|||| 研究ノート ||||

対称的推移関係の同値条件

橋　本　　　寛

1. はじめに

二項関係の特別な場合である対称的推移関係について考察をおこない，与えられた二項関係が対称的推移関係となるための必要十分条件すなわち同値条件を求めている。対称的推移関係は関係の理論の基礎や応用において重要な役割を演じており[1,2,6]，これまでにも様々の性質が知られている[3,4,5]。一般に，二項関係はブール行列で表現できるので，本稿ではブール行列を用いて対称的推移関係の同値条件を調べている。

2. 定義

0, 1の2値をとる変数x, yに対して

$$x \vee y = \max(x, y),\ x \wedge y = \min(x, y)$$

と定める。また0, 1の要素をもつn次ブール行列$R = [r_{ij}], S = [s_{ij}]$に対して

$$R \vee S = [r_{ij} \vee s_{ij}],\ R \wedge S = [r_{ij} \wedge s_{ij}]$$

$$R' = [r_{ji}]\ (\text{転置})$$

$$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$$

$$R^0 = I = [\delta_{ij}]\ (\delta_{ij}\ \text{はクロネッカーのデルタ})$$

$$R^k = R^{k-1} \times R \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$R \leqq S \Leftrightarrow r_{ij} \leqq s_{ij}\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(R)_{ij} = r_{ij}$$

と定義する。

対称的推移関係を表現するブール行列 R は $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$ となる。なお，対称性の条件である $R \leqq R'$ は $R' = R$ と同値であるが，以下では主として $R \leqq R'$ を用いる。

３．結果

すでに述べたように，対称的推移関係を表現するブール行列 R は $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$ となるので，与えられたブール行列 R が $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$ となるための必要十分条件すなわち同値条件を示す。

以下において，一般に，R, S, V, W, Y, Z などは0, 1要素の n 次ブール行列を示し，$i, j, k, m, f, g, h, p, q$ などは正または非負の整数を示すものとする。

［性質1］ $k, q \geqq 0$, $m, p \geqq 1$ で，S_i $(i = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, m)$ は $2h + 1$ 個 $(h \geqq 0)$ について $S_i = R^{2k+1} \wedge (R')^{2k+1}$ であり，残りの S_i については $S_i = (R' \times R) \wedge (R \times R')$ であるとする。V, W, Y, Z は，$V \leqq R$, $(R' \times R)^p \leqq W$, $Y \leqq R^{2k+1} \vee (R')^{2k+1}$,

$$(R \times R')^q \times R \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m \leqq Z$$

であり，$R' = R$, $R^2 = R$ のとき $V = W = Y = Z = R$ となるものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $Z \leqq V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(3) $Z = V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(4) $Z \leqq V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(5) $Z = V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(6) $Z \leqq V'$, $W \leqq Y$

(7) $Z \leqq V'$, $W = Y$

(8) $Z = V'$, $W \leqq Y$

(9) $Z = V'$, $W = Y$

（証明） (1) ⇒ (9) $R' = R$, $R^2 = R$ となるから，$Z = R = R' = V'$, $W = R =$

Y となる。

(9) ⇒ (5) ⇒ (3) ⇒ (2), (9) ⇒ (7) ⇒ (4) ⇒ (2), (9) ⇒ (8) ⇒ (6) ⇒ (2)　明らかである。

(2) ⇒ (1) $(R)_{ij} = 1$とおく。このとき$(R')_{ji} = 1$, $(R \times R')_{ii} = 1$, $(R' \times R)_{jj} = 1$, $((R \times R')^{q})_{ii} = 1$, $((R' \times R)^{p})_{jj} = 1$となり，$(W)_{jj} = 1$, $(Y)_{jj} = 1$, $(R^{2k+1} \vee (R')^{2k+1})_{jj} = 1$, $(R^{2k+1})_{jj} = 1$, $((R')^{2k+1})_{jj} = 1$となる。$(R^{2k+1})_{jj} = 1$ からある g に対して$(R)_{jg} = 1$となり，$(R')_{gj} = 1$, $(R \times R')_{jj} = 1$ となる。したがって$(R^{2k+1} \wedge (R')^{2k+1})_{jj} = 1$, $((R' \times R) \wedge (R \times R'))_{jj} = 1$ となり，$(S_1)_{jj} = (S_2)_{jj} = \cdots = (S_m)_{jj} = 1$となる。よって $((R \times R')^{q})_{ii} \wedge (R)_{ij} \wedge (S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m)_{jj} = 1$, $(Z)_{ij} = 1$, $(V')_{ij} = 1$, $(R')_{ij} = 1$となり，$R \leqq R'$, $R' = R$ となる。このとき

$$R^{(2k+1)(2h+1)+2(m-2h-1)+2q+1} \leqq Z \leqq V' \leqq R' = R$$

となる。$(2k+1)(2h+1) + 2(m-2h-1) + 2q + 1$は偶数であり，$R' = R$ のとき$R \leqq R^3$となるから $R^2 \leqq R^4 \leqq \cdots \leqq R^{(2k+1)(2h+1)+2(m-2h-1)+2q+1} \leqq R$ となり $R^2 \leqq R$ が得られる。　(証明終)

[性質2] 次の条件は同値である。

(1) $W \wedge I \leqq Y$

(2) $W \wedge I \leqq Y'$

(3) $W \wedge I \leqq Y \wedge Y'$

(4) $W \wedge I \leqq Y \vee Y'$

(5) $W \wedge I \leqq Y \wedge I$

(6) $W \wedge I \leqq Y' \wedge I$

(7) $W \wedge I \leqq Y \wedge Y' \wedge I$

(8) $W \wedge I \leqq (Y \vee Y') \wedge I$

(証明) (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) $(W \wedge I)' \leqq (Y)'$ とすれば $W' \wedge I \leqq Y'$, $W \wedge I \leqq Y'$ となり，$W \wedge I \leqq Y \wedge Y' \leqq Y \vee Y'$ となる。

(4) ⇒ (8) ⇒ (7) ⇒ (6) ⇒ (5) ⇒ (1)

$(W \wedge I) \wedge I \leqq (Y \vee Y') \wedge I$から次のようになる。$W \wedge I \leqq (Y \vee Y')$

$\wedge I = (Y \wedge I) \vee (Y' \wedge I) = Y \wedge I = Y \wedge Y \wedge I = Y \wedge Y' \wedge I \leqq Y' \wedge I = Y \wedge I \leqq Y$ （証明終）

［性質3］ $k, q \geqq 0, m, p \geqq 1$で，$S_i (i = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, m)$ は$R' \times R$, $R \times R'$, R^{2k+1}，または$(R')^{2k+1}$ であり，そのうち，ちょうど$2h + 1$個（$h \geqq 0$)がR^{2k+1}または$(R')^{2k+1}$であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1)) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $(R \times R')^q \times R \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m \leqq R'$, $(R' \times R)^p \wedge I \leqq R^{2k+1}$

(3) $(R \times R')^q \times R \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m = R'$, $(R' \times R)^p \wedge I \leqq R^{2k+1}$

(4) $(R \times R')^q \times R \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m \leqq R'$, $(R' \times R)^p \wedge I = R^{2k+1} \wedge I$

(5) $(R \times R')^q \times R \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m = R'$, $(R' \times R)^p \wedge I = R^{2k+1} \wedge I$

(6) $(R \times R')^q \times R \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m \leqq R'$, $(R' \times R)^p \leqq R^{2k+1}$

(7) $(R \times R')^q \times R \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m \leqq R'$, $(R' \times R)^p = R^{2k+1}$

(8) $(R \times R')^q \times R \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m = R'$, $(R' \times R)^p \leqq R^{2k+1}$

(9) $(R \times R')^q \times R \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m = R'$, $(R' \times R)^p = R^{2k+1}$

（証明）　性質1による。　（証明終）

［性質4］ $k, p \geqq 1$に対して次の条件は同値である。

(1) $(R' \times R)^p \wedge I \leqq R^k$

(2) $(R' \times R)^p \wedge I \leqq (R')^k$

(3) $(R' \times R)^p \wedge I \leqq R^k \wedge (R')^k$

(4) $(R' \times R)^p \wedge I \leqq R^k \vee (R')^k$

(5) $(R' \times R)^p \wedge I \leqq R^k \wedge I$

(6) $(R' \times R)^p \wedge I \leqq (R')^k \wedge I$

(7) $(R' \times R)^p \wedge I \leqq R^k \wedge (R')^k \wedge I$

(8) $(R' \times R)^p \wedge I \leqq (R^k \vee (R')^k) \wedge I$

（証明）　性質2による。　（証明終）

［性質5］ $k, p \geqq 1$に対して次の条件は同値である。

(1) $(R' \times R)^p \leqq R^k$

(2) $(R' \times R)^p \leqq (R')^k$

(3) $(R' \times R)^p \leqq R^k \wedge (R')^k$

(証明)　(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1) $((R' \times R)^p)' \leqq (R^k)'$ から $(R' \times R)^p \leqq (R')^k$ となり，したがって $(R' \times R)^p \leqq R^k \wedge (R')^k \leqq R^k$ となる。　(証明終)

[性質6] $k, m, p \geqq 1$ とする。$S_i(i = 1, 2, \cdot \cdot \cdot, m)$ は次のようであるとする。まず S_1 は R^{2k} または $R \times R'$ であり，$m \geqq 2$ のとき $S_i(i \geqq 2)$ は $R^{2k} \wedge (R')^{2k}$ または $(R' \times R) \wedge (R \times R')$ であるとする。V, W, Y, Z は，$V \leqq R$, $(R' \times R)^p \leqq W$, $Y \leqq R^{2k} \vee (R')^{2k}$,

$$S_1 \times S_2 \times \cdot \cdot \cdot \times S_m \leqq Z$$

であり，$R' = R, R^2 = R$ のとき $V = W = Y = Z = R$ となるものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $Z \leqq V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(3) $Z = V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(4) $Z \leqq V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(5) $Z = V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(6) $Z \leqq V'$, $W \leqq Y$

(7) $Z \leqq V'$, $W = Y$

(8) $Z = V'$, $W \leqq Y$

(9) $Z = V'$, $W = Y$

(証明)　(1) ⇒ (9) $R' = R, R^2 = R$ となるから，$Z = R = R' = V'$, $W = R = Y$ となる。

(9) ⇒ (5) ⇒ (3) ⇒ (2), (9) ⇒ (7) ⇒ (4) ⇒ (2), (9) ⇒ (8) ⇒ (6) ⇒ (2)　明らかである。

(2) ⇒ (1) $(R)_{ij} = 1$ とおく。このとき $(R')_{ji} = 1$, $(R' \times R)_{jj} = 1$, $((R' \times R)^p)_{jj} = 1$ となり，$(W)_{jj} = 1$, $(Y)_{jj} = 1$, $(R^{2k} \vee (R')^{2k})_{jj} = 1$, $(R^{2k})_{jj} = 1$, $((R')^{2k})_{jj} = 1$, $(R^{2k} \wedge (R')^{2k})_{jj} = 1$ となる。$(R^{2k})_{jj} = 1$ からある h に対して $(R)_{jh} = 1$ となるから，$(R')_{hj} = 1$, $(R \times R')_{jj} = 1$, $((R' \times R) \wedge (R \times R'))_{jj} = 1$ となり，$(S_1)_{jj} \wedge (S_2)_{jj} \wedge \cdot \cdot \cdot \wedge (S_m)_{jj} = 1$, $(Z)_{jj} = 1$, $(V')_{jj} = 1$, $(R')_{jj} = 1$,

$(R)_{jj} = 1$となる。

（i）$S_1 = R^{2k}$のとき

$(R)_{ij} \wedge (R^{2k-1} \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m)_{jj} = 1$となるから，$(Z)_{ij} = 1$, $(V')_{ij} = 1$, $(R')_{ij} = 1$となり，$R \leqq R'$, $R' = R$となる。

（ii）$S_1 = R \times R'$のとき

$(R)_{ij} \wedge (R' \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m)_{jj} = 1$となるから，$(Z)_{ij} = 1$, $(V')_{ij} = 1$, $(R')_{ij} = 1$となり，$R \leqq R'$, $R' = R$となる。

よって，ある$g \geqq 1$に対して$R^{2g} \leqq Z \leqq V' \leqq R' = R$となり，$R^{2g} \leqq R$となる。$R' = R$のとき$R \leqq R^3$となるから$R^2 \leqq R^4 \leqq \cdot\cdot\cdot \leqq R^{2g} \leqq R$となり，$R^2 \leqq R$が得られる。　（証明終）

［性質7］$k, m, p \geqq 1$とする。$S_i (i = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, m)$は次のようであるとする。まず$m = 1$のとき$S_1 = R \times R'$であるとする。$m \geqq 2$のときは$S_1$は$R^k$または$R \times R'$であり，$S_i (i \geqq 2)$は$R^k \wedge (R')^k$または$(R' \times R) \wedge (R \times R')$で，$S_1 = R^k$のときは，ちょうど$2h + 1$個$(h \geqq 0)$の$S_i (i \geqq 2)$が$R^k \wedge (R')^k$であり，$S_1 = R \times R'$のときは，ちょうど$2h$個$(h \geqq 0)$の$S_i (i \geqq 2)$が$R^k \wedge (R')^k$であるとする。

またV, W, Y, Zは，$V \leqq R$, $(R' \times R)^p \leqq W$, $Y \leqq R^k \vee (R')^k$,

$$S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m \leqq Z$$

であり，$R' = R$, $R^2 = R$のとき$V = W = Y = Z = R$となるものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $Z \leqq V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(3) $Z = V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(4) $Z \leqq V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(5) $Z = V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(6) $Z \leqq V'$, $W \leqq Y$

(7) $Z \leqq V'$, $W = Y$

(8) $Z = V'$, $W \leqq Y$

(9) $Z = V'$, $W = Y$

（証明） (1) ⇒ (9) $R' = R, R^2 = R$ となるから，$Z = R = R' = V', W = R = Y$ となる。

(9) ⇒ (5) ⇒ (3) ⇒ (2), (9) ⇒ (7) ⇒ (4) ⇒ (2), (9) ⇒ (8) ⇒ (6) ⇒ (2)　明らかである。

(2) ⇒ (1) $(R)_{ij} = 1$とおく。このとき$(R')_{ji} = 1$, $(R' \times R)_{jj} = 1$, $((R' \times R)^p)_{jj} = 1$, $(W)_{jj} = 1$, $(Y)_{jj} = 1$となり，$(R^k \vee (R')^k)_{jj} = 1$, $(R^k)_{jj} = 1$, $((R')^k)_{jj} = 1$, $(R^k \wedge (R')^k)_{jj} = 1$となる。$(R^k)_{jj} = 1$からある$g$に対して$(R)_{jg} = 1$となるから，$(R')_{gj} = 1$, $(R \times R')_{jj} = 1$, $((R' \times R) \wedge (R \times R'))_{jj} = 1$となる。したがって，$(S_1)_{jj} \wedge (S_2)_{jj} \wedge \cdot\cdot\cdot \wedge (S_m)_{jj} = 1$となり，$(Z)_{jj} = 1$, $(V')_{jj} = 1$, $(R')_{jj} = 1$, $(R)_{jj} = 1$ となる。

(i) $S_1 = R^k$のとき

$(R)_{ij} \wedge (R^{k-1} \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m)_{jj} = 1$となるから，$(Z)_{ij} = 1$, $(V')_{ij} = 1$, $(R')_{ij} = 1$ となり，$R \leqq R', R' = R$ となる。

(ii) $S_1 = R \times R'$のとき

$(R)_{ij} \wedge (R' \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m)_{jj} = 1$となるから，$(Z)_{ij} = 1$, $(V')_{ij} = 1$, $(R')_{ij} = 1$となり，$R \leqq R', R' = R$ となる。

よってある$f \geqq 1$に対して　$R^{2f} \leqq Z \leqq V' \leqq R' = R$ となり，$R^{2f} \leqq R$ となる。$R' = R$ のとき $R \leqq R^3$となるから $R^2 \leqq R^4 \leqq \cdot\cdot\cdot \leqq R^{2f} \leqq R$ となり，$R^2 \leqq R$ が得られる。　（証明終）

[性質8] $p \geqq 1$とする。S, V, W, Y, Zは，$R \wedge I \leqq S$, $V \leqq R$, $(R' \times R)^p \leqq W$, $Y \leqq R \vee R'$,

$$R \times (R \wedge R') \times S \leqq Z$$

であり，$R' = R, R^2 = R$ のとき $R \times S = V = W = Y = Z = R$ となるものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $Z \leqq V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(3) $Z = V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(4) $Z \leqq V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(5) $Z = V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(6) $Z \leqq V'$, $W \leqq Y$

(7) $Z \leqq V'$, $W = Y$

(8) $Z = V'$, $W \leqq Y$

(9) $Z = V'$, $W = Y$

(証明)　(1) ⇒ (9) $R' = R, R^2 = R$ となるから，$Z = R = R' = V', W = R = Y$ となる。

(9) ⇒ (5) ⇒ (3) ⇒ (2), (9) ⇒ (7) ⇒ (4) ⇒ (2), (9) ⇒ (8) ⇒ (6) ⇒ (2)　明らかである。

(2) ⇒ (1)　$(R)_{ij} = 1$とおく。このとき$(R')_{ji} = 1$, $(R' \times R)_{jj} = 1$, $((R' \times R)^p)_{jj} = 1$, $(W)_{jj} = 1$, $(Y)_{jj} = 1$となり，$(R \vee R')_{jj} = 1$, $(R)_{jj} = 1$, $(S)_{jj} = 1$となる。したがって，$(R)_{ij} \wedge (R \wedge R')_{jj} \wedge (S)_{jj} = 1$, $(Z)_{ij} = 1$, $(V')_{ij} = 1$, $(R')_{ij} = 1$となり，$R \leqq R', R' = R$, $R^2 \times S \leqq Z \leqq V' \leqq R' = R$ となる。

次に $R^2 \leqq R$ を示す。$(R)_{ik} \wedge (R)_{kj} = 1$ とおく。このとき$(R)_{kj} = 1$, $(R')_{jk} = 1$, $(R' \times R)_{jj} = 1$, $((R' \times R)^p)_{jj} = 1$, $(W)_{jj} = 1$, $(Y)_{jj} = 1$となり，$(R \vee R')_{jj} = 1$, $(R)_{jj} = 1$, $(S)_{jj} = 1$となる。よって$(R^2)_{ij} \wedge (S)_{jj} = 1$, $(R)_{ij} = 1$となり $R^2 \leqq R$ となる。　(証明終)

[性質9] $m, p \geqq 1$とする。V, W, Y, Zは，$V \leqq R$, $(R' \times R)^p \leqq W$, $Y \leqq R \vee R'$,

$$R \times (R \wedge R')^m \leqq Z$$

であり，$R' = R, R^2 = R$のとき $V = W = Y = Z = R$ となるものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $Z \leqq V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(3) $Z = V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(4) $Z \leqq V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(5) $Z = V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(6) $Z \leqq V'$, $W \leqq Y$

(7) $Z \leqq V'$, $W = Y$

(8) $Z = V'$, $W \leqq Y$

(9) $Z = V'$, $W = Y$

（証明） 性質8による。 （証明終）

上の性質9の $m = 0$ に相当する場合として次の性質が成立する。

[性質10] $p \geqq 1$とする。V, W, Y, Z は, $V \leqq R$, $(R' \times R)^p \leqq W$, $Y \leqq R \vee R'$, $R \leqq Z$であり，$R' = R$, $R^2 = R$のとき $V = W = Y = Z = R$ となるものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $Z \leqq V'$, $W \leqq Y$

(3) $Z \leqq V'$, $W = Y$

(4) $Z = V'$, $W \leqq Y$

(5) $Z = V'$, $W = Y$

（証明） (1) ⇒ (5) $R' = R$, $R^2 = R$ となるから，$Z = R = R' = V'$, $W = R = Y$ となる。

(5) ⇒ (3) ⇒ (2), (5) ⇒ (4) ⇒ (2)　明らかである。

(2) ⇒ (1) $R \leqq Z \leqq V' \leqq R'$, $R \leqq R'$, $R' = R$ となり，$(R' \times R)^p \leqq W \leqq Y \leqq R \vee R'$ から $R^{2p} \leqq R$ となる。$R' = R$ のとき $R \leqq R^3$となるから $R^2 \leqq R^4 \leqq \cdot\cdot\cdot \leqq R^{2p} \leqq R$ となり $R^2 \leqq R$ が得られる。 （証明終）

[性質11] $k, h, m \geqq 0, p \geqq 1$で，$2k + h + m \geqq 2$, $k + h \geqq 1$であるとする。V, W, Y, Zは, $V \leqq R$, $(R' \times R)^p \leqq W$, $Y \leqq R \vee R'$,

$$(R \times R')^k \times R^h \times (R \wedge R')^m \leqq Z$$

であり，$R' = R$, $R^2 = R$ のとき $V = W = Y = Z = R$ となるものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $Z \leqq V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(3) $Z = V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(4) $Z \leqq V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(5) $Z = V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(6) $Z \leqq V'$, $W \leqq Y$

(7) $Z \leqq V'$, $W = Y$

(8) $Z = V'$, $W \leqq Y$

(9) $Z = V'$, $W = Y$

(証明)　性質9による。　(証明終)

［性質12］　$k, m \geqq 0, p \geqq 1$で，$k + m \geqq 1$であるとする。V, W, Y, Zは，$V \leqq R$, $(R' \times R)^p \leqq W$, $Y \leqq R \vee R'$,

$$(R \times R')^k \times R \times (R \wedge R')^m \leqq Z$$

であり，$R' = R, R^2 = R$のとき $V = W = Y = Z = R$となるものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $Z \leqq V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(3) $Z = V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(4) $Z \leqq V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(5) $Z = V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(6) $Z \leqq V'$, $W \leqq Y$

(7) $Z \leqq V'$, $W = Y$

(8) $Z = V'$, $W \leqq Y$

(9) $Z = V'$, $W = Y$

(証明)　性質11において$h = 1$とおき，$2k + 1 + m \geqq 2$すなわち$2k + m \geqq 1$が非負整数k, mに対して$k + m \geqq 1$と同値であることに注意すればよい。

(証明終)

［性質13］$k, m \geqq 0, p \geqq 1$で，$2k + m \geqq 2$であるとする。S_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$は$R \wedge R' \leqq S_i$で，とくにS_1は$R \leqq S_1$であるとする。V, W, Y, Zは，$V \leqq R$, $(R' \times R)^p \leqq W$, $Y \leqq R \vee R'$,

$$(R \times R')^k \times S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m \leqq Z$$

であり，$R' = R, R^2 = R$ のとき $S_1 = S_2 = \cdot\cdot\cdot = S_m = V = W = Y = Z = R$ となるものとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $Z \leqq V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(3) $Z = V'$, $W \wedge I \leqq Y$

(4) $Z \leqq V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(5) $Z = V'$, $W \wedge I = Y \wedge I$

(6) $Z \leqq V'$, $W \leqq Y$

(7) $Z \leqq V'$, $W = Y$

(8) $Z = V'$, $W \leqq Y$

(9) $Z = V'$, $W = Y$

(証明)　性質11による。　(証明終)

なお，上の性質13および次の性質14，15において，$m = 0$ の場合は S_i に関する部分を除くものとする。

また，これらの性質はそれぞれ $k = 0$ の場合すなわち $(R \times R')^k$ を除いた場合の特別な場合と見ることもできる。

[性質14]　$k, m \geqq 0, p \geqq 1$で，$2k + m \geqq 2$であるとする。S_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ は，$R, R', R \wedge R'$, または $R \vee R'$ で，とくに S_1 は R または $R \vee R'$ であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $(R \times R')^k \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m \leqq R'$, $(R' \times R)^p \wedge I \leqq R$

(3) $(R \times R')^k \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m = R'$, $(R' \times R)^p \wedge I \leqq R$

(4) $(R \times R')^k \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m \leqq R'$, $(R' \times R)^p \wedge I = R \wedge I$

(5) $(R \times R')^k \times S_1 \times S_2 \times \cdot\cdot\cdot \times S_m = R'$, $(R' \times R)^p \wedge I = R \wedge I$

(証明)　性質13による。　(証明終)

[性質15]　$k, m \geqq 0, p \geqq 1$で，$k + m \geqq 1$であるとする。$S_i (i = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, m)$ は R, R'，$R \wedge R'$, または $R \vee R'$ で，とくに S_1 は R または $R \vee R'$ であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $(R \times R')^k \times S_1 \times S_2 \times \cdot \cdot \cdot \times S_m \leqq R'$, $(R' \times R)^p \leqq R$

(3) $(R \times R')^k \times S_1 \times S_2 \times \cdot \cdot \cdot \times S_m = R'$, $(R' \times R)^p \leqq R$

(証明)　(1) ⇒ (3) $R' = R$, $R^2 = R$ となるから

$(R \times R')^k \times S_1 \times S_2 \times \cdot \cdot \cdot \times S_m = R^{2k+m} = R = R'$,

$(R' \times R)^p = R^{2p} = R$

となる。

(3) ⇒ (2)　明らかである。

(2) ⇒ (1) $(R)_{ij} = 1$とおく。このとき$(R')_{ji} = 1$, $(R \times R')_{ii} = 1$, $(R' \times R)_{jj} = 1$, $((R \times R')^k)_{ii} = 1$, $((R' \times R)^p)_{jj} = 1$となり，$(R)_{jj} = 1$となる。

(ⅰ) $m \geqq 2$ のとき

$((R \times R')^k)_{ii} \wedge (S_1)_{ij} \wedge (S_2 \times \cdot \cdot \cdot \times S_m)_{jj} = 1$, $(R')_{ij} = 1$となり，$R \leqq R'$, $R' = R$ となる。

(ⅱ) $m = 1$のとき

$((R \times R')^k)_{ii} \wedge (S_1)_{ij} = 1$となるから，$(R')_{ij} = 1$となり，$R \leqq R'$, $R' = R$ となる。

(ⅲ) $m = 0$のとき

$k \geqq 1$となるから$(R \times R')^k \leqq R'$ を変形して $R \times R' \times (R \times R')^{k-1} \leqq R'$ とすれば，$(R)_{ij} \wedge (R' \times (R \times R')^{k-1})_{jj} = 1$, $(R')_{ij} = 1$となり，$R \leqq R'$, $R' = R$ となる。

こうして$(R' \times R)^p \leqq R$ から $R^{2p} \leqq R$ となり，$R' = R$ のとき $R \leqq R^3$であるから $R^2 \leqq R^4 \leqq \cdot \cdot \cdot \leqq R^{2p} \leqq R$, $R^2 \leqq R$ となる。

(証明終)

上の性質15に関連して次の関係が成立する。

$$R \leqq R',\ R^2 \leqq R \Leftrightarrow (R' \times R)^p = R \Leftrightarrow (R' \times R)^p = R' \ (p \geqq 1)$$

$$\Leftrightarrow (R \times R')^k = R \Leftrightarrow (R \times R')^k = R' \ (k \geqq 1)$$

4. まとめ

対称的推移関係に関するブール行列で表現された若干の同値条件を示した。これらの同値条件の一部は従来知られている条件の一般化となっている。また，ここで得られた結果の特別な場合として様々な同値条件を得ることができる。今後検討すべきこととして，ここで得られた対称的推移関係の同値条件をさらに一般化することや別の種類の同値条件を求めることがある。これらは十分可能と思われ，今後の課題としたい。

文 献

[1] Arrow, K.J.: "Social Choice and Individual Values,"2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

[2] Chipman, J.S.: "The foundations of utility,"Econometrica, Vol.28, 2, pp.193-224 (1960).

[3] 橋本　寛："同値関係を表現するブール行列のいくつかの性質，" 山口経済学雑誌，第57巻，第6号，pp.1015-1039（平成21年3月）.

[4] 橋本　寛："推移閉包演算と対称的推移関係，" 山口経済学雑誌，第63巻，第1・2号，pp.69-76（平成26年7月）.

[5] Maddux, R.D.: "Relation Algebras," Elsevier, Amsterdam (2006).

[6] Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).