上、対数は自然対数を用いることにする．

## 2　Question 1

**Question 1**

$$C_{n,FB,Z}(P) \leq C_{n,Z}(2P)?$$

今まで次の結果が得られている．

**Theorem 1 (Cover-Pombra [6])**

$$C_{n,FB,Z}(P) \leq \min\{2C_{n,Z}(P), C_{n,Z}(P) + \frac{1}{2}\log 2\}.$$

* 〒 755-8611 宇部市常盤台 2-16-1 山口大学 大学院 理工学研究科 応用数理科学分野 Division of Applied Mathematical Science, Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University, Ube, 755-8611 Japan. E-mail: yanagi@yamaguchi-u.ac.jp, This research was partially supported by the ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (B), 18300003, 2007

**Theorem 2 (Chen-Yanagi [1])**

$$C_{n,Z}(2P) \le \min\{2C_{n,Z}(P), C_{n,Z}(P) + \frac{1}{2}\log 2\}.$$

**Theorem 3 (Chen-Yanagi [1])**

$$C_{2,FB,Z}(P) \le C_{2,Z}(2P).$$

## 3 Question 2

**Definition 1** 任意の $\alpha, \beta \ge 0 (\alpha + \beta = 1)$ と任意のガウス雑音 $Z_1, Z_2$ に対して $R_{\tilde{Z}} = \alpha R_{Z_1} + \beta R_{Z_2}$ とおく．このときガウス雑音 $\tilde{Z}$ をもつ通信路を混合型ガウス型通信路という．

**Question 2**

$$C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) \le \alpha C_{n,FB,Z_1}(P) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P)?$$

今までは次の結果が得られている．

**Theorem 4 (Yanagi-Chen-Yu [19])**

$$C_{n,\tilde{Z}}(P) \le \alpha C_{n,Z_1}(P) + \beta C_{n,Z_2}(P).$$

**Theorem 5 (Yanagi-Chen-Yu [19])** $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ を満たす $P_1, P_2 \ge 0$ が存在して

$$C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) \le \alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2).$$

が成り立つ．

**Theorem 6 (Yanagi-Chen-Yu [19])** 次の (a) 又は (b) の条件があれば *Question 2* が成り立つ．

**(a)** $R_{Z_1}$ の $n$ 行 $n$ 列を除いた部分行列と $R_{Z_2}$ のそれが一致する．

**(b)** $\tilde{Z}$ がホワイト型である．即ち $R_{\tilde{Z}}$ が対角行列である．

## 4 Question 3

**Question 3** 任意の $P_1, P_2 \ge 0$ と任意の $\alpha, \beta \ge 0 (\alpha + \beta = 1)$ に対して

$$\alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2)$$

$$\le C_{n,FB,\tilde{Z}}(\alpha P_1 + \beta P_2) + \frac{1}{2n}\log\frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha}|R_{Z_2}|^{\beta}}?$$

今まで次のような結果が得られている．

**Theorem 7 (Chen-Yanagi [3])** $Z_1 = Z_2$ のとき成り立つ．即ち $C_{n,FB,Z}(\cdot)$ の凹性が成り立つ．

$$\alpha C_{n,FB,Z}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z}(P_2) \le C_{n,FB,Z}(\alpha P_1 + \beta P_2).$$

**Theorem 8 (Yanagi-Yu-Chao [20])** $P_1 = P_2$ のとき成り立つ．即ち

$$\begin{aligned}&\alpha C_{n,FB,Z_1}(P) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P)\\ \le\ & C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) + \frac{1}{2n}\log\frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha}|R_{Z_2}|^{\beta}}.\end{aligned}$$

**Theorem 9 (Yanagi-Yu-Chao [20])**

$$\begin{aligned}&\alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,Z_2}(P_2)\\ \le\ & C_{n,FB,\tilde{Z}}(\alpha P_1 + \beta P_2) + \frac{1}{2n}\log\frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha}|R_{Z_2}|^{\beta}}.\end{aligned}$$

**Theorem 10 (Yanagi-Yu-Chao [20])**

$$\begin{aligned}&\alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2)\\ \le\ & C_{n,\tilde{Z}}(\alpha P_1 + \beta P_2) + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2n}\log\frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha}|R_{Z_2}|^{\beta}}.\end{aligned}$$

**Theorem 11 (Yanagi-Yu-Chao [20])**

$$\begin{aligned}&\alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2)\\ \le\ & 2C_{n,FB,\tilde{Z}}(\alpha P_1 + \beta P_2) + \frac{1}{2n}\log\frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha}|R_{Z_2}|^{\beta}}.\end{aligned}$$

## 5 Kim の結果

**Definition 2** $Z = \{Z_i; i = 1, 2, \ldots\}$ が *first order moving average Gaussian channel* であるとは次のような 3 つの同値な条件をみたすことである．

**(1)** $Z_i = U_i + \alpha U_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots,$ ただし $|\alpha| \le 1$ で $U_i \sim N(0,1)$ は *i.i.d.* とする．

**(2)** *Spectral density function (SDF)* $f(\lambda)$ は次で与えられる．

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|1 + \alpha e^{-i\lambda}|^2 = \frac{1}{2\pi}(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos\lambda).$$

**(3)** $Z_n = (Z_i, \ldots, Z_n) \sim N_n(0, K_Z),\ n \in \mathbb{N},$ ただし *covariance matrix* $K_Z$ は次で与えられる．

$$K_Z = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1+\alpha^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

このとき $Z$ の entropy rate は次のように計算される.

$$\begin{aligned} h(Z) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\{4\pi^2 e f(\lambda)\}d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\{2\pi e|1+\alpha e^{-i\lambda}|^2\}d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi e) \quad \text{if} \quad |\alpha|\le 1 \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi e\alpha^2) \quad \text{if} \quad |\alpha|>1. \end{aligned}$$

ここで最後の計算は次の Poisson's integral formula を用いている.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|e^{i\lambda}-\alpha|d\lambda &= 0 \quad \text{if} \quad |\alpha|\le 1, \\ &= \log|\alpha| \quad \text{if} \quad |\alpha|>1. \end{aligned}$$

$MA(1)$ Gaussian noise をもつ Gaussian channel の capacity は次で与えられている.

$$C_{FB,Z}(P)=\lim_{n\to\infty}C_{n,FB,Z}(P).$$

最近 Kim は初めて feedback をもつ Gaussian channel の capacity を求めた.

**Theorem 12 (Kim [12])**

$$C_{FB,Z}(P)=-\log x_0,$$

ただし $x_0$ は次の４次方程式の正の唯一解である;

$$Px^2=(1-x^2)(1-|\alpha|x)^2.$$

## 6 Question 1 の反例

Kim [13] はまた Conjecture 1 の反例を得た.

$$f_Z(\lambda)=\frac{1}{4\pi}|1+e^{i\lambda}|^2=\frac{1+\cos\lambda}{2\pi},$$

のとき, input は

$$f_X(\lambda)=\frac{1-\cos\lambda}{2\pi},$$

ととればよいことがわかっているので, output は

$$f_Y(\lambda)=f_X(\lambda)+f_Z(\lambda)=\frac{1}{\pi}.$$

になることがわかる. したがって nonfeedback capacity は

$$\begin{aligned} C_Z(2) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{f_Y(\lambda)}{f_Z(\lambda)}d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{4}{|1+e^{i\lambda}|^2}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{2}{|1+e^{i\lambda}|}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log 2d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|1+e^{i\lambda}|d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}2\pi\log 2-0 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

である. 一方 feedback capacity は次のようになる.

$$C_{FB,Z}(1)=-\log x_0,$$

ただし $x_0$ は４次方程式

$$x^2=(1+x)(1-x)^3$$

の正の唯一解である. ここで $x_0<\frac{1}{2}$ であるので次が成り立つ.

$$C_{FB,Z}(1)=-\log x_0>\log 2=C_Z(2).$$

これは Qestion 1 の反例になっている. また

$$C_{n_0,FB,Z}(1)>C_{n_0,Z}(2).$$

となる $n_0\in\mathbb{N}$ が存在することもわかる.

## 7 Question 2 に関連する不等式

$Z\sim \mathrm{MA}(1,p)$, $Z_i=U_i+pU_{i-1}$, $0<p\le 1$ かつ $W\sim \mathrm{MA}(1,q)$, $W_i=U_i+qU_{i-1}$, $0<q\le 1$ とする. このとき

$$R_{\alpha Z+\beta W}\le \alpha R_Z+\beta R_W\le R_{\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}$$

が成り立つ. なぜなら

$$\alpha R_Z+\beta R_W=R_{\alpha Z+\beta W}+\alpha\beta R_{Z-W}$$

より

$$R_{\alpha Z+\beta W}\le \alpha R_Z+\beta R_W.$$

また

$$\alpha R_Z+\beta R_W+\sqrt{\alpha\beta}(R_{ZW}+R_{WZ})=R_{\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}$$

が成り立つ. 一方 $R_{ZW}+R_{WZ}$ は次のような行列になる.

$$\begin{pmatrix} 2+2pq & p+q & 0 & \cdots & 0 \\ p+q & 2+2pq & p+q & \cdots & 0 \\ 0 & p+q & 2+2pq & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & p+q \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2+2pq \end{pmatrix}.$$

この行列の固有値 $r_i$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} r_i &= 2+2pq-2(p+q)\cos\frac{i\pi}{n+1} \quad (i=1,2,\ldots,n) \\ &\ge 2+2pq-2(p+q) \\ &= 2(1-p)(1-q)\ge 0. \end{aligned}$$

したがって $R_{ZW}+R_{WZ}\geq 0$ となり

$$\alpha R_Z+\beta R_W\leq R_{\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}$$

である．したがって次のことがわかる．

**Proposition 3** $R_{\tilde{Z}}=\alpha R_Z+\beta R_W$ とする．このとき次が成り立つ．

$$C_{FB,\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}(P)\leq C_{FB,\tilde{Z}}(P)\leq C_{FB,\alpha Z+\beta W}(P).$$

$V=\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W$ とすると

$$V_i=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})U_i+(\sqrt{\alpha}p+\sqrt{\beta}q)U_{i-1}.$$

ここで

$$Y_i=U_i+\frac{\sqrt{\alpha}p+\sqrt{\beta}q}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}U_{i-1}$$

とおくと

$$Y=\frac{\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\sim \mathrm{MA}(1,\frac{\sqrt{\alpha}p+\sqrt{\beta}q}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})$$

である．このとき

$$\begin{aligned}
&C_{n,FB,V}(P)\\
=\ &\max\{\frac{1}{2n}\log\frac{|R_{S+V}|}{|R_V|};Tr[R_S]\leq nP\}\\
=\ &\max\{\frac{1}{2n}\log\frac{|R_{S+(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})Y}|}{|R_{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})Y}|};Tr[R_S]\leq nP\}\\
=\ &\max\{\frac{1}{2n}\log\frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}+Y}|}{|R_Y|};\\
&Tr[R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}}]\leq\frac{nP}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}\}\\
=\ &C_{n,FB,Y}(\frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}).
\end{aligned}$$

よって

$$C_{FB,V}(P)=C_{FB,Y}(\frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}).$$

次に

$$f(t)=\frac{1}{t}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-t^2}}$$

とおく．$f(a)=1,f(b)=0$ となる $0<a<b<1$ が unique にとれる．また $f(t)$ は $0<t<1$ で convex かつ 減少関数である．このとき Question 2 より弱い不等式が成り立つことが予想される．

**Question 4**

$$C_{FB,\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}(P)\leq \alpha C_{FB,Z}(P)+\beta C_{FB,W}(P)?$$

これを示すには次の不等式を証明すればよい．

**Question 5** 任意の $a\leq x,y\leq b$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}(\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-x^2}})+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}(\frac{1}{y}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-y^2}})\\
&\leq\frac{1}{x^\alpha y^\beta}-\frac{\sqrt{P}}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{1-(x^\alpha y^\beta)^2}}?
\end{aligned}$$

$P=1,\ \alpha=\beta=\frac{1}{2}$ の場合を考える．

**Question 6** 任意の $a\leq x,y\leq b$ に対して次が成り立つ．ただし $a=0.47\cdots,b=1/\sqrt{2}=0.707\cdots$ である．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})+\frac{1}{2}(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}})\\
\leq\ &\frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{\sqrt{2(1-xy)}}?
\end{aligned}$$

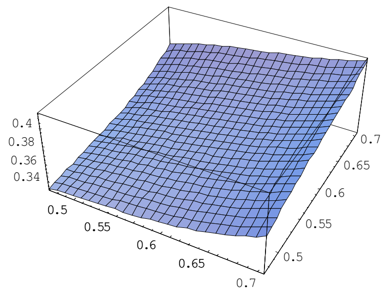


図 1: Question 6 のグラフ

このグラフにより Question 6 は成り立つことがわかる．しかし厳密な証明については今後の課題となる．

## 8 Question 3 の成立

**Theorem 13** *If* $Z_1,Z_2$ が独立なとき *Question 3* は成り立つ．

**Proof.** $S_1,S_2$ をそれぞれ $C_{n,FB,Z_1}(P_1),C_{n,FB,Z_2}(P_2)$ に attain する入力信号とする．$Z_1,Z_2$ および $S_1,S_2$ は独立だから次が成り立つ．

$$\tilde{S}=\sqrt{\alpha}S_1+\sqrt{\beta}S_2,\tilde{Z}=\sqrt{\alpha}Z_1+\sqrt{\beta}Z_2.$$

したがって

$$\begin{aligned}
&R_{\tilde{S}+\tilde{Z}}\\
=\ &R_{\tilde{S}}+R_{\tilde{S},\tilde{Z}}+R_{\tilde{Z},\tilde{S}}+R_{\tilde{Z}}\\
=\ &\alpha R_{S_1}+\beta R_{S_2}+R_{\sqrt{\alpha}S_1+\sqrt{\beta}S_2,\sqrt{\alpha}Z_1+\sqrt{\beta}Z_2}\\
&+R_{\sqrt{\alpha}Z_1+\sqrt{\beta}Z_2,\sqrt{\alpha}S_1+\sqrt{\beta}S_2}+\alpha R_{Z_1}+\beta R_{Z_2}\\
=\ &\alpha R_{S_1}+\beta R_{S_2}+\alpha R_{S_1,Z_1}+\beta R_{S_2,Z_2}\\
&+\alpha R_{Z_1,S_1}+\beta R_{Z_2,S_2}+\alpha R_{Z_1}+\beta R_{Z_2}\\
=\ &\alpha R_{S_1+Z_1}+\beta R_{S_2+Z_2}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$|R_{S_1+Z_1}|^\alpha |R_{S_2+Z_2}|^\beta \leq |\alpha R_{S_1+Z_1} + \beta R_{S_2+Z_2}| = |R_{\tilde{S}+\tilde{Z}}|.$$

したがって

$$\frac{|R_{S_1+Z_1}|^\alpha}{|R_{Z_1}|^\alpha} \frac{|R_{S_2+Z_2}|^\beta}{|R_{Z_2}|^\beta} \leq \frac{|R_{\tilde{S}+\tilde{Z}}|}{|R_{\tilde{Z}}|} \frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^\alpha |R_{Z_2}|^\beta}.$$

よって

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{S_1+Z_1}|}{|R_{Z_1}|} + \beta \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{S_2+Z_2}|}{|R_{Z_2}|} \\ \leq \ & \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{\tilde{S}+\tilde{Z}}|}{|R_{\tilde{Z}}|} + \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^\alpha |R_{Z_2}|^\beta}. \end{aligned}$$

$Tr[\tilde{S}] = Tr[\alpha R_{S_1} + \beta R_{S_2}] = n(\alpha P_1 + \beta P_2)$ だから

$$\begin{aligned} & \alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2) \\ \leq \ & C_{n,FB,\tilde{Z}}(\alpha P_1 + \beta P_2) + \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^\alpha |R_{Z_2}|^\beta}. \end{aligned}$$

q.e.d.

## 参考文献


[1] H.W.Chen and K.Yanagi, On the Cover's conjecture on capacity of Gaussian channel with feedback, IEICE Trans. Fundamentals, vol E80-A, no 11, pp 2272-2275, November 1997.

[2] H.W.Chen and K.Yanagi, Refinements of the half-bit and factor-of-two bounds for capacity in Gaussian channels with feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-45, no 1, pp 319-325, January 1999.

[3] H.W.Chen and K.Yanagi, Upper bounds on the capacity of discrete time blockwise white Gaussian channels with feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-46, no 3, pp 1125-1131, May 2000.

[4] H.W.Chen and K.Yanagi, The convex-concave characteristics of Gaussian channel capacity functions, IEEE Trans. Information Theory, vol 52, no 6, pp 2167-2172, 2006.

[5] T.M.Cover, Conjecture: Feedback does not help much, in Open problems in communication and computation, T.Cover and B.Gopinath (Ed.), pp 70-71, Springer-Verlag, New York, 1987.

[6] T.M.Cover and S.Pombra, Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, no 1, pp 37-43, January 1989.

[7] T.M.Cover and J.A.Thomas, Elements of Information Theory, New York, Wiley, 1991.

[8] A.Dembo, On Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, no 5, pp 1072-1089, September 1989.

[9] P.Ebert, The capacity of the Gaussian channel with feedback, Bell. Syst. Tech. J., vol 49, pp 1705-1712, 1970.

[10] R.G.Gallager, Information Theory and Reliable Communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[11] S.Ihara and K.Yanagi, Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II, Japan J. Appl. Math., vol 6, pp 245-258, 1989.

[12] Y.H.Kim, Feedback capacity of the first-order moving average Gaussian channel, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-52, no 7, pp 3063-3079, 2006.

[13] Y.H.Kim, A counterexample to Cover's $2P$ conjecture on Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-52, no 8, pp 3792-3793, 2006.

[14] M.Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.

[15] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, Lecture Notes in Math., vol 1299, pp 565-570, 1988.

[16] K.Yanagi, Necessary and sufficient condition for capacity of the discrete time Gaussian channel to be increased by feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-38, no 6, pp 1788-1791, November 1992.

[17] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, II, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-40, no 2, pp 588-593, March 1994.

[18] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, III, Bull. Kyushu Inst. Tech., Pure and Applied Mathematics, vol 45, pp 1-8, 1998.

[19] K.Yanagi, H.W.Chen and J.W.Yu, Operator inequality and its application to capacity of Gaussian channel, Taiwanese J. Math., vol 4, no 3, pp 407-416, 2000.

[20] K.Yanagi, J.W.Yu and I.F.Chao, On some inequalities for capacity in mixed Gaussian channels with feedback, Arch. Inequalities Appl., vol 2, pp 13-24, 2004.