非線形確率放物型システムの道ごとの指数安定性について

河村 尚志　(知能情報システム工学専攻)
中津留 毅　(知能情報システム工学専攻)
宮島 啓一　(知能情報システム工学科)
石川 昌明　(知能情報システム工学科)

On the Pathwise Exponential Stability of Nonlinear Stochastic Parabolic Systems

Takashi KAWAMURA　(Division of Computer Science & Systems Engineering)
Takeshi NAKATSURU　(Division of Computer Science & Systems Engineering)
Keiichi MIYAJIMA　(Department of Computer Science & Systems Engineering)
Masaaki ISHIKAWA　(Department of Computer Science & Systems Engineering)

This paper is concerned with the pathwise exponential stability of nonlinear stochastic partial differential equations. First, the concept of the stability and asymptotic stability to the nonlinear deterministic ordinary differential equation is stated and then the exponential stability of the nonlinear stochastic partial differential equation is explained. Secondly, the sufficient conditions to get the exponential stability of the nonlinear stochastic reaction-diffusion equations are shown. And with the same conditions as the exponential stability, it is shown that the pathwise exponential stability holds. Finally, through the simulation experiments, the conditions proposed here are examined.

Key Words : pathwise exponential stability, nonlinear stochastic partial differential equation, Sobolev space

1　緒言

制御系を設計する際には、そのシステムの安定性が非常に重要となる。本論文では非線形確率放物型システムを対象に、その解挙動の道ごとの指数安定性について考察する。まず確定集中システムを対象に平衡点、安定の概念を簡単に述べ、確率分布システムの指数安定性を定義する。

次のような入力のない n 次元非線形自律システムを考える。

$$\dot{u}(t) = f(u(t)) \tag{1}$$

ただし、 u は n 次元状態ベクトル、$f(u)$ は u の非線形関数であり、適当な初期値 $u(0)$ に対して式 (1) は解を持つものとする。

(定義１．１)

$$\dot{u}(t) = f(u(t)) \tag{2}$$

に対して

$$f(u_e) = 0 \tag{3}$$

を満たす状態 u_e をシステム (2) の平衡点という。

原点 0 を平衡点としても一般性を失わないので、以後、原点を平衡点として、次の入力のない非線形システム

$$\dot{u}(t) = f(u(t)), \qquad f(0) = 0 \tag{4}$$

の原点 (平衡点) の安定性の定義について述べる。

(定義１．２)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して、適当な $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して、初期値 $u(0)$ が $|u(0)| < \delta(\varepsilon)$ を満たすならば、すべての時間 $t \geq 0$ に対して $|u(t)| < \varepsilon$ が成立するとき、システム (4) の原点は安定という。ただし $|u|$ は u のノルムを表わす。

(定義１．３)　次の２条件を満足するとき、シ

ステム(4)の原点は漸近安定という。
(i) 原点は安定である。
(ii) 適当な $\delta^* > 0$ が存在して、初期値を $|u(0)| < \delta^*$ ととれば式 (4) の解過程 $u(t)$ が $\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0$ を満たす。

原点が安定とは初期値が $-\delta < u(0) < \delta$ の範囲から出発すればそれ以後任意の時刻における解過程 $u(t)$ が原点を中心とした幅 2ε の長方形内にあるということを意味している。しかし解過程が原点に収束することは保証していない。これに対して漸近安定では時間が十分に経過すれば原点に収束することを保証している。従って、安定であっても漸近安定とは限らない。以上が確定的なモデルにおける安定性の概念である。

次に確率的なモデルにおける安定性を考える。今、以下のような非線形確率偏微分方程式で表わされるシステムを考える。

$$\begin{cases} du(t) = A(t,u(t))dt + B(t,u(t))dw(t), t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{5}$$

ただし、$A(t,\cdot), B(t,\cdot)$ は $A(t,0) = B(t,0) = 0$ を満たす非線形作用素の族であり、 $w(t)$ はウィナー過程である。

(**定義1．4**)　式(5)に対して、次式を満たす $r > 0$ が存在するとき

$$E|u(t)|^2 \le E|u_0|^2 e^{-rt}, \forall t \ge 0 \tag{6}$$

式 (5) は指数安定 [2] という。

定義1．4は2乗平均の意味での漸近安定性を保証しているだけであり、見本過程ごとの安定性を保証していない。そこで本論文では非線形放物型システムの見本過程ごとの安定性を次節以降で考察する。

2　非線形確率放物型システム

反応拡散系や生態系において非線形項をもつ次のような放物型システムがしばしば現れる [3]。

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(u(t,x)) \tag{7}$$

式 (7) において、a は拡散係数を表わす定数、$f(\cdot)$ は後述する条件を満足する非線形関数である。考察対象の物理現象によって、状態 $u(t,x)$ は温度、密度、濃度を表わすことになる。
反応拡散系や生態系等の実在の現象においては化学物質に含まれる不純物の影響や環境の予測不可能な変化等により、状態の挙動が不規則に乱される場合が少なくない。そこで、本論文では挙動の不規則性を次のように白色雑音でモデル化して、解挙動の安定性を考察する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} &= f(u(t,x)) \\ &+ bu(t,x)\frac{dw(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$0 < t, \qquad 0 < x < 1 \tag{8}$$

初期条件および境界条件は次のように与えられるものとする。

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{9}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad 0 < t \tag{10}$$

ここで、$w(t)$ は標準ブラウン運動過程であり、$dw(t)/dt$ はその形式的微分で白色雑音を表わす。
式(8)の数学的意味は次の確率積分方程式によって与えられるものとする。

$$\begin{aligned} u(t,x) &- \int_0^t a\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}ds \\ &= u_0(x) + \int_0^t f(u(s,x))ds \\ &+ \int_0^t bu(s,x)dw(s) \end{aligned} \tag{11}$$

3　システムの定式化

$G = (0,1)$ として次の関数空間を考える。

$$V = H_0^1(G) \subset H = L^2(G)$$

ここで

$$H_0^1(G) = \{\varphi | \varphi \in H^1(G), \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$$

であり、　$H^1(G)$ は次数1のソボレフ空間である。H とその共役空間 (V' と表す) を同一視して、次の関係を得る。

$$V \subset H \subset V' = H^{-1}(G) \tag{12}$$

式 (12) の関数空間を用いて、解の定義を次に与える。まず、式 (9)～ (11) に関連した変分形式 [4] を導入する。

$$
\begin{aligned}
(u(t),\varphi) \quad &+ \quad \int_0^t \langle Au(s),\varphi\rangle ds \\
&= \quad (u_0,\varphi) + \int_0^t (f(u(s)),\varphi) ds \\
&\qquad + \int_0^t (bu(s),\varphi) dw(s) \\
&\qquad\quad \forall\varphi \in V \qquad (13)
\end{aligned}
$$

ここで

$$(u(t),\varphi) = \int_G u(t,x)\varphi(x)dx$$

$$\langle Au(t),\varphi\rangle = \int_G a\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}dx$$

を表わす。

【 補題３．１ 】　式 (9)～(11) が解 $u \in L^2(\Omega \times R^1_+, H^2(G) \cap V)$ をもてば、式 (9)～(11) の解 u は変分形式 (13) を満たす。

(証明)　式 (11) の両辺に任意の $\varphi \in V$ を掛けて、部分積分を行って、変分形式 (13) が得られる。

(注意)　変分形式 (13) が解 $u \in L^2(\Omega \times R^1_+, H^2(G) \cap V)$ をもてば、変分形式 (13) の解は式 (9)～ (11) を満足する事に注意する。しかし、解に $u \in L^2(\Omega \times R^1_+, H^2(G) \cap V)$ を要請する事は初期値に強い制限を課す事になるので、解の意味を弱めるため次の定義を行う。

(定義３．１)　次式を満たす関数 u を式 (9) ～ (11) の弱解という。

$$
\begin{aligned}
&(i) \qquad u \in L^2(\Omega \times R^1_+; V) \\
&\qquad\qquad \cap L^2(\Omega; C(R^1_+; H)) \quad (14) \\
&(ii) \qquad (u(t),\varphi) + \int_0^t \langle Au(s),\varphi\rangle ds \\
&\qquad\qquad = (u_0,\varphi) + \int_0^t (f(u(s)),\varphi) ds \\
&\qquad\qquad + \int_0^t (bu(s),\varphi) dw(s) \\
&\qquad\qquad\quad \forall\varphi \in V \qquad (15)
\end{aligned}
$$

【 定理３．１ 】　次の条件の下で、定義３．１の意味での式 (9)～ (11) の弱解が一意に存在する。

$$
\begin{aligned}
&(C-1): \qquad u_0 \in L^2(\Omega; H) \\
&(C-2): \qquad (f(\varphi) - f(\psi), \varphi - \psi) \le 0, \\
&\qquad\qquad\quad \forall\varphi,\psi \in L^P(G), \quad P \ge 2 \\
&(C-3): \qquad |f(\varphi)| \le C|\varphi|_{L^P(G)} \\
&(C-4): \qquad 2a - b^2 > 0
\end{aligned}
$$

証明は付録参照

4　道ごとの指数安定

本節では式 (14), (15) の解挙動の道ごとの指数安定性を考察する。

【 定理４．１ 】　条件 (C-1) ～ (C-4) 及び次の条件

$$(C-5): \qquad 2a - r - b^2 > 0$$

の下で次のような正定数 r が存在する。

$$E\{|u(t)|^2\} \le e^{-rt}E\{|u_0|^2\}, t > 0 \qquad (16)$$

(証明)　$e^{-rt}E|u(t)|^2$ に伊藤の公式 [5] を用いて、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
e^{rt}|u(t)|^2 \quad &+ \quad 2\int_0^t e^{rs}\langle Au(s),u(s)\rangle ds \\
&= \quad |u_0|^2 + \int_0^t re^{rs}|u(s)|^2 ds \\
&\qquad +2\int_0^t e^{rs}(f(u(s)),u(s)) ds \\
&\qquad +2\int_0^t e^{rs}b|u(s)|^2 dw(s) \\
&\qquad +\int_0^t e^{rs}b^2|u(s)|^2 ds \qquad (17)
\end{aligned}
$$

ここで

$$(f(u),u) \le 0 \qquad (18)$$

$$|u(t)|^2 \le \left|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right|^2 \qquad (19)$$

$$\langle Au(t),u(t)\rangle = a\left|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right|^2 \qquad (20)$$

に注意して式 (17) の両辺の数学的期待値を取って次式を得る。

$$\begin{aligned} e^{rt}E\{|u(t)|^2\} \leq & E\{|u_0|^2\} \\ & +(r+b^2-2a) \\ & \times E\{\int_0^t e^{rs}|u(s)|^2 ds\} \end{aligned} \tag{21}$$

式 (21) に (C-5) を用いて、整理して、次式を得る。

$$E\{|u(t)|^2\} \leq e^{-rt}E\{|u_0|^2\}$$

【 補題４．１ 】 定理４．１と同じ条件の下で次式が成立する。

$$E\{\sup_{0\leq t<\infty}|u(t)|^2\} \leq CE\{|u_0|^2\}$$

(証明) $|u(t)|^2$ に伊藤の公式を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 \quad + \quad & 2\int_0^t \langle Au(s), u(s)\rangle ds \\ = \quad & |u_0|^2 + 2\int_0^t (f(u(s)), u(s))ds \\ & +2\int_0^t b|u(s)|^2 dw \\ & +\int_0^t b^2|u(s)|^2 ds \end{aligned} \tag{22}$$

式 (18),(19) を式 (22) に用いて、次式を得る。

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 \quad \leq \quad & |u_0|^2 + 2|b|\left|\int_0^t |u(s)|^2 dw\right| \\ + \quad & b^2\int_0^t |u(s)|^2 ds \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} E\{\sup_{0\leq t\leq T}|u(t)|^2\} \quad \leq \quad & E\{|u_0|^2\} \\ & +2|b|E\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |u(s)|^2 dw\right|\} \\ & +b^2E\{\int_0^T |u(s)|^2 ds\} \end{aligned} \tag{23}$$

となる。

定理４．１より次式が成立する。

$$\begin{aligned} & b^2E\{\int_0^T |u(s)|^2 ds\} \\ & \leq \quad b^2E\{|u_0|^2\}\int_0^T e^{-rs}ds \\ & \leq \quad \frac{b^2}{r}E\{|u_0|^2\}, \forall T > 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Burkholder-Davis-Gundy の不等式 [5] を用いて次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} & 2|b|E\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |u(s)|^2 dw(s)\right|\} \\ \leq \quad & 6|b|E\{[\int_0^T |u(s)|^4 ds]^{\frac{1}{2}}\} \\ \leq \quad & 6|b|E\{[\sup_{0\leq s\leq T}|u(s)|^2\int_0^T |u(s)|^2 ds]^{\frac{1}{2}}\} \\ \leq \quad & \frac{1}{2}E\{\sup_{0\leq s\leq T}|u(s)|^2\} \\ & +18b^2E\{\int_0^T |u(s)|^2 ds\} \\ & (\text{定理４．１}) \text{より} \\ \leq \quad & \frac{1}{2}E\{\sup_{0\leq s\leq T}|u(s)|^2\} \\ & +\frac{18b^2}{r}E\{|u_0|^2\} \end{aligned} \tag{25}$$

式 (24),(25) を式 (23) に用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} E\{\sup_{0\leq t\leq T}|u(t)|^2\} \ \leq \ & \left(2+\frac{19b^2}{r}\right)E\{|u_0|^2\} \\ & =CE\{|u_0|^2\} \end{aligned} \tag{26}$$

ここで $C = 2+\frac{19b^2}{r}$ である。

【 定理４．２ 】 定理４．１と同じ条件の下で、次のような正定数 η, ξ および零集合 $N \subset \Omega$ (すなわち $P(N) = 0$) と正数 $T(\omega), \omega \in N$ が存在する。

$$\begin{aligned} & |u(t,w)|^2 \leq \eta E\{|u_0|^2\}e^{-\xi t} \\ & ,\forall t \geq T(\omega), \omega \notin N \end{aligned} \tag{27}$$

(証明)
伊藤の公式と条件 (C-2),(C-4)、式 (19) より次式を得る。

$$\begin{aligned} & P\{\sup_{M\leq t\leq M+1}|u(t)|^2 \geq \varepsilon_M\} \\ & \leq P\{|u(M)|^2 > \frac{\varepsilon_M}{3}\} \\ & +P\{2|b|\sup_{M\leq t\leq M+1}\left|\int_M^T |u(s)|^2 dw\right| > \frac{\varepsilon_M}{3}\} \\ & +P\{b^2\int_M^{M+1}|u(s)|^2 ds > \frac{\varepsilon_M}{3}\} \end{aligned} \tag{28}$$

ここで、次の評価式が成立することに注意する。

$$P\{|u(M)|^2 > \frac{\varepsilon_M}{3}\}$$

$$\leq \frac{3}{\varepsilon_M} E\{|u(M)|^2\}$$
$$\leq \frac{3}{\varepsilon_M} E\{|u_0|^2\} e^{-rM}$$

$$P\{b^2 \int_M^{M+1} |u(s)|^2 ds > \frac{\varepsilon_M}{3}\}$$
$$\leq \frac{3b^2}{\varepsilon_M} E\{\int_M^{M+1} |u(s)|^2 ds\}$$
$$\leq \frac{3b^2}{\varepsilon_M} E\{|u_0|^2\} \int_M^{M+1} e^{-rs} ds$$
$$\leq \frac{3b^2}{\varepsilon_M} E\{|u_0|^2\} e^{-rs}$$

$$P\{2|b| \sup_{M \leq t \leq M+1} \left| \int_M^t |u(s)|^2 dw \right| > \frac{\varepsilon_M}{3}\}$$
$$\leq \frac{6|b|}{\varepsilon_M} E\{\sup_{M \leq t \leq M+1} \left| \int_M^t |u(s)|^2 dw \right|\}$$
$$\leq \frac{18|b|}{\varepsilon_M} E\{\sqrt{\int_M^{M+1} |u(s)|^4 ds}\}$$
$$\leq \frac{18|b|}{\varepsilon_M} E\{\sqrt{\sup_{M \leq s \leq M+1} |u(s)|^2}$$
$$\times \sqrt{\int_M^{M+1} |u(s)|^2 ds}\}$$
$$\leq \frac{18|b|}{\varepsilon_M} [E\{\sup_{M \leq s \leq M+1} |u(s)|^2\}]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times [E\{\int_M^{M+1} |u(s)|^2 ds\}]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{18|b|}{\varepsilon_M} C^{\frac{1}{2}} [E\{|u_0|^2\}]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times [E\{|u_0|^2\} \int_M^{M+1} e^{-rs} ds]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{18|b|}{\varepsilon_M} C^{\frac{1}{2}} E\{|u_0|^2\} e^{-rM}$$

結局

$$P\{\sup_{M \leq t \leq M+1} |u(t)|^2 \geq \varepsilon_M\}$$
$$\leq \frac{3}{\varepsilon_M} E\{|u_0|^2\}(1 + b^2 + 6|b|C^{\frac{1}{2}}) e^{-rM}$$

$\varepsilon_M = E\{|u_0|^2\} e^{-\frac{rM}{2}}$ とおくと

$$P\{\sup_{M \leq t \leq M+1} |u(t)|^2 \geq \varepsilon_M\} \leq C_1 e^{-\frac{rM}{2}}$$

Borel-Cantelli の補題 [6] より定理が導ける。

5　シミュレーション

本節では $f(u) = -cu^3$ として、解挙動をシミュレーションにより調べる。すなわち、次式を考える。

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + cu^3(t,x)$$
$$-bu(t,x)\frac{\partial w(t)}{\partial t} = 0$$
$$0 < t, 0 < x < 1 \tag{29}$$

ただし、初期条件及び境界条件は次のように与えられるものとした。

$$u(0,x) = u_0(x) \quad (= d \sin \pi x) \tag{30}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \tag{31}$$

条件 (C-5) を満たす場合 (case-1) と満たさない場合　(case-2)　の２通りについて、シミュレーションを行い、その結果を図 1 と 図 2 に示した。

case-1　$a = 0.3, b = 0.2, c = 0.1, d = 1.0, r = 0.5$

case-2　$a = 0.08, b = 0.1, c = 0.1, d = 1.0, r = 2.0$

シミュレーション結果より、条件 (C-5) を満たしているときは、図 1 より式 (27) が成立し道ごとの指数安定であることがわかる。逆に条件 (C-5) を満たしていないときは、図 2 より安定ではあるが道ごとの指数安定性は成立していないことが確かめられる。

6　結言

制御系を設計するにはそのシステムの安定性を考慮する必要がある。システムの内部安定性には、安定, 漸近安定, 指数安定といった概念がある。本論文では確率放物型システムを対象に、まずシステムが漸近安定より強い意味を持つ指数安定となる条件を明らかにした。しかし確率システムに対する指数安定は状態の２乗平均値の指数安定性を保証しているだけであり、各見本過程ごとの２乗が指数安定とは限らない。そこで本論文では実際問題への応用を視野に入れ、各見本過程ごと、すなわち道ごとの指数安定性について考察した。
シミュレーションにより、本論文で提案した道ごとの指数安定性の条件を検討し、その有効性を検証した。本論文で確立した道ごとの指数安定の条件は確率分布システムの制御系設計に有効である。

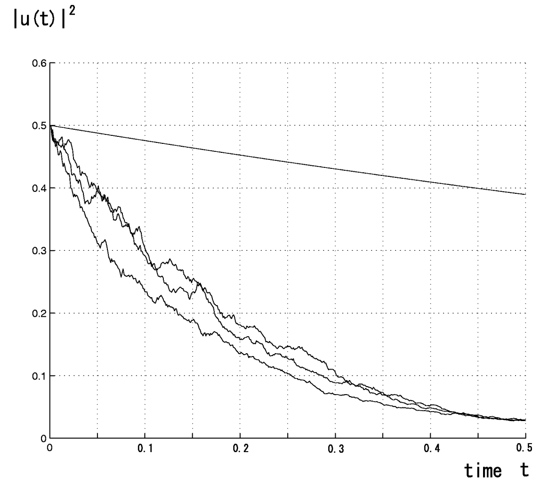

図 1: case1

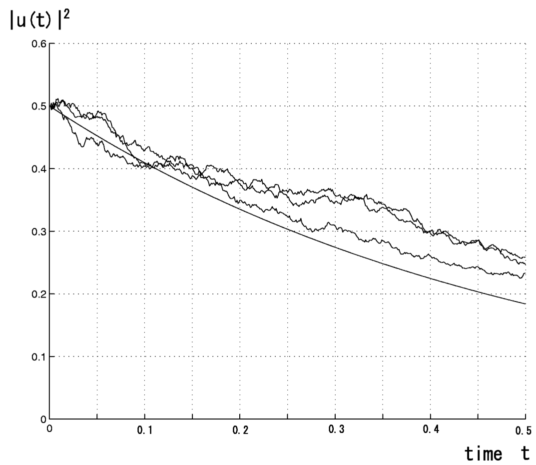

図 2: case2

参考文献

[1] 吉川 , 井村 : 現代制御論, 昭晃堂,1994

[2] T.Caraballo & J.Real : On the pathwise exponential stability of non-linear stochastic partial differential equation, Stochastic Analysis and Applications , vol.12 no.5, pp.517-525,1994

[3] 太田 隆夫 : 界面ダイナミクスの数理, 日本評論社, 1997

[4] J.L.Lion : Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1971

[5] E.Pardoux : Equations aux Dérivées Partielles Stochastique Nonlinéaires Monotones, Thesis, Université Paris Sud, 1975

[6] 佐藤 坦 : 測度から確率へ , 共立出版, 1994

(平成 11 年 7 月 30 日受理)

A 付録

定理３．１の証明 : ガレルキン法 [5] を用いて、式 (15) を有限次元近似して、その収束性を示す必要があるが、ここでは簡単のため解のアプリオリ評価だけを行う。 まず、 $|u(t)|^2$ に伊藤の公式を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 \quad &+ \quad 2\int_0^t \langle Au, u\rangle ds \\ = \ & |u_0|^2 + 2\int_0^t (f(u), u)ds \\ & +2\int_0^t (bu, u)dw + \int_0^t |bu|^2 ds \end{aligned} \tag{32}$$

ここで、条件 (C-2),(C-3) より次式が成立することに注意する。

$$(f(u), u) \le 0 \tag{33}$$

式 (32) の両辺の数学的期待値を取り、式 (33) を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} & E\{|u(t)|^2\} + 2aE\{\int_0^t |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 ds \\ & \le E\{|u_0|^2\} + b^2 E\{\int_0^t |u|^2 ds\} \end{aligned} \tag{34}$$

ここで、 $G = (0, 1)$ より

$$|u|^2 \le |\frac{\partial u}{\partial x}|^2$$

が成立するので、式 (34) より、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & E\{|u(t)|^2\} + (2a - b^2)E\{\int_0^t |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 ds\} \\ & \le E\{|u_0|^2\} \end{aligned} \tag{35}$$

従って、条件 (C-1),(C-4) より

$$u \in L^2(\Omega \times R^1_+; V)$$

が得られる。

$u \in L^2(\Omega; C(R^1_+; V))$ は文献 [5] の結果を用いて示せるので、ここでは略する。