情報付き立方体世界の一考察

石原 真紀夫 (理工学研究科知能情報システム工学専攻)

田中 稔 (知能情報システム工学科)

山口 真悟 (知能情報システム工学科)

A Study of Cube World with Information

Makio Ishihara (Division of Computer Science and Systems Engineering)

Minoru Tanaka (Department of Computer Science and Systems Engineering)

Shingo Yamaguchi (Department of Computer Science and Systems Engineering)

In this manuscript, we describe Cube World with information in which cubes and a connection rule between cubes exist. In Cube World with infomation, impossible connection between cubes occur by the connection rule. Therefore when we make a shape using cubes, there will be possible and impossible shapes. We discuss homogeneous Cube World based on connection rule. As a result, a connection rule C_{eq}, in which cubes can be connected each other with the same infomation, is a bound for making arbitrary shape.

Key Words: *cube world, information cube, dice, connection rule, pattern*

1 はじめに

単位立方体を積み重ねていくことにより３次元任意形状を構成することができる。本稿では、このような立方体の特性に、接続条件という立方体同士の接続を制約する概念を導入し、「情報付き立方体世界」を提案する。

情報付き立方体世界は、単位となる構成要素とそれらの間の配置制約が規定された世界に対する１つのモデルである。同じ目で接続するドミノゲームは、本世界の一例である。情報付き立方体世界では、存在する立方体の種類や位置により、隣接する立方体の種類や配置できる位置が制約される。本稿のように、構成要素と構成要素がある制約のもとで配置されるという問題に関連した研究に、Tanakaら[1]の研究がある。彼らは、衛星写真のように観測対象が観測視野より大きい場合に取られる手段である「観測対象を部分観測しそれらを１つに統合する」という過程をグラフ理論を用いて考察している。また、タイリング[2]、等形アレイ文法[3][4]も同種の問題である。タイリングは、平面をタイルと呼ばれる平面図形の集合で埋め尽くすことを目的とする研究分野である。タイリングでは、構成要素はタイル、配置制約はタイルの輪郭形状である。等形アレイ文法は、文法の書き換え規則を用いた、複数の正方形からなる形状の導出と識別に関する研究分野である。等形アレイ文法では、構成要素は正方形であり、配置制約は書き換え規則である。

情報付き立方体世界では、接続条件により立方体の面の間に接続可能･不可能が生じるため、立方体をどのように接続しても実現できない形状の存在や、指定された形状を構成するために、どのように立方体を接続すればよいのかなど様々な問題が考えられる。これまでに、我々は立方体としてサイコロを用いた世界を定義し、その世界の構造を考察した[5][6]。本稿はその一般化である。

情報付き立方体世界の性質を明らかにすることにより、ソフトウェアとその部品に関する解析や、視覚的なシステム構築、新たなデータ管理システムの開発に寄与することが期待できる。

2 情報付き立方体世界の定義

面情報の集合をSで表す。

［定義１］情報付き立方体Bとは、各面に１つの面情報$s \in S$を持つ立方体をいう。

［定義２］SとSとの直積$S \times S = \{(s_i, s_j) | s_i \in S, s_j \in S\}$の部分集合を接続条件$C$とよぶ。

また、接続条件の特殊な場合として、C_ϕ, C_{eq}, C_uを下のように定める。

$$C_\phi = \phi$$

$$C_{eq} = \{(s_i, s_j) \in S \times S | s_i = s_j\}$$

$$C_u = S \times S$$

例１　$S = \{1, 2, 3\}$とする。
$C_\phi = \phi$
$C_{eq} = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
$C_u = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), \cdots, (3,3)\}$

２つの情報付き立方体B_1とB_2において、B_1, B_2がそれぞれ面情報$s_1 \in S$,$s_2 \in S$をもっており、かつ$(s_1, s_2) \in C$のとき、B_1とB_2は面情報s_1, s_2で接続可能であるといい、接続ができる。

［定義３］情報付き立方体世界Wとは、以下の２つの条件を満たす世界をいう。

1. 情報付き立方体を構成要素に持つ。
2. 接続条件Cが規定されている。

3　考察方法

与えられた情報付き立方体世界（以後、立方体世界）において、情報付き立方体を接続していく際、その面情報の載り方は作成可能な形状に大きく影響する。本稿では、均質な情報付き立方体世界における作成可能な形状とその構成法について考察を行う。

［定義４］情報付き立方体世界Wにおいて、どの情報付き立方体も、持つ面情報の集合が等しくかつ各面情報の置かれている位置関係が等しいとき、Wは均質であるという。

特に、均質な立方体世界において、それぞれの立方体が６つの異なる面情報を持つ世界 ($|S| = 6$の世界) を“D世界”と名づける。

例２　日常のサイコロを構成要素に持つ情報付き立方体世界Wは、均質である。また、WはD世界である。

例３　全ての面が１の目である情報付き立方体を構成要素に持つ情報付き立方体世界Wは、均質である。

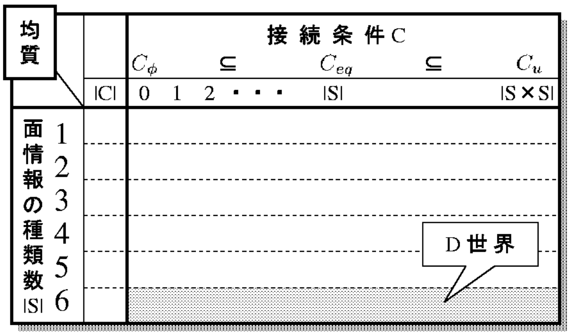

図 1: 均質立方体世界の分類

本稿では、均質な立方体世界を一つの立方体が持つ面情報の種類数$|S|$と接続条件Cにより、図1のように分類し、それぞれについて作成可能な形状とその構成法の考察を行う。図1は、縦軸が面情報の種類数$|S|$ １～６（均質立方体世界では、世界に存在する面情報の種類数は高々６である）、横軸が接続条件Cであり、左側の接続条件は右側のそれの部分集合となるように配置してある。すなわち、i行j列はi種類の情報を面にもち、j個の要素からなる接続条件が規定された立方体世界を意味する。

また、構成法の一つの尺度として、逐次的構成法を考える。

［定義５］**接続に失敗する**とは、新たに立方体を接続する際、既に接続済みの立方体の接続を変えなければ接続が出来ない状況に直面した時をいう。

逐次的構成法とは、接続に失敗せずに行なえる構成法である。

4　均質な立方体世界の考察

4.1　接続条件C_ϕの世界

接続可能な面情報の対が無い場合である。このような接続条件が規定された世界では、どの２つの情報付き立方体を選択してもそれらが接続可能となる面情報は存在しないため、接続はできない。したがって、存在する情報付き立方体は孤立して存在する。

4.2　接続条件C_uの世界

面情報の対がすべて存在する場合である。このような接続条件が規定された世界では、どの２つの情報付き立方体を選択してもそれらが接続可能となる面情報が存在するため、必ず接続ができる。また、すでに接続されている複数の情報付き立方体の面情報や位置に制約を受けることなく、新たな情報付き立方体を任意の位置に任意

の向きで接続できる。したがって、任意形状を作成でき、かつ逐次的な構成が可能である。

接続条件C_ϕとC_uは、互いに対称的な接続条件であり、極端な場合である。次に、接続条件C_ϕとC_uの間に存在する接続条件C_{eq}が規定された立方体世界について考察する。この場合は、明らかにC_uに比べ制約がきついため、作成できる形状は制限されると考えられる。

4.3 接続条件C_{eq}のＤ世界

同じ面情報でのみ接続が許されている場合である。このような接続条件が規定された世界では、情報付き立方体間に接続可能・不可能が混在する。ここではまずＤ世界において作成可能な形状の考察を行い、その後一般の均質な立方体世界に拡張する。

［補題１］ Ｄ世界では、任意の２つの情報付き立方体の接続を必ず作成できる。この時、それぞれの立方体の接続面の反対側の面情報は同じである。

(証明) 明らか。

補題１の「立方体の接続面の反対側の面情報は同じ」は、Ｄ世界であるための必要条件である。このことに着目すると、次の定理が言える。

［補題２］ 情報付き立方体の一辺の長さを１とする。Ｄ世界では、一辺2^n(n : 自然数) の立方体が作成できる。そして、その立方体の面情報の２次元配列は、その反対面の情報の２次元配列と鏡像の関係にある。

(証明) 数学的帰納法で証明する。

(i)$n=1$の時、図2のように接続できる。この時補題１より、ある面の情報の２次元配列は、その反対面の情報の配列と鏡像の関係にある。よって、$n=1$の時は成立する。

(ii)$n=k$の時、補題２が成立すると仮定する。仮定より、一辺が2^kの立方体を作成できる。そして、ある面の情報の２次元配列は、その反対面の情報の配列と鏡像の関係にある。この立方体と同じ立方体を計８個作成する。これらを接続して、一辺$2^k+2^k(=2^{k+1})$の立方体を作成できる。この時、ある面の情報の２次元配列は、その反対面の情報の配列と鏡像の関係にある。これは、$n=k+1$の時も補題２が成立することを示している。

よって、すべての自然数nについて補題２は成立する。

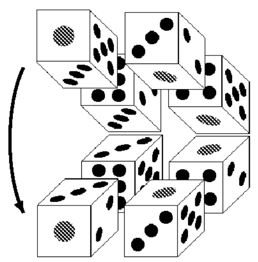

図 2: Ｄ世界における立方体の接続の例

(証明終).

［補題３］ Ｄ世界では、任意の形状が作成可能である。

(証明) 補題２より、作成したい形状を含む一辺2^nの立方体を作ることができる。次に、作成したい形状を構成する情報付き立方体以外の情報付き立方体を取り除けば作成したい形状が得られる。

(証明終).

以上で、接続条件C_{eq}が規定されたＤ世界では、任意形状が作成可能であることが明らかになった。

4.4 接続条件C_{eq}の世界

Ｄ世界におけるすべての情報付き立方体の同じ面情報を書き換えていくことにより、任意の均質な立方体世界を構成できることに着目すると、補題３は次のように拡張できる。

［定理１］ 接続条件C_{eq}が規定された均質な立方体世界では、任意形状が作成可能である。

4.5 接続条件$C(C_{eq}\subset C\subset C_u)$の世界

接続条件$C(C_{eq}\subset C\subset C_u)$は、接続条件$C_{eq}$を部分集合として含んでいる。これは、接続条件$C_{eq}$で作成可能な形状は、接続条件$C$でも必ず作成できることを示している。

したがって、接続条件$C(C_{eq}\subset C\subset C_u)$の均質な立方体世界では、任意形状が作成できる。

4.6 接続条件$C(C_\phi\subset C\subset C_{eq})$のＤ世界

接続条件C_ϕとC_{eq}は、互いに作成可能な形状において大きな違いが見られる。前者では情報付き立方体は孤立して存在し、後者では任意形状が作成可能である。ここでは、Ｄ世界を仮定し、両者の間を$\mathbf{C}^{(i)}$をもとに考察

する。ここで、$\mathbf{C}^{(i)} = \{C| \quad |C| = i, C \subseteq C_{eq}\}$である。それぞれの$\mathbf{C}^{(i)}$において、ある特定の形状が作成できると考えられる。

ここでは、$\mathbf{C}^{(i)}$, $\mathbf{C}^{(j)}$において作成可能な形状の集合$\mathbf{N}_{C^{(i)}}$と$\mathbf{N}_{C^{(j)}}$との関係について考える。

［補題４］D世界では、任意の２つの接続条件C_α, C_βにおいて、作成可能な形状$\mathbf{N}_{C_\alpha}, \mathbf{N}_{C_\beta}$が$\mathbf{N}_{C_\alpha} \subset \mathbf{N}_{C_\beta}$であるための十分条件は、$C_\alpha \subset C_\beta$であることである。

(証明) $\mathbf{N}_{C_\alpha} - \mathbf{N}_{C_\beta} = \phi$であること、また接続可能面数より$\mathbf{N}_{C_\beta} - \mathbf{N}_{C_\alpha} \neq \phi$より、補題４は成立する。

また、任意の$i(i = 0, 1, .., 5)$において$^\forall C_k \in \mathbf{C}^{(i)}, {}^\exists C_l \in \mathbf{C}^{(i+1)}$は、$C_k \subset C_l$であることより次の補題が成り立つ。

［補題５］D世界では、任意の２つの接続条件の集合$\mathbf{C}^{(i)}$,$\mathbf{C}^{(j)}(i < j)$において、作成可能な形状$\mathbf{N}_{C^{(i)}}$,$\mathbf{N}_{C^{(j)}}$の関係は$\mathbf{N}_{C^{(i)}} \subseteq \mathbf{N}_{C^{(j)}}$である。

(証明) $^\forall C_k \in \mathbf{C}^{(i)}, {}^\exists C_l \in \mathbf{C}^{(j)}(i < j)$において$C_k \subset C_l$であることより補題４が適用できる。したがって、補題５は成立する。

［定理２］D世界では、$\mathbf{N}_{C^{(i)}} \subset \mathbf{N}_{C^{(j)}}(i < j)$である。

(証明) 補題５より、$\mathbf{N}_{C^{(i)}} - \mathbf{N}_{C^{(j)}} = \phi$である。また、接続可能面数より$^\forall C_l \in \mathbf{C}^{(j)}$において$\mathbf{N}_{C_l} - \mathbf{N}_{C^{(i)}} \neq \phi(i < j)$である。したがって、$\mathbf{N}_{C^{(j)}} - \mathbf{N}_{C^{(i)}} \neq \phi$となるので、定理２は成立する。

定理２より、$\mathbf{C}^{(0)} \sim \mathbf{C}^{(6)}$は作成できる形状が除々に増していく。実際に作成できる形状の数が増していく様子を凸形状を例に示す。表1に、$\mathbf{C}^{(i)}$において作成可能な最大の凸形状を示す。

表1より、D世界では$\mathbf{C}^{(2)}$で１次元任意形状が、$\mathbf{C}^{(4)}$で２次元任意形状が、$\mathbf{C}^{(6)}$で３次元任意形状が、初めて作成できることが分かる。また、任意の$\mathbf{C}^{(j)}$での作成可能な凸形状は、$\mathbf{C}^{(i)}(i < j)$ でのそれを包含していること、徐々に作成可能な形状が増していることが確認できる。

表1のほか、例えば$C^{(2)}$において、ある程度の２次元や３次元形状や、$C^{(4)}$においてある種の３次元形状が構成できることを見つけているが、詳細な検討は今後の課題である。

表 1: D世界における作成可能な凸形状

	作成可能な凸形状 $x \times y \times z$
$\mathbf{C}^{(0)} = \{C_\phi\}$	1×1×1 （孤立）
$\mathbf{C}^{(1)}$	1×1×2 （２個の連結）
$\mathbf{C}^{(2)}$	1×1×n （一次元任意形状） 1×2×2
$\mathbf{C}^{(3)}$	1×2×n
$\mathbf{C}^{(4)}$	1×n×n （二次元任意形状） 2×2×n
$\mathbf{C}^{(5)}$	2×n×n
$\mathbf{C}^{(6)} = \{C_{eq}\}$	n×n×n （三次元任意形状）

これまでの結果を表にまとめたものが図3である。また、■——■ は、同一の接続条件であることを示す。

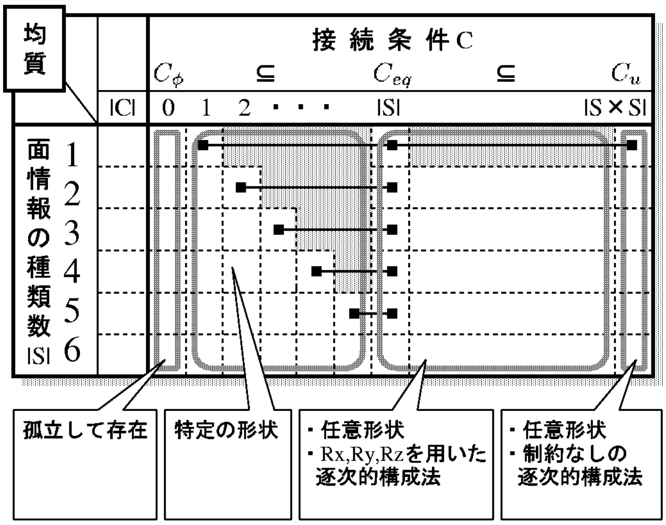

図 3: 考察結果

以上の議論より、$C(C_\phi \subseteq C \subseteq C_u)$において任意形状が作成可能な範囲は$C(C_{eq} \subseteq C \subseteq C_u)$であることが明らかとなった。また、$C_u$においては任意形状の逐次的構成が可能である。次に、接続条件$C(C_{eq} \subseteq C \subset C_u)$において任意形状の逐次的構成を可能にする構成法について述べる。

4.7 任意形状の逐次的構成法

まず、接続条件C_{eq}が規定された世界を考える。補題３の証明過程が任意形状の構成法の１つを与えている。この構成法では、補題２の証明過程で示した手順に従わなければならない。しかし、この方法は逐次的ではない。

以前、我々は論文[6]において２次元任意形状の逐次的構成法について考察を行なった。そこで、情報付き立方体の向きに関する簡単な制約を設けることによって、接続面のみを考慮するだけで失敗することなしに２次元平面上に任意形状が作成できることを明らかにした。ここでは、３次元任意形状の逐次的構成法について述べる。

まず、準備として代数系 ($\mathbf{R}$; $\cdot$) を定義する。集合 $\mathbf{R}$ は、$\{R_x, R_y, R_z, R_0\}$ の４要素をもち、それぞれ表2に示すような意味をもつ。また、２項演算” · ”は下のように定義する。

$\mathbf{R}$	機能
R_x	x 軸回り右１８０度回転
R_y	y 軸回り右１８０度回転
R_z	z 軸回り右１８０度回転
R_0	回転を行なわない

表 2: 要素の意味

$$R_i \cdot R_j \quad \equiv \quad (R_j\text{を行った後、}R_i\text{を行う})$$
$$\text{但し、}i, j \in \{x, y, z, 0\}\text{ である。}$$

このように定義された代数系 ($\mathbf{R}$; $\cdot$) は可換群となる。可換群 ($\mathbf{R}$; $\cdot$) での主な性質を以下に示す。

$$R_x \cdot R_y \cdot R_z = R_0 \qquad (1)$$
$$R_x \cdot R_y = R_z \qquad (2)$$
$$R_x \cdot R_z = R_y \qquad (3)$$
$$R_y \cdot R_z = R_x \qquad (4)$$
$$R_i = R_i^{-1} \qquad (5)$$

但し、$i \in \{x, y, z, 0\}$ である。

以上の可換群を用いると、３次元任意形状の逐次的構成法が導き出せる。

［補題６］ Ｄ世界において、新たな立方体 B_1 を既に接続済みの立方体 B_2 に接続する時、B_1 を B_2 を基準に x 軸方向に接続する場合は y 軸回りに、y 軸方向に接続する場合は z 軸回りに、z 軸方向に接続する場合は x 軸回りに180度回転すれば、失敗することなしに接続することができる。したがって任意形状を逐次的に構成することができる。

(証明) 原点に立方体 B_0 があると仮定する。任意の座標 (i, j, k) にある立方体 $B_{i,j,k}$ は、

$$B_{i,j,k} \quad = R_y{}^{i}\cdot R_z{}^{j}\cdot R_x{}^{k}\cdot B_0$$

である。一方、座標 (i, j, k) の周囲６隣接点にある立方体は、それぞれ

$$\begin{aligned}
B_{i+1,j,k} &= R_y{}^{i+1}\cdot R_z{}^{j}\cdot R_x{}^{k}\cdot B_0 = R_y\cdot B_{i,j,k}\\
B_{i,j+1,k} &= R_y{}^{i}\cdot R_z{}^{j+1}\cdot R_x{}^{k}\cdot B_0 = R_z\cdot B_{i,j,k}\\
B_{i,j,k+1} &= R_y{}^{i}\cdot R_z{}^{j}\cdot R_x{}^{k+1}\cdot B_0 = R_x\cdot B_{i,j,k}\\
B_{i-1,j,k} &= R_y{}^{i-1}\cdot R_z{}^{j}\cdot R_x{}^{k}\cdot B_0 = R_y\cdot B_{i,j,k}\\
B_{i,j-1,k} &= R_y{}^{i}\cdot R_z{}^{j-1}\cdot R_x{}^{k}\cdot B_0 = R_z\cdot B_{i,j,k}\\
B_{i,j,k-1} &= R_y{}^{i}\cdot R_z{}^{j}\cdot R_x{}^{k-1}\cdot B_0 = R_x\cdot B_{i,j,k}
\end{aligned}$$

である。このことは、立方体 $B_{i,j,k}$ は周囲６隣接点のどの立方体とも接続可能であることを示している。したがって、補題６は成立する。(証明終).

補題６より、接続条件 C_{eq} が規定されたＤ世界では、３次元任意形状の逐次的な構成が可能であることが明らかになった。また、補題６の構成法は、面情報の種類数に依存してないことより、$|S| < 6$ の世界に対しても適用できる。

［定理３］ 接続条件 C_{eq} が規定された均質な立方体世界では、回転演算 R_x, R_y, R_z を用いて任意形状の逐次的な構成が可能である。

さらに4.5節の議論より、定理３は次の系を導く。

［系］ 接続条件 $C(C_{eq} \subseteq C \subset C_u)$ が規定された均質な立方体世界では、回転演算 R_x, R_y, R_z を用いて任意形状の逐次的な構成が可能である。

5　おわりに

本稿では、最初に情報付き立方体世界を定義した。次に、均質な立方体世界について、接続条件をもとに考察を行った。その結果、接続条件 C_ϕ が規定された立方体世界では任意の形状を作成できないこと、また接続条件 $C(C_{eq} \subseteq C \subseteq C_u)$ が規定された立方体世界では任意形状が逐次的に作成可能であることが明らかになった。しかしながら、接続条件 $C(C_{eq} \subseteq C \subset C_u)$ の場合は逐次的構成法においては一定の規則があり、その一つとして回転演算 Rx, Ry, Rz を用いた構成法を示した。さらに、接続条件 $C(C_\phi \subseteq C \subseteq C_{eq})$ においては、接続条件 C の要素数 $|C|$ をもとに、作成可能な形状数は増加することを示した。また、作成可能な最大の凸形状を例に挙げ、１次元-, ２次元-, ３次元任意形状が作成可能となる接続条件の要素数を示した。その結果、接続条件 C_{eq} は任意形状作成可能性の境界となることが明らかになった。

今後は、与えられた接続条件をもつ２つの立方体世界の等価性と等価性に基づく立方体世界の集合の分割を検討する予定である。

謝辞

数学的な検討で貴重なコメントを下さいました感性デザイン工学科の栗山憲教授をはじめ、本研究に様々な助言を下さいました感性デザイン工学科の守田了助教授に深く感謝致します。

参考文献

[1] M.Tanaka, S.Tamura, K.Tanaka: " On Assembling Subpictures into a Mosaic Picture, " IEEE Tr., SMC, Vol.7, No.1, pp.42-48, 1977.

[2] Doris Schattschneider, Marjorie Senechal: " Tiling, " CRC Press LLC, pp. 43-50, 1997.

[3] Yasunori Yamamoto, Kenichi Morita, Kazuhiro Sugata: " An Isometric Context-Free Array Grammar that generates Rectangles, " Tr., IECE of japan, Vol. E65, NO. 12, pp.754-755, 1982.

[4] Yasunori Yamamoto, Kenichi Morita: " two-dimensional uniquely parsable isometric array grammars, " International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Vol. 6, No. 2 & 3, pp.301-313, 1992.

[5] 石原 真紀夫, 山口 真悟, 守田 了, 田中 稔, " サイコロ世界のグラフ理論的考察, " 1998 年電子情報通信学会総合大会, D-12-213, 1998.

[6] 石原 真紀夫, 田中 稔, 山口 真悟, 守田 了, " サイコロ世界とその操作システム, " 電子情報通信学会, 技術報告 PRMU98-66, 1998.

(1999.11.30 受理)