

開水路流れの境界条件に関する検討

羽田野袈裟義 (理工学研究科社会建設工学専攻) 李洪源 (理工学研究科社会建設工学専攻)
永野博之 (東京理科大学理工学部土木工学科)

Consideration on the Boundary Condition for Calculations of Open Channel Flow

Kesayoshi HADANO (Civil and Environmental Engineering, Graduate school of Science and Engineering)

Hongyuan LI (Civil and Environmental Engineering, Graduate school of Science and Engineering)

Hiroyuki NAGANO (Department of Civil Engineering, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science)

Abstract: The reason given for the boundary condition of calculation open channel flow leaves some insufficiencies. Calculation for tranquil flow is done toward upstream with downstream boundary condition for depth, the reason is explained as the influence of downstream water level relating to wave propagation. But it is logically wrong since the discussion is based on the equation of steady flow without unsteady term. Mathematically, we have only to give boundary condition where the water depth is fixed and to proceed the calculation from the boundary condition position. Also, since the steady flow can be found by solving the governing equation for unsteady flow with steady boundary condition, boundary condition of the depth for steady flow calculation can be given in the same manner as for the analysis using the characteristic curve method. Boundary condition for free surface is obtained directly by equating the normal components of the velocities of water particles on the surface and of free surface variation.

Key Words : *open channel flow, water level calculation, boundary condition, steady flow equation, unsteady flow equation, free surface boundary condition*

1. 緒言

近年異常気象が常態化し、そして豪雨・洪水の激甚化が年々著しくなっている。しかし河川整備がなかなか進まない状況にある。また、河道による治水が以前にまして重視されるようになり、洪水時の水面形計算の高精度化への要請がますます強くなっている。その意味で、高精度の計算法の開発が望まれる。一方で、水理計算方法の論理性を十分に高めておくことも重要である。多くの技術者や研究者との交流を通して、現時点において開水路の水理計算に関して論理性や説明の未整理あるいは不十分を痛感させられることとして、境界条件に関する問題が挙げられる。それは、開水路定常流の水面形計算の向きの理由づけおよび水表面の境界条件の説明である。

開水路定常流の水面形計算の向きに関して、常流では下流側で水深の境界条件を与えて上流向きに計算しそして射流では上流側で水深の条件を与えて下流向きに計算

するが、その理由は流速と長波の伝播速度の大小関係を引き合いにして常流では下流水面の影響が及ぶのに対して射流では下流水位の影響が及ばないからと説明されている。この場合、解くべき方程式は位置変数を独立変数とする水深に関する1階常微分方程式であるから、本来は水深が確定する位置を境界条件として与えて計算すべきである。この観点からの説明はこれまで限界流の発生地点を境界条件地点とする場合についてなされているがそれ以外のケースについて統一的な説明はないようである。定常流の基礎方程式に基づく限り、流速と長波の伝播速度の大小関係をもとに下流水位の影響の有無で水面形計算の向きが規定されるとする理由づけは本来の考え方から逸脱していると思われる。別の観点として、開水路定常流は非定常流の基礎方程式に定常な境界条件を与えて解析することができる。この場合、特性曲線法を用いると流量や流速の境界条件を計算区間の上流端と与え、そして水位の条件を常流では下流端と与え射流では

上流端で与えるべきことが示される。また水表面の境界条件は、ある時刻に境界面上にあった水粒子は時間経過後も水表面上に存在し続けるとの考えに基づき、水表面を陰関数表示し、境界面上のあらゆる水粒子が常にこの条件を満足するとして示されるが、ラグランジュ微分の理解があまり定着していない中で陰関数表示式のラグランジュ微分を用いる方法は物理的意味の理解の点で学習者に大きな負担となっている。

本研究では、開水路定常流の水面形計算における境界条件の与え方を、定常流の基礎方程式および非定常流の基礎方程式の各々に基づいて統一的に説明することを試みる。また、水表面の運動学的条件をより直接的に説明する方法を提示する。

2. 定常流の基礎方程式に基づく検討

一様断面開水路の定常流の1次元解析では、水深を h 、河床勾配を i 、等流水深を h_0 、限界水深を h_c として、次の水面形の式により計算する。

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_0/h)^M}{1 - (h_c/h)^N} \quad (1)$$

ここで指数 M はマンニング式によれば10/3そしてシェジュー式によれば3であり、 N は3である。

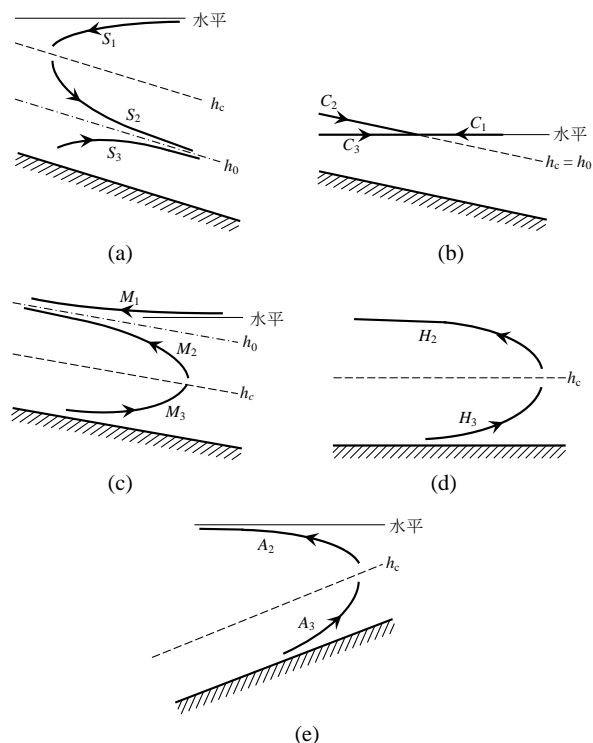


Figure 1 Schema of steady open channel flows. (a) water surface profiles in steep slope channel, (b) water surface profiles in critical slope channel, (c) water surface profiles in mild slope channel, (d) water surface profiles in horizontal bottom channel, (e) water surface profiles in adverse slope channel.

計算に際しては、種々の水路勾配と水深に対応してFigure 1のような水面形の概略図で確認して行なう。そして、常流の場合は下流で水深の境界条件を与えて上流に向けて水面形を計算し、射流の場合は上流で水深の境界条件を与えて下流に向けて計算する。その根拠として、前述の限界流発生地点の上下流に対する説明以外に、これまで2通りの考え方が示されている^{1)・5)}。第一は「下流水面の影響が及ぶ常流では下流から上流に向けて計算し下流水面の影響が及ばない射流では上流から下流に向けて計算する」と説明し、第二は「 dh/dx がゼロに近づく方向に計算する」と説明している。また、根拠を示していない書籍もある。

まず、第一の説明法について考察する。波動伝播に言及するのであれば、非定常流の基礎方程式を示して説明する必要があるが、定常流の方程式に基づく方法ではそうされておらず不可解な理由づけと考えざるを得ない。また、現象的に考えると、「下流水面の影響が及ぶ」ということは単に水面形がFigure 1の M_1 , S_1 の形になることを言っているに過ぎない。さらに言えば、 M_2 , H_2 , A_2 について波動伝播の点から下流水位の影響を直感的に考えづらいが、これをどのように考えるかについて十分な説明が与えられていない。いずれにしても式(1)に現れない長波の伝播速度の概念を用いて説明することは理論的でなく不可解である。

仮にこの考え方に従ったとして、射流の場合、下流水面の条件が上流に及ばないというだけで水深の境界条件を上流で与えることが無条件で正当化されるかとの疑問が湧くが、第一の説明法はこれに対して十分に納得のいく説明ができない。このほか、下流水面の影響というなら特に常流の場合に上流水面の影響をどう考えるのか、という疑問が当然湧いてくる。これに対してもこれまで明快な解説が与えられていない。定常流の基礎方程式に基づく水面形計算は、常微分方程式を解く問題でありいわゆる初期条件（この場合は水深の境界条件）が与えられて方程式を解く作業である。したがって本来的にはどこで如何なる水深を与えるべきか、についてFigure 1を用いて明示すべきであるが、限界流地点以外はこれが明示されていない。

このような事情で、定常流の基礎方程式に基づく限り、「常流では下流水面の影響が上流へと及び射流ではこれが上流へと及ばない」ことを境界条件の与え方あるいは計算の向きの理由とする説明は論理的に無理があると理解される。

第二の説明法は常微分方程式の解としての水面形をヒントにした説明であり一定の説得力をもつが、この説明法もどこで如何なる水深を与えるべきかについてFigure 1を用いた直接的な説明がなされていない。また、この説明は図の M_3 , H_3 , A_3 に対して無力である。

なお、文献¹⁾のp.101の「 M_a (Figure 1の M_1 に相当) および M_b (Figure 1の M_2 に相当) が上流側にだけ漸近線を持つことは、常流状態の流れでは境界条件の影響が上流にだけおよんで下流におよばないことを示すものである。何となれば、たとえば背水の場合にせき上げの影響が下流側にもおよぶものとするれば、下流に向かって水深はいくらでも増加して等流水深に近付くことがない。」の箇所について著者らは真意を理解できていない。

ここで、水深を未知数とする常微分方程式を解く問題の基本に立ち返り、境界条件として適切な位置で水深の確定値を与えそこを基点に計算を進めるべきである、との考えに基づき水面形計算の方向の説明を試みる。その際、Figure 1に示されるように水面形が水路勾配と水深の大きさの程度に応じて様々な形態をとることを想定し、境界条件をこの図と関連させて考える。

図の M_1 , S_1 , C_1 の曲線は、水平水面の湛水部に流入する流れの水面形であって、せき上げ背水曲線と呼ばれる。この場合、水平水面の湛水部のいずれの位置でも水位が一定であり、河床高は地形条件で独立に与えられるから、水面が水平な位置ならどこでも水深が一意的に定まりしたがって境界条件地点となりうる。ゆえに M_1 , S_1 , C_1 の曲線では、図の矢印のように水面が水平な位置から水面が傾きをもつ上流側へと計算を進めればよい。

図の M_2 , S_2 , H_2 , A_2 の曲線は段落ちや勾配変化点(急勾配化)が関係する流れの水面形である。そのうち M_2 , H_2 , A_2 は、段落ちや勾配変化点の上流の常流の流れで、下流端の段落ちや勾配変化点で限界流となる。 S_2 は段落ちや勾配変化点の下流の射流の流れである。周知のように限界流が生じる位置では水深が限界水深として与えられるが、限界流が生じる位置では式(1)の分母と分子がゼロとなるためそのままでは計算が安定しない。このため、段落ちや勾配変化点の上流(M_2 , H_2 , A_2)の流れに対してはこれらの点の少し上流で限界水深より少し大きな水深を境界条件として与え、段落ちや勾配変化点の下流(S_2)の流れに対してはこれらの点の少し下流で限界水深より少し小さな水深を境界条件として与える⁹⁾。

M_3 , S_3 , H_3 , A_3 の曲線は例えばスルースゲートからの自由流出を考えればよい。そのような流れではゲートの少し下流の位置に縮流断面が生じ、その位置と水深が経験的に知られているからその位置で境界条件が与えられる。すなわち、この位置から下流に向けて計算する。このようにしてFigure 1の矢印の向きがすべて説明される。結果的に計算の向きを与える矢印は常流の部分では上流を向き、射流の部分では下流を向いている。

以上の事情で常流では上流向きそして射流では下流向きに計算するが、定常流の方程式で考える限り、結果的に常流・射流の区別と計算の向きが対応すると考えるべ

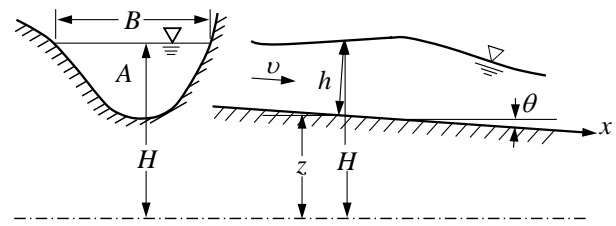


Figure 2 Schematic view of open channel flow

きであって、「常流」あるいは「射流」から計算の向きが決定されるという考え方は論理的に無理がある。

3. 非定常流の基礎方程式に基づく検討

前述のように、開水路定常流は開水路非定常流の基礎方程式に定常な境界条件を与えて解析することができる。この場合、特性曲線法を用いると流量や流速の境界条件を計算区間の上流端で与え、そして水位の条件を常流では下流端で与えまた射流では上流端で与えるべきことが示される。ここではこのことを説明する。まず開水路非定常流の基礎方程式を特性曲線法により表示するプロセス⁷⁾を少し詳しく述べることから始める。

(1) 開水路非定常流の基礎式の特性曲線表示

a) 開水路非定常流の基礎方程式

開水路流れの基礎式は、Figure 2の設定で流水断面積を A 、流量を Q 、重力加速度を g 、断面平均流速を v 、運動量補正係数を β 、基準水平面から測ったピエゾ水頭を H 、潤辺の平均せん断応力を τ_0 、径深を R とすると、次式で与えられる。

$$\text{連続式: } \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\text{運動方程式: } \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta v^2}{2g} + H \right) = - \frac{\tau_0}{\rho g R} \quad (3)$$

開水路の流れの測定値を取り扱う都合から、流水断面積 A の代わりに水深 h を用いた表現を示す。 h と H の関係式 $H = z + h \cos \theta$ (z は水平面を基準とする河床高さ)を用いて式(3)を変形し、さらに摩擦勾配 $i_f = \tau_0 / \rho g R$ を導入して、右辺を変形すると次式を得る。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta v^2}{2} + gh \cos \theta \right) = g(i - i_f) \quad (4)$$

b) 基礎方程式の特性曲線表示

流水断面積 A が当該地点の最大水深 h の m 乗に比例すると仮定し、定数 W を用いて $A = Wh^m$ とおく。長方形断面では $m = 1$ である。このとき連続式(2)は次の

ように書かれる.

$$m \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial x} + mv \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

運動方程式は、 $\cos \theta \doteq 1$, $\beta \doteq 1$ として次のように書かれる.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i - i_f) \quad (6)$$

ここで、水深 h の代わりに次式で定義される c を導入する.

$$c = \sqrt{gh/m} ; h = c^2 m / g \quad (7)$$

このとき微分係数の間の関係は,

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{mh}} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{g}{2cm} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{g}{2cm} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (9)$$

したがって、連続式と運動方程式は次のように書き直される.

$$2m \frac{\partial c}{\partial t} + 2mv \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + 2mc \frac{\partial c}{\partial x} = g(i - i_f) \quad (11)$$

式(10)と(11)の和と差から次式を得る.

$$\frac{\partial}{\partial t}(v + 2mc) + (v + c) \frac{\partial v}{\partial x}(v + 2mc) = g(i - i_f) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v - 2mc) + (v - c) \frac{\partial v}{\partial x}(v - 2mc) = g(i - i_f) \quad (13)$$

これらを特性曲線表示すると,

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{v + c} = \frac{d(v + 2mc)}{g(i - i_f)} \quad (14)$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{v - c} = \frac{d(v - 2mc)}{g(i - i_f)} \quad (15)$$

あるいは,

特性曲線 ω_+ : $\frac{dx}{dt} = v + c$ の上で

$$\frac{d}{dt}(v + 2mc) = g(i - i_f) \quad (16)$$

特性曲線 ω_- : $\frac{dx}{dt} = v - c$ の上で

$$\frac{d}{dt}(v - 2mc) = g(i - i_f) \quad (17)$$

これらの式の意味は次のようである.

式(14)または(16) : x と t が $dx/dt = v + c$ の関係で変化する時の水理量 $v + 2mc$ の時間増加率が $g(i - i_f)$ である.

式(15)または(17) : x と t が $dx/dt = v - c$ の関係で変化する時の水理量 $v - 2mc$ の時間増加率が $g(i - i_f)$ である.

(2) 特性曲線法による計算方法と境界条件

特性曲線法による解法は次のようである. すなわち, 式(16)と(17)を v と c に関する連立方程式とみなし, 初期条件と境界条件を与えてFigure 3のように $x \sim t$ 平面上の特性曲線の交点における v と c を次々に求めていく. 具体的には, 解析区間長を l ($x = 0 \sim l$) とし, 初期条件として $t = 0$ の線上の $x = 0 \sim l$ の各点の流速 v と水深 h (c) を与える. 境界条件は上流端 ($x = 0$) と下流端 ($x = l$) で流速 v または水深 h の時間変化を与える. 計算は初期値が与えられた x 軸上の点から出発して, 順次交点の v と c を求めていく.

Figure 3には常流と射流の場合について特性曲線網を示す. 図中の実線は特性曲線 $\omega_+ : dx/dt = v + c$, 破線は特性曲線 $\omega_- : dx/dt = v - c$ を示す. 常流の場合, $v + c > 0$ そして $v - c < 0$ であるから, 図中の特性曲線 ω_+ は右上がり, 特性曲線 ω_- は右下がりとなる. 一方, 射流の場合, $v + c > 0$ そして $v - c > 0$ であるから, 図中の特性曲線 ω_+ と ω_- の両方が右上がりとなる. また, 計算は t が増加する向きに実行される. したがって, 特性曲線に沿う計算の向きは図中に矢印で示すとおりである.

境界条件の与え方は次のように考える. 前述のように, 境界条件は上流端 ($x = 0$) と下流端 ($x = l$) で流速 v または水深 h の時間変化を与えるが, 流れは上流から

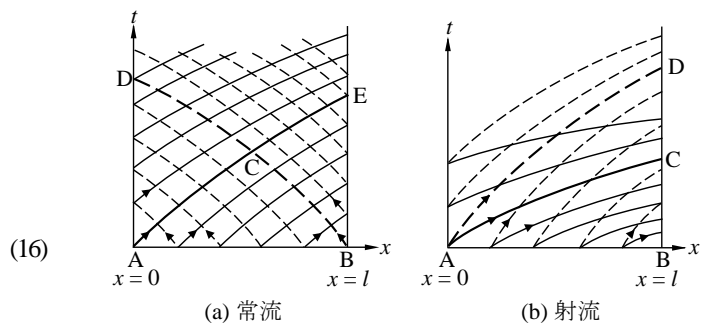


Figure 3 Mesh of characteristic curves

下流へと向かい $v > 0$ であるので、流速 v と水深 h のうち流速 v の情報は解析領域の上流端で与えられるべきである。次に水深 h の境界条件を考える。まず、常流では特性曲線 $dx/dt = v - c$ が上流に向かうから $v - c$ の情報を解析領域の下流端で与え、射流では特性曲線 $dx/dt = v - c$ が下流に向かうから $v - c$ の情報を上流端で与えることになる。上記のように v の情報は上流端で与えられるから、もう一方の c (水深 h) の情報は、常流では解析領域の下流端で与え、射流では上流端で与えることになる。このようにして、境界条件の与え方が決定される。この境界条件付与に関する示唆は特性曲線法の大きな恩恵といえる。式(16)と(17)が基礎方程式の変形からそのまま得られていることに留意されたい。

各領域の流速と水深の決定：常流では、Figure 3 (a) のACBの領域の流速と水深は初期条件だけにより決まり、領域ACDの流速と水深は初期条件と上流端の境界条件だけで決まり、領域BCEの流速と水深は初期条件と下流端の境界条件により決まり、そしてCDEより上の領域の流速と水深は上流端と下流端の境界条件により決まる。射流では、Figure 3 (b)の領域ABCの流速と水深が初期条件だけで決まり、領域ACDの流速と水深は初期条件と上流端の境界条件で決まり、そしてADより上の領域の流速と水深は上流端の境界条件のみにより決まる。

以上のことから、上流端と下流端で定常な境界条件を与えると、常流ではFigure 3 (a)のCDEより上方、射流ではFigure 3 (b)のADより上方では定常状態となる。すなわち、これらの領域では非定常流の基礎方程式を用いて定常流を解析することができる。したがって、特性曲

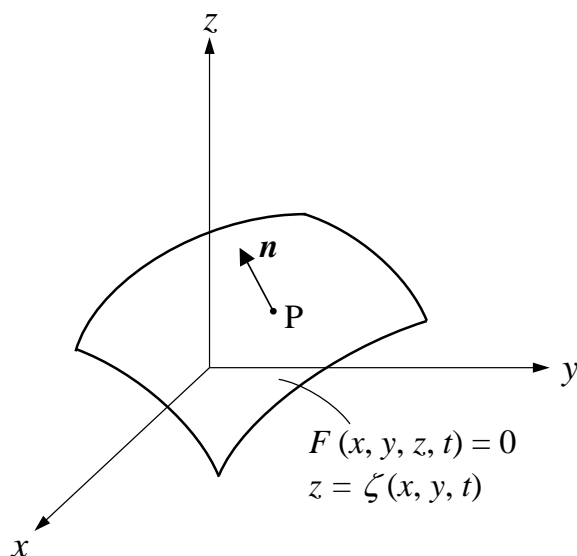


Figure 4 Schematic figure for boundary condition for free surface

線法による解析が定常流の解析を包含するという立場に立てば、特性曲線法による計算法の示唆により、開水路定常流の水位(水深)の境界条件を常流では下流の点で与えて上流向きにそして射流では上流で与えて下流向きに計算することの理由づけが与えられる。この結果を式(1)の計算に適用してよいことは当然である。このように、常流だから、あるいは射流だからということで定常流の計算の向きを決めることは、特性曲線法を通して保証される。このことはこれまで指摘されていないと理解している。

4. 自由表面の境界条件

自由表面の境界条件は、境界面と法線方向の速度成分が境界面の変形速度と境界面上の水粒子の運動速度とで等しいことであるが、その条件式はある時刻に境界面上にあって境界面の条件を満足する流体粒子は時間経過後も境界面上にあって境界面の条件を満足するとして求められる。すなわち、Figure 4のように、 x, y 軸を水平方向そして z 軸を鉛直上向きにとるとき、任意時刻 t における水表面の形状が陰関数表示で次式

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (18)$$

で与えられるとき、境界面上の任意の水粒子の x, y, z 方向の速度成分を u_s, v_s, w_s として、微小時間後の $t + \delta t$ においてなおこの水粒子が境界面上に存在し、境界面の条件を満足するとして次の条件を課される。

$$F(x + u_s \delta t, y + v_s \delta t, z + w_s \delta t, t + \delta t) = 0 \quad (19)$$

これをテイラー展開し微量の1次の項までとったものを作り、式(18)との差をとると次の条件を得る。

$$DF / Dt = 0 \quad (20)$$

ここで、 $DF / Dt = \partial F / \partial t + u_s \partial F / \partial x + v_s \partial F / \partial y + w_s \partial F / \partial z$ は水表面の水粒子に追隨して考えた $F (= 0)$ のラグランジュ微分である。この説明方法の難点は、冒頭で述べたように、ラグランジュ微分の理解が定着していない中で一般になじみが薄い境界面の方程式の陰関数表示 F のラグランジュ微分をイメージし難いことである。

そこで陽関数を用いた直接的でイメージしやすい方法を考える。 x, y, z 軸を前記のようにとり、任意時刻 t における水表面を次式で表現する。

$$z = \zeta(t, x, y) \quad (21)$$

式(21)で与えられる境界面上向き法線は方向余弦が $-\partial \zeta / \partial x : -\partial \zeta / \partial y : 1$ の比をもつことが容易に示される。ここで $A = \sqrt{(\partial \zeta / \partial x)^2 + (\partial \zeta / \partial y)^2 + 1}$ とおく

と、上向き単位法線ベクトル \mathbf{n} は次式で表わされる。

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, -\frac{1}{A} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{1}{A} \right) \quad (22)$$

このとき境界面上の流体粒子の速度 $\mathbf{v}_s = (u_s, v_s, w_s)$ の法線方向成分 v_{sn} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} v_{sn} &= \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} \\ &= -u_s \frac{\partial \zeta / \partial x}{A} - v_s \frac{\partial \zeta / \partial y}{A} + w_s \frac{1}{A} \end{aligned} \quad (23)$$

また、境界面上の上昇速度 $\partial \zeta / \partial t$ の法線方向成分 v_{cn} は、 $\partial \zeta / \partial t$ と法線・鉛直線の方向余弦の積であるから、 $v_{cn} = \partial \zeta / \partial t \times (1/A)$ となる。両者を等式で結ぶと、

$$\begin{aligned} v_{sn} = v_{cn} &= -u_s \frac{\partial \zeta / \partial x}{A} - v_s \frac{\partial \zeta / \partial y}{A} + w_s \frac{1}{A} \\ &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} \times \frac{1}{A} \end{aligned} \quad (24)$$

これより次式を得る。

$$w_s = \partial \zeta / \partial t + u_s \partial \zeta / \partial x + v_s \partial \zeta / \partial y \quad (25)$$

これが水表面の境界条件を表す式である。すなわち、内積にドット記号を用いて「(表面水粒子速度の鉛直成分) = (水表面の上昇速度) + (表面水粒子の水平速度ベクトル)・(水面勾配ベクトル)」となる。この条件式は微小要素に成立する連続式や運動方程式を水底から水表面まで積分するときなどに用いられる。

5. 結語

以上、開水路の水理解析に用いられる境界条件の問題について、従来の説明に比べてより論理的で明快かつ直感的理解を促す方法を示した。本論文の主要な成果は次のようである。

- 1) 定常流の基礎方程式に基づく水面形計算の境界条件は、水深が確定される位置を境界条件地点としてその地点から遠ざかるように計算すればよい。このことをFigure 1の全てのケースについて示し

た。その結果として示唆される計算の向きは従来の水理学の教えと一致している。

- 2) 定常流は非定常流の基礎方程式を定常な境界条件のもとで解くことによっても求められる。また非定常流の基礎方程式に基づく開水路流れの水理計算の境界条件の与え方は特性曲線法により確定される。特に重要な結果として、常流・射流とも流速の条件は上流端で与え、水深や水位の条件は常流では下流端でそして射流では上流端で与える。こうして定常流・非定常流とも水面形の計算は、特性曲線法による計算の境界条件の与え方を通して、水深の境界条件を「常流ならば下流で与えて」上流向きに進め、そして「射流ならば上流で水深を与えて」下流向きに進めることの理由が論理的に説明される。
- 3) 水表面の境界条件式は、境界面と法線方向の速度成分が水表面の変形速度と水面上水粒子の速度とで等しいことをそのまま表現することにより直接求めることができる。

謝辞：本論文の執筆に際し、数学的な部分について、山口大学大学院理工学研究科 応用数理学分野 岡田真理准教授（基礎解析学）のチェックを頂いた。ここに記して深甚の謝意を表す次第である。

参考文献

- 1) 石原藤次郎, 本間仁：応用水理学 上, pp.99-106, 丸善株式会社, 1957.
- 2) 本間仁, 安芸皎一：物部水理学, pp.268-271, 岩波書店, 1956.
- 3) 荒木正夫, 椿東一郎：水理学演習 下巻, pp.28-32, 森北出版, 1962.
- 4) 日野幹雄：明解水理学, pp.113-116, 丸善株式会社, 1983.
- 5) 禰津家久, 富永晃宏：水理学, pp.229-232, 丸善株式会社, 2000.
- 6) 本間仁：水理学, pp.161, 丸善株式会社, 1952.
- 7) 椿東一郎：水理学II, pp.29-34, 森北出版, 1974.

(平成27年12月28日受理)