秩序・無秩序転移の確率偏微分方程式によるモデル化について

山本 竜司 (知能情報システム工学専攻)
中津留 毅 (知能情報システム工学専攻)
宮島 啓一 (知能情報システム工学科)
石川 昌明 (知能情報システム工学科)

On the Mathmatical Modeling of Order-disorder Transition by Stochastic Partial Differential Equations

Ryoji YAMAMOTO (Division of Computer Science & Systems Engineering)
Takeshi NAKATSURU (Division of Computer Science & Systems Engineering)
Keiichi MIYAJIMA (Department of Computer Science & Systems Engineering)
Masaaki ISHIKAWA (Department of Computer Science & Systems Engineering)

The purpose of this paper is to construct the mathematical model of order-disorder transitions with the random noise. First, the mathematical model of the order-disorder transition is derived in the form of the nonlinear stochastic partial differential equation with the help of Ginzburg-Landau free energy. Secondly, the existence theorem of the unique solution of the system equation is established by using the nonlinear functional analysis. Finally, the behavior of the order-disorder transition is analized through the simulation experments.
Key Words : order-disorder transition, stochastic partial differential equations, Ginzburg-Landau free energy

1. 緒言

一般に、物質は温度や圧力などの物理量が与えられたとき、ある平衡状態をとっている。これらの環境を変化させると、それに伴い物質も他の平衡状態へ移り変わることがある。このような現象を一般に相転移現象 [1] という。例えば、温度を下げていった時の水から氷への変化、温度を上げていった時の水から水蒸気への変化が相転移の一例である。相転移現象は合金の相転移、高分子共重体の相分離など工学の種々の分野で観測される重要な問題である [2]。

一般に相転移現象を解析する上で必要不可欠なものは、相転移現象の数学的モデル化である。相転移現象を数学的に取り扱おうとしたとき、その出発点となるのは、自由エネルギーである。自由エネルギーとは、熱平衡状態がその最小値で特性づけられるような物理量であるが、閉じた系においては自由エネルギーは増加しないという事実が、モデル化を行う上で基本となる考え方である。相転移を別の表現を用いれば、ある系を考えたとき、系全体の自由エネルギーがより低い他の状態になることと言うことができる。相転移現象のより現実的なモデル化を行うためには、熱雑音を考慮する必要がある。本論文では相転移現象の中で秩序・無秩序転移と呼ばれる相転移現象を熱雑音の影響を考慮してモデル化を行い、モデルの数学的妥当性について考察する。さらに提案したモデルを用いてシミュレーションを行い相転移現象の挙動を解析する。本論文で用いられる主な記号の意味は次のとおりである。

t : 区間$\Theta = (0, T)$ に属する時間変数、T は正定数

x : 3 次元ユークリッド空間内の滑らかな境界Γをもつ有界領域 G に属する空間変数

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 完備な確率空間

$\mathcal{F}_t$: 右連続, 非減少な $\mathcal{F}$ の部分$\sigma -$ 代数族, $t \in \bar{\Theta} = [0, T]$

$\mathcal{L}^1(X)$: X から X への核型作用素の空間[3]

$L^P(X)$: 空間 X において P 乗可積分な関数 f の空間、すなわち

$$\left\{ f \mid \int_X |f(x)|^P dx < \infty \right\}$$

ただし、$1 \le P < \infty$

$L^2(X;Y)$: 空間 Y で値を持ち X 上で 2 乗可積分な関数 f の空間、すなわち

$$\left\{ f \mid \int_X \| f(x) \|_Y^2 \, dx < \infty \right\}$$

ただし、$\| \cdot \|_Y$ は空間 Y におけるノルムを表す

$(\cdot , \cdot), | \cdot |$: $L^2(G)$ における内積およびノルム

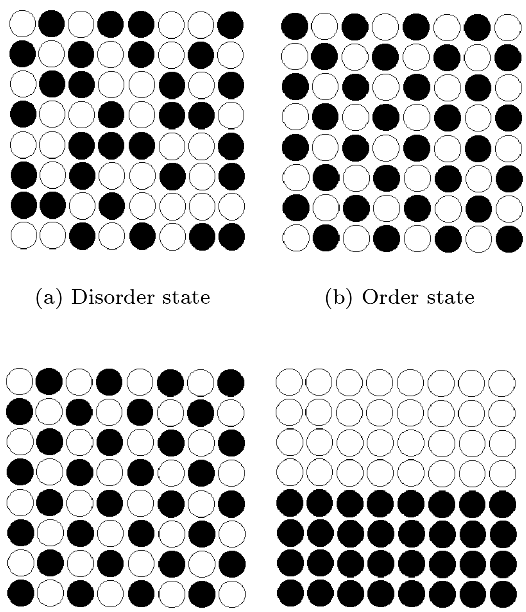
$H^n(G)$: G 上の次数 n のソボレフ空間[4]

$L^\infty(X;Y)$: Y 上で値をもち X 上で本質的に有界な関数の集合、すなわち

$$\left\{ f \mid \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} \| f(x) \|_Y < \infty \right\}$$

$C(\bar{\Theta};X)$: X で値をもつ $\bar{\Theta} = [0,T]$ 上の連続関数の空間

2. 相転移のモデリング



(a) Disorder state (b) Order state

(c) Order state (d) Separate state

Fig 1: The model of Phase Transition

系として 2 種類の同数の原子が正方格子上に配置されているものを考える。これらの原子は図 1(a) のように最初は無秩序に配置されているとする。また、隣り合う 2 つの原子は互いに入れ替わることができ、同種の原子が隣り合っている場合は斥力、異種の場合は引力が働くとする。このとき、系全体の相互作用エネルギーが最小になる原子の配置は、図 1(b),(c) である ((b) と (c) は原子の配列が一つずつずれていることに注意)。無秩序に配置された原子が、図 1(b)(c) のような秩序ある構造に転移することを秩序・無秩序転移という。

逆に、同種の原子が隣り合っている場合は引力、異種の場合は斥力が働くときには、エネルギー最小の配置は 図 1(d) のようになる。このように、2 種類の原子が空間的に分離した状態へ転移すること相分離という。相分離の例としては水と油を混ぜたとき水と油が一様に混ざった系が水の多い領域と油の多い領域に分かれる現象が挙げられる。

本論文では相転移現象の中で (a),(b),(c) のような秩序・無秩序転移のモデル化を考察する。秩序状態は図 1(b),(c) の 2 つがある。この 2 つの状態を区別するため、秩序変数 u を導入する。秩序変数は格子上の原子の並び方を区別するものであり、以下で定義される。

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & (\text{図 } 1(b) \text{ の秩序状態のとき}) \\ 0 & (\text{図 } 1(a) \text{ の無秩序状態のとき}) \\ -1 & (\text{図 } 1(c) \text{ の秩序状態のとき}) \end{cases} \tag{1}$$

また、式 (1) を一般化して秩序の程度に応じて

$$-1 < u(x,t) < 1 \tag{2}$$

の値をとるものとする。次に、秩序・無秩序転移をモデル化するため、Ginzburg-Landau 自由エネルギーを考える。Ginzburg-Landau 自由エネルギーは次のように与えられる。

$$F(u) = \int_G \left[\frac{\gamma}{2} (\nabla u)^2 + W(u) \right] dx \tag{3}$$

ここで、γ は正定数、$\nabla(\cdot) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ であり、

$$W(u) = \frac{1}{8}u^4 - \frac{1}{4}u^2 \tag{4}$$

である。

一般に閉じた系では自由エネルギーは時間とともに増加することはないので、

$$\frac{dF(u)}{dt} = \int_G \frac{\delta F(u)}{\delta u} \frac{\partial u}{\partial t} dx \le 0 \tag{5}$$

が成り立つ。$\delta F(u)/\delta u$ は汎関数微分を表す。ここで、式 (5) が成立するためには $L(u) > 0$ として

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -L(u) \frac{\delta F(u)}{\delta u} \tag{6}$$

が成立すればよい。

本論文では u の境界条件を次のように与えることにする。

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad on \quad \Theta \times \Gamma \tag{7}$$

従って、式 (3),(7) より

$$\frac{\delta F(u)}{\delta u} = -\gamma \triangle u - \frac{1}{2} u \left(1-u^2\right) \tag{8}$$

式 (8) を式 (6) に代入して、次式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma L(u) \triangle u + \frac{1}{2} L(u) u (1-u^2) \tag{9}$$

式 (9) は Ginzburg-Landau 方程式と呼ばれ、秩序・無秩序相転移の挙動を記述する基本式である。

しかし、実際の相転移現象においては熱雑音の影響により、原子間の移動には不規則なゆらぎが生じるため、式 (9) のような確定モデルでは厳密なモデル化が行えない。そこで、本論文ではこのような熱雑音の影響を白色雑音でモデル化し、確定モデル (9) の代わりに次の確率モデルを導入する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma L(u) \triangle u + \frac{1}{2} L(u) u (1-u^2) + (1-u^2) \frac{\partial w}{\partial t} \tag{10}$$

ここで、$w(t,x)$ は時間に関する Wiener 過程 であり、$\partial w / \partial t$ はその形式的微分で白色雑音を表す。式 (10) の右辺第 3 項の係数は u の値が $-1 \le u \le 1$ となる必要性からこのように置いた。以後、簡単のため、$L(u) = 1$ として、モデル化を行うことにする。

初期時刻 $t = 0$ における秩序変数の値を $u_0(x)$ として、結局、確率 Ginzburg-Landau 方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \gamma \triangle u(t,x) &= f(u(t,x)) \\ &\quad + (1-u^2(t,x)) \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} \\ &\quad (t,x) \in \Theta \times G \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{array}{llll} \text{初期条件} & u(0,x) = u_0(x) & & x \in G \\ \text{境界条件} & \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial \nu} = 0 & & (t,x) \in \Theta \times \Gamma \end{array}$$

ただし、

$$f(u) = \frac{1}{2} u (1-u^2)$$

である。

式 (11) には白色雑音が含まれているので、その数学的意味は次の確率積分方程式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} u(t,x) - \int_0^t \gamma \triangle u(s,x) ds &= u_0(x) \\ + \int_0^t f(u(s,x)) ds &+ \int_0^t (1-u^2(s,x)) dw(s,x) \\ &\quad (t,x) \in \Theta \times G \end{aligned} \tag{12}$$

$$\text{境界条件} \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial \nu} = 0 \qquad (t,x) \in \Theta \times \Gamma \tag{13}$$

3.　モデルの定式化

本章では確率相転移モデル (12),(13) の定式化を行う。まず、次の関数空間を考える。

$$V = H^1(G) \subset H = L^2(G)$$

H をその双対空間と同一視して次式を得る。

$$V \subset H \subset V^* \quad (V \text{ の双対空間})$$

$w(t)$ を $\mathcal{F}_t$ に適合した増分共分散作用素 $Q \in \mathcal{L}^1(H)$ をもつ $H-$ 値 Wiener 過程として、式 (12),(13) に対する解の定義を行う。

(定義 3.1)　次の 2 条件を満足する関数 u を式 (12),(13) に対する解という。

$$\begin{aligned} (i) \quad & u \in L^2(\Omega \times \Theta; V) \cap L^2(\Omega; C(\bar{\Theta}; H)) \\ & \cap L^4(\Omega \times \Theta \times G) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} (ii)(u(t),\varphi) + \int_0^t \langle Au(s),\varphi \rangle ds &= (u_0,\varphi) \\ + \int_0^t (f(u(s)),\varphi) + \int_0^t ((1-u^2(s)), \varphi dw(s)) & \\ {}^\forall \varphi \in V & \end{aligned} \tag{15}$$

ただし、任意の $\varphi, \psi \in V$ に対して

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \gamma (\nabla \varphi, \nabla \psi) = \gamma \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)$$

(定理 3.1)　次の条件 $(C-1) \sim (C-4)$ のもとで、式 (12),(13) に対する定義 3.1 の意味での一意解が存在する。

$$\begin{aligned} (C-1) \quad &: \quad \langle A\varphi, \varphi \rangle + \lambda |\varphi|^2 \ge \alpha \parallel \varphi \parallel^2, \\ & \quad\ {}^\exists \lambda \in R^1, {}^\exists \alpha > 0, {}^\forall \varphi \in V \\ (C-2) \quad &: \quad 1 - \mathrm{tr}[Q] \ge \delta, {}^\exists \delta > 0 \\ (C-3) \quad &: \quad u_0 \in L^2(\Omega; H) \\ (C-4) \quad &: \quad 2E\{ \int_0^T (f(\varphi) - f(\psi), \varphi - \psi) ds \} \\ & \quad + E\{ \int_0^T \mathrm{tr}[(\varphi^2 - \psi^2) Q (\varphi^2 - \psi^2)] ds \} \le 0 \\ & \quad\ {}^\forall \varphi, \psi \in L^2(\Omega \times \Theta; V) \cap L^4(\Omega \times \Theta \times G) \end{aligned}$$

ここで、$\mathrm{tr}[Q]$ は作用素 Q のトレースを表す。

定理 3.1 の証明は付録参照。

4. 確率 Ginzburg-Landau 方程式のシミュレーション

確率 Ginzburg-Landau 方程式は次のように表された。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \triangle u + f(u) + h(u)\frac{\partial w(t)}{\partial t} \qquad (16)$$

ただし、$f(u) = u(1-u^2)/2, h(u) = 1-u^2$ である。確率 Ginzburg-Landau 方程式 (16) のシミュレーションを空間次元が 2 次元の場合について有限差分法を用いて行った。以下にシミュレーションの手順と結果を示す。

まず、空間領域を次のように分割する。

$$\begin{aligned} &0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = 1 \quad , \quad \Delta x = 1/n \\ &0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1} = 1 \quad , \quad \Delta y = 1/n \end{aligned}$$

ここで、$u^i_{k,l} = u(t_i, x_k, y_l)$ とおき、次のように差分する。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{u^{i+1}_{k,l} - u^i_{k,l}}{\Delta t} \\ \triangle u = (u^{i+1}_{k-1,l} - 2u^{i+1}_{k,l} + u^{i+1}_{k+1,l})/(\Delta x)^2 \\ \qquad +(u^{i+1}_{k,l-1} - 2u^{i+1}_{k,l} + u^{i+1}_{k,l+1})/(\Delta y)^2 \\ f(u) = u^i_{k,l}\left(1 - {u^i_{k,l}}^2\right)/2 = f^i_{k,l} \\ h(u) = 1 - {u^i_{kl}}^2 = h^i_{k,l} \\ \dfrac{\partial w(t)}{\partial t} = \dfrac{w^i_{k,l}}{\sqrt{\Delta t}} \end{cases} \qquad (17)$$

$w^i_{k,l}$ は標準正規乱数とし、以下では $\Delta x = \Delta y = h$ とおく。以上のような差分化を行い、初期値 (fig.2) として平均 0 分散 2.5×10^{-5} の正規乱数を用い、パラメータは $\Delta t = 0.01, h = 0.05, \gamma = 0.01$ とおき、雑音のない場合 (fig.3∼fig.5) とある場合 (fig.6∼fig.8) についてシミュレーションを行った結果を以下の図に示す。なお、各図においては、u の値に応じて右端のように色の濃度が変化するようになっている。

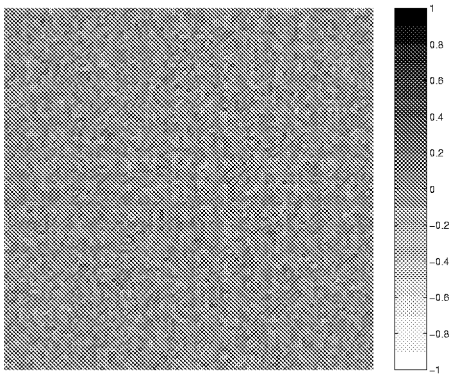


Fig 2: initial value

4.1 シミュレーション結果の考察

雑音がない場合とある場合の図を同じ時刻 $t = 8$ で比較すると、雑音のない場合は全体的に灰色が多いが、雑音のある場合は白色と黒色が多いことがわかる。これは、雑音がある方が秩序化が早く進むためと考えることができる。すなわち、雑音は秩序化を促進する効果をもつことを示している。

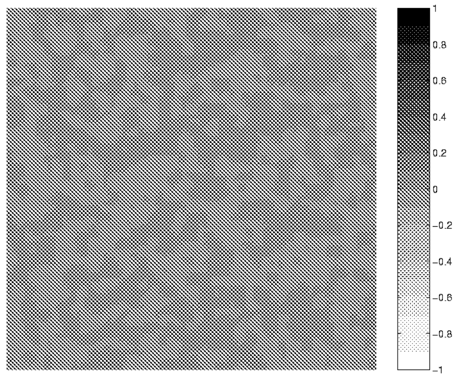


Fig 3: $t = 1$

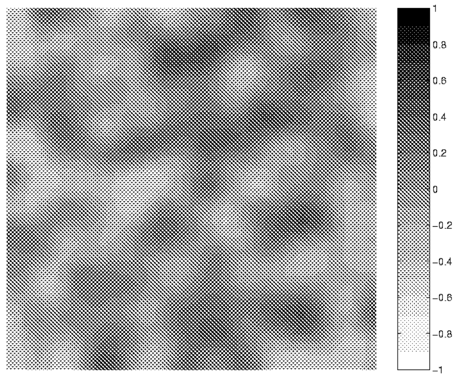


Fig 4: $t = 8$

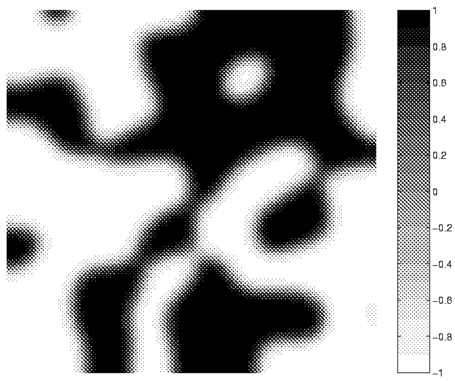


Fig 5: $t = 20$

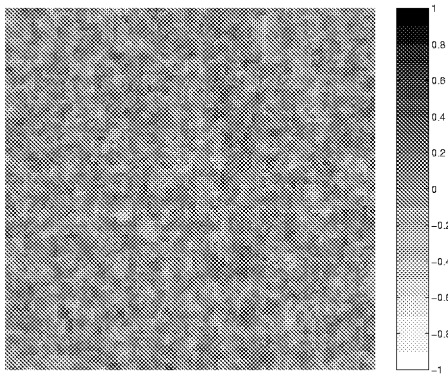


Fig 6: $t = 1$

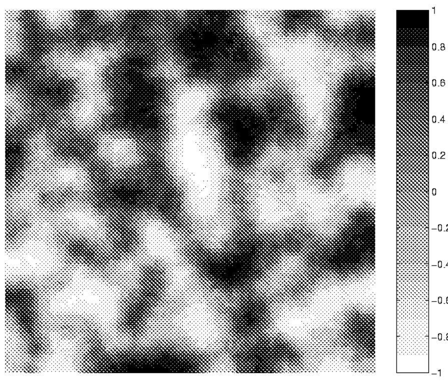


Fig 7: $t = 8$

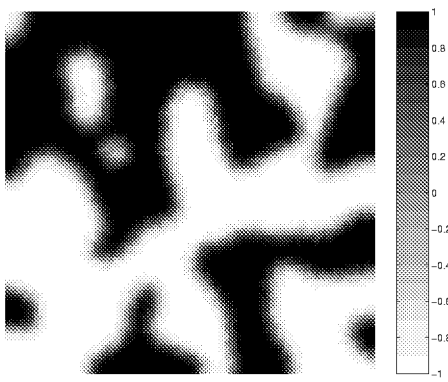


Fig 8: $t = 20$

5.　結言

相転移現象は工学の種々の分野において現れる重要な非線形現象である。本論文では相転移現象の中で特に秩序・無秩序転移と呼ばれる現象のモデリングについて考察した。モデリングの際に熱雑音の影響を考慮して、確率 Ginzburg-Landau 方程式を導入してモデリングを行った。確率 Ginzburg-Landau 方程式が一意解をもつための条件を明らかにし、モデルの定式化を行った。本論文で提案した確率 Ginzburg-Landau 方程式を用いてシミュレーションを行い、秩序・無秩序現象の挙動解析を行った。その結果、熱雑音は秩序化を促進する効果をもつことが分かった。シミュレーションを通して、熱雑音による不規則性を考慮した秩序・無秩序転移に対してモデルの有効性が確かめられた。

参考文献

[1] 太田隆夫：界面ダイナミクスの数理，日本評論社，(1997)

[2] 本間敏夫：固体動力学Ⅱ，丸善，(1978)

[3] I.Gel'fand , N.Vilenkin : Generalized Functions , Academic Press , (1964)

[4] R.A.Adams : Sobolev Spaces , Academic Press , (1975)

[5] E.Pardoux : Stochastic Partial Differential Equations and Filtering of Diffusion Processes , stochastics , vol.3 , pp.127-167 , (1979).

[6] J.Zabczyk : Mathematical Control Theory : An Introduction , Birkhäuser , (1995)

(平成 11 年 7 月 30 日受理)

A　付録

定理 3.1 の証明:　$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ を V の要素で構成した H の正規直交基底として、式 (15) に対する有限次元近似方程式を考える。

$$\begin{aligned}(u_n(t), e_i) + \int_0^t \langle Au_n, e_i\rangle ds &= (u_{0n}, e_i) \\ &+ \int_0^t (f(u_n), e_i) ds + \int_0^t ((1-u_n^2), e_i dw_n) \\ &1 \le i \le n\end{aligned} \tag{18}$$

ここで、$u_{0n} = \sum_{i=1}^{n}(u_0, e_i)e_i$ である。

$|u_n(t)|^2 \left(\equiv \sum_{i=1}^{n}(u_n(t), e_i)^2\right)$ に伊藤の公式 [5] を用い

て次式を得る。

$$|u_n(t)|^2+2\int_0^t\langle Au_n,u_n\rangle ds = |u_{0n}|^2 + 2\int_0^t(f(u_n),u_n)ds+2\int_0^t((1-u_n^2),u_n dw_n) + \sum_{i=1}^n\int_0^t(Q(1-u_n^2)e_i,(1-u_n^2)e_i)ds \quad (19)$$

ここで、次式に注意して

$$2(f(u_n),u_n)=(u_n(1-u_n^2),u_n)=|u_n|^2-|u_n^2|^2$$

$$\sum_{i=1}^n(Q(1-u_n^2)e_i,(1-u_n^2)e_i) \le \mathrm{tr}[Q]|1-u_n^2|^2 \le \mathrm{tr}[Q](1+|u_n^2|^2) \quad (20)$$

$$\langle Au_n,u_n\rangle=\gamma|\nabla u_n|^2$$

$$|u_{0n}|^2\le|u_0|^2$$

式 (19) より次式を得る。

$$|u_n(t)|^2+2\gamma\int_0^t|\nabla u_n|^2ds+(1-\mathrm{tr}[Q])\int_0^t|u_n^2|^2ds \le |u_0|^2+\int_0^t|u_n|^2ds+2\int_0^t((1-u_n^2),u_n dw_n) + t\cdot\mathrm{tr}[Q] \quad (21)$$

ここで、条件 $(C-1),(C-2),(C-3)$ に注意して (21) の両辺の数学的期待値演算を施して、次式を得る。

$$E\{|u_n(t)|^2\}+\alpha E\{\int_0^t\|u_n\|^2ds\}+\delta E\{\int_0^t|u_n^2|^2ds\} \le E\{|u_0|^2\}+|\lambda|E\{\int_0^t|u_n|^2ds\}+T\cdot\mathrm{tr}[Q] \le C+|\lambda|E\{\int_0^t|u_n|^2ds\} \quad (22)$$

ただし、$C=E\{|u_0|^2\}+T\cdot\mathrm{tr}[Q]$
式 (22) に Gronwall の不等式 [6] を用いて次の評価式を得る。

$$\sup_{t\in\bar\Theta}E\{|u_n(t)|^2\}\le C_1 \quad (23)$$

$$E\{\int_0^T\|u_n\|^2ds\}\le C_2 \quad (24)$$

$$E\{\int_0^T|u_n^2|^2ds\}\le C_3 \quad (25)$$

あるいは

$$E\{\int_0^T\|u_n\|^4_{L^4(G)}ds\}\le C_3 \quad (26)$$

ここで、C_1,C_2,C_3 は n と独立な正定数である。
ここで、

$$E\{\int_0^T\|{u_n}^3\|^{\frac43}_{L^{\frac43}(G)}ds\} = E\{\int_0^T(\int_G|u_n|^4dx)ds\} = E\{\int_0^T\|u_n\|^4_{L^4(G)}ds\}\le C \quad (27)$$

に注意して、次のような部分列 (簡単のため $\{u_n\}$ と表す) が選べる。

$$u_n\rightharpoonup u \ \textit{weakly star in}\ L^\infty(\Theta;L^2(\Omega;H)) \quad (28)$$

$$u_n\rightharpoonup u \ \textit{weakly in}\ L^2(\Omega\times\Theta;V) \quad (29)$$

$$u_n^2\rightharpoonup \chi_1 \ \textit{weakly in}\ L^2(\Omega\times\Theta;H) \quad (30)$$

$$u_n\rightharpoonup u \ \textit{weakly in}\ L^4(\Omega\times\Theta;L^4(G)) \quad (31)$$

$$f(u_n)\rightharpoonup \chi_2 \ \textit{weakly in}\ L^{\frac43}(\Omega\times\Theta;L^{\frac43}(G)) \quad (32)$$

式 (18) において、$n\to\infty$ として式 (28) ～ (31) を用いて次式を得る。

$$(u(t),e_i)+\int_0^t\langle Au,e_i\rangle ds = (u_0,e_i)+\int_0^t(\chi_2,e_i)ds + \int_0^t(1-\chi_1,e_i dw) \quad (33)$$

$$1\le i$$

次に、単調法 [4] を用いて、$\chi_2=f(u),\chi_1=u^2$ であることを示す。
まず、条件 $(C-4)$ より次式を得る。

$$F_n = -2E\{\int_0^T(f(u_n)-f(\varphi),u_n-\varphi)ds\} - E\{\int_0^T\mathrm{tr}[(u_n^2-\varphi^2)Q(u_n^2-\varphi^2)]ds\}\ge 0 \quad {}^\forall\varphi\in L^4(\Omega\times\Theta;L^4(G))\cap L^2(\Omega\times\Theta;V) \quad (34)$$

ここで、

$$G_n=-2E\{\int_0^T(f(u_n),u_n)ds\}-E\{\int_0^T\mathrm{tr}[u_n^2Qu_n^2]ds\} \quad (35)$$

とおいて次式を得る。

$$G_n \le -2E\{\int_0^T(f(u_n),u_n)ds\} - \sum_{i=1}^nE\{\int_0^T(Qu_n^2e_i,u_n^2e_i)ds \quad (36)$$

(式 (19) を用いて)

$$= E\{|u_{0n}|^2\}-E\{|u_n(T)|^2\} -2E\{\int_0^T\langle Au_n,u_n\rangle ds\} + \sum_{i=1}^n\int_0^T(Qe_i,e_i)ds$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}E\{\int_0^T(Qe_i,u_n^2e_i)ds\} \qquad (37)$$

式 (28)〜(30),(37) より

$$\begin{aligned}\limsup_n G_n &\le E\{|u_0|^2\}-E\{|u(T)|^2\}\\ &-2E\{\int_0^T\langle Au,u\rangle ds\}\\ &+T\cdot\mathrm{tr}[Q]-2E\{\int_0^T\mathrm{tr}[Q\chi_1]ds\} \qquad (38)\end{aligned}$$

式 (33) より次式を得る。

$$\begin{aligned}E\left\{|u(T)|^2\right\}+2E\{\int_0^T\langle Au,u\rangle ds\} &= E\{|u_0|^2\}\\ &+2E\{\int_0^T(\chi_2,u)ds\}\\ &+E\{\int_0^T\mathrm{tr}[(1-\chi_1)Q(1-\chi_1)]ds\} \qquad (39)\end{aligned}$$

式 (39) を式 (38) に用いて次式を得る。

$$\begin{aligned}\limsup_n G_n \le & -2E\{\int_0^T(\chi_2,u)ds\}\\ & -E\{\int_0^T\mathrm{tr}[\chi_1Q\chi_1]ds\} \qquad (40)\end{aligned}$$

式 (34),(40) から

$$\begin{aligned}0 \le \limsup_n F_n \le & -2E\{\int_0^T(\chi_2,u)ds\}\\ & -E\{\int_0^T\mathrm{tr}[\chi_1Q\chi_1]ds\}+2E\{\int_0^T(\chi_2,\varphi)ds\}\\ & +2E\{\int_0^T(f(\varphi),u)ds\}-2E\{\int_0^T(f(\varphi),\varphi)ds\}\\ & +2E\{\int_0^T\mathrm{tr}[\varphi^2Q\chi_1]ds\}-E\{\int_0^T\mathrm{tr}[\varphi^2Q\varphi^2]ds\}\\ = & -2E\{\int_0^T(\chi_2-f(\varphi),u-\varphi)ds\}\\ & -E\{\int_0^T\mathrm{tr}[(\chi_1-\varphi^2)Q(\chi_1-\varphi^2)]ds\} \qquad (41)\end{aligned}$$

となる。式 (41) において $\varphi=u$ と選んで、

$$E\{\int_0^T\mathrm{tr}[(\chi_1-u^2)Q(\chi_1-u^2)]ds\}\le 0$$

したがって、

$$\chi_1=u^2 \qquad (42)$$

を得る。

式 (41) において、$\varphi = u\pm\delta v \quad {}^\forall v \in L^4(\Omega\times\Theta;L^4(G))\cap L^2(\Omega\times\Theta;V)(\delta>0)$ と選んで式 (42) を用い、$\delta\to 0$ として次式を得る。

$$E\{\int_0^T(\chi_2-f(u),v)ds\}=0$$

$${}^\forall v\in L^4(\Omega\times\Theta;L^4(G))\cap L^2(\Omega\times\Theta;V)$$

したがって、

$$\chi_2=f(u)$$

を得る。