| | |
|---|---|
| 氏名 | ライラ　フィトリアナ<br>Laila Fitriana |
| 授与学位 | 博士（理学） |
| 学位記番号 | 理工博甲第699号 |
| 学位授与年月日 | 平成28年9月30日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第４条１項 |
| 研究科，専攻の名称 | 理工学研究科(博士後期課程) 自然科学基盤系専攻 |
| 学位論文題目 | On the energy estimates of the wave equation with time dependent propagation speed<br>(時間に依存する伝播速度をもつ波動方程式のエネルギー評価について) |
| 論文審査委員 | 主査　山口大学教授　廣澤　史彦<br>山口大学教授　増本　誠<br>山口大学教授　木内　功<br>山口大学教授　末竹　規哲<br>山口大学准教授　幡谷　泰史 |

# 【学位論文内容の要旨】

時間によって張力が変化する弦の振動モデルを，高次元・全空間に拡張した次のような $n$ 次元波動方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - a(t)^2\Delta)u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \ (\partial_t u)(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (1)$$

ここで，$a = a(t)$ は時刻 $t$ における波動の伝播速度を与える正値かつ有界な関数で $a \in C^m(\mathbb{R}_+)$ （$m \geq 2$）を満たしているとする．また $\Delta$ は $n$ 次元ラプラス作用素である．本学位論文では，(1) の解の運動エネルギー $E_K(t)$ と弾性エネルギー $E_E(t)$：

$$E_K(t) := \frac{1}{2}\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \ , \quad E_E(t) := \frac{1}{2}a(t)^2\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2}^2$$

の和で与えられる総エネルギー $E(t)$ の $t$ に関する次の評価 (i)，(ii)，(iii) を，既存の概念を一般化・精密化した新たな視点から考察している．

(i) 定数係数の場合に成立するエネルギー保存則 $E(t) = E(0)$ を一般化した generalized energy conservation (=(GEC)) とよばれる $E(t)$ と $E(0)$ の同値性の評価

$$C_0E(0) \leq E(t) \leq C_1E(0). \qquad \text{(GEC)}$$

（$C_0, C_1$ は $a$ のみに依存する定数．）

(ii) Boundedness of the energy (=BE) とよばれるエネルギーの一様有界性の評価

$$E(t) \leq C. \qquad \text{(BE)}$$

（$C$ は $a, u_0, u_1$ に依存する定数．）

(iii) 弾性エネルギー $E_E(t)$ の減衰評価.

$a(t)$ の高階微分可能性，導関数の減衰オーダー，安定性条件（stabilization property）と呼ばれる単調な関数との差の積分のオーダーなどにより，(i)，(ii) が成り立つための条件を考察した研究成果は数多く存在している．これらにより，$a(t)$ に対する高い微分可能性，導関数の速い減衰，強い安定性が，(GEC) の成立に有効のであることが知られていた．しかし，それらの結果は特別な場合を除いて最適なものではなく，より弱い仮定の下で (GEC) が成り立つ可能性は大きな問題として残されていた．本学位論文の研究では，従来のものを精密化した安定性条件と，初期値に対するジェブレイ級（Gevrey class）とよばれる高周波成分の減衰率に強い制約を与える関数のクラスを新たに導入することにより，既知の研究結果では (GEC)

や（BE）の成立・不成立の判定が不可能であった $a(t)$ に対して，それらの判定が可能となった．これらの結果は，本論文中で以下の３つの定理として与えられている：

Theorem 2.1：(i)，(ii）が成立するための十分条件に関する結果．（具体的なモデルに本定理を適用した例が Example 2.3，Example 2.6 で与えられている．）

Theorem 2.4：Theorem 2.1 の最適性を保証する結果．

Theorem 2.7：(iii）が得られるための十分条件と具体的な減衰オーダーに関する結果．（具体的なモデルに適用した例が Example 2.8，Example 2.9 で与えられている．）

本研究で導入された $a(t)$ と初期値に対する仮定と類似のものは，「弱双曲型方程式の初期値問題の適切性」という異なるタイプの問題に対する過去の研究において導入されたことはあったが，(i)-(iii）のようなエネルギーの漸近評価の問題に対して導入され，かつ，それらが本質的な条件となることを示した研究はこれまでに知られていなかった．実際，従来の波動方程式の初期値問題（1）に対するエネルギーの漸近挙動の評価において，弱双曲型方程式の適切性においては特に問題となる解の高周波成分の評価はあまり重要ではなかった．しかし，本研究で導入された精密化された安定性条件により，従来の立場では $E(t)$ の漸近挙動の問題として取り扱うことができなかった解の高周波成分に影響を与えうる $a(t)$ を考察することが可能となった．この事実は，$E(t)$ の漸近評価に関する研究の今後の発展に寄与すると同時に，今後，異なるタイプと認識されてきた二つの問題を統一的に取り扱うための重要なヒントにもなると期待される．

本学位論文では，上記の考察，定理と例の紹介，及びそれらの証明を以下の構成で行っている．

第１章では，伝播速度が時間に依存する波動方程式の初期値問題のエネルギー評価に関する基本的な事柄と関連する過去の研究結果の紹介や，本学位論文で考察する問題に対する動機付けなどを解説している．

第２章では，本学位論文の主結果である Theorem 2.1，Theorem 2.4，Theorem 2.7 とそれらに対応する具体例 Example 2.3，Example 2.6，Example 2.8 について解説している．

第３章は Theorem 2.1，Theorem 2.4 の証明である．Theorem 2.1 の証明における本質的なアイディアは，フーリエ変換した解を，時間・周波数空間における hyperbolic zone と呼ばれる高周波領域 $Z_H$ と pseudo-differential zone と呼ばれる低周波領域 $Z_\Psi$ で，それぞれ異なる手法で評価を行うことである．より詳しく述べると，$Z_H$ においては，$2\times2$ 行列値関数を仮定（4）を用いて対角化を行い，それによって構成した精密な近似解を評価するという手法である．一方，$Z_\Psi$ においては（3）を効果的に用いることによって必要な評価を得ることができる．また Theorem 2.4 は，(GEC）または（BE）の成立を否定するような伝播速度 $a(t)$ や初期値の列を具体的に構成することによって証明される．

第 4 章は Theorem 2.7 の証明である．証明における最も重要なアイディアは，中間の周波数領域に stabilized zone と呼ばれる領域 $Z_{st}$ を新たに導入することである．そこで，この領域においてのみ有効なある種の解の表現方法を用いると，証明に必要なより精密な解の評価を行うことが可能となる．

# 【論文審査結果の要旨】

本研究では，時間 $t$ に依存する伝播速度 $a(t)$ を持つ $n$ 次元波動方程式の初期値問題に対して，解の運動エネルギー $E_K(t)$ と弾性エネルギー $E_E(t)$ の和で与えられる総エネルギー $E(t)$ の $t$ に関する次の一様評価 (i)，(ii)，(iii）を，既存の概念を一般化・精密化した新たな視点から考察している．

(i) 定数係数の場合に成立するエネルギー保存則 $E(t)=E(0)$ を一般化した generalized energy conservation（=(GEC)）とよばれる $E(t)$ と $E(0)$ の同値性の評価

$$C_0E(0)\le E(t)\le C_1E(0)\quad (C_0,C_1\text{ は } a(t)\text{ のみに依存する正定数}), \tag{GEC}$$

(ii) 初期値のエネルギーとそれ以外の性質によって定まる定数 $C$ に対して成り立つ boundedness of the energy（=BE）とよばれるエネルギーの一様有界性の評価

$$E(t)\le C, \tag{BE}$$

(iii) 弾性エネルギー $E_E(t)$ の減衰評価．

$a(t)$ の微分可能性，導関数の減衰オーダー，安定性条件（stabilization property）と呼ばれる単調な関

数との差の積分のオーダーなどにより，（i），（ii）が成り立つための条件を考察した研究成果は数多く存在している．これらにより，$a(t)$に対する高い微分可能性，導関数の速い減衰，強い安定性が，（GEC）の成立に有効のであることが知られている．しかし，それらの結果は特別な場合を除いて最適なものではなく，より弱い仮定の下で（GEC）が成り立つ可能性は大きな問題として残されていた．本学位論文の研究は，従来のものを精密化した安定性条件と，初期値に対するジェブレイ級（Gevrey class）とよばれる$C^\infty$級のクラスを精密化した関数のクラスの意味での滑らかさの尺度を導入することにより，既知の研究結果では要請された仮定を満たさずに（GEC）や（BE）を結論付けることが不可能だった$a(t)$に対して，（GEC）や（BE）の成立・不成立を結論付けることが可能になった．

本研究で導入された$a(t)$と初期値に対する上記と類似の仮定は，「弱双曲型方程式の初期値問題の適切性」という異なるタイプの問題に対する過去の研究において導入されたことはあったが，（i）-（iii）のようなエネルギーの漸近評価の問題に対して導入され，かつ，それらが本質的な条件となることを示した研究はこれまでに知られていなかった．本研究成果が示唆する新たな視点は，エネルギー漸近評価に関する研究の今後の発展に寄与すると同時に，今後、異なるタイプと認識されてきた二つの問題を統一的に取り扱うための重要なヒントにもなると期待される．

本審査会においては，Theorem 2.7（弾性エネルギー$E_E(t)$の減衰評価）のオーダーの最適性について質問がなされた．これに対して，Theorem 2.7 そのものの結果の最適性を保証するものではないが，本論文で取り扱った問題の特別な場合に相当する参考文献にも記した過去の研究結果から，最適である可能性が高いという回答がなされた．これは，学位申請者が過去の研究成果を十分に理解したうえでなされたものである．また公聴会において，本研究で考察した方程式の物理的背景に関する質問がなされたが，それに対しては，張力が時間によって変化する１次元の弦の振動モデルを例にした回答がなされた．

以上より本研究は，新規性，独創性，信頼性，有効性ともに優れ，博士（理学）の論文に十分値するものと判断した．

論文内容及び審査会，公聴会での質問に対する対応などから，最終試験は合格とした．

なお，主要な関連論文の発表状況は下記のとおりである．（関連論文 計２編）

(1) M. R. Ebert, L. Fitriana and F. Hirosawa, On the energy estimates of the wave equation with time dependent propagation speed asymptotically monotone functions, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 432, No. 2, 654-677.

(2) M. R. Ebert, L. Fitriana and F. Hirosawa, A remark on the energy estimates for wave equations with integrable in time speed of propagation, Trends in Mathematics, Research Perspectives, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics (印刷中).