||||| 研究ノート |||||

"An Introduction to the Theory of Mechanism Design" の命題 2.5 について

柏木 芳美

Abstract

An elegant proof using normed spaces was given to Proposition 2.5 in "An Introduction to the Theory of Mechanism Design" concerning the existence of the direct mechanism which maximizes the seller's expected revenue among all incentive-compatible and individually rational direct mechanisms. Since this proposition is the first main result and normed spaces are not so easy mathematical tool compared with those used later, we felt the need for an easier proof. The outline of the proof of our result in this note is almost same as that of Proposition 3.4 in the book. We also give a condition under which we have the uniqueness of the real number that characterizes the objective direct mechanism.

1 はじめに

オークションの理論では直接メカニズムというものが重要な役割を果たす．誘因両立的で個人合理的な直接メカニズムが売り手の期待収入を最大にするための十分条件の「エレガント」な証明が，[1] の命題 2.5 において与えられている．その証明ではノルム空間などの数学が使われているが，直後の関連する命題 3.4 などの証明と比較すると，あまりに違いすぎるしあまりに重いので，別証が欲しくなる．また，この本には，必ずしもエレガントとは言えないが他のものと同様で分かりやすい証明が示唆されている．この研究ノートではその証明を与える．その際，元の命題 2.5 と仮定を変える．その結果，目的の直接メカニズムを特徴付ける実数の一意性を与える条件を得ることが出来た (命題 6).

2　準備

諸定義などは [1] に従う．

θ を変数とし，有界閉区間 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ をサポートとして持つ累積分布関数 $F(\theta)$ とその確率密度関数 $f(\theta)$ が与えられているとする．ただし，

$$0 \leqq \underline{\theta} < \bar{\theta} \tag{1}$$

とする．ここで，すべての $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ に対して

$$f(\theta) > 0 \tag{2}$$

と仮定する．

ここでは最も単純な形の直接メカニズムを扱う．

定義 1. $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ から $[0, 1]$ への関数 q と，$[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ から実数全体 $\mathbb{R}$ への関数 t の組 (q, t) を<u>直接メカニズム</u>という．

定義 2. (q, t) を直接メカニズムとする．

(1) $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ とする．$u(\theta) = \theta q(\theta) - t(\theta)$ を買い手の期待効用という．

(2) すべての θ，$\theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ に対して

$$u(\theta) \geqq \theta q(\theta') - t(\theta')$$

が成り立つとき，直接メカニズム (q, t) は<u>誘因両立的</u>と呼ばれる．

(3) すべての $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ に対して

$$u(\theta) \geqq 0 \quad すなわち \quad \theta q(\theta) \geqq t(\theta)$$

が成り立つとき，直接メカニズム (q,t) は個人合理的と呼ばれる．

(4) $\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\theta)f(\theta)d\theta$ を売り手の期待収入という．

我々の目的は売り手の期待収入を最大にすることである．

誘因両立的な直接メカニズムは次の命題 ([1, Proposition 2.2]) により特徴付けられる．尚，このノートで増加関数というときは，広義なもの，すなわち「$\theta < \theta'$ ならば $q(\theta) \leqq q(\theta')$」と等号が入るものを意味する．

命題 3. 直接メカニズム (q,t) が誘因両立的であるための必要十分条件は，次の 2 つの条件がともに成り立つことである．

(1) q は単調増加．

(2) すべての $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ に対して

$$t(\theta) = t(\underline{\theta}) + \{\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})\} - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$$

が成り立つ．

また，誘因両立性の下で，個人合理性は次の命題 ([1, Proposition 2.3]) により特徴付けられる．

命題 4. 誘因両立的な直接メカニズム (q,t) が個人合理的であるための必要十分条件は，$t(\underline{\theta}) \leqq \underline{\theta} q(\underline{\theta})$．

次の命題 ([1, Proposition2.5]) が [1] における最初の主要な結果である．その証

明にノルム空間などが使われている．その後の同様な主張の証明とはかなりの違いがあり，別証の必要性を感じさせられた．それがこの研究ノートを書く動機である．尚，そのような別証はこの本に示唆されている．

命題 5. $\tilde{p}$ が $p\{1-F(p)\}$ を最大にするとする．このとき，誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムの中で，次の直接メカニズムは売り手の期待収入を最大にする．

$$q(\theta)=\begin{cases}1 & (\theta>\tilde{p}\ \text{のとき})\\ 0 & (\theta<\tilde{p}\ \text{のとき}),\end{cases}$$

$$t(\theta)=\begin{cases}\tilde{p} & (\theta>\tilde{p}\ \text{のとき})\\ 0 & (\theta<\tilde{p}\ \text{のとき}).\end{cases}$$

$\theta\in[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ とする．売り手の期待収入は，最大化を考える場合には，$[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ から $\mathbb{R}$ への関数

$$\psi(\theta)=\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} \tag{3}$$

を用いて表されるとしてよい (補題 8)．この ψ が重要な働きをする．尚，式 (2) より分母の $f(\theta)$ は 0 ではない．

我々の目的は次の命題を示すことである．この命題は命題 5([1, Proposition2.5]) の仮定を変えたものである．

命題 6. ψ を上に定めた関数とする．ψ が単調増加ならば次の条件を満たす $p^*\in[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ が存在する．更に ψ が狭義単調増加ならばこのような p^* は唯一つである．

(条件) 誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムのうちで，次の直接メカ

ニズム (q,t) は売り手の期待収入を最大にする．

$$q(\theta)=\begin{cases}1 & (\theta>p^* \text{ のとき})\\ 0 \text{ 以上 } 1 \text{ 以下の任意の値} & (\theta=p^* \text{ のとき}),\\ 0 & (\theta<p^* \text{ のとき})\end{cases}$$

$$t(\theta)=\begin{cases}p^* & (\theta>p^* \text{ のとき})\\ p^*\,q(p^*) & (\theta=p^* \text{ のとき}).\\ 0 & (\theta<p^* \text{ のとき})\end{cases}$$

参考．命題 5 では $\theta=\tilde{p}$ のときの q と t の値は明示されていない．命題 6 ではその点も説明した． □

3 証明の主要なところ

まず t の形を限定する．

補題 7. q を $[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ から $[0,1]$ への単調増加な関数とする．$\theta\in[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ に対して

$$t^*(\theta)=\theta q(\theta)-\int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$$

により $[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ から $\mathbb{R}$ への関数 t^* を定める．このとき，(q,t^*) は誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムになる．更に同じ q に対して (q,t) が誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムとすると，売り手の期待収入に関して

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\theta)f(\theta)d\theta \leqq \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t^*(\theta)f(\theta)d\theta$$

が成り立つ．

証明. $0\leqq q(\theta)\leqq 1$ なので (q,t^*) は直接メカニズムである．命題 3 の条件 (1) と

(2) が成り立てば (q, t^*) は誘因両立的である．q は単調増加なので条件 (1) は成り立っている．次に条件 (2) を確認する．$\theta = \underline{\theta}$ なら

$$t^*(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta}) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx = \underline{\theta} q(\underline{\theta}) \tag{4}$$

なので

$$t^*(\underline{\theta}) + \{\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})\} - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx = \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx = t^*(\theta) \tag{5}$$

となる．すなわち条件 (2) が成り立っている．従って，(q, t^*) は誘因両立的である．

また，命題 4 と式 (4) より (q, t^*) は個人合理的である．

次に売り手の期待収入を考える．命題 3 と式 (4) より

$$\begin{aligned}
&t^*(\theta) - t(\theta) \\
&= \left[t^*(\underline{\theta}) + \{\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})\} - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx\right] \\
&\qquad - \left[t(\underline{\theta}) + \{\theta q(\theta) - \underline{\theta} q(\underline{\theta})\} - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx\right] \\
&= t^*(\underline{\theta}) - t(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta}) - t(\underline{\theta})
\end{aligned}$$

となるが，(q, t) は誘因両立的かつ個人合理的なので命題 4 よりこの値は 0 以上である．従って，式 (2) より $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ において $f(\theta) > 0$ なので，$0 = 0 \times f(\theta) \leqq \{t^*(\theta) - t(\theta)\} f(\theta)$ となり，

$$0 \leqq \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \{t^*(\theta) - t(\theta)\} f(\theta) d\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t^*(\theta) f(\theta) d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\theta) f(\theta) d\theta$$

すなわち

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\theta) f(\theta) d\theta \leqq \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t^*(\theta) f(\theta) d\theta$$

が得られる．　□

この補題より，誘因両立性と個人合理性の下で売り手の期待収入の最大値を考えるときは，q が特定されれば，t は

$$t(\theta) = \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$$

としてよいということになる．以下，<u>t はこの形とする</u>．

次に，売り手の期待収入を ψ を用いて表す．

補題 8. q を $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ から $[0,1]$ への関数とする．

$$t(\theta) = \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$$

としたとき，売り手の期待収入は

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\theta)f(\theta)d\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\theta)\psi(\theta)f(\theta)d\theta$$

となる．

証明. まず，売り手の期待収入を

$$P = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\theta)f(\theta)d\theta$$

とおくと

$$\begin{aligned} P &= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left\{ \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx \right\} f(\theta)d\theta \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \theta q(\theta)f(\theta)d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left\{ \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx \right\} f(\theta)d\theta \end{aligned}$$

となる．部分積分と $F(\bar{\theta})=1$ を使うと，第２項は

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}\left\{\int_{\underline{\theta}}^{\theta}q(x)dx\right\}f(\theta)d\theta=\left[\left\{\int_{\underline{\theta}}^{\theta}q(x)dx\right\}F(\theta)\right]_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}-\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}q(\theta)F(\theta)d\theta$$

$$=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}q(x)dx-\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}q(\theta)F(\theta)d\theta$$

$$=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}q(\theta)d\theta-\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}q(\theta)F(\theta)d\theta$$

$$=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}q(\theta)\{1-F(\theta)\}d\theta$$

となる．従って，式 (3) より

$$P=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}\theta q(\theta)f(\theta)d\theta-\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}q(\theta)\{1-F(\theta)\}d\theta$$

$$=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}q(\theta)\left\{\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right\}f(\theta)d\theta$$

$$=\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}q(\theta)\psi(\theta)f(\theta)d\theta$$

が得られた．　$\square$

ここで，式 (1) より $0\leqq\underline{\theta}<\bar{\theta}$ なので $\bar{\theta}>0$ である．$F(\bar{\theta})=1$ なので

$$\psi(\bar{\theta})=\bar{\theta}-\frac{1-F(\bar{\theta})}{f(\bar{\theta})}=\bar{\theta}>0 \tag{6}$$

に注意しておく．

ψ に対して $[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ から $[0,1]$ への関数 q^* を

$$q^*(\theta)=\begin{cases}1 & (\psi(\theta)\geqq 0 \text{ のとき})\\ 0 & (\psi(\theta)<0 \text{ のとき})\end{cases} \tag{7}$$

と定める．

このとき次の結果が得られる．すなわち q^* が売り手の期待収入の最大値を与える q の候補となる．

補題 9. q を $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ から $[0,1]$ への任意の関数とすると，式 (7) で定めた関数 q^* は

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\theta)\psi(\theta)f(\theta)d\theta \leqq \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q^*(\theta)\psi(\theta)f(\theta)d\theta$$

を満たす．

証明. $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ において，$f(\theta) > 0$ と $0 \leqq q(\theta) \leqq 1$ に注意する．$\psi(\theta) < 0$ なら，$q(\theta)\psi(\theta)f(\theta) \leqq 0 = q^*(\theta)\psi(\theta)f(\theta)$ となる．$\psi(\theta) \geqq 0$ なら，$q(\theta)\psi(\theta)f(\theta) \leqq 1 \times \psi(\theta)f(\theta) = q^*(\theta)\psi(\theta)f(\theta)$ となる．すなわち，すべての $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ に対して

$$q(\theta)\psi(\theta)f(\theta) \leqq q^*(\theta)\psi(\theta)f(\theta)$$

となる．積分すると結論が得られる． □

今考えている直接メカニズムは誘因両立的なので，命題 3 より，q は単調増加でなければならない．それを保証する条件は次の補題で与えられる．尚，ψ が単調増加のとき累積分布関数 F は <u>regular</u> と呼ばれる．

補題 10. 累積分布関数 F が regular なら式 (7) で定めた関数 q^* は単調増加である．

証明. $\underline{\theta} \leqq \theta < \theta' \leqq \bar{\theta}$ として $q^*(\theta) \leqq q^*(\theta')$ を示せばよい．ψ は単調増加なので $\psi(\theta) \leqq \psi(\theta')$ である．$0 \leqq \psi(\theta)$ なら $0 \leqq \psi(\theta) \leqq \psi(\theta')$ なので $q^*(\theta) = q^*(\theta') = 1$

となる．$\psi(\theta) < 0$ とする．$\psi(\theta') < 0$ なら，$q^*(\theta) = q^*(\theta') = 0$ となる．$0 \leqq \psi(\theta')$ なら，$q^*(\theta) = 0 < 1 = q^*(\theta')$ となる． □

以上まとめると次の命題が得られる．

命題 11. 累積分布関数 F が regular とする．$[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ から $[0,1]$ への関数 q^* を

$$q^*(\theta) = \begin{cases} 1 & (\psi(\theta) \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\psi(\theta) < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定め，$[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ から $\mathbb{R}$ への関数 t^* を

$$t^*(\theta) = \theta q(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$$

と定める．ただし，$\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$．このとき，$(q^*, t^*)$ は誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムとなり，あらゆる誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムの中で売り手の期待収入を最大にする．

証明. 補題 10 より q^* は単調増加である．従って，補題 7 より (q^*, t^*) は誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムになる．補題 9 より (q^*, t^*) はあらゆる誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムの中で売り手の期待収入を最大にする． □

4　命題 11 の言い換え

命題 11 を少し言い換える．

$$S = \{\theta : 0 \leqq \psi(\theta), \quad \underline{\theta} \leqq \theta \leqq \bar{\theta}\}$$

とおく．式 (6) より $\bar{\theta} \in S$ なので

$$S \neq \emptyset$$

である．また，すべての $\theta \in S$ に対して $\underline{\theta} \leqq \theta$ なので S は下に有界な空でない集合である．下に有界な空でない集合が下限 (最大の下界) を持つことは微積分学の基本事項である．S の下限を p^* とする．すなわち

$$p^* = \inf S = \inf \{\theta : 0 \leqq \psi(\theta), \quad \underline{\theta} \leqq \theta \leqq \bar{\theta}\}$$

である．

$$\underline{\theta} \leqq p^* \leqq \bar{\theta}$$

となっている．

ここで，次が成り立つ．

補題 12. F が regular とし，$\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ とする．$p^* < \theta$ ならば $0 \leqq \psi(\theta)$ で，$\theta < p^*$ ならば $\psi(\theta) < 0$ である．

証明. $p^* < \theta$ とする．p^* は最大の下界なので，p^* より大きい θ は S の下界ではない．すなわち，$p^* < \theta' < \theta$ となる $\theta' \in S$ が存在する．ψ は単調増加なので，$\psi(\theta') \leqq \psi(\theta)$ となり，$0 \leqq \psi(\theta')$ より $0 \leqq \psi(\theta)$ が言える．次に，$\theta < p^*$ とする．もし $0 \leqq \psi(\theta)$ なら $\theta \in S$ となり p^* が S の下界であることに反する．よって，$\psi(\theta) < 0$ となる． □

注意. ψ の連続性を仮定すると $\psi(p^*) = 0$ となるが，ψ の連続性は仮定していないので $\psi(p^*)$ は正のことも 0 のことも負のこともある． □

この p^* を使うと，命題 11 の q^* と t^* は次のように書ける．

補題 13. 累積分布関数 F が regular とする．このとき，命題 11 の q^* と t^*

は

$$q^*(\theta) = \begin{cases} 1 & (\theta > p^* \text{ のとき}) \\ q^*(p^*) & (\theta = p^* \text{ のとき}) \\ 0 & (\theta < p^* \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$t^*(\theta) = \begin{cases} p^* & (\theta > p^* \text{ のとき}) \\ p^* q^*(p^*) & (\theta = p^* \text{ のとき}) \\ 0 & (\theta < p^* \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．ただし，$q^*(p^*)$ は 0 または 1.

証明. 補題 12 より，q^* に関する主張が成り立つ．従って，$\theta < p^*$ なら

$$t^*(\theta) = \theta q^*(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q^*(x)dx = 0$$

で，$\theta = p^*$ なら

$$t^*(p^*) = p^* q^*(p^*) - \int_{\underline{\theta}}^{p^*} q^*(x)dx = p^* q^*(p^*) - \int_{\underline{\theta}}^{p^*} 0\, dx = p^* q^*(p^*)$$

で，$\theta > p^*$ なら

$$t^*(\theta) = \theta q^*(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q^*(x)dx = \theta - \left\{ \int_{\underline{\theta}}^{p^*} q^*(x)dx + \int_{p^*}^{\theta} q^*(x)dx \right\}$$

$$= \theta - \int_{p^*}^{\theta} 1\, dx = \theta - (\theta - p^*) = p^*. \qquad \square$$

以上により，命題 11 は次のように言い換えられる．

命題 14. 累積分布関数 F が regular とし

$$p^* = \inf\{\theta : 0 \leqq \psi(\theta), \quad \underline{\theta} \leqq \theta \leqq \bar{\theta}\}$$

とする．$[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ から $[0,1]$ への関数 q^* と $[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ から $\mathbb{R}$ への関数 t^* を

$$q^*(\theta)=\begin{cases}1 & (\theta>p^* \text{ のとき})\\ q^*(p^*) & (\theta=p^* \text{ のとき})\\ 0 & (\theta<p^* \text{ のとき}),\end{cases}$$

$$t^*(\theta)=\begin{cases}p^* & (\theta>p^* \text{ のとき})\\ p^*q^*(p^*) & (\theta=p^* \text{ のとき})\\ 0 & (\theta<p^* \text{ のとき})\end{cases}$$

と定める．ただし，$\theta\in[\underline{\theta},\bar{\theta}]$ で，$\psi(p^*)\geqq 0$ なら $q^*(p^*)=1$，$\psi(p^*)<0$ なら $q^*(p^*)=0$．このとき，(q^*,t^*) は誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムとなり，あらゆる誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムの中で売り手の期待収入を最大にする．

参考． このときの売り手の期待収入は

$$\begin{aligned}\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t^*(\theta)f(\theta)d\theta &= \int_{\underline{\theta}}^{p^*} t^*(\theta)f(\theta)d\theta + \int_{p^*}^{\bar{\theta}} t^*(\theta)f(\theta)d\theta\\ &= p^*\int_{p^*}^{\bar{\theta}} f(\theta)d\theta = p^*[F(\theta)]_{p^*}^{\bar{\theta}} = p^*\{F(\bar{\theta})-F(p^*)\}\\ &= p^*\{1-F(p^*)\}\end{aligned}$$

となる． □

5 命題 6 の証明

ここでは命題 6 の証明を与える．

1 点のみで値の異なる 2 つの関数を積分した値は同じなので，次の補題を使うと命題 14 を少し一般化した命題 6 の p^* の存在に関する部分が得られる．

補題 15. $p \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ をとる．$[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ から $[0,1]$ への関数 q と $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ から $\mathbb{R}$ への関数 t を

$$q(\theta) = \begin{cases} 1 & (\theta > p \text{ のとき}) \\ 0 \text{ 以上 } 1 \text{ 以下の任意の値} & (\theta = p \text{ のとき}), \\ 0 & (\theta < p \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$t(\theta) = \begin{cases} p & (\theta > p \text{ のとき}) \\ p\,q(p) & (\theta = p \text{ のとき}) \\ 0 & (\theta < p \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める．このとき直接メカニズム (q, t) は誘因両立的でありかつ個人合理的である．

証明．まず，(q, t) が誘因両立的であること．買い手の期待効用 $u(\theta) = \theta q(\theta) - t(\theta)$ を計算する．$\theta < p$ ならば $u(\theta) = \theta \times 0 - 0 = 0$，$\theta = p$ ならば $u(p) = pq(p) - pq(p) = 0$，$\theta > p$ ならば $u(\theta) = \theta - p$ となる．従って，

$$u(\theta) = \begin{cases} \theta - p > 0 & (\theta > p \text{ のとき}) \\ 0 & (\theta \leqq p \text{ のとき}) \end{cases}$$

となること，特に，すべての θ に対して

$$u(\theta) \geqq 0$$

となることを注意しておく．誘因両立性の定義は，θ，$\theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ ならば

$$\theta q(\theta') - t(\theta') \leqq u(\theta) \tag{8}$$

となることである．3 通りの場合に分けて式 (8) を確認する．

(1) $\theta' < p$ のとき

$\theta q(\theta') - t(\theta') = \theta \times 0 - 0 = 0 \leqq u(\theta)$ なので式 (8) が成り立つ．

(2) $\theta' = p$ のとき

$\theta q(\theta') - t(\theta') = \theta q(p) - pq(p) = (\theta - p)q(p)$. $\theta \leqq p$ なら，$\theta - p \leqq 0$ と $q(p) \geqq 0$ より $(\theta - p)q(p) \leqq 0 \leqq u(\theta)$ なので式 (8) が成り立つ．$\theta > p$ なら，$q(p) \leqq 1$ より $(\theta - p)q(p) \leqq \theta - p = u(\theta)$ なので式 (8) が成り立つ．

(3) $\theta' > p$ のとき

$\theta q(\theta') - t(\theta') = \theta \times 1 - p = \theta - p$. $\theta \leqq p$ なら $\theta - p \leqq 0 \leqq u(\theta)$ なので式 (8) が成り立つ．$\theta > p$ なら $\theta - p = u(\theta)$ なので式 (8) が成り立つ．

誘因両立的で $u(\underline{\theta}) \geqq 0$ すなわち $t(\underline{\theta}) \leqq \underline{\theta} q(\underline{\theta})$ なので，命題 4 より個人合理的である． □

次に命題 6 における p^* の一意性の証明を与える．

今まで特に述べなかったが，積分はすべてルベーグ積分である．ここで，ルベーグ積分に関する次の結果を使う．証明は，[2, P.93 の 5)] 参照．

補題 16. 可測集合 A 上の非負な関数 $g(x)$ が $\int_A g(x)dx = 0$ を満たせば，集合 $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$ の測度は 0 である．

命題 6 の一意性の証明. ψ は狭義単調増加とし，p^* は今まで通り

$$p^* = \inf\{\theta : 0 \leqq \psi(\theta), \quad \underline{\theta} \leqq \theta \leqq \bar{\theta}\}$$

とし，(q, t) を命題 6 の p^* によって定まる直接メカニズムとする．$p^* < \theta$ とすると，p^* は下限なので，$p^* < \theta' < \theta$ かつ $0 \leqq \psi(\theta')$ となる θ' が存在する．ψ は狭義単調増加なので，$0 \leqq \psi(\theta') < \psi(\theta)$ となる．すなわち

$$p^* < \theta \text{ ならば } 0 < \psi(\theta) \tag{9}$$

が成り立つことを注意しておく．

今，$p_1 \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ が命題 6 の条件を満たしているとする．すなわち

$$q_1(\theta) = \begin{cases} 1 & (\theta > p_1 \text{ のとき}) \\ 0 \text{ 以上 } 1 \text{ 以下の任意の値} & (\theta = p_1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\theta < p_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$t_1(\theta) = \begin{cases} p_1 & (\theta > p_1 \text{ のとき}) \\ p_1\, q(p_1) & (\theta = p_1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\theta < p_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

としたとき，(補題 15 より) 誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズム (q_1, t_1) が，誘因両立的かつ個人合理的な直接メカニズムのうちで売り手の期待収入を最大にする，とする．$p_1 = p^*$ を示せばよい．ここで，$p_1 = \underline{\theta}$ ならば t_1 の定義より $t_1(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta})$ となり，$\underline{\theta} < p_1$ ならば $t_1(\underline{\theta}) = q_1(\underline{\theta}) = 0$ より $t_1(\underline{\theta}) = \underline{\theta} q(\underline{\theta})$ となる．よって，(q_1, t_1) は誘因両立的なので，命題 3 より

$$\begin{aligned} t_1(\theta) &= t_1(\underline{\theta}) + \{\theta q_1(\theta) - \underline{\theta} q_1(\underline{\theta})\} - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q_1(x)dx \\ &= \theta q_1(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q_1(x)dx \end{aligned}$$

となる．従って，補題 8 と q_1 の形より，売り手の期待収入は

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t_1(\theta) f(\theta) d\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q_1(\theta)\psi(\theta) f(\theta) d\theta = \int_{p_1}^{\bar{\theta}} \psi(\theta) f(\theta) d\theta$$

となる．今示したことより，q に関しても同じ結果が成り立ち，いずれも同じ最大値なので等しい．

ここで，もし $p_1 < p^*$ ならば

$$\begin{aligned} 0 = -\left\{ \int_{p_1}^{\bar{\theta}} \psi(\theta) f(\theta) d\theta - \int_{p^*}^{\bar{\theta}} \psi(\theta) f(\theta) d\theta \right\} &= -\int_{p_1}^{p^*} \psi(\theta) f(\theta) d\theta \\ = \int_{p_1}^{p^*} \{-\psi(\theta) f(\theta)\} d\theta \end{aligned}$$

となる．開区間 $A = (p_1, p^*)$ は可測集合で，$[p_1, p^*]$ と 2 点のみで異なる集合 A

上で $-\psi(\theta)f(\theta)$ を積分しても値は同じ 0 となる．A において $\psi(\theta) < 0$ なので $0 < -\psi(\theta)f(\theta)$ となり，補題 16 より $\{\theta \in A : -\psi(\theta)f(\theta) \neq 0\}$ の測度は 0 となるが，これは A で $0 < -\psi(\theta)f(\theta)$ であることに反する．

次に，$p_1 > p^*$ とする．

$$0 = \int_{p^*}^{\bar{\theta}} \psi(\theta)f(\theta)d\theta - \int_{p_1}^{\bar{\theta}} \psi(\theta)f(\theta)d\theta = \int_{p^*}^{p_1} \psi(\theta)f(\theta)d\theta$$

となり，式 (9) より $p^* < \theta$ ならば $0 < \psi(\theta)$ なので，上に示したように矛盾が起きる．

以上により $p_1 = p^*$ が示された． □

謝辞

この研究ノートは，山口大学経済学部の川村一真先生，小嶋寿史先生，山本勝也先生，山本周吾先生との直接メカニズムに関する勉強会の中で生まれたものです．皆さんに感謝いたします．

参考文献

[1] Tilman Börgers, *An Introduction to the Theory of Mechanism Design*, 2014

[2] 吉田洋一，ルベグ積分入門，倍風館，1965