

III 研究ノート III

高校数学新課程に対応した講義形式の 統計学の授業における留意点について

渋谷綾子

1. はじめに

本研究ノートは平成27年度入学生から高等学校の数学において新課程に移行していることを踏まえて大学の統計学の授業の効率化と高度化のための講義スケジュールの試案をまとめたものである。高等学校の数学の新課程移行において、大学の統計学の授業に影響する点は、主に記述統計に関する知識が「数学Ⅰ」に取り入れられたことである¹⁾。一方、大学ではクォータ制の全8回の授業が行われるようになり、その授業内容はより厳選されることが求められている。また、共通教育では理科系の学生を対象とすることもあり、高等学校での数学の理解レベルに対してはしばらく注視する必要がある。以上の点から、高等学校での履修を鑑みて記述統計に関する事項の説明を短時間ですませ、より高度な内容を取り入れるということが肝要といえる。その際、クォータの授業ではどの程度まで高度化できるか、さらに受講者が理系である場合は「数学Ⅰ」で学んだ内容の確認をどのぐらい短時間ですませられるかに配慮するべきである。

本研究ノートではまず、統計学の授業で扱う事項について、高等学校数学新課程移行を踏まえて整理し、その後、クォータ制の授業スケジュールとセメスタ制の授業スケジュールに関してまとめる。筆者の経験では、クォータ制の授業では理科系の学生を対象としたもの、セメスタ制の授業では文科系

1) 統計学に関連しない事項としては、行列は高等学校では学ばない。また、単回帰分析で使用する偏微分も今回の新課程からか以前からかは不明だが高等学校では学ばない。

の学生を対象としたものが多いので、その影響を含んだものとなることをご了承ください。

本研究ノートは、新課程に応じた統計学の教科書を作成する計画の一過程として執筆されている。内容に不十分な点があり、また、多くの先生方から内容や方法論についてご指摘をいただけることを期待している。

2. 高等学校数学新課程と大学で新たに学ぶ内容

高等学校数学新課程の内容とそこに含まれないため、大学で新たに学ぶべき内容については山口経済学会誌第64巻第5号に詳しく記述したが、ここでは記述方式を少し変えて再掲する。

2.1 高校の新課程数学の内容

高等学校の数学で、統計学に関連する項目は以下のとおりである。

数学 I

度数分布表とヒストグラム

ヒストグラムから度数多角形、さらに密度関数のグラフという発展については数学 I では学ばない。

代表値（平均、中央値と四分位数、箱ひげ図にも言及。幾何平均や調和平均は学ばない）。

分散（標本分散）と標準偏差、データの相関 散布図、共分散、相関係数（不変分散等については学ばない）。

また、相関係数については $\frac{\text{第1変数と第2変数の共分散}}{\text{第1変数の標準偏差} \times \text{第2変数の標準偏差}}$ という公

式からの導出方法のみを学ぶ。標準化という概念は学んでこない。

数学 A

場合の数と確率、和の法則、積の法則、順列・組合せ、独立な試行、反復試

行, 条件つき確率

数学B

確率分布と統計的な推測, 確率変数と確率分布, 確率変数の平均・分散・標準偏差, 和の平均と分散, 二項分布 (ポアソン分布については必修ではない)。

正規分布, 統計的な推測, 母集団と標本, 推定

なお, 高等学校では, これらの内容をすべて講義で行っており, PCの使用は基本的には想定されていないようである。(表計算ソフトウェアを用いた計算方法に触れている部分があるが, あくまで参考程度である。)

2.2 大学で新たに学ぶ内容

大学で新たに学習する内容としては, 「時系列データの分析 (移動平均, 指数平滑, 期別平均法等)」, 「質的データ (連関係数)」, 「回帰分析」, 「平均値の差の検定 (t検定)」, 「分散分析」, 「P値と多重比較」などがあげられる。より高度な内容も考えられるが本研究ノートでは以上の範囲で考察を進める。

PCを用いた実習形式であれば, 高校で学んだ知識も大学で新しく学んだ知識もともに実感を伴って分析することができるが, 特に, 「平均値の差の検定 (t検定)」と「分散分析」と「P値と多重比較」はPCの統計ソフトウェア (Excelのデータ分析, あるいはSPSS等) がなければ実行することができない²⁾ ため, 講義形式の授業に取り入れるのは困難である。クォータ制の授業では紹介のみ, セメスタ制の授業では実習室の都合がつけば, 数回を実習室で授業してこれらの内容を学ぶこともできる。

本研究ノートではPCを用いない講義形式を想定しており, PCを用いないかわりに「関数電卓」を使用する。受講者には関数電卓³⁾ (200円~4000円

2) 特に分散分析の多重比較はSPSSでのみ可能。

程度)の購入を義務付ける。

時系列データの分析(移動平均, 指数平滑, 期別平均法)を講義で扱う場合は, データ量が多いが, 手順は繰り返しが多いため, すべてを計算させるのではなく, 最初の数個の答えを関数電卓で計算させ, 結果の確認は教卓のPCの画面でグラフを提示して理解を深めさせる。

質的データの分析はPCがなくても計算可能である。

回帰分析は単回帰分析と重回帰分析にわけて学ぶが, 重回帰分析はPCを用いなければ回帰式を得られないため, 説明のみとなる。単回帰分析は, 回帰式 $y = a_0 + a_1x$ において,

$$\textcircled{1} a_1 = \frac{x \text{ と } y \text{ の共分散}}{x \text{ の分散}}, \quad a_0 = y \text{ の平均} - x \text{ の平均} \times a_1 \text{ で求める方法と, } \textcircled{2} \text{ 残差}$$

の式に最小二乗法を適用し, 偏微分を用いて正規方程式を求め, 連立方程式を解く方法の2つの方法を学ぶ。どちらもPCがなくても計算可能である。ただし, ②では高等学校の数学で学んできていない偏微分を使う。偏微分については難しい概念ではないので, その場で説明すればよい。むしろ, 残差を表す式の Σ の扱いに慣れるようにするべきである。

条件付き確率の応用としてベイズの定理を学び, マーケティング等との関わりに言及することも大学らしい内容となる。インターネット上では条件付き確率とベイズの定理が混同されている例も見受けられる。そのようなネット情報での誤りなども取り入れて興味深く, また, 学生の自宅学習を促す内容とするように心がけるとよい。

さらに, 統計学を学ぶ意義の理解, 社会全体との関わり, 経済指数についての知識も取り入れるべきである。

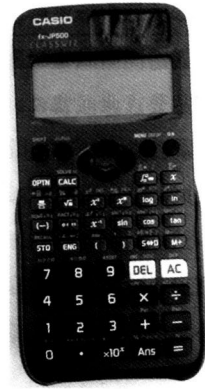


図1 関数電卓

3) 関数電卓を使い始めて最初に戸惑うのは, 計算結果が分数で表示される点である。モード変更やS ⇄ Dボタンで小数表示させる方法を早めに知らせるようにする。また, DELボタンについても説明することで関数電卓の良さを実感しやすくする。

3. 新たな授業構成

3.1 クォータ制の講義計画案

本研究ノートでは受講者が理系であるクォータ制の授業を想定する。しかし、共通教育の科目の場合は計算技術だけでなく、経済学（社会科学）との関連に重点を置くことが期待されていると思われるので、その点にも留意するべきである。これまでの経験から新課程の高校数学を学んできた学生は記述統計についての知識はあるが、予告なく偏差値の公式⁴⁾を求めても正解が60人のクラスで一人もいないという程度もありうる。したがって、記述統計に関する内容も一通り確認するとともに、代表値については算術平均の他に幾何平均と調和平均を、具体例を示して説明する等の新たな知識を身に着けさせる工夫を凝らすべきである。特に幾何平均は経済データを用いてGDP成長率や消費者物価指数等の経済的なデータを用いて説明するとよい。さらに、中央値と算術平均の違いは年収や貯蓄額等のデータを用いると近年の格差社会についての考察に役立つ。このように、社会科学で用いられるデータを用いながら新たな内容を付け足しながら記述統計のおさらいをやるようにこころがける。表1にクォータ制の講義形式の授業計画案を示す。

表1 クォータ制の講義形式の授業計画案

1回目	統計の役割と統計調査について（どのように現代社会と関連しているか）
2回目	度数分布（ヒストグラム）と確率密度関数への発展、代表値について
3回目	散らばりの指標（分散、標準偏差）、不偏分散、歪度、尖度、標準化の概念、2変量（共分散、相関係数、標準化変量を用いた相関係数と散布図）
4回目	順列、組合せ、加法定理、乗法定理、条件付き確率、ベイズの定理、離散型確率変数の期待値と分散、二項分布、ポアソン分布、連続型確率変数の期待値と分散、標本分布について
5回目	正規分布、母平均の区間推定、母比率の区間推定、単回帰分析、重回帰分析は紹介のみ。
6回目	P値について、t検定や分散分析や多重比較の紹介、質的データの扱い
7回目	経済指数について
8回目	定期試験

4) 偏差値 = $50 + 10 \times \frac{\text{得点} - \text{平均点}}{\text{標準偏差}}$ 習っていないか、習っても忘れていたかは不明。

3.2 セメスタ制の講義計画案

本研究ノートのセメスタ制の講義とは、経済学部専門科目としての授業を想定している。したがって、経済学の基礎知識がすでに身につけているという強みと、高等学校である程度は数学を勉強していても1年のブランクがある、あるいは、高等学校での数学のカリキュラムが不十分である場合も想定し、関数電卓を使用した計算や板書での式の変形については計算過程も含めて、時間をかけて丁寧に、さらには、数式に慣れることも含めて、数的な判断ができる社会科学系の学生を目指す内容とする。また、学んだ内容の確認を自宅でExcelで行う、というような自宅学習を促すための、Excelでの計算方法や、グラフ作成の方法、さらには、確認に適するデータの入手方法⁵⁾等の説明も含めるといい。

表2はセメスタ制の講義の授業計画であるが、現在のところこれに類する授業の経験が乏しいため⁶⁾、この計画が現実的なものかどうかの判断はまだできていない。

表2 セメスタ制の講義形式の授業計画案

1回目	現代社会と統計学
2回目～3回目	記述統計学の復習 代表値と散らばりの指標、度数分布とヒストグラム、2変量の分析
4回目	順列、組合せ、加法定理、乗法定理、条件付き確率、ベイズの定理
5回目	離散型確率変数について（確率密度と確率分布）、離散型確率変数の期待値と分散、二項分布、ポアソン分布
6回目	連続型確率分布、連続型確率変数の期待値と分散、正規分布
7回目	中間試験
8回目～9回目	中間試験の答合せ。 推測統計の基本概念（標本分布、大数の法則、中心極限定理、自由度、無作為抽出、統計的有意性、信頼係数、有意水準、モーメント等）
10回目	母平均の区間推定と母比率の区間推定
11回目	t分布と母平均の推定、 χ^2 分布と母標準偏差の推定

5) インターネットでのデータ収集や、教員が適当なデータをアップデートしてそれをダウンロードするなどの方法が考えられる。

6) この内容を4単位（通年30回程度）で講義した経験はあるが、文系の学生には難しいという印象である。

12回目	仮説検定, 帰無仮説と対立仮説, 母標準偏差が未知の場合と既知の場合
13回目	単回帰分析 (正規方程式), 重回帰分析
14回目	経済指数について,
15回目	これまでの知識を PC で確認する実習 (t 検定や分散分析 (多重比較) の紹介), P 値について
16回目	定期試験

※関数電卓は2回目から使用する

4. 授業について

1回目の授業のみが計算を伴わない, 社会科学らしい授業であるが, 次回から関数電卓を使用することを強調する。また, 2回目の授業に向けて予習するのが楽しくなるような練習問題を与える。

2回目～3回目の記述統計の復習では「数学 I」の内容がほとんどであるが, 代表値としての幾何平均と調和平均, 標準化変量を用いた相関係数の求め方, 歪度, 尖度といった高等学校では学ばない内容もおりませ, 興味深く学習できるように工夫する。予習と復習用の練習問題を用意する。

4回目の授業では関数電卓の nPr (順列), nCr (組合せ) ボタンで関数電卓の楽しさを体験させる。ベイズの定理では式の“形”を覚えるという体験をさせる。このようなことに慣れることで数式に強くなれることを体験させる。また, 余裕があれば, ベイズの定理とその応用を社会科学的に説明する。

5回目の授業では, 離散型確率変数の期待値と分散のところなど数学記号が多く, 式の変形に関しても見た目に難解さが漂うが, 慣れるためにも丁寧に説明するとよい。二項分布やポアソン分布では前回のベイズの定理で身に着けた式の形を覚えるという方法で計算できるという実感を得られるようにする。

6回目の授業では積分記号が出てくるが, これも前回の授業のように見た目の難解さを克服する練習とする。正規分布については正規分布表を用いて練習問題を数多く解かせる。

7回目は中間試験。この日にやむを得ず欠席した場合の対応も含めてあらかじめ中間試験を実施することを伝えておく。

8回目～9回目は中間試験の答合せと推測統計の概念形成の回である。この回の内容についてはまだ確信をもっていない。

10回目の授業。母平均と母比率の区間推定は公式が導かれる理由を理解させ、計算問題を多く解かせる。ここで、公式が導かれる過程については途中で止まったり、理解を確認したりしないで進めることも一つの方法である。この回数あたりから内容の高度化もあり、予習が難しくなる。予習内容に工夫を要する。

11回目の授業。この回は計算問題よりも概念の説明が難しい。

12回目の授業。仮説検定。推定と並んで統計学らしい内容である。推定よりは計算よりも概念形成が難しくなる。余裕があれば、タイプⅠの誤りやタイプⅡの誤りについても説明する。

13回目の授業。単回帰分析で残差を最小化する最小二乗法から正規分布を導き出す過程を丁寧に説明する。数学記号、式の変形、偏微分とかなり数学寄りの内容となるが、受講者が統計学の授業を受け始めた頃よりこれらのことに慣れてきたと感じるようになればこの授業の目標の何割かは達成している。重回帰分析についてはPCを用いれば簡単に重回帰式が求められることを紹介する。余裕があれば、重回帰式の各変数の係数の符号と相関行列の符号の整合性について説明し、重回帰分析を行うにあたって説明変数の選択に注意を要する例について言及する。

14回目の授業。経済指数について。ここでは社会科学らしい内容となる。予習の習慣と効果を実感させるよい機会となる。

15回目授業。この回だけ可能であれば実習室を使用する。ExcelのアドインやSPSSでt検定や分散分析を体験させる。また、論文等で多く使用されるP値にも言及する。

16回目。定期試験。

5. まとめ

本研究ノートでは項目を列挙するだけであり、やや現実的でないようにみえるが、記述統計の知識の確認に多くの回数を費やさず、そのかわりに検定や推定を取り入れるとすれば、この速度はやむをえない。統計学では取り上げる項目が担当教員によって様々であることや、一口に“統計学”といっても、高等学校で学んだ内容の延長線上に位置する講義での“統計学”と、メニューを選択していくことで大量のデータを処理するPC実習(ExcelのアドインやSPSS)による“統計学”とではその内容が全く異なるというように、統一的な内容と質の担保が難しい性質がある。Semester制の授業ではこれまで講義形式であった統計学に実用的なPCでの統計学の内容を連結できるような、理論と実用の両方をカバーするものとするのも目指すとして授業計画案を考えてみた。この場合は自宅でのPC使用を促しながら、である。時間がクォータ制と比べて多くある面に注目すれば、統計学を理解するための数学記号や、式の変形等の数学的技術の前提が不十分である受講者にこの授業の履修によって自信を持たせることも目標に含めてもよい。まず、数式や記号に“慣れる”ことを目指して、授業は休みなく濃い内容にすることが望ましい。統計学の授業では、目指した速度で進めなく場合が多々あり、その原因としては知識の積み重ねで理論が形成されているにも関わらず、早い段階で理解をあきらめる学生が一定の割合を越すことによって授業が停滞することも考えられる。必修科目か選択科目かの違いによってもそういう場合への対応方法は異なるが、上に示した内容をこなすには、全体スケジュールを常に意識し続けるべきである。また、知識を確認しながらといっても過度に学生の反応に応じた授業をしていては授業が進まないことも意識しておくべきである。

内容の多さから受講者が納得して学習を進めるためには自宅学習が欠かせない。計算問題等を十分に用意する、配布資料を準備する等の工夫が求められる。自宅学習に次の授業の予習をさせる仕組みを組み込むことで授業のレベルを上げることもできるかもしれない。簡単で着手しやすい練習問題を

与える等の方法でなんらかの予習ができるようにするべきである。予習がなされていない場合，“(授業時間中に)一回聞いてわからなかったこと”はずっとわからないままで終わってしまう確率が高い。学生はわかったという実感があれば復習も予習もする気になるが、わからなかった授業の復習や予習はしなくなる。統計学は計算結果によって考えが正しいか誤っているかを確認できるという他の社会科学系の授業ではない有利な面があり、この正誤判定が容易であるという科目特性を生かして予習や復習をするように習慣づけるように働きかけるとよい。

付録

数学Bでの既習分野の取扱い

E は期待値, V は分散, σ は標準偏差。

確率変数の平均(サイコロの目の期待値) $E(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_n p_n$

確率変数の1次式の平均 a, b が定数で, $Y = aX + b$ のとき $E(Y) = aE(X) + b$

確率変数の分散と標準偏差 $V(X) = E((X - m)^2)$, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

分散と標準偏差の性質 $V(X) = E(X^2) - |E(X)|^2$, $\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - |E(X)|^2}$

1次式の分散と標準偏差 a, b が定数で, $Y = aX + b$ のとき,

$$V(Y) = a^2 V(X) \quad \sigma(Y) = |a| \sigma(X)$$

確率変数の和の平均 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

独立な確率変数の積の平均 X, Y が独立のとき, $E(XY) = E(X)E(Y)$

独立な確率変数の和の分散 X, Y が独立のとき, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

[参考文献]

1. 啓林館高等学校数学科用教科書「数学 I」「数学 A」「数学 B」
2. 木下宗七「入門統計学 [新版]」, 有斐閣ブックス, 2011年
3. 鳥居泰彦「はじめての統計学」, 日本経済新聞社, 2003年
4. 藤宏, 末吉正成, 村田真樹著, 「Excel でかんたん統計分析 - 「分析ツール」を使いこなそう!」, オーム社, 2007年
5. 浅井隆著, 「いまさら誰にも聞けない医学統計の基礎のキツ 第1巻まずは統計アレルギーを克服しよう!」, アトムス, 2010年