

博士論文

Dirac-Born-Infeld 型 k 場の理論における Q-ball とその安定性について
(Q-balls in Dirac-Born-Infeld k field theory and the
stability)

平成 29 年 3 月

國 安 正 志

山口大学大学院理工学研究科

目次

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | イントロダクション | 4 |
| 1.1 | 弦理論と修正スカラー場の理論の関係 | 4 |
| 1.2 | Q -balls | 4 |
| 1.3 | gauged Q -balls | 5 |
| 1.4 | 本論文の構成 | 6 |
| 2 | Q-ball について | 7 |
| 2.1 | ソリトン解とは | 7 |
| 2.2 | 場の理論におけるノン・トポロジカルソリトン解 | 7 |
| 2.2.1 | 基礎方程式 | 7 |
| 2.2.2 | 境界条件と解の存在範囲 | 8 |
| 2.3 | Q -ball 解を持つポテンシャルと場の方程式の解 | 9 |
| 2.3.1 | V_3 モデル | 9 |
| 2.3.2 | V_4 モデル | 9 |
| 2.3.3 | V_{gauge} モデル | 10 |
| 2.4 | 安定性の解析 | 12 |
| 2.4.1 | カタストロフィ理論の適用 | 12 |
| 2.4.2 | 各モデルの安定性 | 14 |
| 3 | DBI 型 k 場の理論における Q-ball 解 | 18 |
| 3.1 | k 場の理論 | 18 |
| 3.2 | DBI 型 k 場の理論におけるノン・トポロジカルソリトン | 18 |
| 3.2.1 | 基礎方程式 | 18 |
| 3.2.2 | 解の存在領域 | 19 |
| 3.2.3 | $\phi(r)$ の振る舞いについて | 19 |
| 3.3 | $Q - E$ 図上の振る舞い | 21 |
| 3.3.1 | V_3 モデル | 21 |
| 3.3.2 | V_4 モデル | 21 |
| 3.3.3 | V_{gauge} モデル | 22 |
| 3.4 | 安定性の解析 | 22 |
| 3.4.1 | k 場の理論における Q -ball とカタストロフィ理論 | 24 |
| 3.4.2 | カタストロフィ理論による安定性の解析 | 25 |
| 4 | BI 型 gauged Q-balls | 27 |
| 4.1 | gauged Q -ball | 27 |
| 4.1.1 | 理論と基礎方程式 | 27 |
| 4.1.2 | 境界条件と解の存在範囲 | 28 |
| 4.1.3 | 計算結果 | 29 |
| 4.2 | BI 型 gauged Q -ball | 31 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.2.1 | 理論と基礎方程式 | 31 |
| 4.2.2 | 解の存在範囲 | 32 |
| 4.2.3 | 計算結果 | 32 |
| 5 | まとめと今後の課題 | 35 |
| 5.1 | まとめ | 35 |
| 5.1.1 | DBI スカラー場の理論における Q -ball について | 35 |
| 5.1.2 | BI 型 gauged Q -ball | 35 |
| 5.2 | 今後の課題 | 36 |
| 5.2.1 | 修正スカラー場の理論とノン・トポロジカルソリトン解 | 36 |
| 5.2.2 | 宇宙への影響 | 36 |
| 5.2.3 | BI 型ゲージ場における課題 | 36 |
| A | 付録 A:トポロジカルソリトン | 38 |
| A.1 | 自発的対称性の破れ | 38 |
| A.2 | kink 解 | 38 |
| A.3 | トポロジカルソリトンとノン・トポロジカルソリトン | 39 |
| B | 付録 B:具体的な場の方程式の解法 | 41 |
| B.1 | 近似解 | 41 |
| B.1.1 | 薄壁近似での解 | 41 |
| B.1.2 | 厚壁近似での解 | 41 |
| B.2 | 数値解 | 42 |
| B.2.1 | Q -ball の場合 | 42 |
| B.2.2 | gauged Q -ball の場合 | 44 |
| C | 付録 C:Affleck-Dine 機構 | 46 |
| C.1 | 宇宙のインフレーションとバリオン数生の問題 | 46 |
| C.2 | 超対称標準模型と Affleck-Dine 機構の概要 | 46 |
| C.3 | 平坦方向のポテンシャル | 47 |
| C.3.1 | ポテンシャルの具体的な形 | 47 |
| C.3.2 | V_{gauge} モデルの優位性 | 48 |
| C.4 | AD 機構における Q -ball とダークマター | 48 |
| D | 付録 D:カタストロフィ理論について | 50 |
| D.1 | カタストロフィ理論 | 50 |
| D.2 | ジーマンのカタストロフィ機械 | 51 |
| D.3 | 一般的なカタストロフィ | 51 |
| D.4 | トムの定理 | 53 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| E | 付録 E : 南部・後藤の作用と DBI 型スカラー場の理論の関係 | 54 |
| E.1 | 世界面 | 54 |
| E.2 | パラメータを取り直した際の面積不変性 | 55 |
| E.3 | 南部・後藤の作用 | 56 |
| E.4 | Dirac-Born-Infeld 型 k 場の理論と南部・後藤の作用の関係 . . . | 57 |
| | 参考文献 | 59 |

1 イントロダクション

1.1 弦理論と修正スカラー場の理論の関係

現代の素粒子物理学における重要な課題の一つとして、力の統一理論の構築が挙げられる。自然界には電磁気力・弱い力・強い力・重力の4つの力が確認されている。現状では重力は主に一般相対性理論やその修正理論で議論されており、一方でそれ以外の力はゲージ理論により記述される。特に電磁気学と弱い力を統合した電弱統一理論は実験的にもその正しさが確認されており、理論として確立されている。ところが、強い力まで含めた大統一理論も依然として立証されておらず、さらに重力まで含めた統一理論の構築は困難であると考えられていた。その要因は重力理論が繰り込み不可能な理論であること、加えてそもそもゲージ理論で書かれていないことが挙げられる。

このような問題を受けて、様々な困難を解決できる理論として、弦理論やその発展形である超弦理論が提唱された [1]。その根本的な思想は、物質の基本要素である素粒子を「粒子」とみなすのではなく、広がりを持つ「ひも」として扱う、というものである。またゲージ粒子は開弦により表され、重力子は閉弦によって記述されると考える。このように考えると重力の量子化に際して起こる発散の問題を解決でき、さらに重力を含めすべての力を含む理論となる。ただし、古典的な不変性を持つ弦理論が量子化される際もそれを失わないという条件から、弦の存在する時空の次元は10次元でなくてはならないことがわかっている。さらに超弦理論などでは11次元の時空を要請する。

一方で、基礎的な理論として場の理論があり、この理論自体に関してはすでに広く受け入れられている。ただし、標準的な場の理論を修正した理論は様々な形のものが提唱されており、その正当性については未知な部分も多い。このような現状の中、近年、運動項を修正した k 場の理論（非線形形の運動項を持つため非線形場の理論と呼ばれることもある）が議論されている。特に Dirac-Born-Infeld (DBI) 型 k 場の理論は非線形性の弱い極限で標準的な場の理論に一致すること、様々な良い性質を持つことから注目を集めている。

冒頭で述べた弦理論と DBI 型 k 場の理論は一見、無関係に思える。ところが後の研究から、いくつかの弦理論と対応関係があることが示された。また、10次元純 conformal field theory (CFT) を $AdS_5 \times S^5$ にコンパクト化し、さらにブレーン描像で4次元の理論に還元すると、DBI 型 k 場の理論の一種になることも示された [2]。このように力の統一理論として有力視される弦理論、および弦理論で必須となる高次元の理論と強い関係性を持つことから、DBI 型の理論は非常に大きな注目を集めている。

本論文では後述する Q -ball 解を DBI 型スカラー場の理論で導出し、その振舞いを調べている。また、本来は電磁場の修正理論として提唱されたことから電磁場を BI 型にした議論も行っている。

1.2 Q -balls

大域的な $SO(2)$ 、あるいは $U(1)$ 対称性を持つ理論で、その保存量である Noether charge がゼロでない系では、スカラーポテンシャル $V(\phi)$ における $V(\phi)/|\phi|^2$ が零でない点に最小点を持つと、 Q -ball と呼ばれるノン・トポロジカルソリトンが系のエネルギーを最小にすることが知られている。このような解は Freedberg [3] によって発見され、その後 Coleman [4] によって性質が調べられた。 Q -ball 解を持つポテンシャルは様々な形のモデルがある。例えばくりこみ不可能な ϕ^6 ポテンシャルモデルが挙げられる [5]。また、最小な超対称性を持つ修正標準理論 (MSSM) でも同様の解が現れる [6]。加えて AD 機構 [7] と呼ばれるバリオン数生成を説

明するモデルでも Q -ball が生成されることがわかっており、バリオン非対称性 [8] やダークマターの存在量 [9] に影響を及ぼすことがわかっている。さらに Q -ball が存在すると中性子の寿命などに関わるとの報告もある [10]。

現在のところ Q -ball は未発見である。ところが Q -ball 自体がダークマターである可能性も検討されており、その意味で重要な研究対象となっている。また前述のとおり宇宙や天体の進化への影響も無視できない。以上のことから素粒子論的宇宙論の分野では非常に重要な存在であるといえる。

Q -ball 解が実際に存在できるか知るうえで、安定性を解析することが重要となる。その手法は多岐にわたるが、近年、カタストロフィ理論を用いた解析・分類方法が提案された。カタストロフィ理論はもともと力学系の安定性を議論するための理論である。ここで力学系は自由度が 1 であることに注意する。一方で Q -ball は、無限の自由度を持つ場の理論におけるソリトン解である。無限の自由度を持つ場の理論でカタストロフィ理論が有効であるか否か自明ではないが、Sakai and Sasaki により Q -ball というソリトン解に対してはうまく安定性の構造を説明できることが示された [11]。このように Q -ball の性質は理論的・数学的にも興味深いものである。

なお、 Q -ball は真の真空 (図 1(a)) で作られる場合と、偽真空 (図 1(b)) で作られる場合がある。本稿では、偽真空における Q -ball を Q -bubble と呼び、区別する。一方で真の真空で作られる場合には、単に Q -ball とよぶ。

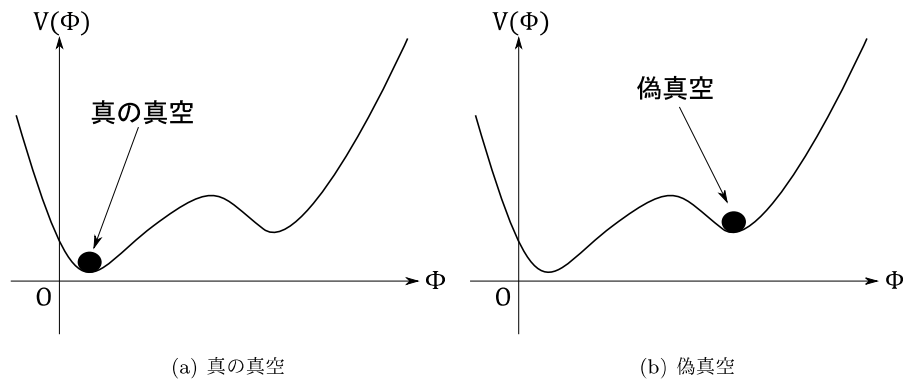


図 1: 真空について。(a) 真の真空と (b) 偽真空。本稿では真の真空で作られる解を Q -ball、偽の真空で作られる解を Q -bubble と呼ぶ。

本論文では主に DBI 型スカラー場の理論における Q -ball の振舞いについて述べる。主に第 3 章で我々の行った研究 [12] に基づいて議論する。

1.3 gauged Q -balls

Q -ball はスカラー場の理論で現れるノン・トポジカルソリトン解であるが、一方で現実には様々な場が存在する。もっとも単純には $SO(2)$ (あるいは $U(1)$) スカラー場に理論に $U(1)$ ゲージ場を付け加えることが考えられる。電磁場も $U(1)$ ゲージ場であるから、その意味で保存量 Q は Q -ball の持つ電荷と考えることができる。またクーロン斥力が働くため、ポテンシャルモデルによっては電荷 Q に上限が存在する。

このようなゲージ場と結合した Q -ball を gauged Q -ball と呼ぶ。ゲージ場のない場合は $SO(2)$ 対称性が大域的であるため、相回転が遠方でも残り、 Q -ball が大きくなる。一方でゲー

ジ場と結合した場合は、理論が局所 $SO(2)$ 対称性を持つため、 Q -ball をコンパクトにすることができる。この点が gauged Q -ball の大きな特徴である。

gauged Q -ball の研究は Lee *et al.* によって始められた [13]。Lee *et al.* の研究で用いられた V_4 ポテンシャルでは電荷の上限 Q_{max} の存在が示された。また Li *et al.* は放物型の piecewise モデルを考え [14]、Deshaies-Jacques と MacKenzie は $2+1$ 次元時空の Maxwell-Chern-Simon 理論における V_4 モデルで同様の考察を行った [15]。一連の研究ではすべてのモデルで電荷の上限 Q_{max} の存在が示された。そこで Anagnostopoulos *et al.* は反対の符号の電荷をもつフェルミオンを導入した [16]。また Arodz と Lis はコーン型モデルと呼ばれる特殊なポテンシャルを用いた [17]。Arodz と Lis の研究で Q -shell と呼ばれる配位が発見され、このような配位に移行することで電荷の上限 Q_{max} が存在しなくなることを示した。さらに Tamaki と Sakai により AD 機構に基づく gauged Q -ball が考察され、コーン型モデルと同様、 Q -shell が現れることを示した [18]。

ところで過去の研究では、主に Maxell 型の電磁場の理論が用いられてきた。そこで本論文では BI 型電磁場の理論における gauged Q -ball の振舞いを調べた。この点については第 4 章で議論を行う。

1.4 本論文の構成

本論文は以下のように構成される。まず、第 2 章で今までに行われた Q -ball に関する研究のレビューを行う。ここでは具体的な解の構成方法や、 Q -ball 解を持つポテンシャルを挙げ、実際の計算結果を紹介する。また、カタストロフィ理論を用いた安定性の解析について紹介し、その有効性を示す。

第 3 章では DBI 型 k 場の理論における Q -ball 解を検討する。まず基礎となる理論を述べ、解くべき基礎方程式などを導出する。この場合にもカタストロフィ理論を用いた安定性の解析の有効性を示すとともに、標準理論における Q -ball との違いなどを示す。

第 4 章では gauged Q -ball について議論する。まず今までに行われた gauged Q -ball に関する研究のレビューを行う。次に BI 型ゲージ場の理論を導入し、その場合の gauged Q -ball の振舞いについて考察する。さらに得られた結果から電磁場の非線形性がもたらす効果について述べる。

最後に第 5 章で本稿をまとめ、今後の展望などについて述べる。

なお単位系は自然単位系を採用し、計量の符号は $(+---)$ にとる。また本稿では便宜上、スカラー場の修正理論については DBI 型 k 場の理論と呼び、ゲージ場の修正理論については BI 型ゲージ場の理論と呼ぶ。

2 Q-ballについて

2.1 ソリトン解とは

ソリトン解とは様々な自然現象に現れる解の一つである。ソリトン解を持つ方程式は様々であるが、共通して非線形性を持つことがあげられる。一般的に伝搬しているソリトンの形状・速度は不変であり、これは粒子の「慣性の法則」に相当する。また、ソリトン同士が衝突しても互いに安定に存在し、粒子における「運動量保存則」が成立する。粒子と異なる点はエネルギーが局在化しており、有限の値をとることである。物理学分野では単にエネルギーが局在化している状態をソリトンと呼ぶ事が多い。また広義には、ある理論から導出される場の方程式の解をソリトン解と呼ぶこともある。

ソリトンの発見は1834年までさかのぼり、当時 J. Scott Russell は運河での孤立波を発見し、その観察を行った。その後水槽における実験も行い、波高の大きい波ほど伝搬速度は速いなどの性質を報告した。このようなソリトンが現れる系をソリトン系といい、ソリトン系の従う発展方程式をソリトン方程式という。このソリトン方程式は前述の水面だけでなく様々な系で存在することが示されており、佐藤理論 [19] により無限に存在することが示されている。物理学分野では、素粒子物理学や宇宙物理学、物性物理学などほぼすべての分野でソリトン解が議論されており、重要な研究対象となっている。特に後述するように、素粒子論的宇宙物理学では未発見のダークマターの候補として挙げられており、その重要性が高まっている。

2.2 場の理論におけるノン・トポロジカルソリトン解

素粒子論におけるソリトンは様々な形態で存在するが、本稿では主にノン・トポロジカルソリトンを扱う（トポロジカルの意味やその解の性質については付録 A に示した）。なお、全空間でエネルギーが有限で正則な解を広くノン・トポロジカルという場合もあるが、本稿では Q-ball 解を指す。

2.2.1 基礎方程式

ノン・トポロジカルソリトンは1976年 Friedberg らによって発見され [3]、Coleman により詳しく性質が調べられた [4]。今日ではこれらの解は Q-ball と呼ばれている。ここでは Coleman [4] やその後の研究に基づいたレビューを行う。

$SO(2)$ スカラー場の理論は

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - V(\phi) \right\}, \quad (2.1)$$

と書ける。ただし $V(\phi)$ はスカラー場のポテンシャル、 $\phi^a = (\phi^1, \phi^2)$ 、 $\phi \equiv \sqrt{(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2}$ である。この理論は $SO(2)$ 対称性を持つ。すなわち、変換

$$\begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

の下で不変である。ただし α は定数である。ネーターの定理によると、ある変換の下で理論が不変であれば必ず保存量が存在する。今の場合、保存量を Q とすると

$$Q \equiv \int d^3x (\phi^1 \partial_t \phi^2 - \phi^2 \partial_t \phi^1), \quad (2.3)$$

で与えられる。これは ϕ^1, ϕ^2 を内部空間とみなせば、角運動量保存則に対応することがわかる。さらに共役運動量を $\pi_a \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}^a$ とするとハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \pi_a \dot{\phi}^a - \mathcal{L}, \quad (2.4)$$

で与えられるから、系のエネルギーは

$$E \equiv \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + V(\phi) \right\}, \quad (2.5)$$

となる。

次に具体的な解を構築するために、適当な ansatz を置く。ここでは球対称な場を考え、等方的に相回転する場合

$$(\phi^1, \phi^2) = \phi(r) (\cos \omega t, \sin \omega t), \quad (2.6)$$

を考える。このとき場の方程式はオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dr} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad ' \equiv \frac{d}{dr}, \quad (2.7)$$

から

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} + \frac{\partial V_\omega}{\partial \phi}, \quad (2.8)$$

$$V_\omega \equiv V(\phi) - \frac{1}{2} \omega^2 \phi, \quad (2.9)$$

となる。この方程式は ϕ を位置 x, r を時間 t とみなせば、図 2 のように摩擦力 $(2/t)(dx/dt)$ の中で有効ポテンシャル $-V_\omega(x)$ の坂を転がる粒子を記述する運動方程式とみなすことができる。一方、保存量 Q やエネルギー E は

$$Q = \omega I, \quad I \equiv 4\pi \int r^2 dr \phi^2, \quad (2.10)$$

$$E = \frac{Q^2}{2I} + 4\pi \int r^2 dr \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V(\phi) \right\}, \quad (2.11)$$

と書ける。

2.2.2 境界条件と解の存在範囲

次に方程式 (2.7) を解くための境界条件を考える。 Q -ball 解では、原点 $r = 0$ から無限遠 $r = \infty$ に向かって、スカラー場 $\phi(r)$ は r の単調減少関数となる。従って、境界条件は

$$\frac{d\phi}{dr}(0) = 0, \quad \phi(\infty) = 0, \quad (2.12)$$

と書ける。このような解を持つためにはポテンシャルに対して $\min(V_\omega) < V(0)$, $d^2V_\omega/d\phi^2 > 0$ なる制限がつく。これは

$$\omega_{min}^2 < \omega^2 < m^2, \quad \omega_{min}^2 \equiv \min \left(\frac{2V}{\phi^2} \right), \quad m^2 \equiv \frac{d^2V}{d\phi^2}(0), \quad (2.13)$$

と等価である。この条件は直感的には以下のように説明できる。ポテンシャルの坂を原点に向かって転がる粒子は必ず初期に $V(0)$ より高い位置にある必要がある。そのためには ω_{min}^2 以上の回転角速度を持っていなければならない。また、図 2 から原点 $\phi = 0$ に到達する粒子はかならずポテンシャルの坂を上る必要がある。従って、(2.13) のような制限がつく。

このとき 2 つの極限が存在する。一つ目は $\omega^2 \rightarrow \omega_{min}^2$ での薄壁近似であり、もう一つは $\omega^2 \rightarrow m^2$ での厚壁近似である。これらの近似における解の振る舞いは、具体的な計算手法とともに付録 B に示した。

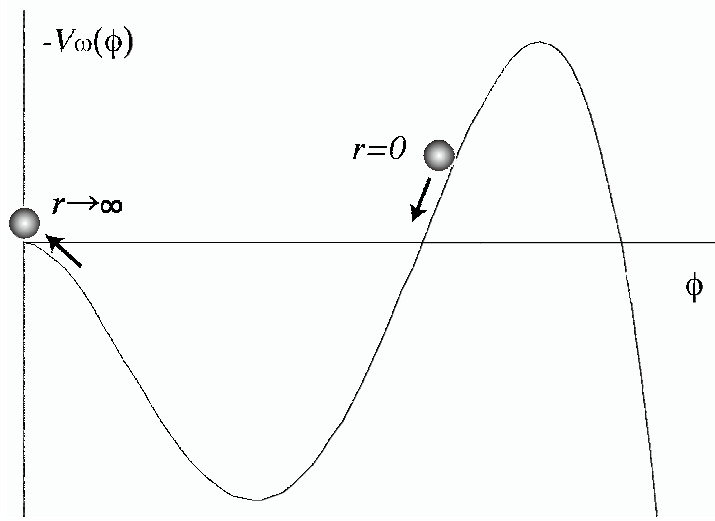


図 2: Q -ball 解のニュートン力学的表現。有効ポテンシャル中の坂を転がる粒子とみなすことができる。

2.3 Q -ball 解を持つポテンシャルと場の方程式の解

運動方程式 (2.8) を解くためにはさらに具体的なポテンシャル $V(\phi)$ の形が必要である。ここではいくつかの典型的なポテンシャルを挙げ、その中で解の振る舞いについて議論する。

2.3.1 V_3 モデル

次のようなポテンシャルを考え、これを V_3 モデルと呼ぶ。

$$V_3 = \frac{m^2}{2}\phi^2 - \mu\phi^3 + \lambda\phi^4, \quad (2.14)$$

ただし、数値的に解くために次のような無次元化を行う。

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}r, \quad \tilde{m} = \frac{\sqrt{\lambda}\mu}{m}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\sqrt{\lambda}\mu}{\omega}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\lambda}{\mu}\phi, \\ \tilde{Q} &= \lambda Q, \quad \tilde{E} = \frac{\lambda^{3/2}}{\mu}E. \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで $m^2 < 0.5$ の場合を Q -bubble、 $m^2 > 0.5$ の場合を Q -ball と呼ぶ。“bubble” と呼ぶ理由はポテンシャル $V(\phi)$ の最小値が $\phi \neq 0$ に存在し、このようなモデルは真空泡を作るためである。

このモデルにおいて境界条件 (2.12) の下で場の方程式 (2.8) を解き $\phi(r)$ を求めると図 3(a) および図 3(b) のようになる。また後述する安定性を議論するうえで重要となる $Q-E$ 図を描くと図 4 のようになる。

2.3.2 V_4 モデル

次のようなポテンシャルを考え、これを V_4 モデルと呼ぶ。

$$V_4 = \frac{m^2}{2}\phi^2 - \lambda\phi^4 + \frac{\phi^6}{M^2}, \quad (2.16)$$

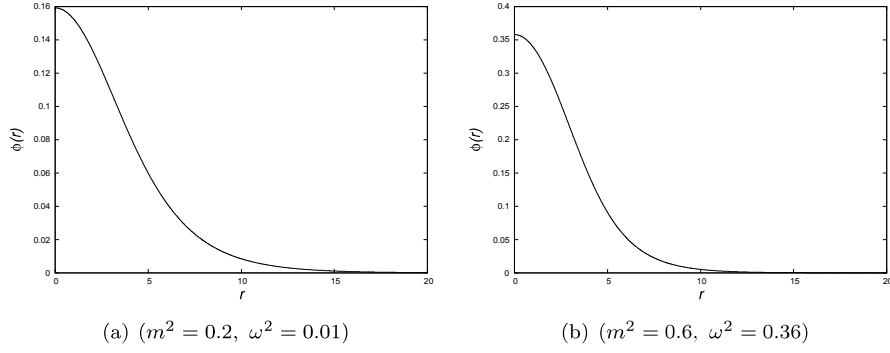


図 3: $\phi(r)$ の分布。(a)Q-bubble の場合と (b)Q-ball の場合について。

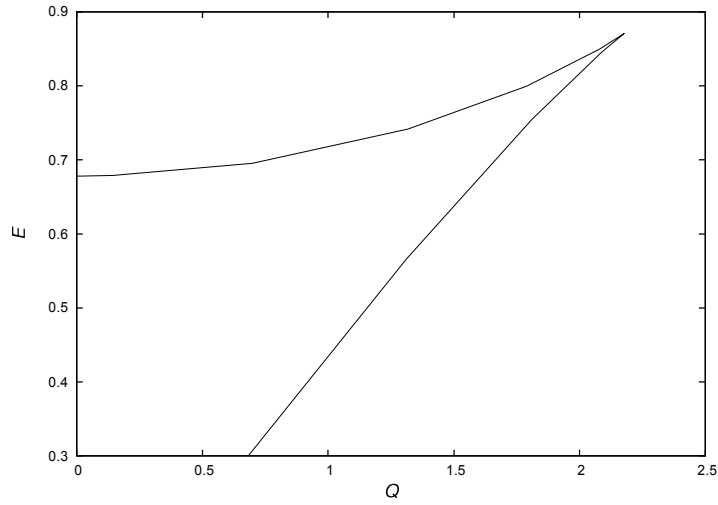


図 4: Q-bubble($m^2 = 0.2$) における $Q - E$ 図。

ただし、数値的に解くために次のような無次元化を行う。

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \lambda M r, \quad \tilde{m} = \frac{m}{\lambda M}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\lambda M}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi}{\sqrt{\lambda M}}, \\ \tilde{Q} &= \lambda Q, \quad \tilde{E} = \frac{E}{M}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

V_3 モデルと同様、ここで $m^2 < 0.5$ の場合を Q-bubble、 $m^2 > 0.5$ の場合を Q-ball と呼ぶ。

このモデルで $\phi(r)$ を計算すると図 3(a) や図 3(b) とほぼ同様の形となる。一方で Q-bubble の場合に $Q - E$ 図を描くと図 5 のようになり、 V_3 モデルと異なる振る舞いをする。

2.3.3 V_{gauge} モデル

Q-ball は宇宙初期に生成された可能性がある。特に超対称性に基づいた、Affleck-Dine 機構 (AD 機構) によるバリオン生成のシナリオでは、スカラー反クォーク ϕ の振動によって Q-ball の生成が行われると考えられている。ここで Q-ball の崩壊が起こると宇宙の物質密度を過剰に増やす危険性があり、モデルの成否に大きくかかわってくる。従ってこのモデルを考察することは宇宙論とも関連した重要な問題である。なお、AD 機構については付録 C にまとめた。

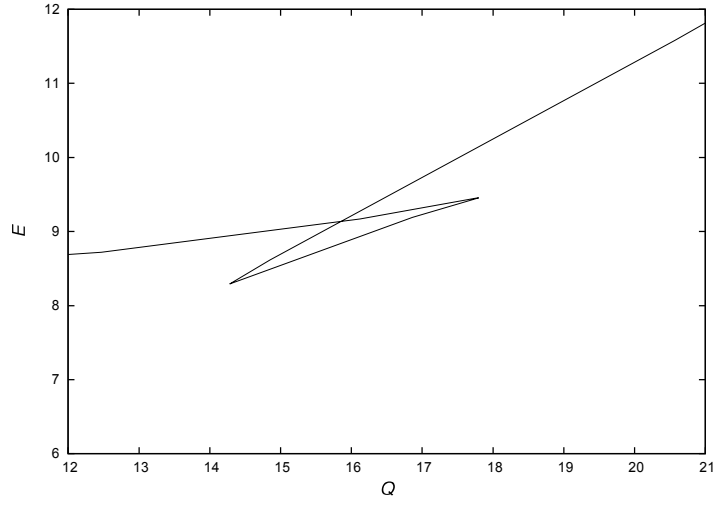


図 5: Q -bubble($m^2 = 0.3$) における $Q - E$ 図。

ゲージ場を媒介する AD モデルの場合、ポテンシャルは

$$V_{\text{gauge}} = m_{\text{gauge}}^4 \ln \left(1 + \frac{\phi^2}{m_{\text{gauge}}^2} \right). \quad (2.18)$$

である。数値的に解くために次のような無次元化を行う。

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= m_{\text{gauge}} r, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{m_{\text{gauge}}}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi}{m_{\text{gauge}}}, \\ Q &= Q, \quad \tilde{E} = \frac{E}{m_{\text{gauge}}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

このモデルで $\phi(r)$ を計算すると図 3(a) や図 3(b) とほぼ同様の形となる。 $Q - E$ 図を描くと図 6 のようになり、 V_4 モデルにおける Q -ball と同様の振る舞いをする。

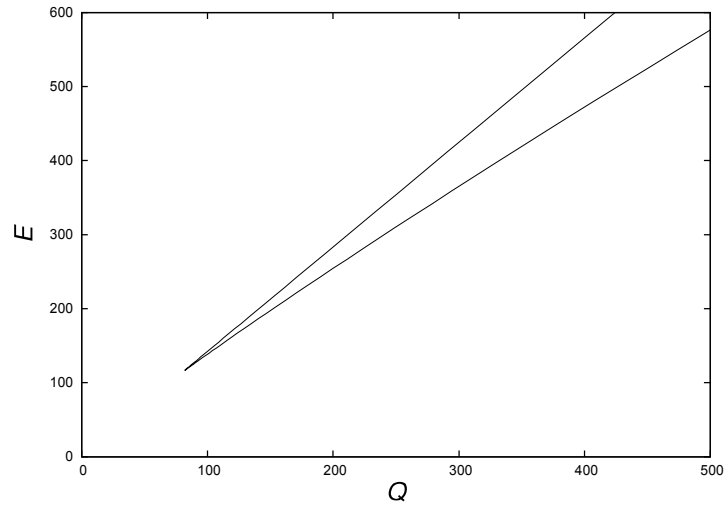


図 6: V_{gauge} における $Q - E$ 図。

2.4 安定性の解析

導出された解の安定性を調べることは物理的に実在可能か知るうえで重要である。Coleman は薄壁近似を用いて Q が大きくなる場合、 Q -ball は安定であることを示した [4]。一方で Kusenko は V_3 モデルの場合に厚壁近似を用いて、 Q が小さい場合に安定であることを示した [20]。その後 Multamaki と Vilja は安定性はポテンシャルの形に依存することを指摘した [21]。一般的なポテンシャルの場合、Paccetti と Schmidt は $(\omega/Q)dQ/d\omega$ の符号により安定性を調べることができることを証明した [22]。

以上のように Q -ball の安定性を調べるために多数の手法が提案されているが、本稿では Sakai と Sasaki [11] に従い、カタストロフィ理論を用いた手法を採用する。この手法を用いると、全パラメータ空間で安定性の構造が理解できる。また、 Q -ball だけでなく、ボソンスター (重力場と結合したスカラー場の理論で現れるノン・トポロジカルソリトン解) の安定性を調べることもできる [23]。従ってより応用範囲の広い手法といえる。なお、カタストロフィ理論については付録 D にまとめた。本節では Q -ball の安定性をカタストロフィ理論によってどのように解析するか述べる。

2.4.1 カタストロフィ理論の適用

カタストロフィ理論を適用するに当たって重要な点は、与えられた Q -ball 系について構造変数、コントロール変数、そしてポテンシャルを適切に選択することである。ある与えられた $V(\phi)$ と Q の下、平衡解 $\phi(r)$ 付近のある一つのパラメータを持つ摂動場 $\phi_\omega(r)$ を考える。無限の自由度を含む場の理論であるが、 Q -ball 系の場合はこのような摂動場を考えることができる。従って本小節で示すような手法により、カタストロフィ理論を用いた安定性の解析が可能となる。また次の小節で示すように、結果的にもうまく Q -ball の安定性を表しているため、妥当な手法であるといえる。さて、ある一つのパラメータは $I[\phi_\omega] = Q/\omega$ を満たす。このとき、エネルギーは $I[\phi_\omega] = Q/\omega$ の関数で $E(\omega) \equiv E[\phi_\omega]$ とする。

ϕ_ω が平衡解であれば、 $dE/d\omega = (\delta E/\delta\phi_\omega)d\phi_\omega/d\omega = 0$ であるから、 $\delta E/\delta\phi_\omega = 0$ を満たす。そこで ω を構造変数、 E をポテンシャルとする。一方で保存量 Q と $V(\phi)$ のパラメータは手で与えられるため、コントロールパラメータとみなすことができる。以下ではモデルパラメータを $P_i (i = 1, 2, \dots)$ とおく。具体的には以下のような手順により Q -ball の安定性を解析する。

- ω およびモデルパラメータ P_i を変え、場の方程式 (2.8) を境界条件 (2.12) の下で解く。
- 平衡空間 $M = \{(\omega, P_i, Q)\}$ を求めるため Q を (2.10) から計算する。 M を決める式を $f(\omega, P_i, Q)$ とする。
- 安定性の変化する点 $\Sigma = \{(\omega, P_i, Q) | \partial f/\partial\omega = 0, f = 0\}$ を求めるため M の折れ曲がり点、すなわち $\partial P_i/\partial\omega = 0, \partial Q/\partial\omega = 0$ となる点を探す。
- 様々なパラメータの下、 Σ の周りでエネルギー (2.11) を計算する。安定性の変化する Σ の周りでは、同じ Q を持っているが、複数の E をとる異なった解が存在する。このときより小さい E を持った解のほうが安定であると考えられる。
- 以上の結果からコントロール空間 $C = \{P_i, Q\}$ 上での解の振舞いを求める。

以下では各ポテンシャル $V(\phi)$ 毎に、カタストロフィのタイプなどとともに説明する。

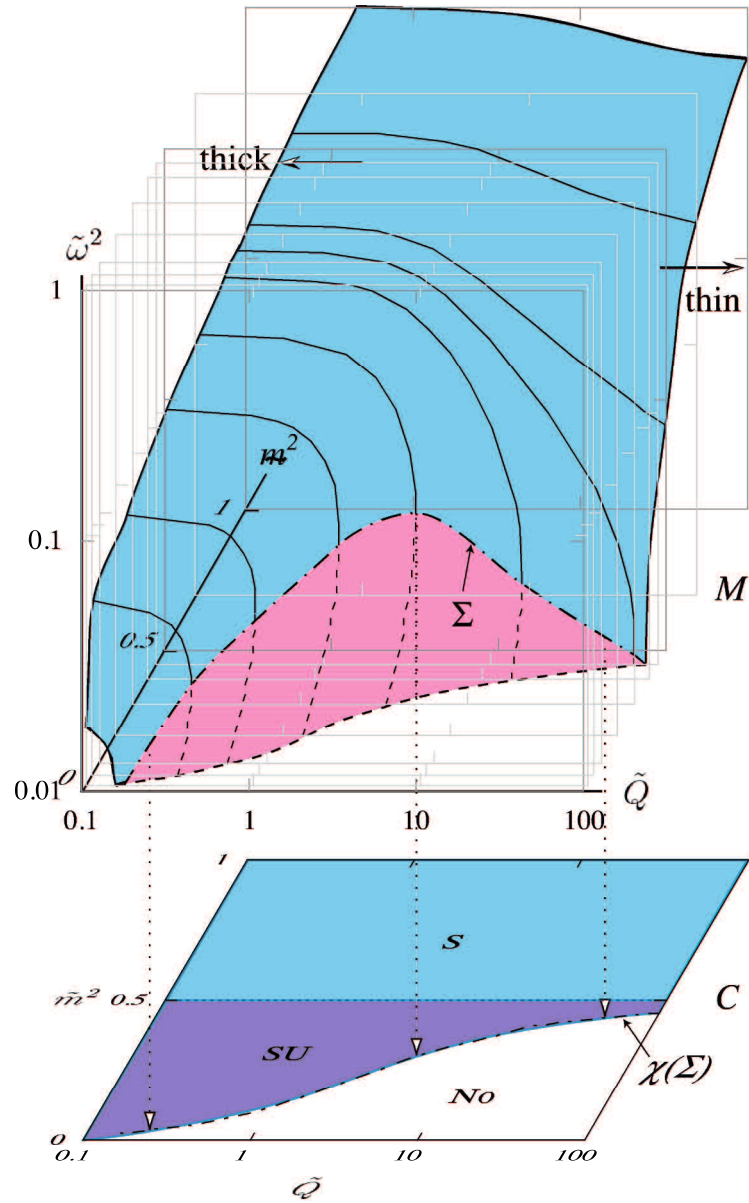


図 7: V_3 モデルの平衡空間 $M = \{(\omega^2, m^2, Q)\}$ 、カタストロフィ写像 $\chi(M)$ およびコントロール空間 $C = \{(m^2, Q)\}$ 。 M 上での一点鎖線は安定性の変化する点 Σ の集合であり、 C 上ではそれらはカタストロフィ写像となっている。 M 上の実線（明るいシアン）及び破線はそれぞれ安定、不安定な解に対応する。“thin”、“thick” とラベルされた矢印は、それぞれ薄壁極限 $\omega^2 \rightarrow \omega_{min}^2$ 、厚壁極限 $\omega^2 \rightarrow m^2$ に対応する。 C 上に書かれた S 、 SU 、 No は固定された (m^2, Q) でそれぞれ一つの安定平衡解、一つの安定平衡解と不安定平衡解及び解が存在しないことを示す。文献 [11] より引用。

2.4.2 各モデルの安定性

a. V_3 モデル

図7に V_3 モデルの平衡空間 $M = \{\omega^2, m^2, Q\}$ 、カタストロフィ写像 $\chi(M)$ およびコントロール空間 $C = \{m^2, Q\}$ を示す。これから V_3 モデルは折れ目のカタストロフィに属することがわかる。また、安定性の構造は以下ようになる。

- $m^2 \geq 1/2$: すべての解は安定である。
- $m^2 < 1/2$: 各 m^2 について最大となる保存量 Q_{max} があり、それ以上の Q では解が存在しない。 $Q < Q_{max}$ では安定、不安定の二つの解が存在する。またいくら Q が小さくても、安定な Q バブルが存在する。

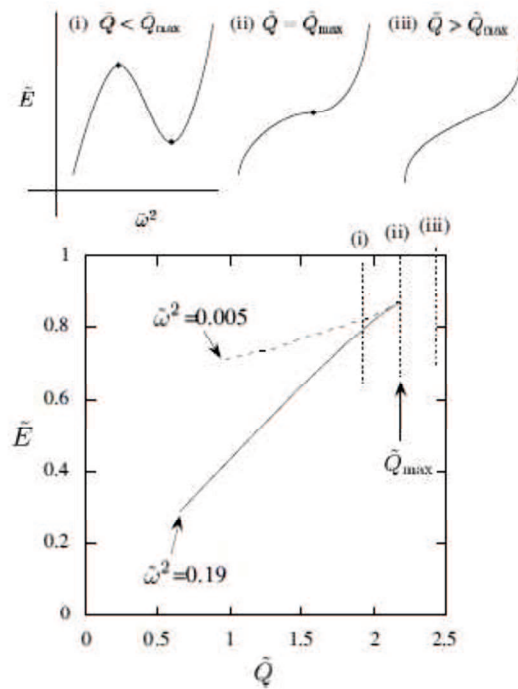


図8: V_3 モデル ($m^2 = 0.2$) におけるポテンシャル $E(\omega; m^2, Q)$ の模式図と $Q - E$ 図。実線は安定解、点線は不安定解に対応する。文献 [11] より引用。

平衡空間 M のみではいずれの面が安定、もしくは不安定に相当するか判別できないため、各平衡解に対してエネルギー E を計算する必要がある。そこで図8に Σ 付近の $Q - E$ 図とポテンシャルを示す。ここで同じ Q に対してより小さい E のほうが安定解に相当する。この $Q - E$ 図を各 m^2 で計算することで図7での安定性がわかる。

b. V_4 モデル

図9に V_4 モデルの平衡空間 $M = \{\omega^2, m^2, Q\}$ 、カタストロフィ写像 $\chi(M)$ およびコントロール空間 $C = \{m^2, Q\}$ を示す。これから V_3 モデルは折れ目のカタストロフィに属することがわかる。また、安定性の構造は以下ようになる。

- $m^2 \geq 1/2$: 各 m^2 について最小となる保存量 Q_{min} があり、それ以下の Q では解が存在しない。 $Q_{min} < Q$ では安定・不安定の二つの解が存在する。
- $m^2 < 1/2$: 各 m^2 について最大となる保存量 Q_{max} があり、最小となる保存量 Q_{min} がある。安定平衡解は $Q < Q_{min}, Q > Q_{max}$ では消滅する。一方で $Q_{min} < Q < Q_{max}$ では一つの安定平衡解と二つの不安定平衡解が存在する。 m^2 が小さくなる Q_{max} と Q_{min} が接近する。 $m^2 \sim 0.26$ で Q_{min} と Q_{max} が一致し、それ以下になると安定平衡解が消滅する。

図 10 に Σ 付近の $Q - E$ 図とポテンシャルを示す。ここで同じ Q に対してより小さい E のほうが安定解に相当する。これから図 9 での安定性がわかる。

c. V_{gauge} モデル

図 11 に V_{gauge} モデルの平衡空間 $M = \{(\omega^2, Q)\}$ を示す。この場合コントロール変数が一つであるから、トムの定理より折れ目のカタストロフィに属することが分かる。また安定性の構造は次のようになる。最少となる保存量 Q_{min} があり、それ以下の Q では解が存在しない。 $Q_{min} < Q$ では安定・不安定の二つの解が存在する。

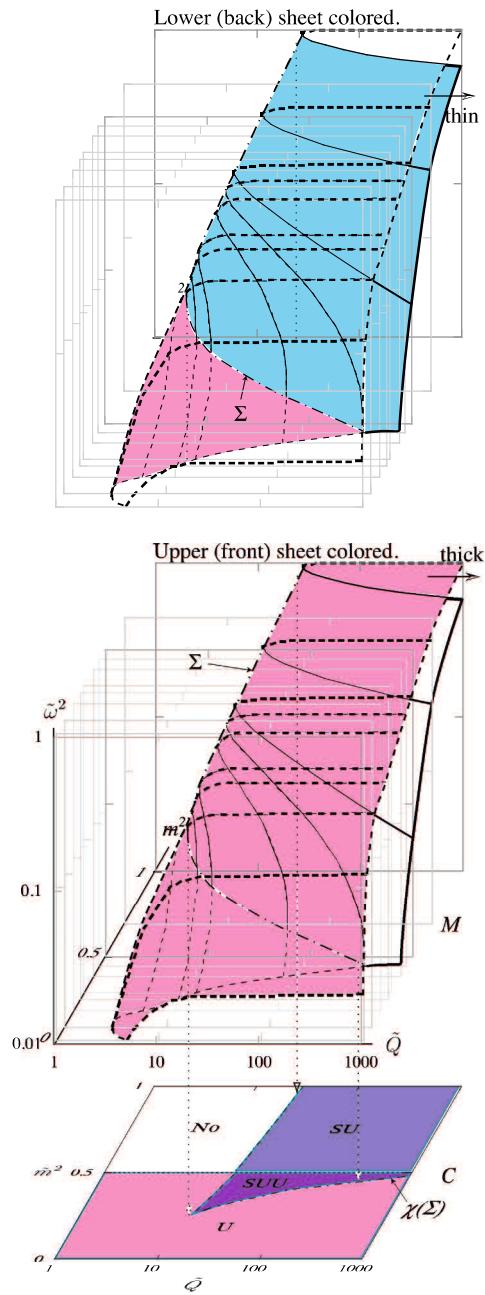


図 9: V_4 モデルの平衡空間 $M = \{(\omega^2, m^2, Q)\}$ 、カタストロフィ写像 $\chi(M)$ およびコントロール空間 $C = \{(m^2, Q)\}$ 。 M 上での一点鎖線は安定性の変化する点 Σ の集合であり、 C 上ではそれらはカタストロフィ写像となっている。 M 上の実線（明るいシアン）及び破線はそれぞれ安定、不安定な解に対応する。“thin”、“thick” とラベルされた矢印は、それぞれ薄壁極限 $\omega^2 \rightarrow \omega_{min}^2$ 、厚壁極限 $\omega^2 \rightarrow m^2$ に対応する。 C 上に書かれた U 、 SU 、 SUU 、 No は固定された (m^2, Q) でそれぞれ一つの安定平衡解、一つの安定平衡解と不安定平衡解、一つの安定平衡解と二つの不安定平衡解、及び解が存在しないことを示す。文献 [11] より引用。

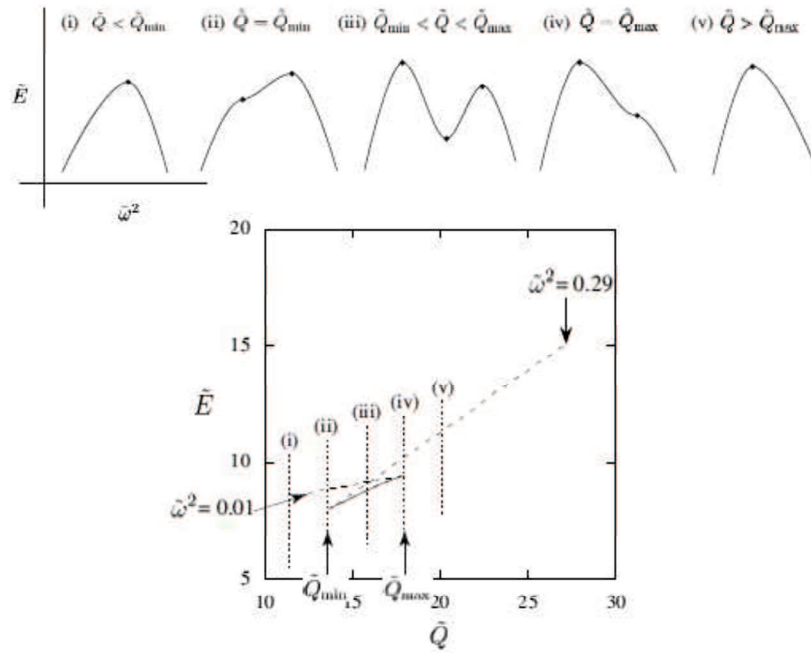


図 10: V_4 モデル ($m^2 = 0.3$) におけるポテンシャル $E(\omega; m^2, Q)$ の模式図と $Q - E$ 図。実線は安定解、点線は不安定解に対応する。文献 [11] より引用。

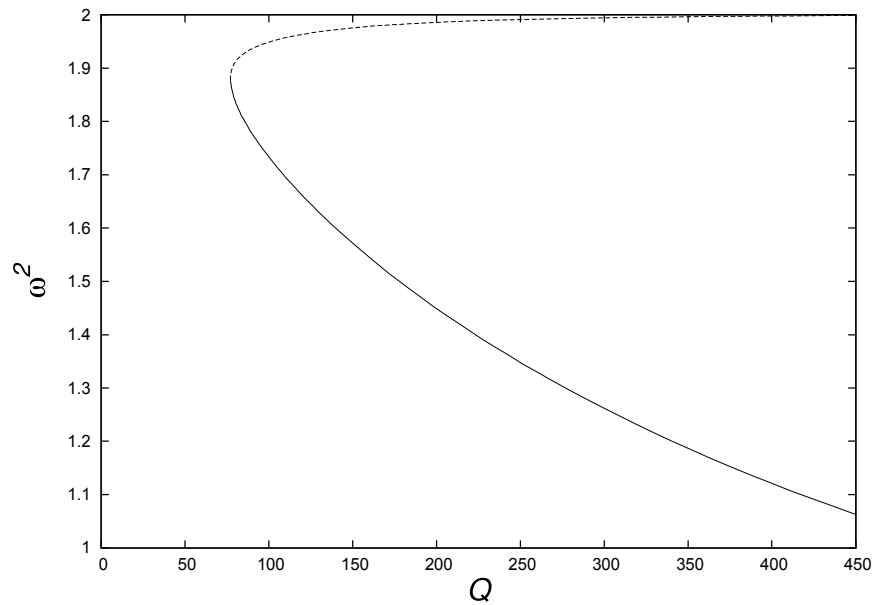


図 11: V_{gauge} モデルの平衡空間 $M = \{(\omega^2, Q)\}$ 。 M 上の実線及び破線はそれぞれ安定、不安定な解に対応する。

3 DBI型 k 場の理論における Q -ball 解

3.1 k 場の理論

第2章では正準スカラー場の理論における Q -ball 解についてレビューを行った。ところで、運動項を修正したような理論も考えることができ、これらを総称して k 場の理論と呼ぶ（運動項が線形でないため、非線形理論と呼ぶこともある）。 k 場の理論は様々な形の理論が提唱されているが、近年ではひも理論や高次元理論との関連性 [24] から Dirac-Born-Infeld 型の運動項

$$K = -\frac{1}{f(\phi)}\sqrt{1-2f(\phi)X} + \frac{1}{f(\phi)}, \quad (3.1)$$

が注目されている。ただし

$$X \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \quad (3.2)$$

である。今回は $f(\phi) = b$ (定数) の場合を扱うが、これは南部・後藤の作用と関係がある (付録 E 参照)。

オリジナルの Born-Infeld 理論は電磁場の修正理論であり、Born と Infeld によって提唱された [25]。彼らはローレンツ変換を参考に (3.1) と同様の理論を構築し、速度が光速を超えないように場もある一定の強さ以上にならない、と考えた。その後電磁場のようなベクトル場の理論だけでなく、スカラー場 [26, 27] の理論やテンソル場の理論 [28] にも応用された。まずハイゼンベルグが、火の玉モデルにおけるハドロン散乱の計算を行うために導入した [26]。その後ディラックにより、拡張可能な電子モデルの一つとして紹介された [27]。

k 場の理論は、強い相互作用の物理 [29] や位相欠陥 [30] などで議論されており、特に Saragi は DBI 型 k 場の理論で大域ひもの議論を行った [31]。また宇宙論でもインフレーションモデルの一つである k インフレーションで議論されており [32]、cosmic coincidence 問題を解決する方法として提案されている [33]。以上のことから k 場の理論は素粒子論的宇宙論において重要な役割を担っているといえる。

3.2 DBI 型 k 場の理論におけるノン・トポロジカルソリトン

k 場におけるノン・トポロジカルソリトンは、定常・球対称のもと Alonso と Garcia によって議論された [34]。ところが Q -ball のように一様な相回転をする ansatz の下では議論されていなかった。そこで本学位研究では、特に DBI 型 k 場の理論における Q -ball に注目し、その性質を調べることにした [12]。

3.2.1 基礎方程式

$SO(2)$ 対称性を持つ DBI 型 k 場の理論のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{b}\sqrt{1-2bX} + \frac{1}{b} - V(\phi), \quad (3.3)$$

と書ける。ただしここでは X を

$$X \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^a \quad (3.4)$$

と定義した。このときネーターの定理から保存量

$$Q = \int d^3x \frac{\phi_1\partial_t\phi_2 - \phi_2\partial_t\phi_1}{\sqrt{1-2bX}} = \omega I, \quad (3.5)$$

$$I \equiv \int d^3x \frac{\phi^2}{\sqrt{1-2bX}},$$

を持つことが示される。共役運動量は

$$\Pi^a = \frac{\dot{\phi}^a}{\sqrt{1-2bX}}, \quad (a = 1, 2), \quad (3.6)$$

であるから、系のエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left\{ \Pi^a \dot{\phi}^a + \frac{1}{b} \sqrt{1-2bX} - \frac{1}{b} + V(\phi) \right\} \\ &= \frac{Q^2}{I} + \int d^3x \left\{ \frac{1}{b} \sqrt{1-2bX} - \frac{1}{b} + V(\phi) \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

と書ける。

次に ansatz を考えるが、 Q -ball 解を得るために (2.6) と同じものを考える。 ω を固定して S を ϕ について変分をとると、場の方程式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi'}{F} \right)' + \frac{2}{r} \frac{\phi'}{F} + \frac{\omega^2 \phi}{F} &= \frac{dV}{d\phi}, \\ F &\equiv 1 - b(\omega^2 \phi^2 - \phi'^2), \quad ' \equiv \frac{d}{dr}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

が得られる。この方程式を数値的に解くために変数 $\psi \equiv \phi'/F$ を導入すると (3.8) 式は

$$\begin{aligned} \psi' &= -\frac{2}{r} \psi - \frac{\omega^2 \phi}{F} + \frac{dV}{d\phi}, \\ \phi' &= \psi \sqrt{\frac{1 - b\omega^2 \phi^2}{1 - b\psi^2}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。

3.2.2 解の存在領域

解の境界条件は $b = 0$ における (2.12) と同じである。

一方で解の存在領域は次のように変更される。まず ω の最小値 ω_{min} であるが、 $b = 0$ のように解析的に求めることができない。ところが後に示すように、数値的に計算すると $b \neq 0$ の場合にも ω_{min} が存在することがわかる。一方で ω_{max} に近づくと、 ϕ が 0 に近くなり、ほぼ $b = 0$ での振る舞いに帰着する。従って $\omega_{max}^2 \sim m^2$ となる。

さらに DBI 型 k 場の理論では、もう一つの制限

$$1 - b\omega^2 \phi^2 > 0, \quad (3.10)$$

が存在する。ところが後述するように b を大きくするとスカラー場の振幅が小さくなるため $b\omega^2 \phi^2$ が 1 を超えることはなく、この条件が破られることはない。

3.2.3 $\phi(r)$ の振る舞いについて

まずスカラー場の $\phi(r)$ の分布について b の応答を調べる。図 12 に V_3 モデルにおける $\phi(r)$ を計算した結果を示す。ただし $m^2 = 0.7$, $\omega^2 = 0.36$ とした。興味深いことに $b = 10$ での振幅は $b = 0$ より大きく、さらに b を増やすと振幅が小さくなっていく。

次に振幅の b 依存性を見るために $\phi(0)$ の b 依存性を調べた。その結果を図 13(a) に示す。これから b が大きくなると $b \sim 7$ 程度で $\phi(0)$ が最大となることがわかる。さらに b を大きくすると $\phi(0)$ は小さくなり、ゼロに近づく。このように b を大きくしても振幅が小さくなるため、

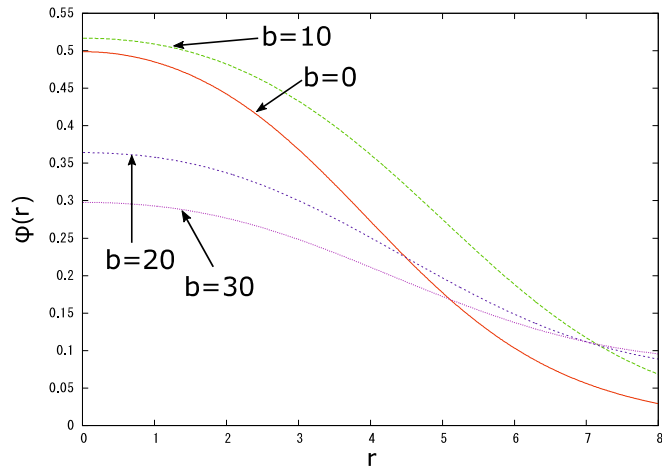
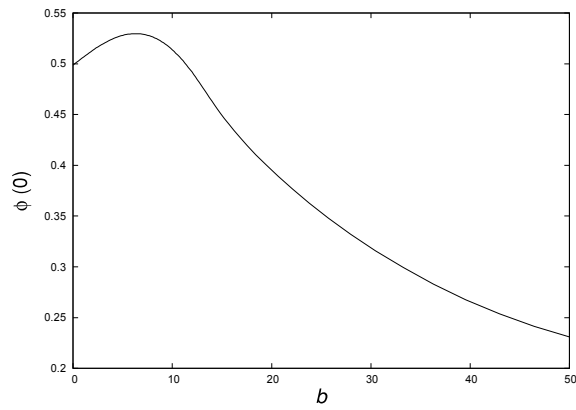
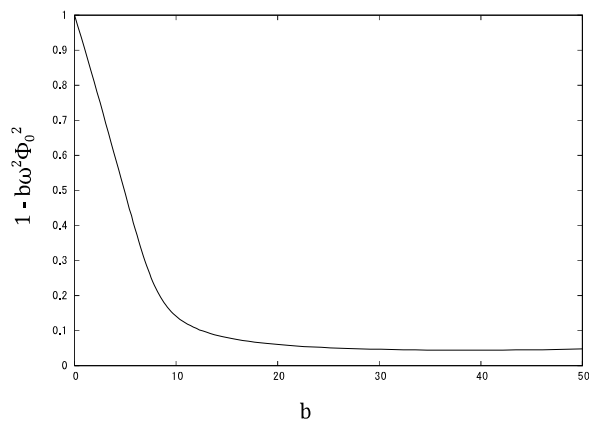


図 12: V_3 モデルにおける $\phi(r)$ の分布。 $m^2 = 0.7$, $\omega^2 = 0.36$ に固定し、 b による分布の違いを示した。



(a) $\phi(0)$ の b 依存性。



(b) $1 - b\omega^2\phi(0)^2$ の b 依存性。

図 13: $\phi(0)$ の b に対する応答。ただし $m^2 = 0.7$, $\omega^2 = 0.36$ とした。

結果として条件 (3.10) を破ることはない。従って非線形性が非常に強い場合でも DBI 型 k 場の理論では、 Q ボールを生成できることがわかる。

なお、図 12 および図 13(a) は V_3 モデルでの計算例であるが、他のポテンシャルモデルでも同様の振る舞いをする。

3.3 $Q - E$ 図上の振る舞い

3.3.1 V_3 モデル

まず無次元化を考える。(2.15) に加え、 b について次のように置く。

$$\tilde{b} = \frac{\mu^4}{\lambda^3} b. \quad (3.11)$$

図 14 に V_3 モデルの $Q - E$ 図上の振る舞いを示す。これから $m^2 \leq 0.5$ では最大値 Q_{max} が存在することが分かる。また、 b を大きくすると Q_{max} も大きくなることが分かる。すなわち、 m^2 を大きくすることと b を大きくすることは同じ効果を及ぼす。また $m^2 \geq 0.5$ の場合 ω_{min} が大きくなる。ただし、尖り点は存在しない。

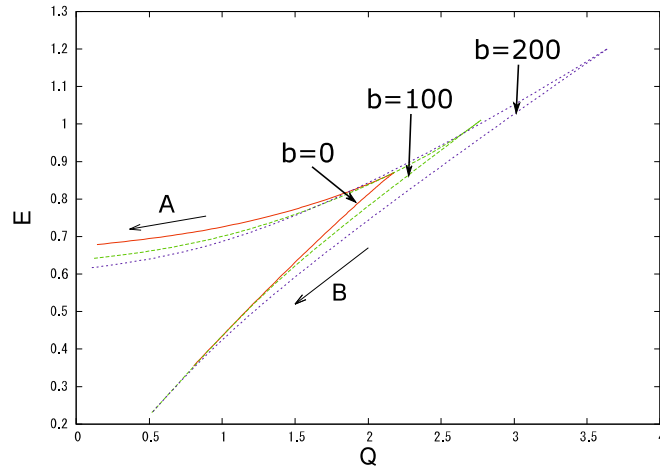


図 14: V_3 モデルにおける $Q - E$ 図。ただし $m^2 = 0.2$ とした。A と B はそれぞれ薄壁近似、厚壁近似を表す。この図から Q_{max} が b に伴い大きくなることが分かる。

3.3.2 V_4 モデル

まず無次元化を考える。(2.17) に加え、 b について次のように置く。

$$\tilde{b} = \lambda^3 M^4 b. \quad (3.12)$$

図 15 に V_4 モデルの $Q - E$ 図上の振る舞いを示す。これから、 $m^2 \leq 0.5$ では Q_{min} と Q_{max} が存在することが分かる。ところが b を大きくするとそれらが接近し、あるところで消滅することが分かる。すなわち、 m^2 を小さくすることは b を大きくすることと同じ効果を及ぼす。一方で $m^2 \geq 0.5$ では Q_{min} が存在し、 b を大きくするに伴い、 Q_{min} が大きくなることが分かる。したがってこの場合は m^2 を大きくすることは b を大きくすることと同じ効果を及ぼす。

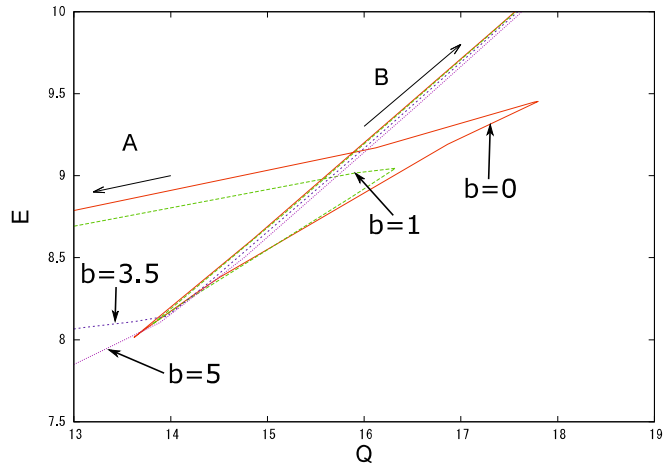


図 15: V_4 モデルにおける $Q-E$ 図。ただし $m^2 = 0.3$ とした。A と B はそれぞれ薄壁近似、厚壁近似を表す。この図から Q_{min} および Q_{max} が b の増加に伴い接近し、あるところで消滅することが分かる。

3.3.3 V_{gauge} モデル

まず無次元化を考える。(2.19) に加え、 b について次のように置く。

$$\tilde{b} = m_{\text{gauge}}^4 b. \quad (3.13)$$

図 16 に V_{gauge} モデルの $Q-E$ 図上の振舞いを示す。これから Q_{min} が存在し、 b を大きくすると Q_{min} が小さくなることがわかる。

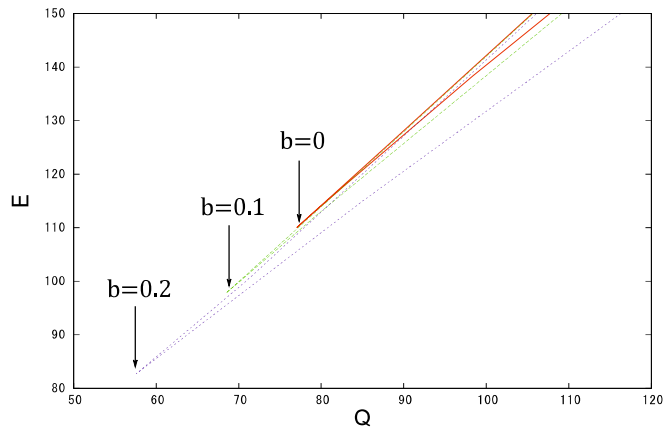
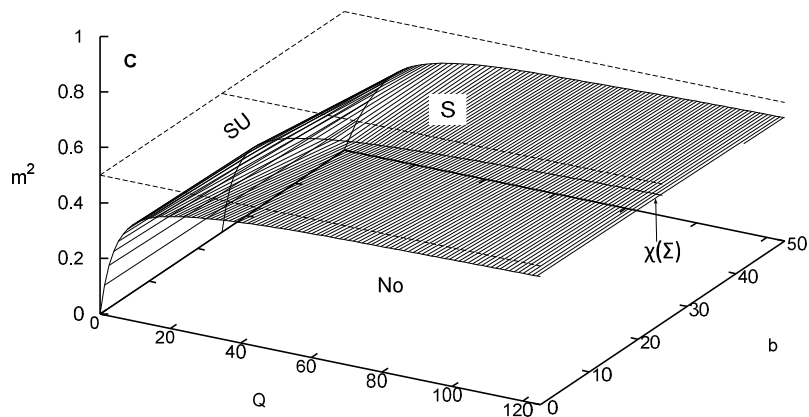


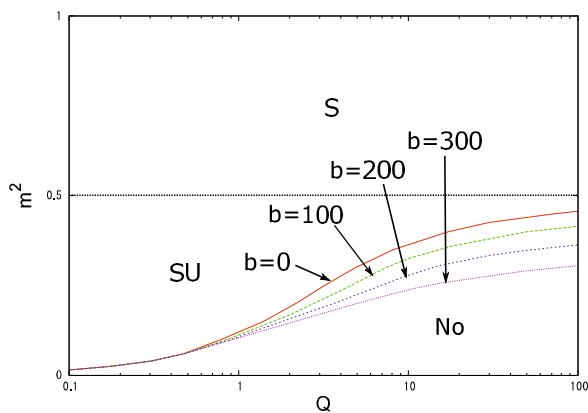
図 16: V_{gauge} モデルにおける $Q-E$ 図。この図から Q_{min} が存在し、 b に伴い小さくなることが分かる。

3.4 安定性の解析

前節で DBI 型 k 場の理論においても Q -ball 解が存在し、 b の上限がないことを示した。ここでは 2.4 節で紹介したカタストロフィ理論に基づいて安定性の解析を行う。



(a) コントロール空間 $C = \{(m^2, b, Q)\}$



(b) コントロール平面 $C = \{(m^2, Q)\}$

図 17: V_3 モデルにおけるコントロール空間 $C = \{(m^2, b, Q)\}$ 上へのカタストロフィ写像 $\chi(\Sigma)$ 。
 S , SU , No の意味は図 7 と同じ。(a) V_3 モデルにおけるコントロール空間 $C = \{(m^2, b, Q)\}$ 上でのカタストロフィ写像 $\chi(\Sigma)$ 。(b) V_3 モデルにおける b 一定の断面図でのカタストロフィ写像 $\chi(\Sigma)$ 。

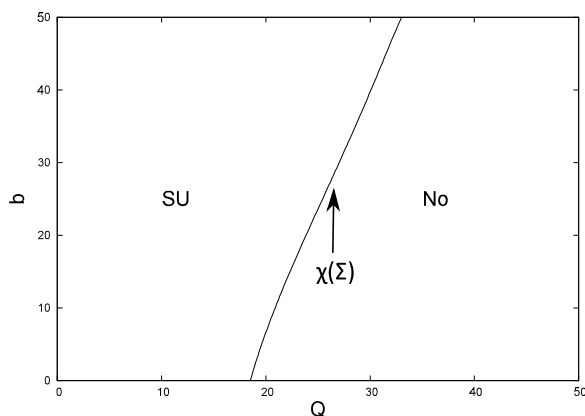
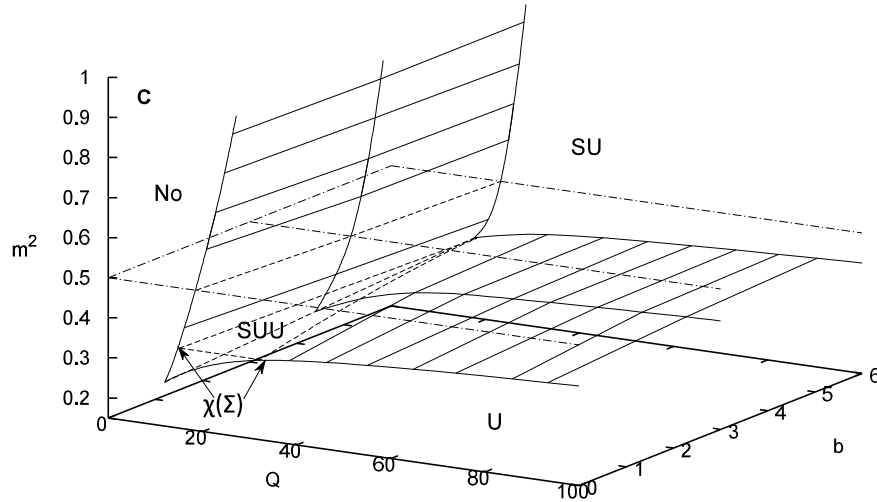


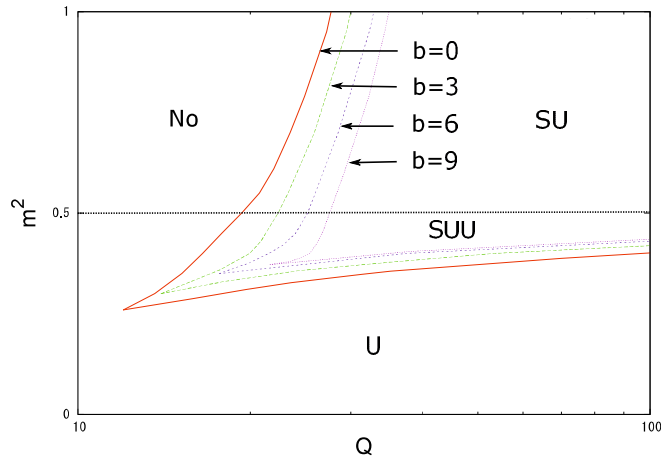
図 18: V_3 モデルにおけるコントロール空間 C の $m^2 = 0.35$ での断面図。

3.4.1 k 場の理論における Q -ball とカタストロフィ理論

ここでは k 場の理論における Q -ball 解に対するカタストロフィ理論の適用方法について述べる。まず与えられた系の構造変数、コントロール変数、ポテンシャルについて考える。2.4.1 節と同様の考察を行うと ω が構造変数となり $\{b, Q, m^2\}$ (ただし V_{gauge} モデルは除く) がコントロール変数として扱われることがわかる。したがって 2.4 節と同様にして安定性の解析を行うことができる。ただし、新たにコントロール変数が追加されたため、カタストロフィのタイプが変更される可能性もある。



(a) コントロール空間 $C = \{m^2, b, Q\}$



(b) コントロール平面 $C = \{m^2, Q\}$

図 19: V_4 モデルにおけるコントロール空間上 $C = \{m^2, b, Q\}$ でのカタストロフィ写像 $\chi(\Sigma)$ 。S, SU, SUU, No の意味は図 9 と同じ。(a) V_4 モデルにおけるコントロール空間 $C = \{m^2, b, Q\}$ 上でのカタストロフィ写像 $\chi(M)$ 。(b) V_4 モデルにおける b 一定面でのカタストロフィ写像 $\chi(M)$ 。

3.4.2 カタストロフィ理論による安定性の解析

a. V_3 モデル

このモデルでは $Q - E$ 図が図 14 のように振舞うことから、平衡空間は各 b に対して図 7 のように与えられることがわかる。またコントロール空間 $\{(Q, m^2, b)\}$ は図 17(a) のようになり、 b 一定での断面図は図 17(b) のようになる。また、 m 一定での断面図は 18 のようになる。これから V_3 モデルは折れ目のカタストロフィに属し、正準理論と同じ振舞いをする事がわかる。

また、 $m^2 \leq 0.5$ のとき Q の最大値が大きくなることから、非線形性により解の存在領域が広がる事が分かる。 $m^2 \geq 0.5$ についてはコントロール空間上での解の振舞いは正準理論と完全に一致する。

b. V_4 モデル

このモデルでは、 $Q - E$ 図が図 15 のように振舞うことから平衡空間は各 b に対して図 9 のように与えられる事がわかる。またコントロール空間 $\{(Q, m^2, b)\}$ は図 19(a) のようになり、 m 一定での断面図は図 20 のようになる。これから V_4 モデルはくさびのカタストロフィに属し、正準理論と同じふるまいをする事がわかる。

また図 20 から $m^2 < 0.5$ のとき安定平衡解が消滅する様子が見て取れる。したがって非線形性により安定平衡解が破壊されることがわかる。一方で $m^2 \geq 0.5$ のとき、 Q_{min} が大きくなることから、非線形性により解の存在領域が狭くなる事がわかる。

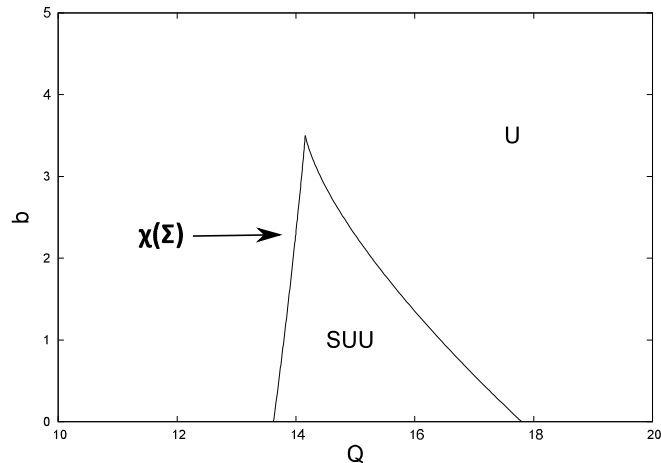


図 20: V_4 モデルにおけるコントロール空間 C の $m^2 = 0.3$ での断面図。

c. V_{gauge} モデル

このモデルでは平衡空間は図 21 のようになる。コントロール平面も同図に示した。これから V_{gauge} モデルは折れ目のカタストロフィに属し、正準理論と同じ振る舞いをする事がわかる。

また b が大きくなると Q の最小値が小さくなることから、非線形性により解の存在領域が広がる事がわかる。

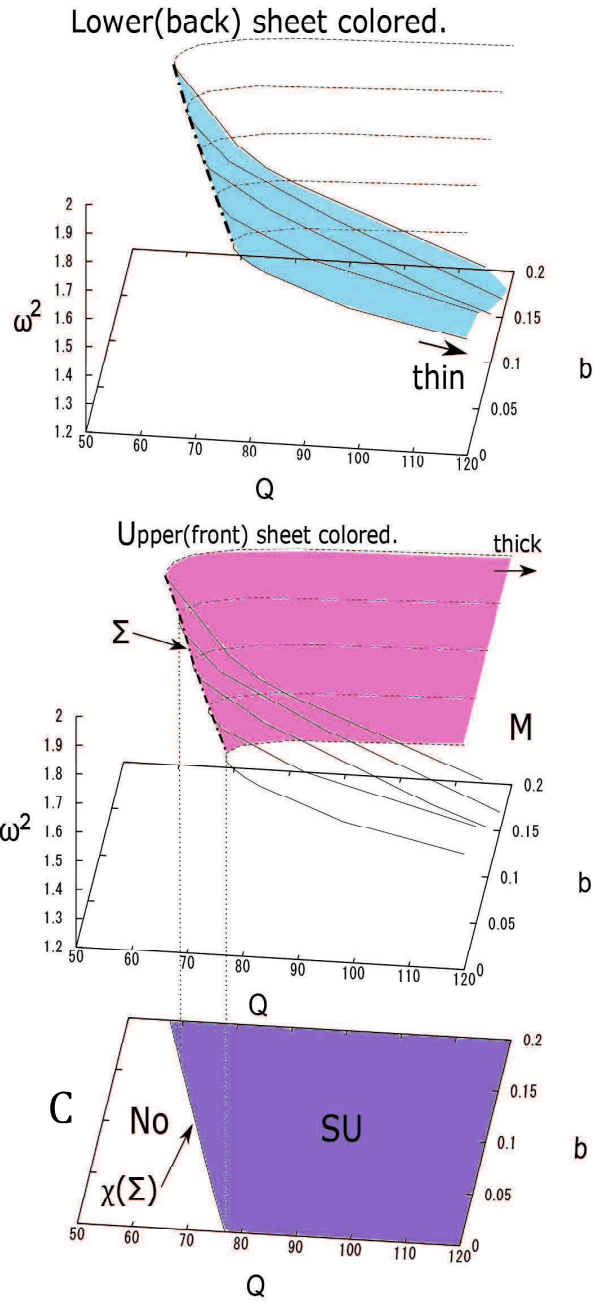


図 21: V_{gauge} モデルの平衡空間 $M = \{(\omega^2, b, Q)\}$ 、カタストロフィ写像 $\chi(M)$ およびコントロール空間 $C = \{(b, Q)\}$ 。 M 上での一点鎖線は安定性の変化する点 Σ の集合であり、 C 上ではそれらはカタストロフィ写像となっている。 M 上の実線（明るいシアン）及び破線はそれぞれ安定、不安定な解に対応する。“thin”、“thick” とラベルされた矢印は、それぞれ薄壁極限、厚壁極限に対応する。 C 上に書かれた S 、 SU 、 No は固定された (b, Q) でそれぞれ一つの安定平衡解、一つの安定平衡解と不安定平衡解及び解が存在しないことを示す。

4 BI型 gauged Q -balls

3章まではスカラー場のみから作られるノン・トポロジカルソリトン解、 Q -ballについて議論した。ところが、自然界にはスカラー場以外にも様々な場が存在する。最も理論的に自然で単純な拡張はゲージ場を付け加えることである。このような理論で得られる解を gauged Q -ball といい、保存量 Q は Q -ball が持つ電荷に相当する。このような場合、モデルによってはクーロン斥力によってその電荷の大きさに上限がつくことが知られている。この章では V_4 モデルの gauged Q -ball について述べ、次に電磁場の理論を Born-Infeld 型とした場合の振舞いを考える。

4.1 gauged Q -ball

4.1.1 理論と基礎方程式

ゲージ場 A_μ と結合した $SO(2)$ スカラー場の理論は

$$S = \int d^4x \left\{ \mathcal{F} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi_a D_\nu \phi_a - V(\phi) \right\}, \quad (4.1)$$

と書ける。ただしゲージ場に関して、不変量 \mathcal{F} と場の強さ $F_{\mu\nu}$ をそれぞれ

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (4.2)$$

と定義した。 D_μ は共変微分であり

$$D_\mu \phi_a \equiv \partial_\mu \phi_a + q A_\mu \epsilon_{ab} \phi_b \quad (a, b = 1, 2), \quad (4.3)$$

と定義されている。ただし q はゲージ結合定数である。このような理論では各点各点で変換 (2.2) が定義されており、定数 α が時空上の位置 x の関数となるため局所的な $SO(2)$ 対称性を持つ、という (一方で、(2.1) は大域的な $SO(2)$ 対称性を持つ、という)。局所ゲージ不変な理論 (4.1) はやはり対称性を持っているため、保存量

$$Q = \int d^3x (\phi_1 D_t \phi_2 - \phi_2 D_t \phi_1), \quad (4.4)$$

が存在する。一方でエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = D_\mu \phi_a D_\nu \phi_a - g_{\mu\nu} [(D_\lambda \phi_a)^2 + V(\phi)] + F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (F_{\lambda\sigma})^2, \quad (4.5)$$

である。従って系のエネルギー E は T_0^0 成分の空間積分

$$E = \int T_0^0 d^3x, \quad (4.6)$$

で与えられる。

次に具体的な解を構築するために、適当な ansatz をおく。ここでは球対称な場をおき等方的に相回転する場合 (2.6) を考え、さらにゲージ場に関しては

$$A_0 = A_0(r), \quad A_i = 0, \quad (4.7)$$

とおく。ここで方程式を簡潔に表すために変数

$$\Omega(r) \equiv \omega + q A_0(r), \quad (4.8)$$

を導入する。このとき、スカラー場の方程式、ゲージ場の方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{dV_\Omega}{d\phi}, \\ \frac{d^2\Omega}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Omega}{dr} &= \Omega(q\phi)^2,\end{aligned}\tag{4.9}$$

となる。ただし

$$V_\Omega = V(\phi) - \frac{1}{2}\Omega^2\phi^2,\tag{4.10}$$

と定義した。この場合にもやはり ϕ を位置 x , r を時間 t とみなせば図 22 のように摩擦力 $(2/t)(dx/dt)$ の中でポテンシャルの坂を転がる粒子の運動方程式と解釈できる。ただしゲージ場が結合したことによりポテンシャルが“時間発展”する。

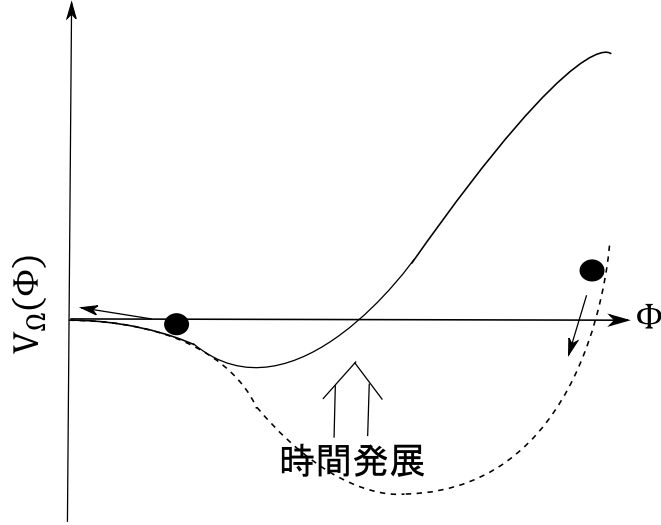


図 22: gauged Q -ball 解のニュートン力学的表現。図 2 と同様に有効ポテンシャル中の坂を転がる粒子と解釈できるが、ポテンシャルそのものが“時間発展”する。

なお、保存量 Q やエネルギー E は以下ようになる。

$$Q = 4\pi \int_0^\infty r^2 \Omega \phi^2 dr,\tag{4.11}$$

$$E = 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \left\{ \Omega^2 \phi^2 + \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 + 2V(\phi) \right\}.\tag{4.12}$$

4.1.2 境界条件と解の存在範囲

次に方程式 (4.9) を解くための境界条件を考える。ゲージ場と結合した場合には、その点も考慮して境界条件を付ける必要がある。ノン・トポロジカルソリトン解は、原点付近に適当な値を持ちじゅうぶん遠方で 0 となるように振舞うため

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dr}(0) &= 0, \quad \frac{d\Omega}{dr}(0) = 0, \\ \phi(\infty) &= 0, \quad \Omega(\infty) = \omega + \frac{C}{r},\end{aligned}\tag{4.13}$$

とする。ただし C は定数である。

このように振舞う解を得るために必要な、ポテンシャルの条件について考える。スカラー場の場合と同様、 Ω が“時間発展”することに注意が必要である。まず ϕ の $-V_\Omega(0)$ は、必ずしもじゅうぶん遠方での値 $-V_\Omega(\infty) = 0$ より大きい必要はない。この点はゲージ場が結合したことによって現れる、興味深い性質である。ただし、粒子が十分時間をかけてポテンシャルを上る必要があるその条件は

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi} \left(\Omega^2 \phi - \frac{dV}{d\phi} \right) < 0, \quad (4.14)$$

である。これから V_3 および V_4 モデルでは

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Omega^2 < m^2, \quad (4.15)$$

という条件が課せられる。これから平衡解が存在する範囲が限られ、(4.11) から電荷に上限が課せられる。

4.1.3 計算結果

まず、計算を行うにあたって適当な無次元化を行う。まず V_3 モデルについては

$$\tilde{\phi} = \frac{q\lambda}{\mu} \phi, \quad \tilde{\Omega} = \frac{\sqrt{\lambda}\mu}{\Omega}, \quad \tilde{Q} = q^2 \lambda Q, \quad \tilde{E} = \frac{q^2 \lambda^{3/2}}{\mu} E, \quad (4.16)$$

とおく (ゲージ場と結合していない Q -ball と異なる量のみ示した)。 V_4 モデルに関しては

$$\tilde{\phi} \equiv \frac{q\phi}{\sqrt{\lambda M}}, \quad \tilde{\Omega} \equiv \frac{\Omega}{\sqrt{\lambda M}}, \quad \tilde{Q} \equiv q^2 Q, \quad \tilde{E} \equiv \frac{q^2 E}{\sqrt{\lambda M}}, \quad (4.17)$$

とする。以下の計算ではチルダ $\tilde{}$ は省略する。

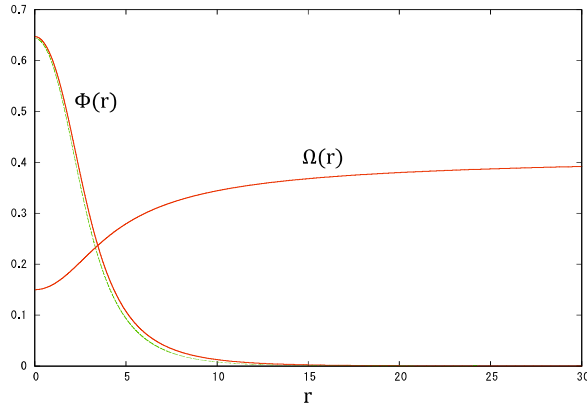


図 23: gauged Q -ball におけるスカラー場 ϕ およびゲージ場 $\Omega(r)$ の分布。ただし $m^2=0.2$, $q = 1.0$ とした。赤の実線が gauged Q -ball、緑の点線が同じパラメータを持つゲージ場と結合していない Q -ball を現す。両者の間でスカラー場の分布の変化に大きな変化は存在しないことがわかる。

以上のような設定の下、方程式 (4.9) を解くと図 23 のようになる。ただし V_4 モデルの場合に計算を行った (V_3 モデルでも類似した結果となる)。この図からゲージ場と結合していない場合と $\phi(r)$ の分布はほとんど変化しないことがわかる。また図 24 に同じ初期値 $\Omega(0)$ に対して異なる q に対する $\Omega(r)$ の分布の違いを示す。これから q が大きいほどその変化が大きいこ

とがわかる。ゲージ結合定数の大きいほうが、電場の変化が顕著に現れることを示しており、自然な結果といえる。

次に $Q-E$ 図上の振舞いについて述べる。図 25 に V_3 モデルの場合の $Q-E$ 図を示し、図 26 に V_4 モデルの場合の $Q-E$ 図を示す。まず、ゲージ場と結合した場合でも安定性は変化しないことがわかる。ただし、 $\Omega^2(\infty) < m^2$ を満たす必要があり、 $\Omega^2(\infty) \sim m^2$ となる Q を Q_{end} とする。図 25 の場合は折り返し点が一つのみであり、その点が Q_{max} となっている。この時必ずしも $Q_{end} = Q_{max}$ とならないことがわかる。またゲージ場と結合した場合でも、必ずしも解は消滅しない。加えて第 2 章の考察と合わせると、安定解から消滅していくことがわかる。一方で図 26 の場合は折り返し点が二つあり、 $q = 0$ の場合は不安定ではあるが、 Q 大きいところまで解が存在する。このような場合、 Q の大きいところから解が消滅していくため、 $Q_{max} = Q_{end}$ となる。

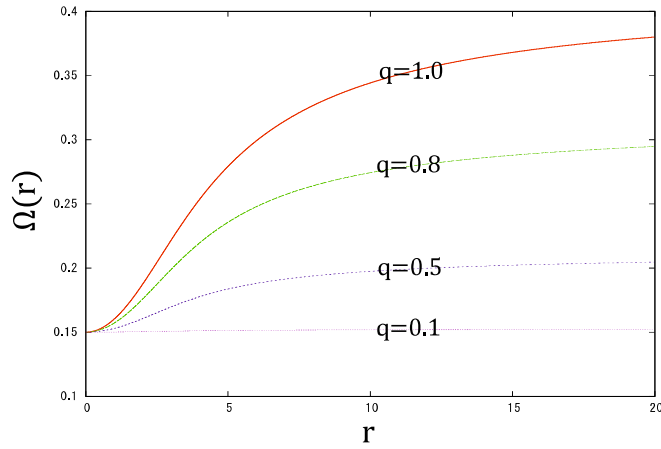


図 24: gauged Q -ball におけるゲージ場 $\Omega(r)$ の分布。ただし $m^2=0.2$ 、初期値は $\Omega(0) = 0.15$ とした。ゲージ結合定数が大きいほど変化が大きいことがわかる。

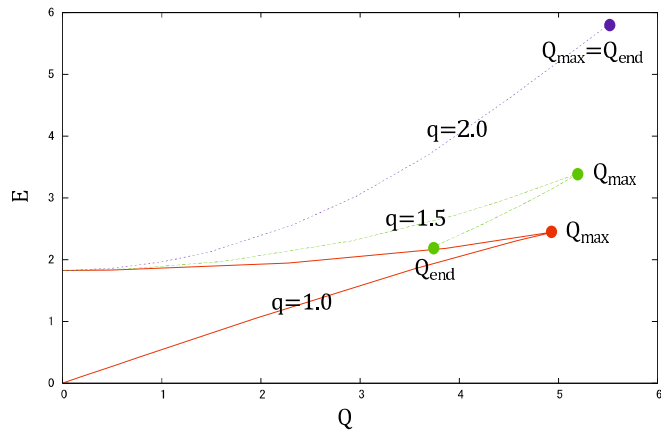


図 25: gauged Q -ball における V_3 モデルの $Q-E$ 図。ただし $m^2 = 0.3$ の場合である。赤線、緑線、青線はそれぞれゲージ結合定数が $q = 1.0, 1.5, 2.0$ の場合に対応する。 Q_{end} は $\Omega^2(\infty)$ が m^2 に等しくなる点。 Q_{max} は Q の最大値。 V_3 モデルでは必ずしも $Q_{end} = Q_{max}$ とならない。

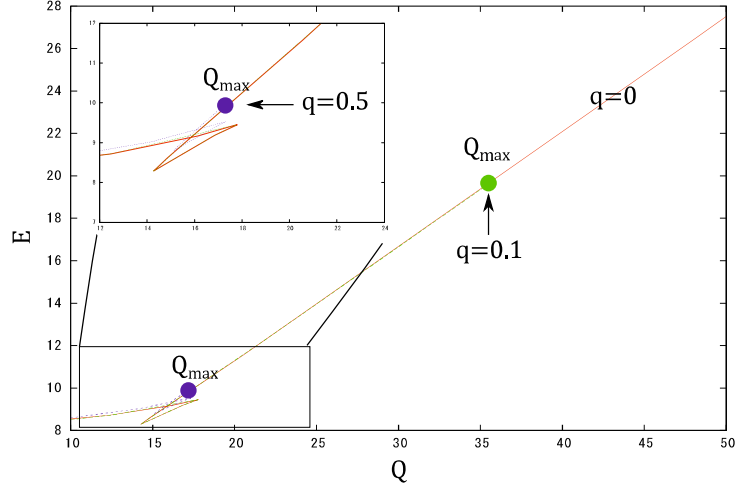


図 26: gauged Q -ball における V_4 モデルの $Q-E$ 図。ただし $m^2 = 0.3$ の場合である。赤線、緑線、青線はそれぞれゲージ結合定数が $q = 0, 0.1, 0.5$ の場合に対応する。 V_4 モデルでは Q の最大値がそのまま電荷の上限値 Q_{max} となる。

4.2 BI 型 gauged Q -ball

4.2.1 理論と基礎方程式

次に Born-Infeld 型の非線形電磁場と結合した局所 $SO(2)$ 対称性を持つスカラー場の理論について考える。この理論は

$$S = \int d^4x \left[\frac{4}{b^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{b^2}{2} \mathcal{F}} \right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi_a D_\nu \phi_a - V(\phi) \right], \quad (4.18)$$

と書ける。ただし b は定数である。なお、このような変形を行っても理論 (4.1) と同様の対称性を持っている。なぜなら電磁場の運動項は Maxwell 不変量から構成されているためである。もちろん、非線形性の十分弱い極限 $b \rightarrow 0$ で、通常の Maxwell 電磁気学に帰着する。

Born-Infeld 型電磁場と結合した $SO(2)$ スカラー場の理論 (4.18) における保存量 Q 、およびエネルギー・運動量テンソルについて考える。まず局所 $SO(2)$ 対称性からくる保存量 Q は (4.4) 式と同様になり、変更を受けない。一方でエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = D_\mu \phi_a D_\nu \phi_a - g_{\mu\nu} [(D_\lambda \phi_a)^2 + V(\phi)] - \frac{4g_{\mu\nu}}{b^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{b^2}{2} \mathcal{F}} \right) - \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{1 + b^2 \mathcal{F}/2}} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta}, \quad (4.19)$$

である。従って系のエネルギー E は (4.19) を空間積分した (4.6) の形で与えられる。

次に ansatz を考える。ここでも 4.1.1 節と同様の形に置く。このときスカラー場の方程式は変更を受けない。一方で電磁場の方程式は

$$\frac{d^2 \Omega}{dr^2} + \left\{ 1 - \frac{b^2}{4q^2} \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 \right\} \frac{2}{r} \frac{d\Omega}{dr} = \Omega \left\{ 1 - \frac{b^2}{4q^2} \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} (q\phi)^2, \quad (4.20)$$

となる。また保存量 Q は (4.11) 式となり、エネルギーは

$$E = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left\{ \frac{1}{2} \Omega^2 \phi^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - \frac{4}{b^2} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{4q^2} \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2} - 1 \right) + \frac{1}{q^2 (1 - (b^2/4q^2) (d\Omega/dr)^2)} \right\}, \quad (4.21)$$

で与えられる。

4.2.2 解の存在範囲

次に方程式を解くための境界条件を考える。ここでも gauged Q -ball の場合と同様 (4.13) 式の形に置く。また境界条件を満たすように振舞う解について考えるとやはり条件 (4.14) 式が出てくるため、電荷の上限が存在する。

さらにスカラー場の場合と同様、BI 型では新たな条件

$$1 - \frac{b^2}{4q^2} \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 > 0, \quad (4.22)$$

を満たす必要がある。これはゲージ場の運動方程式 (4.20) があらゆる点で実数解を持つべし、という要請から生じるものであり、BI 型特有の条件である。ところが後述するように b を大きくすると、実効的にゲージ結合定数が小さくなる。その結果、ゲージ場の“速度” $d\Omega(r)/dr$ が非常に小さくなり、この条件が破られることはない。

4.2.3 計算結果

実際に計算するにあたって、まず適当な無次元化を行う。BI 型の非線形性を含む場合 (4.16) 式および (4.17) に加え、

$$\tilde{b} = \lambda^{3/2} M^2 b, \quad (4.23)$$

と変換する。以下の計算ではチルダ \tilde{b} は省略する。

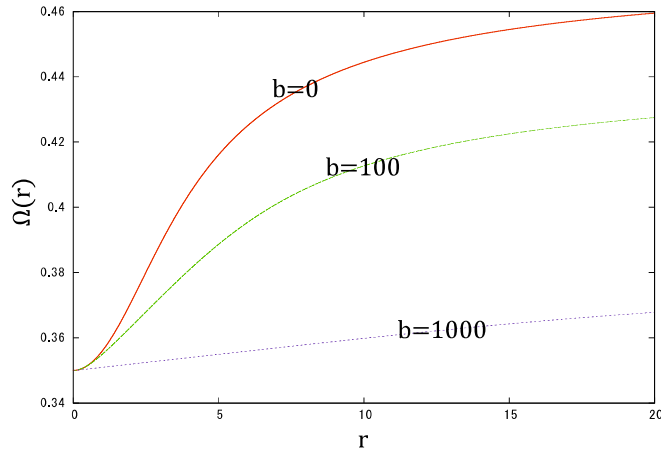


図 27: BI 型 gauged Q -ball におけるゲージ場 $\Omega(r)$ の分布。ただし V_4 モデルの場合に $m^2 = 0.3$, $q = 0.5$ とした。赤線、緑線、青線はそれぞれ $b = 0$, $b = 100$, $b = 1000$ に対応する。

以上のような設定のもとで、(4.9) のスカラー場の方程式とゲージ場の方程式 (4.20) を解いた。電磁場には非線形性を含む場合でもスカラー場の分布はほぼ変化しないことがわかった。一方でゲージ場は図 27 のように、非線形性を強くするとその変化が小さくなることわかる。この振舞いは Maxwell 電磁場においてゲージ場を小さくした場合 (図 24) と類似している。さらに図 28 に異なる q および b を持つが、同じ初期値 $\Omega(0) = 0.35$ および無限遠での値 $\Omega(\infty)$ を持つゲージ場の分布の例を示す。これから非線形性によって分布が変化していることがわかる。

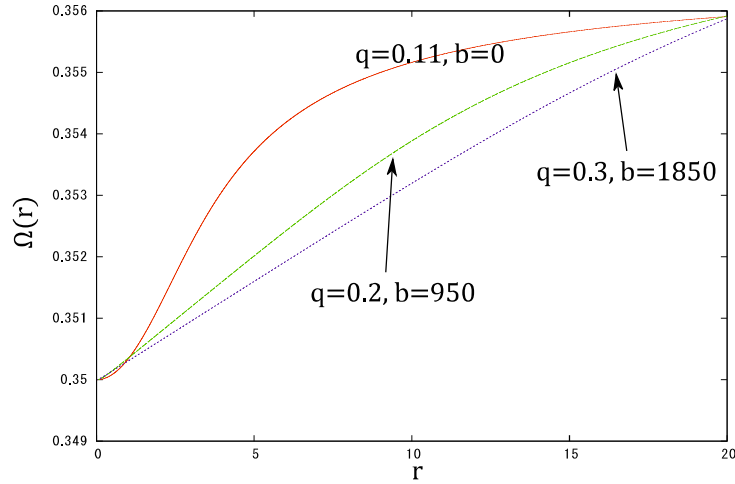


図 28: BI 型 gauged Q -ball におけるゲージ場 $\Omega(r)$ の分布。ただし V_4 モデルで $m^2=0.3$ とした。赤線、緑線、青線はそれぞれ $(q, b) = (0.11, 0)$, $(q, b) = (0.2, 950)$, $(q, b) = (0.3, 1850)$ に対応する。

次に $Q-E$ 図上の振舞いについて述べる。図 29 に V_3 モデルの場合の $Q-E$ 図を示し、図 30 に V_4 モデルの場合の $Q-E$ 図を示す。まず、BI 型ゲージ場と結合した場合でも安定性は変化しないことがわかる。さらにいずれのモデルにおいても、ゲージ場の非線形性 b を大きくするとゲージ結合定数 q が小さい場合の振舞いと類似することがわかる。ただし V_3 モデルでは Q_{end} となる点が現れるため、この点に違いが現れる。 V_4 モデルでは解が消滅する点まで含めて、 b を大きくした場合と q を小さくした場合の振舞いが一致している。

以上のように電磁場の非線形性はゲージ結合定数を小さくする働きをする事がわかった。BI 型ゲージ場の理論では、例えば点電荷が作る電場の問題を考えると原点付近で発散が起らない。これは非線形性によって場が弱められるためである。今回得られた結果でも、非線形性によって場が弱められている (図 27, 28)。従って得られた結果は妥当なものであると考えられる。

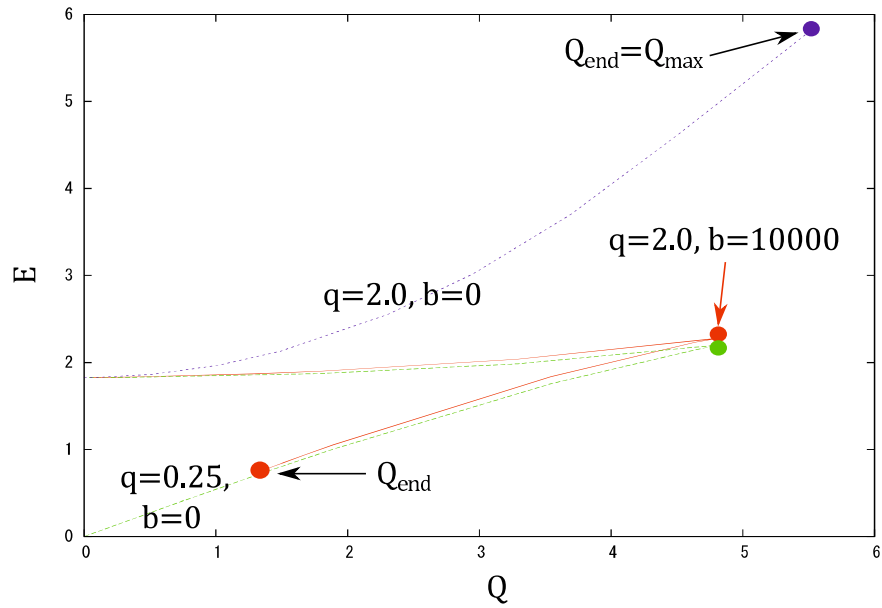


図 29: DBI gauged Q -ball における V_3 モデルの $Q - E$ 図。赤線、緑線、青線はそれぞれ $(q = 2.0, b = 10000)$, $(q = 0.25, b = 0)$, $(q = 2.0, b = 0)$ の場合に対応する。記号の意味は図 25 と同じ。

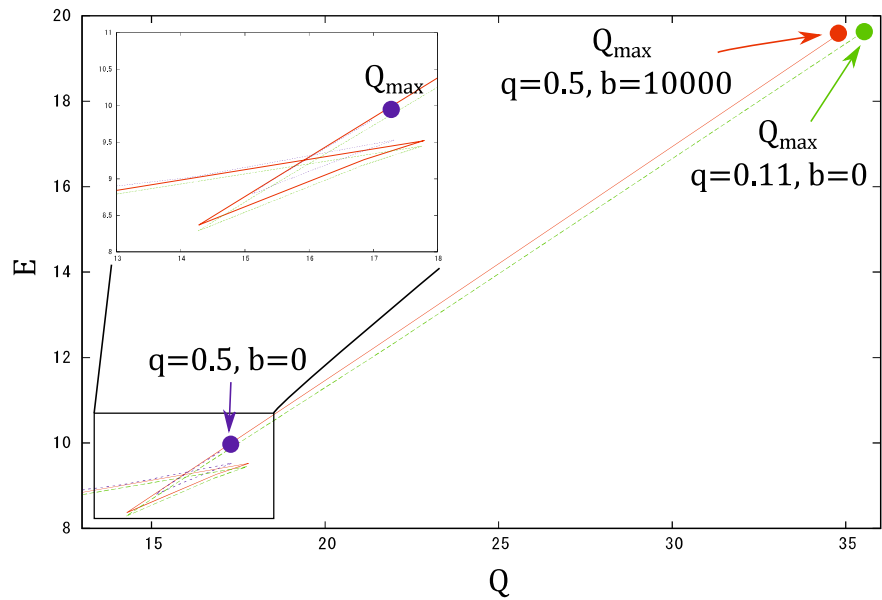


図 30: DBI gauged Q -ball における V_4 モデルの $Q - E$ 図。赤線、緑線、青線はそれぞれ $(q = 0.5, b = 10000)$, $(q = 0.11, b = 0)$, $(q = 0.5, b = 0)$ の場合に対応する。記号の意味は図 26 と同じ。

5 まとめと今後の課題

5.1 まとめ

5.1.1 DBI スカラー場の理論における Q -ball について

本稿では Dirac-Born-Infeld 型修正スカラー場の理論における Q -ball 解を導出した。またその基本的な性質である安定性を、カタストロフィ理論によって解析した。

まず球対称静的なミンコフスキー時空の下で相回転する場を考え、基礎方程式 (3.8) を導出した。当然のことながら (3.8) 式は $b \rightarrow 0$ の極限で正準スカラー場の式 (2.8) に一致する。次に原点で適当な振幅を持ち、充分遠方で 0 となるような境界条件の下で基礎方程式を数値的に解いた。このとき非線形性 b を大きくすると、ある程度まで初期振幅は大きくなるが、その後徐々に減少していく様子を示した (図 12, 13(a))。これから条件 (3.10) を常に満たすため、非線形性の大きい場合でも解が存在することを示した。Born-Infeld 型の修正理論はよい性質を持つことが知られている。今回の研究で、ノン・トポロジカルソリトン解の場合にもそれが反映されることを示した点は、一つの成果である。

次にいくつかのポテンシャルモデルの下、解の安定性をカタストロフィ理論により議論した (なお、カタストロフィ理論による Q -ball の安定性の解析は第 2 章にまとめた)。まず非線形性 b をコントロール変数の一つとすることで、正準理論の場合と同様の解析を行えることがわかった。加えて非線形性によりカタストロフィのタイプは変更されないことも示した。また本研究によって、3次元コントロール空間上での Q -ball の振舞いが初めて調べられた。これからモデルにより、安定平衡解を持つパラメータ領域が拡大する場合と、減少する場合があることが分かった。具体的には V_3 モデル、 V_{gauge} モデルでは b により平衡解を持つ領域が増え V_4 モデルでは逆に減少し、ついには消滅する。特に V_{gauge} モデルで平衡解を持つ領域が増える点については、宇宙初期に作られる Q -ball の存在量に影響を及ぼすと考えられるため、重要な問題となりうる。

以上のように、DBI 型スカラー場の理論における Q -ball に対しても、カタストロフィ理論が有効に機能することが分かった。これは、修正された場の理論に対してもカタストロフィ理論が有効であることを示唆している。

5.1.2 BI 型 gauged Q -ball

DBI 型スカラー場の理論は Born と Infeld によって提唱された [25]、修正電磁場の理論に端を発している。そこで第 4 章では BI 型 gauged Q -ball について検討した。まず、Maxwell 型電磁場における振舞いのレビューを行った。gauged Q -ball では保存量 Q はノン・トポロジカルソリトンの電荷である。またポテンシャルモデルによって電荷の制限値 Q_{end} が存在する。そのような gauged Q -ball の振舞いをいくつかのゲージ結合定数 q の下で調べた (図 25, 26)。

次にゲージ場の理論を BI 型に置き換えて基礎方程式 (4.20)、エネルギー (4.21) の導出を行った。これらの式には DBI 型スカラー場の式と同様の制限式 (4.22) が存在する。なお、ゲージ場のみを変更したため、スカラー場および電荷については変更されない。この時、電磁場の非線形性を強くすると $\Omega(r)$ の変化が小さくなる。ただし、制限式 (4.22) は常に満たされる。また $Q-E$ 図上での振舞いを調べると、非線形性を大きくすることは実効的にゲージ結合定数を小さくすることとなる。加えて安定性に関しては定性的な変化はない。これは BI 型ゲージ理論の性質を考えると自然な結果である。

またスカラー場、ゲージ場のいずれの場合でも非線形性の上限値は存在しないこともわかっ

た。これは DBI 型の修正理論に共通する性質であると考えられる。

5.2 今後の課題

本稿では修正スカラー場の理論の一つである DBI 型を考え、そのノン・トポロジカルソリトン解 Q -ball を議論した。また BI 型ゲージ場と結合した gauged Q -ball について検討した。以下では今後研究を進めていくべき課題について述べる。検討すべき課題は大きく分けて、1. その他の修正スカラー場の理論における Q -ball の振舞い、2. 宇宙論など現象論への応用、3. 重力と結合した場合、である。

5.2.1 修正スカラー場の理論とノン・トポロジカルソリトン解

まず、DBI 型の理論であるが今回は最も標準的な $f(\phi) = b$ (定数) の場合を扱った。ただし、たとえば 10 次元純 CFT 理論を $AdS_5 \times S^5$ にコンパクト化しプレーン描像で 4 次元理論に還元すると $f(\phi) = \lambda/\phi^4$ となる [2]。そのほかの場合にも、 $f(\phi)$ を適当な形の関数形に設定することで、様々な理論に対応させることができる。 $f(\phi)$ が適当な関数系の場合にも Q -ball 解が存在するか、確かめることは重要である。また今回は修正理論として DBI 型に焦点を当てたが、そのほかにも様々な形の理論が提唱されている。今後は別の k 場の理論でも同様の議論を行う必要がある。ただし、例えば標準理論に帰着しない、性質の悪い理論では Q -ball 解が存在しなくなると予想できる。

さらに今回は重力の効果を考慮に入れなかったが、重力と結合した場合はボソン・スターと呼ばれるノン・トポロジカルソリトン解が得られることが分かっている [35]。ただし修正スカラー場の理論においてはじゅうぶんにその性質が調べられたとは言えず、研究の余地がある。このような場合に条件 (3.10) は満足されるのか、また $Q-E$ 図上の振舞いはどうなるのか検討することで、その性質を調べていく必要がある。

5.2.2 宇宙への影響

今回扱ったポテンシャルモデルの中には宇宙論的方面から興味を持たれている、 V_{gauge} モデルがある。このモデルでは非線形性 b を導入することで平衡解の領域が拡大することが分かった。これは、DBI 型スカラー場の理論では正準理論よりもより多くの Q -ball が生成されることを示唆する。ところが付録 C に示したように、 Q -ball を過剰に生成すると宇宙の物質密度が増大し、宇宙を閉じる危険性がある。逆に観測からくる制限から、 b に対して制限を課することができる可能性もある。

以上のような観測・実験や現象論に関連する問題は今後検討すべき課題の一つである。このような観測・実験から課せられる制限により、DBI 型 k 場の理論の成否を判断できると期待される。

5.2.3 BI 型ゲージ場における課題

本論文ではゲージ場と結合した gauged Q -ball も検討した。このようなゲージ場と結合した場合にも、ボソンスターの振舞いを調べることは興味深いことである。gauged boson star に関しては様々な研究がおこなわれてきたが、臨界値の存在が示されている [36]。この臨界値は重力による引力と、電磁場のクーロン力による斥力が釣り合う値として与えられる。過去の研究によるとボソンスターを構築するためには、臨界値が存在するため、ゲージ結合定数に上限が存在することが示されている。

ところで今回の研究から、BI型ゲージ場におけるゲージ場の非線形性を大きくすることで、実効的にゲージ結合定数を小さくした場合と同様に振舞うことが分かった。これからゲージ場の非線形性を導入することで、gauged ボソンスターにおけるゲージ結合定数の上限値を引き上げることができる可能性もある。このとき、ボソンスターの安定性や振舞いはどういった変化を見せるのか、検討すべき課題の一つである。たとえば結果としてボソンスターの質量などに変化がみられると、大変興味深い研究となりうる。特に質量を大きくすることができれば天体となりうるため、重要性が高まると考えられる。

A 付録 A:トポロジカルソリトン

本稿では主にノントポロジカルソリトンを扱っているが、ここではトポロジカルソリトンについて、簡単な模型を用いて説明する。さらに、両者の相違点について述べる。

A.1 自発的対称性の破れ

素粒子論における模型の多くは、ある対称性に基づいて構築されている。このような場の理論の対称性を自発的に破るときソリトンが生成される。このとき生成されるソリトンはトポロジカルソリトンである。

例としてもっとも単純な単一実スカラー場の理論

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - V(\phi) \right], \quad (\text{A.1})$$

を考える。ただし $U(\phi)$ は ϕ^4 模型

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} g^2 \phi^4, \quad (\text{A.2})$$

を用いる。この作用は Z_2 対称性 $\phi(x) \rightarrow \phi(x)$ を持っている。(A.2) で $m^2 > 0$ の場合、 $\phi = 0$ に真空があり、自発的対称性は破れない(図 31(a))。一方で $m^2 < 0$ の場合、(A.2) の極致を調べると

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \implies \phi = 0, \phi = \pm \frac{m}{g} \equiv \pm v, \quad (\text{A.3})$$

となる。ここで $\phi = 0$ は極大値となるため不安定である。従って真空は $\phi = \pm v$ に選択される(図 31(b))。このとき Z_2 対称性が自発的に破れ、ポテンシャルは

$$V(\phi) = \frac{1}{4} g^2 (\phi^2 - v^2)^2 \quad (\text{A.4})$$

と書ける。

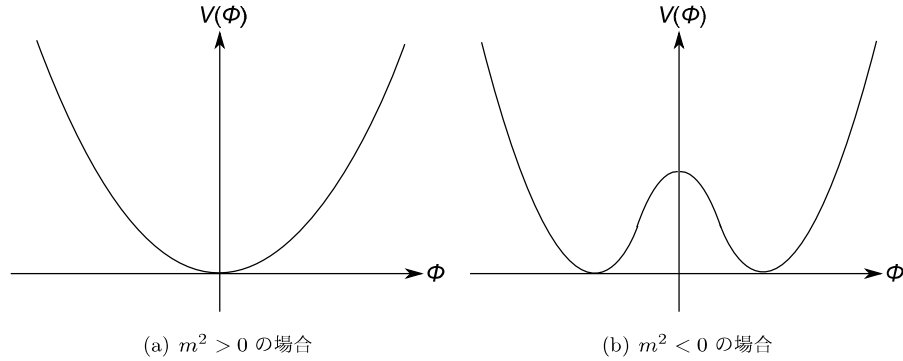


図 31: ポテンシャル $V(\phi)$ と質量項の符号。

A.2 kink 解

今、簡単のため ϕ を位置 x のみの関数 $\phi(x)$ とする。このとき、(A.1) の変分をとると場の方程式

$$-\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{\partial V}{\partial \phi} = -\frac{d^2 \phi}{dx^2} + g^2 \phi (\phi^2 - v^2) = 0, \quad (\text{A.5})$$

が得られる。ここで境界条件を考える。ソリトンはエネルギーが局在しているような場の配位であるから、ソリトンから離れた部分では場は真空中に落ち着いている必要がある (表 1)。

表 1: ソリトン解が満たす境界条件

| 空間 x^1 | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------------|-----------------------|-----------------------|
| 場 $\phi(x^1)$ | $- m /\sqrt{\lambda}$ | $+ m /\sqrt{\lambda}$ |

従って、このような境界条件を満たす方程式 (A.5) の解は

$$\phi = \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{|m|}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right], \quad (\text{A.6})$$

となる。このようなソリトンを kink 解と呼ぶ (図 32)。

一方でエネルギー密度は

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial x)} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{g^2}{4} (\phi^2 - v^2)^2, \quad (\text{A.7})$$

だから

$$\rho = \frac{1}{2} g^2 v^2 \frac{1}{\cosh^4 (m(x - x_0)/\sqrt{2})}, \quad (\text{A.8})$$

と書ける。これから確かに $x = x_0$ にエネルギーが局在化していることが分かる (図 33)。

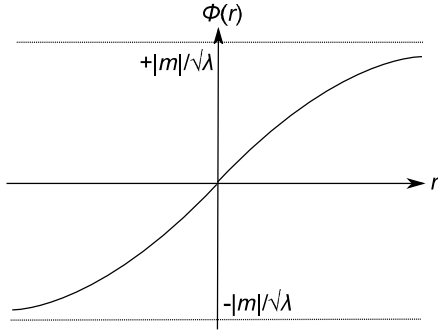


図 32: $\phi(r)$ の分布。ここでは $x_0 = 0$ に選んだ。

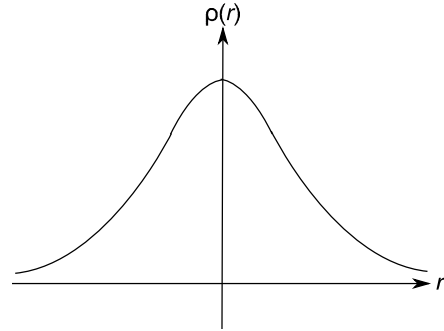


図 33: エネルギー $\rho(r)$ の分布。

A.3 トポロジカルソリトンとノン・トポロジカルソリトン

ここではトポロジカルソリトンとして実スカラー場の理論における ϕ^4 模型の例を扱った。ところでポテンシャルに注目すると図 31(b) から、真空のなす空間が連結でないため、自発的対称性の破れにより異なる真空が選択されることが分かる。このよ字な場合には異なる真空の間にソリトン解が形成されており、これをドメイン・ウォールと呼ぶ。また、異なる配位の間に位相欠陥が生じる。以上のように位相欠陥を持つような解を総じてトポロジカルソリトンと呼ぶ。このような解はモノポールを生成することも分かっており、素粒子論において重要な研究対象となっている [37]。ただし、いまだ未発見であるダークマターの候補からトポロジカルソリトン解は脱落している。

一方本稿で扱ったノン・トポロジカルソリトンは位相欠陥を持たない。また、単にエネルギーが局在化しているような解を広くノン・トポロジカルソリトンと呼ぶこともある。特に

Q -ball の場合は保存量 Q によって安定化されたソリトン解である。 Q -ball はトポジカルソリトンと異なりダークマターの候補として残っているため、やはり重要な研究対象である。また初期宇宙で生成された可能性もあり、宇宙論的な側面から興味を持たれている。

B 付録 B:具体的な場の方程式の解法

ここでは具体的な場の方程式

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + \frac{\partial V_\omega}{\partial\phi}, \quad (\text{B.1})$$

の解法について述べる。この方程式は解析的に解くことができないため、近似的に扱うかあるいは数値的に解く必要がある。以下ではまず近似解について述べ、次に数値的な扱いについて述べる。

B.1 近似解

B.1.1 薄壁近似での解

まず、薄壁近似の下で場の方程式 (B.1) を解く。“薄壁”とは図 34(a) のように Q -ball 内部と外部をつなぐ壁が非常に薄いことを意味する。従ってスカラー場の分布はステップ型

$$\phi(r) = \begin{cases} \phi_0 & (r < R) \\ 0 & (R \leq r) \end{cases}, \quad (\text{B.2})$$

で与えられる。ただし R は Q -ball の半径である。すなわち場の方程式は $r < R$ で

$$\frac{\partial V_\omega}{\partial\phi} = 0, \quad (\text{B.3})$$

となる。このとき、 Q は

$$Q = \omega\phi_0^2 V_{ol}, \quad (\text{B.4})$$

となり、 E は

$$E = V_{ol} \left[\frac{1}{2}\omega^2\phi_0^2 + V(\phi_0) \right], \quad (\text{B.5})$$

となる。ただし、 $V_{ol} = 4\pi R^3/3$ である。式 (B.4), (B.5) から ω を消去すると、

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\phi_0^2 V_{ol}} + V(\phi_0)V_{ol}, \quad (\text{B.6})$$

となる。これを V_{ol} に対して最小化すると、

$$V_{ol} = \frac{Q}{\sqrt{2\phi_0^2 V(\phi_0)}}, \quad (\text{B.7})$$

$$E = Q\sqrt{\frac{2V(\phi_0)}{\phi_0^2}}, \quad (\text{B.8})$$

が得られる。 ϕ_0 は E を最小化するように選ぶとよい。この近似はポテンシャルがどのような形でも成り立つ。

B.1.2 厚壁近似での解

次に厚壁近を考える。“厚壁”とは図 34(b) のように Q -ball 内部と外部をつなぐ壁が非常に厚いことを意味する。計算を行うときには具体的なポテンシャルを置く必要がある。ここでは V_3 モデルの場合を考え、

$$V_\omega(\phi) = \frac{1}{2}(M^2 - \omega^2)\phi^2 - A\phi^3 + \lambda\phi^4, \quad (\text{B.9})$$

とする。

ω と Q を固定した時、エネルギー

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + V_\omega(\phi) \right], \quad (\text{B.10})$$

を最小化すると、 Q -ball 解が得られる。厚壁近似の場合、ポテンシャルの頂点からじゅうぶん離れたところに初期値がある。従って ϕ^4 を含む項は無視できて

$$E_\omega = \int d^3x \left[\frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2} (M^2 - \omega^2) \phi^2 - A\phi^3 \right] + \omega Q, \quad (\text{B.11})$$

となる。ここで無次元量

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sqrt{M^2 - \omega^2} x_i, \\ \psi &= \phi \frac{A}{M^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

を導入すると、式 (B.11) は

$$\begin{aligned} E_\omega &= \frac{(M^2 - \omega^2)^{3/2}}{A^2} \int d^3\xi \left[(\nabla_\xi \psi(\xi))^2 + \frac{1}{2} \psi^2(\xi) - \psi^3(\xi) \right] + \omega Q \\ &= S_\psi \frac{(M^2 - \omega^2)^{3/2}}{A^2} + \omega Q, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

と書ける。ただし

$$S_\psi = \int d^3\xi \left[(\nabla_\xi \psi(\xi))^2 + \frac{1}{2} \psi^2(\xi) - \psi^3(\xi) \right], \quad (\text{B.14})$$

とした。この値は数値積分により求める必要があるが、すでに計算されており $S_\psi = 4.85$ である。 $0 < \omega < M$ を満たしかつ式 (B.13) を最小化する解は

$$\epsilon \equiv \frac{QA^2}{3S_\psi M^2} < \frac{1}{2}, \quad (\text{B.15})$$

であれば存在し

$$\omega = \omega_{min} = M \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon^2}}{2} \right]^{1/2}, \quad (\text{B.16})$$

である。このとき、エネルギーを ϵ で展開すると、

$$E = QM \left[1 - \frac{1}{6}\epsilon^2 - \frac{1}{8}\epsilon^4 - O(\epsilon^6) \right], \quad (\text{B.17})$$

となり、 $Q - E$ の関係が与えられる。またスカラー場の質量 M よりエネルギーが小さいこともわかり、従って安定して存在できる。

B.2 数値解

B.2.1 Q -ball の場合

一般的なパラメータにおける解を求めるためには、数値的に (B.1) を解く必要がある。境界条件は

$$\frac{d\phi}{dr}(0) = 0, \quad \phi(\infty) = 0, \quad (\text{B.18})$$

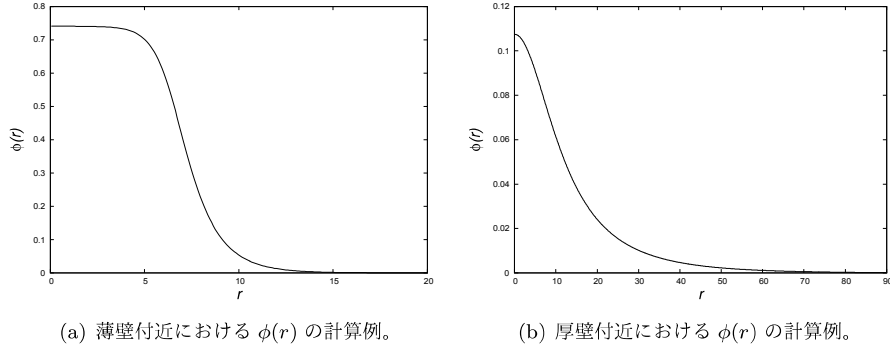


図 34: $\phi(r)$ の薄壁、もしくは厚壁近似付近での振舞い。

であるから、まず原点での振る舞いを考えると、

$$\phi = \phi_0 - \phi_2 r^2 + O(r^4), \quad (\text{B.19})$$

となる。ただし、 ϕ_0, ϕ_2 は定数である。このうち、 ϕ_2 は場の方程式から

$$\phi_2 = -\frac{1}{6} \frac{\partial V_\omega}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_0} + O(r^2), \quad (\text{B.20})$$

となり、ポテンシャルの形と ϕ_0 から決定される。ただし ϕ_0 は境界条件を満たすようにシューティング法を用いて探索する必要がある。

次に保存量 Q やエネルギー E について考える。これは積分により与えられるが、実際の計算では次の微分形を用いている。

$$\frac{dQ}{dr} = 4\pi\omega r^2 \phi^2, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{dE}{dr} = 4\pi r^2 \left(\frac{1}{2} \omega^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right). \quad (\text{B.22})$$

ただし $Q(0) = 0, E(0) = 0$ とする。 Q や E の原点付近での振舞いは

$$Q = \frac{4\pi\omega}{3} \phi_0^2 r^3 + O(r^5), \quad (\text{B.23})$$

$$E = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \phi_0^2 + V(\phi_0) \right) r^3 + O(r^5), \quad (\text{B.24})$$

で与えられる。

一方、じゅうぶん遠方で ϕ は 0 に近づくから今回扱ったようなポテンシャルモデルでは

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} \sim -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} - \omega^2 \phi + m^2 \phi, \quad (\text{B.25})$$

となり、場 ϕ は遠方で

$$\phi \sim \frac{1}{r} \exp \left\{ -\sqrt{m^2 - \omega^2} r \right\}, \quad (\text{B.26})$$

と振る舞う。なお Q や E はじゅうぶん遠方である一定値に近づく。

具体的には以下のように計算を行う。 ϕ_0 を適当に置くと、図 35 のようにポテンシャルの谷で減衰振動する場合、 $\phi < 0$ へ over shoot する場合などがある。ただし境界条件を満たす解は、 $r \rightarrow \infty$ で $\phi = 0$ となるものである。これを満たし、遠方で (B.26) のように振る舞うような ϕ_0 を数値的に探す。同時に数値積分を行い、 Q, E を求める。同様の計算を各ポテンシャル、各モデル毎に行い、平衡空間および $Q - E$ 図を描く。

なお、DBI 型 k 場の理論では図 35 のようにポテンシャルを描くことはできないが、同様にして適当に初期値を探索することで、境界条件を満たす解を得ることができる。

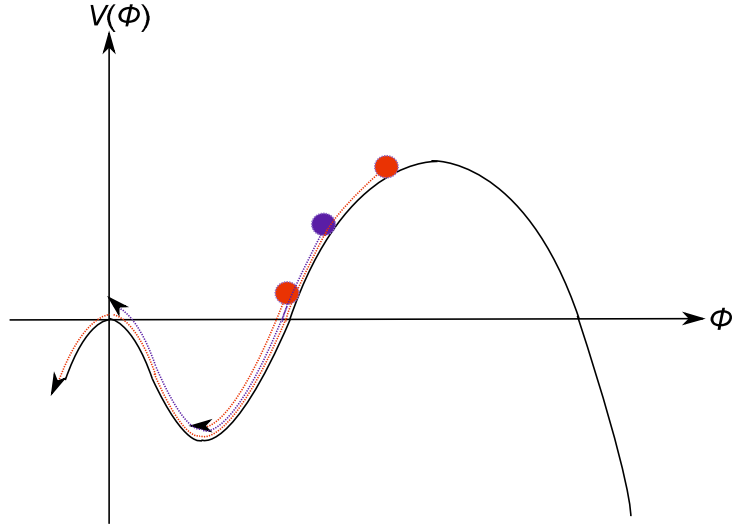


図 35: シューティング法による初期値の決定。赤は境界条件に合わない解、青が境界条件を満たす解を表す。

B.2.2 gauged Q -ball の場合

次に gauged Q -ball の場合を考える。この場合ゲージ場の運動方程式

$$\frac{d^2\Omega}{dr^2} + \frac{2}{r}d\Omega dr = \Omega(q\phi)^2, \quad (\text{B.27})$$

を境界条件

$$\frac{d\Omega}{dr}(r=0) = 0, \quad \Omega(r \rightarrow \infty) = \omega + \frac{C}{r}, \quad (\text{B.28})$$

のもとでスカラー場の方程式とともに解く必要がある。従って ϕ と Ω 両方について境界条件を満たすような初期値をシューティング法により探索する必要がある。実際には $\Omega(0)$ を固定し、適切な $\phi(0)$ をシューティング法で探すことで、平衡解を得ることができる。

まず、初期値付近での振舞いを考える。スカラー場に関しては式 (B.19) と同様だが、ゲージ場に関しては

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_2 r^2 + O(r^4), \quad (\text{B.29})$$

とおく。ここで ϕ_2, Ω_2 はそれぞれ

$$\begin{aligned} \phi_2 &= -\frac{1}{6} \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_0} + \Omega_0^2 \phi_0 + O(r^2), \\ \Omega_2 &= \frac{1}{6} \Omega_0 (q\phi_0)^2 + O(r^2), \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

で与えられる。なお、関数 $\Omega^2(r)$ は単調増加関数である。変数変換 $f \equiv r^2 \times (d\Omega/dr)$ を行うと方程式 (4.9) は

$$\frac{df}{dr} = \Omega(qr\phi)^2, \quad \frac{d\Omega}{dr} = \frac{f}{r^2}, \quad (\text{B.31})$$

と書ける。 Ω と f を数値計算の刻み幅 Δr で 1 次の項までテーラー展開すると

$$\begin{aligned} f(r + \Delta r) &= f(r) + (qr\phi(r))^2 \Omega(r) \Delta r + O(\Delta r^2), \\ \Omega(r + \Delta r) &= \Omega(r) + \frac{f(r)}{r^2} \Delta r + O(\Delta r^2), \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

である。ただし、境界条件から $f(0) = 0$ とした。まず $\Omega(0) > 0$ であれば、 $f(\Delta r) > 0$ である。方程式 (B.32) から計算の各ステップ $r \rightarrow r + \Delta r$ で f および Ω は増加する。従って Ω^2 は r の増加に伴い単調増加する。

次に保存量 Q やエネルギー E について考える。これは積分により与えられるが、ゲージ場を含まない場合と同様に微分形

$$\frac{dQ}{dr} = 4\pi\Omega r^2 \phi^2, \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{dE}{dr} = 4\pi r^2 \left(\frac{1}{2}\Omega^2 \phi^2 + \Omega'^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right), \quad (\text{B.34})$$

を考える。ただし $Q(0) = 0$, $E(0) = 0$ とする。 Q や E の原点付近での振舞いは

$$Q = \frac{4\pi\Omega_0}{3}\phi_0^2 r^3 + O(r^5), \quad (\text{B.35})$$

$$E = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2}\Omega_0^2 \phi_0^2 + V(\phi_0) \right) r^3 + O(r^5), \quad (\text{B.36})$$

で与えられる。

次に $r \rightarrow \infty$ での振舞いを考える。境界条件 (4.13) から Ω は遠方で定数 ω に近づく。従って ϕ のじゅうぶん遠方での振舞いは (B.26) のようになる。このとき Q や E はある一定値に近づいていく。

C 付録 C: Affleck-Dine 機構

C.1 宇宙のインフレーションとバリオン数生の問題

現在、宇宙はビッグバンにより始まり、その後膨張を続ける非定常宇宙論が広く受け入れられている。これは 3K 宇宙背景放射の観測により立証されている。ところが、ビッグバンに始まる宇宙は次のような問題を抱えている。

- モノポール問題：宇宙の初期は非常に高温・高密度であり、大統一理論のエネルギースケールより高い状態であった。その後膨張により宇宙が冷却されると、自発的対称性の破れがおこり、大量のモノポールが生成されるはずである。ところが、現在モノポールは観測されておらず、これと矛盾する。
- 地平線問題：3K 宇宙背景放射は地球から見てほぼ一様の温度で観測される。これは、因果的に関係のない宇宙の領域に因果関係があるように見えることを意味する。
- 平坦性問題：現在の宇宙はほぼ平坦であるが、宇宙膨張を記述するアインシュタインの一般相対性理論によると、必ずしも宇宙が平坦である必要はない。しかるに現在観測されている宇宙はほぼ平坦である。

これらの問題を解決するために宇宙は初期に指数関数的な膨張が起こったとする、インフレーションが導入された。まず、急激な膨張によりモノポールの密度は薄められる。次にインフレーション前にある 2 つの領域が因果関係を持つ距離にあったが、インフレーションにより因果関係を持たない領域まで引き離されたとすると、地平線問題を解決できる。さらにインフレーションにより初期宇宙がじゅうぶん引き伸ばされることによって、宇宙は平坦になる。

このように一見大きな成功を取めたインフレーション理論であるが、新たな問題も提起した。その 1 つがバリオン数の問題である。宇宙初期に非対称なバリオン数があったとしても、インフレーションによりその非対称性が薄められ、宇宙に存在する物質と反物質の数が等しくなるはずである。しかし現実には反物質でできた天体などは存在せず、これに矛盾する。この問題を解決する 1 つの機構として、Affleck-Dine (AD) 機構が提案された。この付録では AD 機構について簡単に紹介し、Q-ball との関係述べる。

C.2 超対称標準模型と Affleck-Dine 機構の概要

近年、階層性問題などの標準理論における問題や、超弦理論などの重力を含めた統一理論の観点から標準理論を最小に超対称化した、超対称標準理論 (MSSM) が研究されている。超対称性を持つ理論は、ボソンとフェルミオンが混ざるような変換の下で不変である。またバリオン数やレプトン数を持つスカラー場を含む。さらに、スカラーポテンシャルが消えるような場の配位空間があり、これを平坦方向と呼ぶ。

このような平坦方向があると、バリオン数やレプトン数を持つスカラー場がインフレーション終了後、平坦方向に沿って非常に大きな期待値を持つことができる。このスカラー場はハップルパラメータが有効質量程度になったとき、原点の周りの振動を開始する。このときバリオン数もしくはレプトン数を破る効果が存在し、かつスカラー場に位相方向のモーメントを与えることができれば、バリオン非対称性を作り出すことが可能である。以上のように平坦方向に沿ってスカラー場に大きな期待値を与え、そのスカラー場にバリオンもしくはレプトン数を励起することによって宇宙のバリオン数生成を説明するモデルを Affleck-Dine (AD) 機構と呼ぶ。このとき対応するスカラー場 ϕ を AD 場と呼ぶ。

C.3 平坦方向のポテンシャル

C.3.1 ポテンシャルの具体的な形

C.2 で述べたように、大きな真空期待値を与える平坦方向のポテンシャルを持つスカラー場によって、バリオン数生成を起こすモデルを AD 機構と呼ぶ。繰り込み可能な MSSM はソフトに SUSY 破れを起こす項なしに、たくさんの平坦方向が存在する。一方で、SUSY 破れを起こすような高エネルギー ($\leq M_{GUT}$) 領域では完全に平坦な方向が存在しない。そこで近年では、繰り込み可能な MSSM ポテンシャルに非繰り込み可能でソフトに対称性を破り、かつインフラトンと結合した項を加えることが多い。このとき、SUSY はそれを破る Z 場の真空期待値

$$\langle Z \rangle = 0, \quad \langle F_Z \rangle = F, \quad (C.1)$$

によって自発的に破られる。

SUSY 破れセクターは、最小 GUT 群 $SU(5)$ の表現・反表現である。このセクターはメッセンジャー場 $\psi, \bar{\psi}$ のペアで湯川相互作用

$$W = kz\bar{\psi}\psi + M_{mess}\bar{\psi}\psi, \quad (C.2)$$

によってオブザーバブルセクターと結び付けられる。ここで k は結合定数、 M_{mess} はメッセンジャー場の質量である。従って、MSSM ゲージノ (ゲージ粒子の超対称パートナー) とスカラーの質量は

$$M_{gaugeno} \sim M_{scalar} \sim \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{kF}{M_{mess}}, \quad (C.3)$$

である。ただし g はゲージ結合定数である。一方でグラビトンの質量は

$$m_{3/2} = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{3}M_P}. \quad (C.4)$$

ただし、 M_P はプランク質量である。

以上のような設定の下、平坦方向のポテンシャルは

$$V = V_{\text{gauge}} + V_{\text{grav}} = M_F^4 \left(\log \frac{|\Phi|^2}{M_{mess}^2} \right)^2 + m_{3/2}^2 \left(1 + K \log \frac{|\Phi|^2}{|M_*|^2} \right) |\Phi|^2. \quad (C.5)$$

と書ける。ここでポテンシャルの第 2 項における定数は $K = -0.01 \sim 0.1$ 程度の値で、 M_* は繰り込みスケールである。 M_F は

$$M_F \sim \frac{\sqrt{g}}{4\pi} \sqrt{kF}, \quad (C.6)$$

である。ただし実験 (ヒッグスボソンの質量) から

$$M_F \geq 4 \times 10^4 g^{1/2} [\text{GeV}], \quad (C.7)$$

と下限値が与えられる。一方でグラビトンの質量は

$$m_{3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}M_P} \frac{(4\pi)^2 M_F^2}{gk}, \quad (C.8)$$

と表される。これも M_F 同様に下限値が存在し

$$m_{3/2} \geq 6.1 \times 10^{-8} k^{-1} [\text{GeV}], \quad (C.9)$$

となる。従って結合定数 g もしくは k が大きい場合 V_{gauge} が優勢となる。一方で、これらの結合定数が小さい場合には V_{grav} が優勢になる。

C.3.2 V_{gauge} モデルの優位性

超対称性を破るためには現象論から様々な制限が存在するが、その一つに Flavor Changing Neutral Current (FCNC) をいかに抑制するか、という問題がある。FCNC を実験と矛盾なく小さくするためには、重力を媒介する AD モデルの場合、高エネルギー・スケールで非自明な調整が必要となる。一方でゲージを媒介するモデルでは、超対称性の破れをフレーバーに隠れてゲージ相互作用によって伝えるため、この点を解決できる。

このモデルの特徴は、超対称性を破るエネルギースケールが重力を媒介するモデルより小さく、結果としてグラビトンの質量が小さくなっていること、高いエネルギースケールで超対称性の破れの効果が見えなくなることである。また後述するように、安定な冷たいダークマターを生成することができる。

C.4 AD 機構における Q -ball とダークマター

大域的な $U(1)$ (あるいは $SO(2)$) 対称性を持つ理論でその保存量 Q が 0 でない系では、スカラーポテンシャル $V(\phi)$ が $V(\phi)/|\phi|^2 \neq 0$ の点に 0 でない最小値を持てば Q -ball が系のエネルギーを最小化することが知られている。AD 機構に基づく平坦方向のポテンシャルは、重力を媒介するモデル、ゲージを媒介するモデルで、いずれの場合もこの条件を満たし、従って Q -ball が生成される。特にゲージを媒介するモデルではじゅうぶん大きな保存量 Q を持つ場合には、核子の崩壊に対して安定でありこの時、直接冷たいダークマターとなりうる。一方で重力を媒介するモデルでは、核子の崩壊に対して不安定であるが、バリオン非対称性とダークマターの存在量に影響を及ぼす。

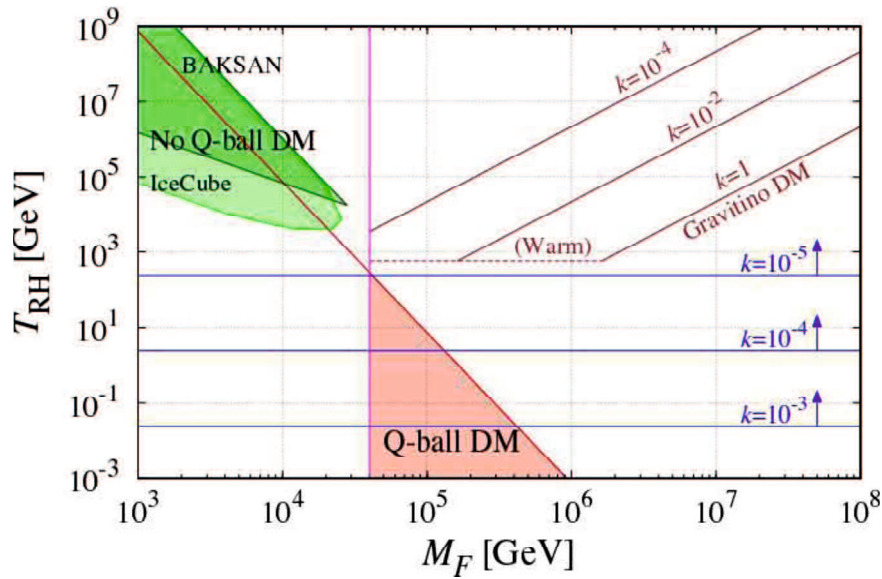


図 36: ゲージを媒介するモデルにおけるダークマターとしての Q -ball とその存在領域 (赤く塗りつぶされた領域)。赤い線は宇宙の再加熱温度 T_{RH} の上限であり、マゼンダは $g = 1$ での Λ_{mess} からくる制限を示している。青い線は T_{RH} の各 k に対する下限値である。BAKSAN[38], IceCube[39] は実験装置の名前である。これから Q -ball が暗黒物質として存在していたとしても、実験では検出できないことがわかる。文献 [40] より引用。

以上のように AD 機構によって生成される Q -ball はダークマターに関する諸問題と密接な関係を持つ。ただし、ダークマターが増えすぎると、宇宙の物質密度を過剰に増やすこととなる。すなわちゲージを媒介するモデルで Q -ball を過剰に生成すると、宇宙の物質密度が高くなり、結果として閉じた宇宙となる。これは現在観測されている宇宙の姿と矛盾する。重力を媒介するモデルでも同様に、崩壊した Q -ball が物質密度へと転化されることが知られているため、やはり Q -ball を過剰に増やすことは危険である。

最後にダークマターとしての Q -ball の観測可能性について述べる。ここでは直接ダークマターとなりうる、ゲージを媒介するモデルを考える。図 36(文献 [40] より引用) にダークマターとして Q -ball が存在する領域 (赤色の網掛け)、およびダークマターが存在すれば観測によって検出可能な領域 (緑色の網掛け) を示す。ただしメッセンジャースケールを

$$\Lambda_{mess} \equiv \frac{kF}{M_{mess}}, \quad (\text{C.10})$$

と定義した。これから、現在の観測装置では暗黒物質としての Q -ball を検出できないことがわかる。逆に言えば現状、ダークマターは発見されていないため、その候補として生き残っていることとなる。

D 付録D:カタストロフィ理論について

D.1 カタストロフィ理論

カタストロフィ理論は自然における諸現象を記述する理論として、1972年、ルネ・トムによって提唱された。この理論は徐々に変化する状態の下で、突発的に起こる現象を記述する。このような突発的な現象をカタストロフィと呼ぶ。その不連続性はトムの定理によって7つの基本的形態に分類できることがわかっている。定理の証明は非常に複雑であるがその応用は容易であり、物理学のみならず幅広い自然科学分野における数多くの現象が「くさび」のカタストロフィを用いて説明できることがわかっている。その結果、カタストロフィ理論が新たな実験を予言する、あるいは非常に複雑な現象の理論として用いられるなど、有効に機能している。ここでは具体例をもとにカタストロフィ理論を紹介し、その有用性を論じる。

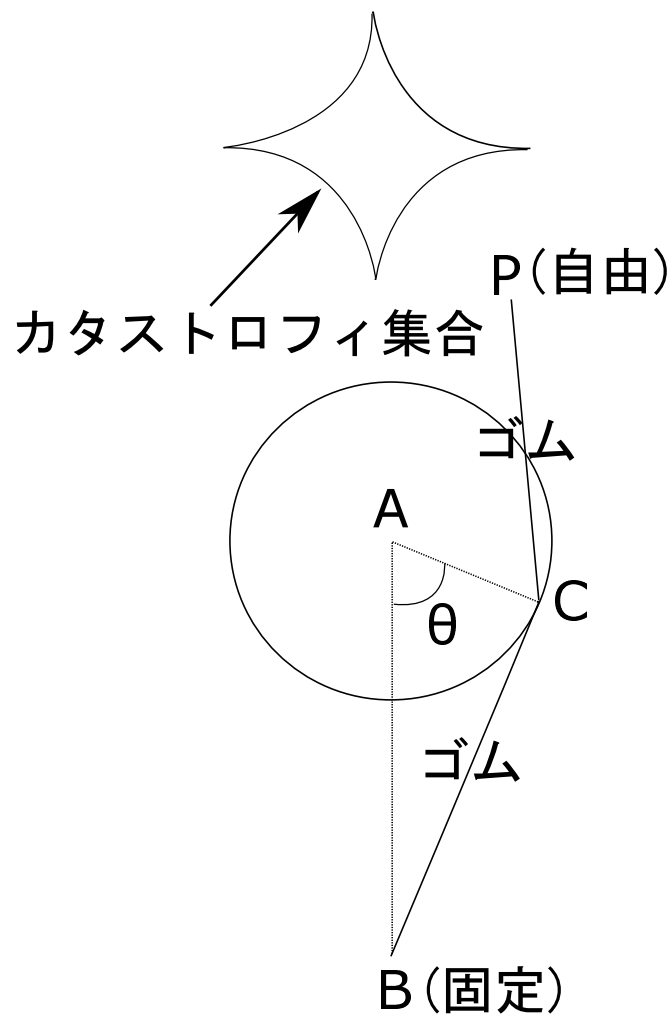


図 37: ジーマンのカタストロフィ機械の模式図。円盤が点 A を中心に回転する。点 B は固定されており点 C で円盤につながっている。点 P が平面上をゆっくり動くことで円盤の角度 θ が変化する。ここで、あるとき突然角度 θ の変化する点があるが、これをカタストロフィ集合と呼ぶ。

D.2 ジーマンのカタストロフィ機械

本節では、ジーマンのカタストロフィ機械と呼ばれる「おもちゃ」を用いてカタストロフィについて説明する。この系は図 37 のように構成される。点 A を中心として半径 AC の円盤が回転する。また点 B は固定されており、BC, CP は輪ゴムなどのフックの法則に従う「ひも」によって構成される直線とする。P は自由端であり P を平面上で動かすことによって点 C が回転する。特に平面をコントロール平面、点 P をコントロール点と呼ぶ。この系の状態は $\angle BAC = \theta$ によって記述される。

当然のことながら点 P をゆっくり動かすと、それに伴い点 C もゆっくり回転する。ところがあるコントロール点で点 P をゆっくり動かしたにもかかわらず、突然、角 θ がジャンプし大きく角度が変化する。この「ジャンプ」がこの系のカタストロフィにあたる。カタストロフィがおこる点をプロットすると図 37 の上にあるような形の曲線が出来上がる。この図形をカタストロフィ集合と呼ぶ。

角 θ は古典的な「力学」によって決まっている。点 P を固定したまま手で円板を回すと、必ずゴムのエネルギーを極小にするような状態が実現する。この角 θ をコントロール点 P に対する安定平衡状態という。

D.3 一般的なカタストロフィ

以下ではジーマンのカタストロフィ機械での考察を一般化し、さまざまな系に应用することを考える。ジーマンの機械における状態は角度 θ であり、系の状態空間は直線 \mathbf{R}^1 である。また系のコントロール点は平面上にあるからコントロール空間は平面 \mathbf{R}^2 である。一般の系の場合、状態空間は n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) | z_1, \dots, z_n \in \mathbf{R}\}$ である。ここで n は任意の自然数とする。また、コントロール空間は一般的に k 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^k = \{p = (p_1, \dots, p_k) | p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}\}$ である。ただし以下の議論では簡単のため、コントロール空間は 4 次元以下のユークリッド空間であるとする。

更にジーマンの機械と同様、ポテンシャル

$$\begin{aligned} V : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n &\mapsto \mathbf{R} \\ (p, z) &\mapsto V(p, z) = V(p_1, \dots, p_k, z_1, \dots, z_n), \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

が定義されている系を考える。また、あるコントロール点 p が与えられたとき、変数 p を固定して z のみを変数とした関数

$$V_p : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}, \quad V_p(z) = V(p, z), \quad (\text{D.2})$$

を考える。この関数 $V_p(z)$ の極小値を与えるような極小点 z が系の安定平衡状態となる。一般に複数の極小点が存在する場合、いずれかの点が系の状態を与えるが、これは遅れの規約に従うとする。

平衡点は

$$\frac{\partial V}{\partial z(p, z)} = \dots = \frac{\partial V}{\partial z_n(p, z)} = 0, \quad (\text{D.3})$$

で与えられる。これを満たす (p, z) を平衡点、このような点の集合を系の平衡空間とよび

$$M_V = \left\{ (p, z) \mid \frac{\partial V}{\partial z}(p, z) = \dots = \frac{\partial V}{\partial z_n}(p, z) = 0 \right\}, \quad (\text{D.4})$$

で示す。 M_V は \mathbf{R}^k と \mathbf{R}^n との直積空間であり、 $k+n$ 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^{k+n} の部分空

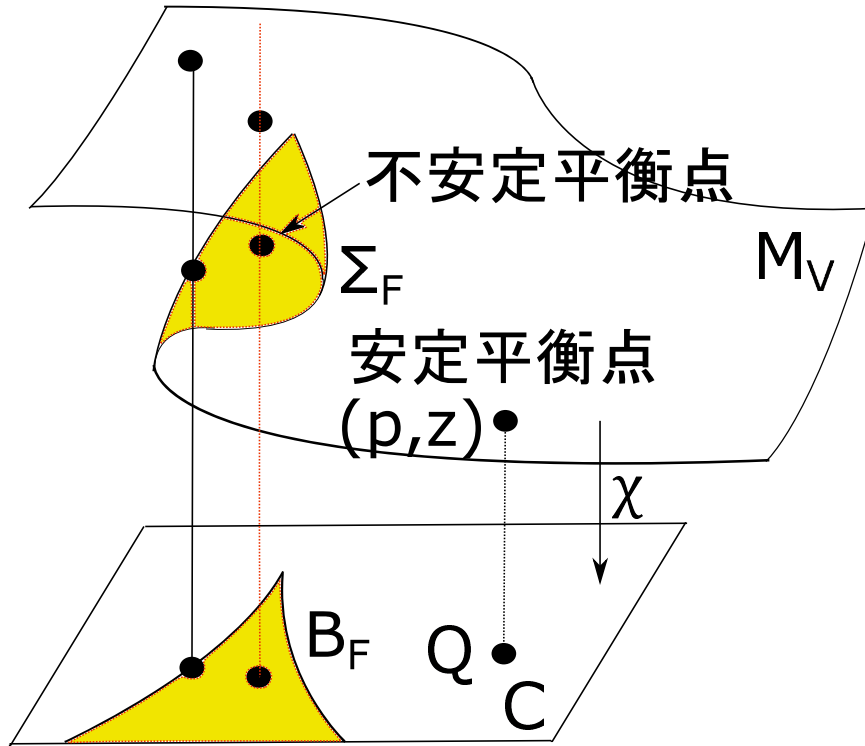


図 38: ジーマンのカタストロフィ機械における平衡空間 M_V 、カタストロフィ写像 χ およびコントロール平面 C 。 Q は M_V 上の安定平衡点に対応する。 Σ_F は安定性の变化する点の集合であり、 B_F は Σ_F を C 上にカタストロフィ写像したものである。黄色で塗りつぶした部分が不安定平衡空間であり、安定平衡空間はそれらを除いた部分である。

間である。さらに安定平衡点の集合 G_V は M_V の部分空間であり G_V を系の安定平衡空間という。 M_V 上の点 (p, z) が安定平衡点となるためには条件 (D.3) に加え、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2(p, z)} > 0, \dots, \frac{\partial^2 V}{\partial z_n^2(p, z)} > 0, \quad (D.5)$$

を満たす必要がある。したがって G_V は

$$G_V = \left\{ (p, z) \mid \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial z}(p, z) = \dots = \frac{\partial V}{\partial z_n}(p, z) = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2(p, z)} > 0, \dots, \frac{\partial^2 V}{\partial z_n^2(p, z)} > 0 \end{array} \right\}, \quad (D.6)$$

を満たす。さらに G_V の境界 Σ_F 上の点で

$$\Sigma_F = \left\{ (p, z) \mid \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial z}(p, z) = \dots = \frac{\partial V}{\partial z_n}(p, z) = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2(p, z)} = 0, \dots, \frac{\partial^2 V}{\partial z_n^2(p, z)} = 0 \end{array} \right\}, \quad (D.7)$$

となる。これは M_V の折り目の点の集合に対応する。

さて、 M_V のある点 (p, z) 近傍で、この系にカタストロフィがおこったとする。このときギーマンの機械と同様に \mathbf{R}^{k+n} より \mathbf{R}^k への射影を

$$\begin{aligned} \chi: \mathbf{R}^{k+n} &\mapsto \mathbf{R}^k \\ (p, z) &\mapsto p, \end{aligned} \quad (D.8)$$

表 2: 初等カタストロフィとその種類

| k | F | 名称 | 総称 |
|-----|---|-------|-----|
| 1 | $x^3/3 + ux$ | 折り目 | |
| 2 | $\pm x^4/4 + ux^2/2 + vx$ | くさび | カス |
| 3 | $x^5/5 + ux^3/3 + vx^2/2 + wx$ | つばめの尾 | ポイド |
| 4 | $\pm x^6/6 + ux^4/4 + vx^3/3 + wx^2/2 + tx$ | 蝶 | |
| 3 | $x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$ | 双曲的へそ | |
| 3 | $x^3/3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$ | 楕円のへそ | へそ |
| 4 | $x^2y \pm y^4 + ux^2 + vy^2 + wx + ty$ | 放物的へそ | |

とすると、この χ で M_V を \mathbf{R}^k へ射影する V のカタストロフィ写像

$$\chi : M_V \mapsto \mathbf{R}^k, \quad (\text{D.9})$$

の点 (p, z) の近傍における振る舞いがカタストロフィの様子を現す。

図 38 に例としてジーマンのカタストロフィ機械（コントロール変数が二つ）における、平衡空間 M_V 、カタストロフィ写像 χ 、およびコントロール平面 C を示す。

D.4 トムの定理

カタストロフィ理論における重要な定理として、トムの定理が挙げられる。トムの定理は系のポテンシャル V が構造安定（詳細は数学的な証明が必要だが、直感的には系を現実的に作る事ができ、かつ例外的でない系であるということ）であれば、このカタストロフィ写像 χ_V は適当な座標変換をすると、非常に単純な多項式 F で与えられる、カタストロフィ写像 χ_F の原点における様子と一致することを主張する。すなわち (p, z) でカタストロフィが起きるとき M_V は点 (p, z) の近傍では k 次元ユークリッド空間は \mathbf{R}^k と微分位相同形であり (p, z) におけるカタストロフィ写像

$$\chi_V : M_V \mapsto \mathbf{R}^k, \quad (\text{D.10})$$

の点 (p, z) を原点として \mathbf{R}^{k+n} (\mathbf{R}^k と \mathbf{R}^n) に適当な新座標系 (\bar{p}, \bar{z}) を導入して $\mathbf{R}^{k+n} \ni (p = (p_1, \dots, p_k), z = (z_1, \dots, z_n)) \mapsto (\bar{p} = (u, v, w, t), \bar{z} = (x, y, \dots, s)) \in \mathbf{R}^{k+n}$ と座標変換すると、この新座標系に関して次に与えるポテンシャル F の平衡空間 M_F の近傍におけるカタストロフィ写像

$$\chi_F : M_F \mapsto \mathbf{R}^k, \quad (\text{D.11})$$

と一致する。ここで F はコントロールの個数が与えられたとき、表 2 の k 欄の値が k 以下であるポテンシャルのどれか一つであり、 V と F の状態変数の個数が一致している場合 F は V の x, y に関するある次数までのテーラー展開と一致する。ただし V は構造安定であるとする。つまりトムの定理に従うと現実的で例外的でない系の場合、カタストロフィの様子は表 2 のいずれかの様相を示すことになる。

なお表 2 の 7 つのポテンシャル F によるカタストロフィ写像 $\chi_F : M_F \mapsto \mathbf{R}^k$ を初等カタストロフィ写像といい、これらで示されるカタストロフィを初等カタストロフィという。多くの物理現象は初等カタストロフィの範疇で議論することができる。

E 付録 E：南部・後藤の作用と DBI 型スカラー場の理論の関係

ここでは最も基本的な弦理論である、南部・後藤の作用と DBI 型スカラー場の理論の対応関係を示す。

E.1 世界面

相対論において点粒子の運動の様子は測地線の方程式で記述され、粒子の軌跡は世界線を描く。この世界線は 1 つのパラメータで決定される。一方、粒子ではなく「ひも」を考えると、ひもの軌跡は世界面を描く。世界面は 2 つのパラメータ

$$\vec{x}(\xi^1, \xi^2) = (x^1(\xi^1, \xi^2), x^2(\xi^1, \xi^2), x^3(\xi^1, \xi^2)), \quad (\text{E.1})$$

で与えられる。この点が粒子とひもの間で決定的に異なる点である。

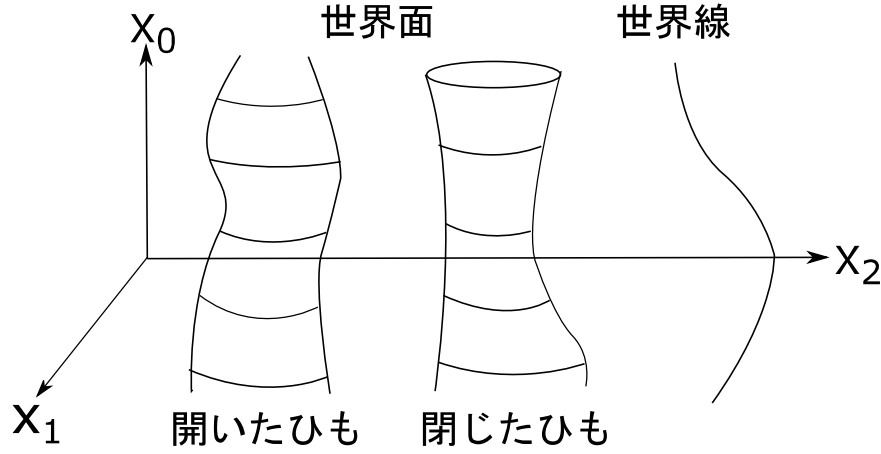


図 39: ひもの世界面と粒子の世界線。ひもの場合、世界面は二つのパラメータで表される。

さて、固有時と世界線の例を参考にひもの作用を導出しよう。 v_1 方向への変位は $(d\xi^1, 0)$ で表され v_2 方向への変位は $(0, d\xi^2)$ で表される。従って

$$dv_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad dv_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2, \quad (\text{E.2})$$

となる。 dv_1, dv_2 が作る平行四辺形の面積は

$$dA = \{(dv_1 \cdot dv_1)(dv_2 \cdot dv_2) - (dv_1 \cdot dv_2)^2\}. \quad (\text{E.3})$$

ここで (E.2) を使うと

$$dA = d\xi_1 d\xi_2 \left[\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{E.4})$$

従って、面積はこれを積分して

$$A = \int d\xi_1 d\xi_2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right)^2}, \quad (\text{E.5})$$

となる。世界面は最小面積問題、すなわち A を最小にするように $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$ が決まる。

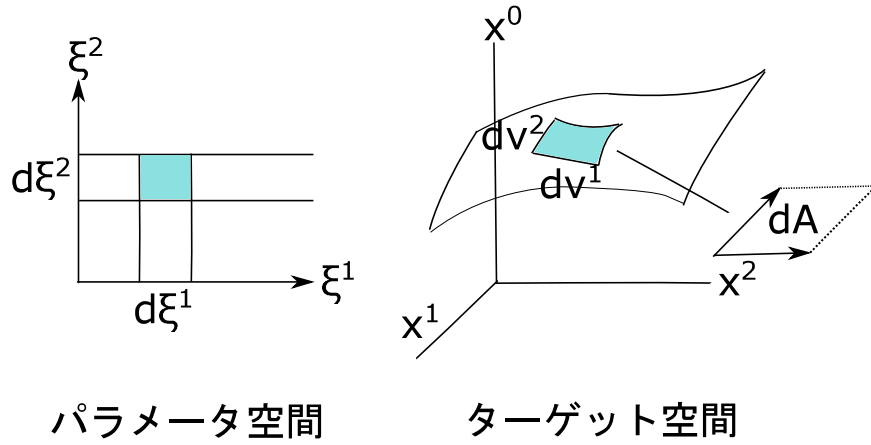


図 40: パラメータ空間とターゲット空間。

E.2 パラメータを取り直した際の面積不変性

パラメータを取り直した時、面積 A が不変であるか、検討する。パラメータを $\tilde{\xi}^1 = \tilde{\xi}^1(\xi^1, \xi^2)$, $\tilde{\xi}^2 = \tilde{\xi}^2(\xi^1, \xi^2)$ と取り直す。このとき

$$\begin{aligned} d\xi^1 d\xi^2 &= \det\left(\frac{d\xi^i}{d\tilde{\xi}^j}\right) d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = \det(M) d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2, \\ d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 &= \det\left(\frac{d\tilde{\xi}^i}{d\xi^j}\right) d\xi^1 d\xi^2 = \det(\tilde{M}) d\xi^1 d\xi^2, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

ただし

$$M_{ij} \equiv \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j}, \quad \det(M)\det(\tilde{M}) = 1, \quad (\text{E.7})$$

である。

さて、関数 $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$ で表される、ターゲット空間 (図 40) の表面 S について考えよう。表面上の線素は $ds^2 \equiv d\vec{x} \cdot d\vec{x}$ であるが、

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^3} d\xi^3, \quad (\text{E.8})$$

より

$$ds^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \equiv g_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad (\text{E.9})$$

である。これを用いると面積は

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}, \quad g = \det(g_{ij}), \quad (\text{E.10})$$

と書ける。なお g_{ij} を誘導計量と呼び、

$$g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j, \quad (\text{E.11})$$

を満たす必要がある。これから

$$\begin{aligned} g_{ij}(\xi) &= \tilde{g}_{pq} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} = \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_i^p \tilde{M}_j^q \\ &\equiv (\tilde{M}^T)_i^p \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_j^q, \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

また

$$g = \tilde{g}(\det(\tilde{M}))^2 \Rightarrow \sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}}\det(\tilde{M}), \quad (\text{E.13})$$

である。従って、次のように面積の不変性が導かれる。

$$\begin{aligned} A &= \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 (\det(M)) \sqrt{\tilde{g}} (\det(\tilde{M})) \\ &= \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}}. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

E.3 南部・後藤の作用

以下ではパラメータ ξ^1, ξ^2 を τ, σ で置き換え、ベクトル \vec{x} を X^μ と書く。 X^μ は τ, σ の関数であり $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$ である。ただし σ は有限の範囲、 τ は $(-\infty, \infty)$ である。 τ は固有時であることを注意すると、面積は

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X_\lambda}{\partial \tau} \frac{\partial X^\lambda}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma}\right)}, \quad (\text{E.15})$$

である。

ところで面積関数の次元は、

$$[\tau] = T, \quad [\sigma] = L, \quad [X^\mu] = L, \quad [A] = L^2, \quad (\text{E.16})$$

であり、作用関数の次元は ML^2/T である。次元解析から

$$\frac{ML^2}{T} = L^2 \cdot \frac{T}{L} \cdot \frac{ML^2}{LT^2}, \quad (\text{E.17})$$

だが

$$\left[\frac{1}{c}\right] = \frac{T}{L}, \quad [T_0] = \frac{ML^2}{LT^2}, \quad (\text{E.18})$$

であり、 c, T_0 はそれぞれ光速、ひもの張力である。従って作用は

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \quad (\text{E.19})$$

となる。ただし $\dot{}$ は τ 微分、 $'$ は σ 微分を表す。

ところで世界面上の線素は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (\text{E.20})$$

である。そこで誘導計量を

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}, \quad (\text{E.21})$$

と導入すると

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.22})$$

これを用いると南部・後藤の作用は

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad \det(\gamma_{\alpha\beta}) = \sqrt{-\gamma} \quad (\text{E.23})$$

と書くこともできる。

このような南部・後藤の作用を第 1 量子化すると、基底状態がタキオン (質量の 2 乗が負) となることがわかっている。従って現実的な模型としては悪い性質を持たない、超弦模型を採用する必要がある。ただしクォークの振舞いを説明するために、南部・後藤の作用を用いる場合がある。AdS/CFT 対応性によると AdS 時空中の半無限の長さの弦は、電荷をもつ無限に重い粒子と等価であり、これは外場としてのクォークをあらわす。このようなモデルを用いることでクォークの各相における振舞いを自然に記述することができる。従って有用な理論である、とすることができる。

E.4 Dirac-Born-Infeld 型 k 場の理論と南部・後藤の作用の関係

簡単のため、 $1+1$ 次元における DBI 型 k 場の理論を考えよう。この理論は

$$\mathcal{L} = 1 - \sqrt{1 - \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\}}, \quad (\text{E.24})$$

と表される。ここで変数を以下のように変換する。

$$X^\mu = \begin{pmatrix} t(\tau, \sigma) \\ x(\tau, \sigma) \\ y = \phi(t(\tau, \sigma), x(\tau, \sigma)) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.25})$$

これを式 (E.24) に入れて整理すると、

$$\mathcal{L} = -\sqrt{(\dot{X} X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (\text{E.26})$$

となる。このラグランジアンは南部・後藤の作用における (E.19) と一致する。従って $1+1$ 次元の DBI 型 k 場の理論は南部・後藤の理論と等価である。

このようにひも理論と DBI 型 k 場の理論は密接な関係がある。ここでひも理論は力の統一理論として、有力であると考えられている。そのような側面から、DBI 型 k 場の理論は有力視されており近年、盛んに研究がおこなわれている。

なお、そのほかにも高次元理論との関係があげられる。例えば 10 次元純 CFT 理論を考える。ここで 5 次元を S^5 にコンパクト化し、ブレーン描像で 4 次元理論に還元すると式 (3.1) と同様の形が得られる [2]。ただしこの場合 λ を定数として $f(\phi) = \phi^4/\lambda$ となる。以上のように $f(\phi)$ を適当に選ぶことで様々な理論に対応させることができる。このような点も DBI 型 k 場の理論が注目される要因となっている。

謝辞

本研究にあたっては白石清教授および坂井伸之教授にご指導承りました。この場を借りて感謝いたします。また当研究室では、後輩諸君のおかげで有意義に過ごすことができました。最後に本研究に携わったすべての方々に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] M. B Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987); J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [2] E. Silverstein and D. Tong, *Phys. Rev. D* **70**, 103505 (2004).
- [3] R. Friedberg, T. D. Lee, and A. Sirlin, *Phys. Rev. D* **13**, 2739 (1976).
- [4] S. Coleman, *Nucl. Phys.* **B262**, 263 (1985).
- [5] M.S. Volkov and E. Wahnert, *Phys. Rev. D* **66**, 085003 (2002); B. Kleihaus, J. Kunz, and M. List, *ibid.* **72**, 064002 (2005); B. Kleihaus, J. Kunz, and I. Schaffer, *ibid.* **77**, 064025 (2008).
- [6] H.P. Nilles, *Phys. Rep.* **110**, 1 (1984); A. Kusenko, *Phys. Lett. B* **405**, 108 (1997); *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **62A-C**, 248 (1998).
- [7] I. Affleck and M. Dine, *Nucl. Phys.* **B249**, 361 (1985).
- [8] K. Enqvist and J. McDonald, *Nucl. Phys.* **B538**, 321 (1999); *Nucl. Phys.* **B538**, 321 (1999); S. Kasuya and M. Kawasaki, *Phys. Rev. D* **62**, 023512 (2000).
- [9] A. Kusenko and M. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **418**, 46 (1998); I. M. Shoemaker and A. Kusenko, *Phys. Rev. D* **80**, 075021 (2009).
- [10] A. Kusenko and M. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **423**, 104 (1998).
- [11] N. Sakai and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **119**, 929 (2008).
- [12] M. Kuniyasu, N. Sakai, and K. Shiraishi, *Phys. Rev. D* **94**, 116001 (2016).
- [13] K. Lee, J. A. Stein-Schabes, R. Watkins, and L. W. Widrow, *Phys. Rev. D* **39**, 1665 (1989).
- [14] Xin-zhou Li, Jian-gang Hao, and Dao-jun Liu, *Phys. A* **34**, 1459 (2001).
- [15] M. Deshaies-Jaxques and R. MacKenzie, *Can. J. Phys.* **85**, 693 (2007).
- [16] K. N. Anagnostopoulos, M. Axenides, E. G. Floratos, and N. Tetradis, *Phys. Rev. D* **64**, 125006 (2001).
- [17] H. Arodz and J. Lis, *Phys. Rev. D* **79**, 045002 (2009).
- [18] T. Tamaki, and N. Sakai, *Phys. Rev. D* **90**, 085002. (2014).
- [19] Sato, M, *RIMS Kokyuroku (Kyoto University)* **439**, 30-46 (1981).
- [20] A. Kusenko, *Phys. Lett. B* **404**, 285 (1997); **406**, 26 (1997).
- [21] T. Multamaki and I. Vilja, *Nucl. Phys.* **B574**, 130 (2000).
- [22] F. Paccetti Correia and M. G. Schmidt, *Eur. Phys. J. C* **21**, 181 (2001).

- [23] T. Tamaki and N. Sakai, Phys. Rev. D **81**, 124041 (2010); B. Kleihaus, J. Kunz, S. Schneider Phys. Rev. **85**, 024045 (2012).
- [24] K.G. Savvidy, Ph.D. thesis, Princeton University, 1999, arXiv:hep-th/9906075.
- [25] M. Born and L. Infeld, *Proc. R. Soc. Lond. A* **144**, 425 (1934).
- [26] W. Heisenberg, Z. Phys. **133**, 79 (1952).
- [27] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. A* **268**, 57, (1962).
- [28] T. Maki, N. Kan, K. Shiraishi, J. Mod. Phys. **3**, 1081 (2012).
- [29] T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. Land. A **260**, 127, (1961); S. Deser, M. J. Duff, and C. J. Isham Nucl. Phys. **B114**, 96 (1976); B. Dion, L. Marlean, and G. Simon Phys. Rev. D **53**, 1542 (1996).
- [30] E. Babichev, Phys. Rev. D **74**, 085004 (2006); **77**, 065021 (2008).
- [31] S. Sarangi, JHEP. **0807**, 018 (2008).
- [32] C. Armendariz-Picon, T. Damour, V. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999).
- [33] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438 (2000); C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **63**, 103510 (2001); T. Chiba, T. Okabe, M. Yamaguchi, Phys. Rev. D **62**, 023511 (2000); M. Malquarti, E. Copeland, A. Liddle, Phys. Rev. D **68**, 023512 (2003); J. Kang, V. Vanchurin, S. Winitzki, Phys. Rev. D **76**, 083511 (2007).
- [34] J. Diaz-Alonso and D. Rubiera-Garcia, Ann. Phys. (Amsterdam) **324**, 827 (2009).
- [35] P. Jetzer, Phys. Rept. **220**, 163-227 (1992).
- [36] P. Jetzer and J. J. van der Bij, Phys. Lett. B **227**, 341-346 (1989).
- [37] G, 't Hooft, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974); A. M. Polyakov, JETP. Lett. **20**, 194 (1974).
- [38] J. Arafune, T. Yoshida and K. Ogura, Phys. Rev. D **62**, 105013 (2000).
- [39] M. G. Aartsen *et al.* Eur. Phys. J. C **74**, 2938 (2014).
- [40] S. Kasuya, M. Kawasaki and T. Yanagida, Prog. Theor. Exp. Phys. 053B02 (2015).