

博士論文

セラミックス基複合材料の損傷問題への

制約条件付き有限要素モデルの適用

(Application of Conditional Finite Element Model to

Damage problem of Ceramics Matrix Composites)

平成 27 年 3 月

喜多村竜太

山口大学大学院理工学研究科

目次

第1章 諸言	1
1-1 セラミックス	3
1-2 多孔質セラミックス	3
1-3 セラミックス基複合材料	4
1-3-1 セラミックス基複合材料とは	4
1-3-2 短繊維強化によるセラミックスの高靱化	5
1-3-3 長繊維強化によるセラミックスの高靱化	6
1-3-4 繊維複合材料の繰返し負荷挙動	8
1-4 汎用有限要素解析における繊維複合材料の損傷解析	9
1-5 理論界面はく離モデル	10
1-5-1 すべり抵抗一定とするモデル	10
1-5-2 クーロン摩擦モデル	11
1-6 本研究の目的	12
第2章 制約条件付き有限要素モデルによる界面損傷問題の定式化	14
2-1 はじめに	14
2-2 接触力を考慮した剛性方程式	14
2-3 界面状態の定義と接触条件	15
2-4 接触条件の剛性方程式への組み込み	17
2-5 すべり抵抗を一定とするモデルの定式化	19
2-6 要素および境界条件	20
2-7 結言	21
第3章 制約条件付き有限要素法の妥当性の検証	22
3-1 はじめに	22
3-2 制約条件付き有限要素モデル，理論モデルおよび汎用有限要素の解析結果	22
3-3 各種パラメータの影響	29
3-4 すべり抵抗を一定とするモデルの解析結果	33
3-5 結言	33
第4章 制約条件付き有限要素法の応用	35
4-1 はじめに	35
4-2 結合力要素の定式化	35
4-3 繰返し界面すべりによる摩擦固着状態の定式化	37

4-3-1	界面状態の定義と接触条件	37
4-3-2	R_{min} 法による界面接触状態の判定	38
4-3-3	繰返し負荷による界面せん断応力の低下	40
4-4	結合力要素および繰返し摩擦すべりの解析結果および考察	41
4-4-1	結合力要素の解析結果	41
4-4-2	繰返し摩擦すべりの解析結果	44
4-5	結言	47
第5章 結論および今後の展望		48
5-1	結言	48
5-2	今後の展望	49
5-2-1	制約条件付き有限要素法の汎用性に向けて	49
5-2-2	制約条件付き有限要素法の3次元への拡張について	49
謝辞		50
参考文献		51
付録A 理論界面はく離モデルの導出		53
付録B Off-axis 方向の界面はく離		63
付録C 3次元における制約条件付き有限要素法		67

第1章 諸言

1-1 セラミックス

現在，地球環境問題や省エネルギー問題は，早急に解決すべき地球規模の最重要課題といえる．この様な広域にわたるニーズに応えるためには，材料の高耐熱性化，高耐環境化，軽量化に加え，高い信頼性を持つことが求められる．その中で，Table 1-1～1-3に示すように，セラミックスは高強度に加え，耐熱性，耐食性，耐摩耗性に優れた特性を有しており，従来，耐熱性化，高耐環境性化，軽量化を必要とする材料において，金属からセラミックスの適用へと変更が試みられてきた¹⁾．例えば，ガスタービン，ターボチャージャーローター等の高温機器の高性能化は，エネルギー問題の解決策の一つとして考えられており，これに向けたセラミックス材料の実用化のためのプロジェクトが進行している²⁻⁴⁾．

セラミックスの耐熱性，耐摩耗性，耐食性，電気絶縁性などの特性は主として，セラミックスの原子間結合がイオン結合あるいは共有結合であることに起因する．イオン結合を有する傾向は，原子の電気陰性度の差が増加するほど強くなる．しかし，これらの特性を発現させるには高温での焼成を必要とし，加工することが困難になるなどの欠点にもなる．ここで，代表的なセラミックスの結晶構造の例を Fig.1-1 に示す． Al_2O_3 は Al^{3+} と O^{2-} のイオン結晶で，高温型の $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ が一般的である． $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ は Fig.1(b) の様な六方最密充填構造をとり， O^{2-} の六方最密充填の隙間に Al^{3+} が入り， Al^{3+} はほぼ等距離の6個の O^{2-} に囲まれる．この様に強い化学結合をもつために化学的，物理的にも高い安定性を示し，耐熱性，高強度，高硬度，電気絶縁性，耐食性，光学的透明性，室温熱伝導率および生体適合性など多様な特性を持つ⁵⁾．しかし，セラミックス材料は金属材料や高分子材料と比較し，靱性や強度信頼性が低いため，利用範囲が制限されているのがこれまでの動向であった．

Table 1-1 Comparison of properties of ceramics, metals and plastics¹⁾

	Ceramics	Plastics	Metals
Heat resistance	○	×	△
Thermal conductivity	△	×	○
Electrical conductivity	×	×	○
Strength	○	×	○
Impact resistance (mechanical)	×	○	○
Impact resistance (thermal)	×	○	○
Chemical resistance	○	○	×
Hardness	○	×	△
Abrasion resistance	○	×	△
Moldability	×	○	○
Lightweight properties	○	○	×

Table 1-2 Physical and mechanical properties of ceramics.

	Density [g/cm ³]	Bending strength [MPa]	Young's modulus [GPa]	Poisson's ratio	Thermal expansion [×10 ⁻⁶]	Maximum operating temperature [°C]
Al ₂ O ₃	3.9	350-450	350-390	0.23-0.25	7-8	1500-1600
ZrO ₂	6	980-1080	210	0.31-0.32	9-10	1250
SiO ₂	2.2	67-69	72-74	0.17	0.51-0.58	1000-1200
SiC	3.1	450-500	390-430	0.16-0.18	4-4.5	1600
B ₄ C	2.51	550-660	450-460	-	5	-
Si ₃ N ₄	3.2	600-750	280-300	0.27-0.28	3-3.5	1200
Si ₃ N ₄ -Al ₂ O ₃	3.22	980-1200	300-330	0.28-0.29	3-3.2	1200
AlN	3.3	340-350	290-320	0.24-0.29	2.4-4	1000
α·Fe ₁₂ O ₁₉	4.6-5	50-150	120-150	0.2-0.3	12	300
MgO·SiO ₂	2.7-2.8	145-200	120-130	0.22	7.7-8	1000
2MgO·SiO ₂	2.8-3.6	145-210	150-190	0.24-0.27	9.5-10.5	900
3Al ₂ O ₃ ·2SiO ₂	2.8-3.2	280	210	0.27	5-5.5	-
2MgO·2Al ₂ O ₃ ·5SiO ₂	2.6-2.7	150-170	140	0.31	0.1-0.26	1200

Table 1-3 Application of ceramics for industrial use.

	Characteristics	Application
Al ₂ O ₃	High strength Abrasion resistance Heat resistance Electrical insulating properties	Machinery parts Parts for semiconductor and LCD manufacturing
ZrO ₂	High toughness and strength Abrasion resistance Heat resistance Chemical resistance	Machinery parts Medical parts Grinding media
SiO ₂	Thermal shock resistance High purity High transparency	Laboratory equipment Container for semiconductor manufacturing equipment Optical lens
SiC	High hardness Abrasion resistance Heat resistance Conductivity	Heat-resistant parts Corrosion-resistant parts
B ₄ C	High hardness Abrasion resistance	Abrasive Nuclear parts Sandblasting nozzle
Si ₃ N ₄	High mechanical strength Abrasion resistance Thermal shock resistance Electrical insulating properties	Machinery parts Heat-resistant parts
Si ₃ N ₄ -Al ₂ O ₃	High mechanical strength Abrasion resistance Thermal shock resistance Electrical insulating properties	Machinery parts Heat-resistant parts
AlN	High thermal conductivity Thermal shock resistance Electrical insulating properties	Electrical and electronic parts Heat dissipation parts
α·Fe ₁₂ O ₁₉	Ferromagnet Chemical resistance Low electrical conductivity (Compared to Metal)	Motor Speaker Magnetic recording medium
MgO·SiO ₂	Electrical insulating properties Thermal shock resistance Low thermal conductivity	Insulating parts
2MgO·SiO ₂	Electrical insulating properties High coefficient of thermal expansion	Insulating parts
3Al ₂ O ₃ ·2SiO ₂	Electrical insulating properties Heat resistance	Chemical supplies
2MgO·2Al ₂ O ₃ ·5SiO ₂	Low thermal expansion	Insulating parts

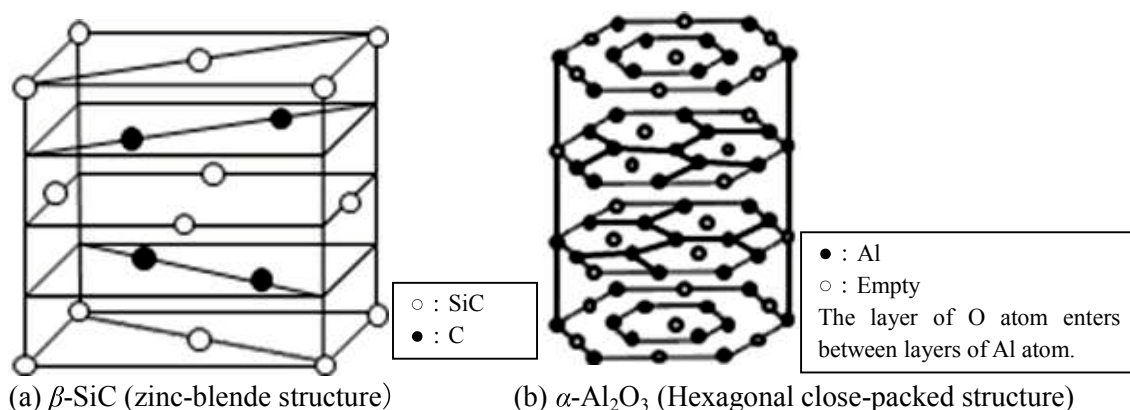


Fig.1-1 Crystallographic structure of ceramics.

1-2 多孔質セラミックス

多孔質セラミックスとは、内部に無数の微細な穴が空いているセラミックスのことである。そのため、セラミックスの耐熱性、耐食性、耐摩耗性の特性に加え、軽量、断熱性、ガス吸着性、ろ過性などの機能特性を持つ材料として、高温タービン用脱塵フィルター、断熱材、触媒担体など多岐にわたり利用されている。しかし、構造が多孔質になると、材料中に無数に存在する気孔および不規則な細孔形状により、内在する気孔に応力集中が生じ、破壊起点となるとともに応力を担う緻密層の部分が減少することが知られている。このため、Fig.1-2 に示すように気孔率の増加により曲げ強度および曲げ弾性率が極端に低下し、構造用部材としての適用範囲は狭い⁶⁾。以上のことより、従来、セラミックスにおける気孔の存在はその機械的特性を損なうものと認識されてきたが、近年では、き裂の進展を抑制し、即座に全体に破壊が伝播しない損傷許容の性質や大きなひずみに耐えうる機能など、緻密体にはない優れた特性を有していることもわかっている⁷⁾。しかし、靱性を格段に向上させる機構の改善には至っていない。

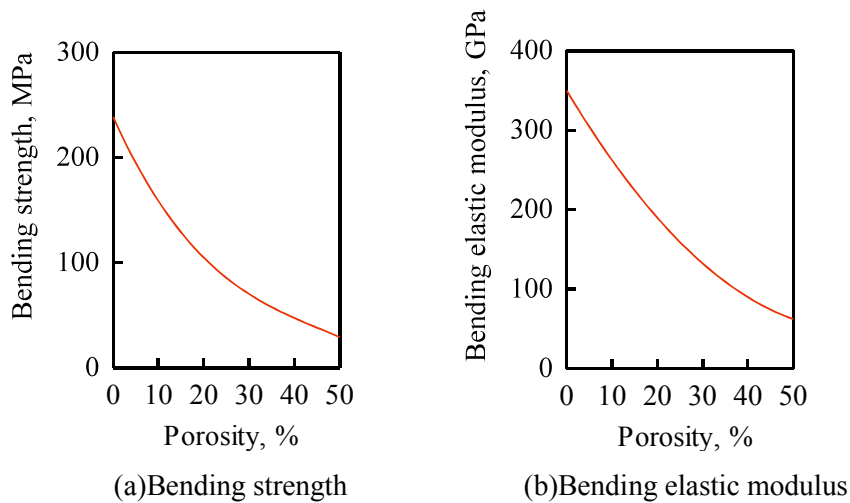


Fig.1-2 Relation of mechanical property and porosity of Al₂O₃ ceramics⁶⁾.

1-3 セラミックス基複合材料

1-3-1 セラミックス基複合材料とは

前述のように、セラミックスは耐熱性、耐摩耗性、耐食性などに優れた特性を持つが、低靱性であるという点から構造材料としての信頼性に乏しいという大きな欠点を有している。このため、セラミックスの高靱化を目的とした研究が精力的に行なわれている。セラミックスはその単体の靱性を向上させるのは本質的に困難であるため、破壊様式を複雑にし、靱性を向上させる必要がある。その方法の1つとして、セラミックスをセラミックス繊維やセラミックスウイスカなどの強化材を母材セラミックスに複合化させた、セラミックス基複合材料 (CMC: Ceramics Matrix Composites) が検討されている⁸⁾。

CMC は連続繊維で強化する場合と、粒子、短繊維、ウイスカ等の不連続な形状により強化したものがある。一般に連続繊維で強化した場合のほうが高強度ならびに高靱性な材料を得られるが、強化材ならびに製造プロセスに要するコストが高い。また、成形性が悪く、異方性があるため部材としての設計が難しいという点がある。一方、不連続繊維の場合、従来のセラミックス単体と同種の製造プロセスをとることも可能であるため、連続繊維と比較して低コストでの製造が可能である。また、材料特性の異方性が小さいことも大きな利点の一つである⁸⁾。

このように、CMC はセラミックス繊維などの強化材を複合化させることで強化機能を発現させるだけでなく、破壊様式を複雑化することで、繊維の架橋、破断、引抜け、界面はく離、き裂偏向など種々の微視損傷を発現させるものである。この機構により高靱化を実現するものであり、損傷許容型セラミックスとも呼ばれる。この CMC は SiC 繊維強化 SiC セラミックス複合材料 (SiC/SiC) を始めとし、高温環境下構造材料として、航空宇宙分野における Ni 合金や Co 合金などの金属材料などの代替材として期待されている⁹⁾。

1-3-2 短繊維強化によるセラミックス高靱化

Fig.1-3 に短繊維強化複合材料のクラック進展の様子を示す。短繊維強化複合材料では、短繊維をセラミックス中にランダムに分散させると、Fig.1-3 に示すようにクラック先端は繊維をかわして進行しようとする。このき裂偏向効果（クラックディフレクション効果）によりクラック面積はディフレクションが生じる前より大きくなり、その分だけクラックを進展させるので、より多くのエネルギーの消費が必要となり高靱化する。また、繊維のアスペクト比（繊維長/繊維径）が大きくなるにつれて破壊エネルギーは大きくなる。これは、Fig.1-3(b)に示すようにアスペクト比が大きくなるほど、ディフレクト面のねじれ度合いが大きくなり、クラック面積が大きくなるからである。ただし、繊維体積率や繊維長が大きくなり過ぎるとクラックが繊維をかわして進行するということが生じなくなり、アスペクト比 12 程度で高靱化効果は飽和してしまう¹⁰⁾。

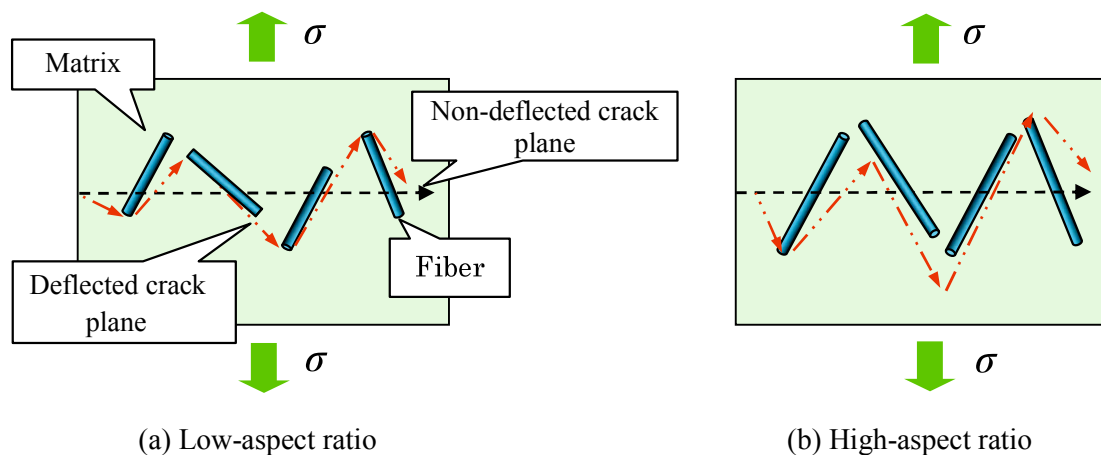


Fig.1-3 Schematics of crack deflection effects by fibers.

次に、繊維の引き抜け効果（プルアウト効果）および架橋効果（ブリッジング効果）について説明する。Fig.1-4 に繊維引き抜け及び架橋効果の模式図を示す。ここで、繊維の引き抜けはクラックが繊維軸とほぼ垂直に進展した際に生じることから、簡単のため、繊維は一方向に配列させたモデルである。Fig.1-4 に示すように、繊維強化セラミックス基複合材料は、繊維-マトリックス界面の接着性を弱めることで、繊維-マトリックス界面に応力集中が生じて界面がはく離し、繊維の引き抜け現象が生じる。この時、繊維-マトリックス界面のすべり抵抗によってエネルギー吸収が起こる。このすべり抵抗が大きければ界面すべり量は少なくなり、クラック進展エネルギーが大きくなるため高靱化される。また、クラック先端に近い部分においては、クラック上下面を繊維が架橋しており、外力によって開口しようとするき裂面を架橋繊維によって閉じようとする力が働き、クラック先端の応力集中は著しく低くなり、結果として高靱化が生じる¹¹⁾。

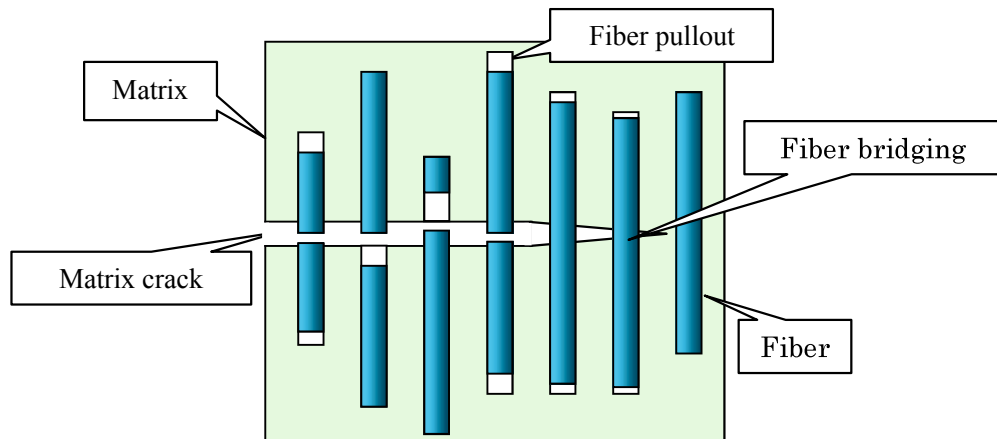


Fig.1-4 Schematic of fiber pullout and bridging.

1-3-3 長繊維強化によるセラミックスの高靱化

長繊維で強化したセラミックスの破壊過程を Fig.1-5 に示す. 同図に示すように長繊維強化セラミックスでは無負荷状態 (Fig.1-5 (a)) から外部応力を負荷すると弾性変形 (Fig.1-5 (b)) し, やがて first matrix cracking が起こる (Fig.1-5 (c)). first matrix cracking が起こると, 繊維とマトリックス界面がはく離し始め, その結果, 界面でのすべり抵抗によって繊維が弾性的に引き延ばされ, エネルギーが吸収される. さらに外部応力が増加すると, matrix cracking が他の場所でも起こるようになり (Fig.1-5 (d, e)), また界面はく離領域で繊維が破断する (Fig.1-5 (f)). 破断した後も, 繊維自体が引き抜かれ, その過程でも界面のすべり抵抗によってエネルギーの吸収が起こる. その後, 試験片全域で界面はく離, 繊維破断, 繊維の引き抜けが起こり (Fig.1-5 (g)), 最終的に破断に至る (Fig.1-5 (h)). 材料の最終破断に至るまでに吸収される全エネルギーを破壊エネルギーといい, この破壊エネルギーが大きいほど高靱性となる¹²⁾.

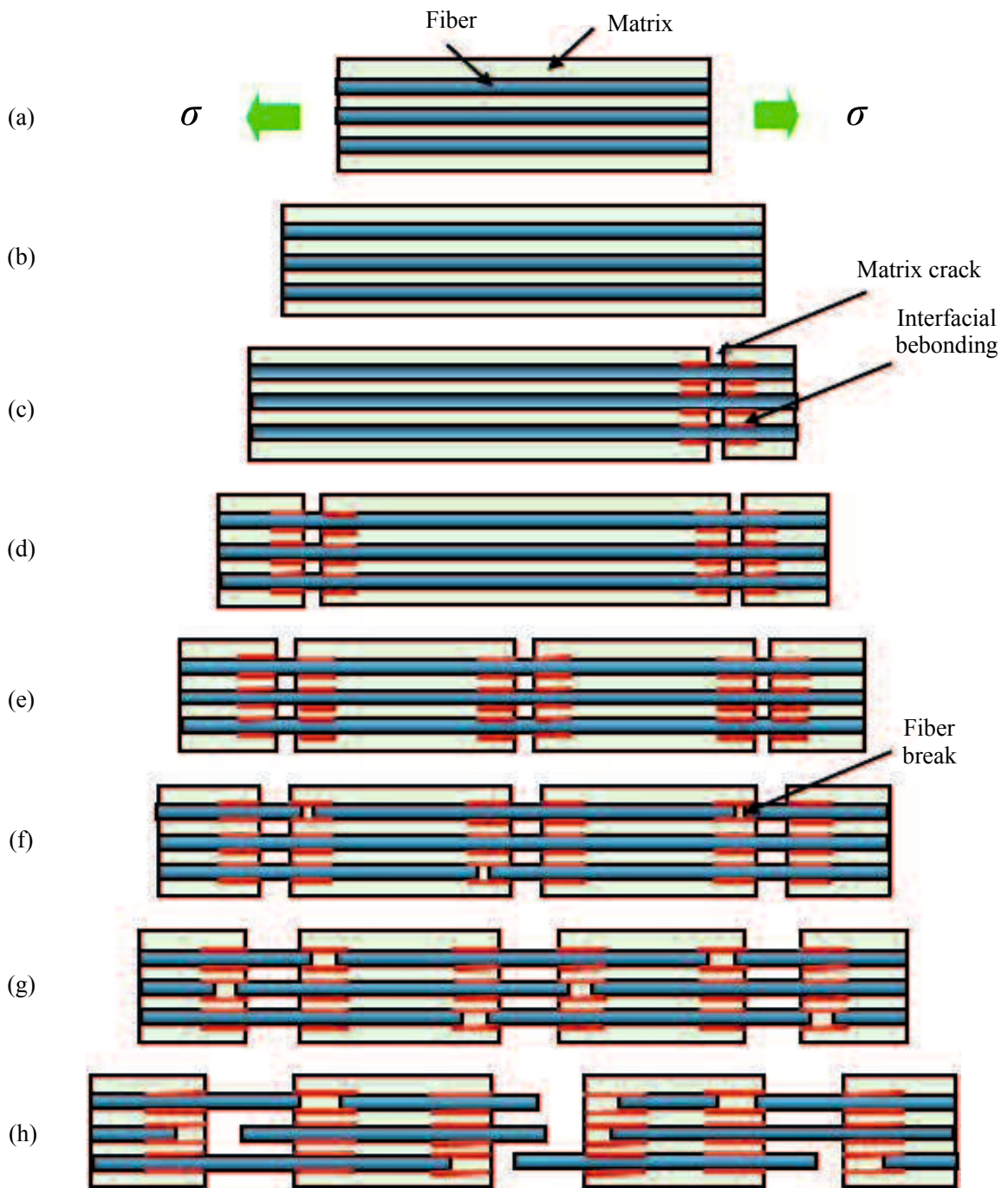


Fig.1-5 Fracture mechanism of continuous fiber composite.

1-3-4 繊維複合材料の繰返し負荷挙動

CMC の繰返し負荷下における変形挙動は、種々の研究^{13)~17)}にみられるように、負荷 - 除荷過程において Fig.1-6 に示すようなヒステリシスループを示す。そして、繰返し数の増加にともない、ループは徐々に右方向（正のひずみ方向）に移動するとともにひずみ幅も大きくなる傾向がみられる。Evans ら¹³⁾は、CMC の疲労挙動は主にマトリックスき裂、界面はく離および界面すべりなどに起因することを報告している。疲労初期において急激なマトリックスき裂および界面はく離の発生により永久ひずみが発生し、また、界面すべり応力の低下によりヒステリシスのループ幅が増加していく。その後、マトリックスき裂および界面はく離の発生が進行し、最終的に繊維が全ての荷重を受け持つためヒステリシスループは線形的な挙動に近づく¹³⁾。Li ら¹⁴⁾は、疲労負荷下における繊維の摩擦すべりにより界面の摩擦係数が低下し、その低下は疲労荷重や応力比などに依存することを報告している。また、Holmes ら¹⁵⁾は、繊維の摩擦すべりにより内部加熱が生じ、界面すべり応力、繊維強度およびヤング率の低下が生じることを報告している。Kotil ら¹⁶⁾は、界面すべり応力の大小により繊維破断および界面はく離の程度が変化することによって、ヒステリシスループが傾きながら変化し移動することを報告している。以上のように、CMC の疲労挙動は、マトリックスき裂の生成後、界面はく離、界面すべりが多々発生し、最終的に繊維への過負荷によって全体破壊に至るような過程である。Li ら¹⁴⁾は、マトリックスき裂飽和後に繊維破断が生じなくともヒステリシスループの形状変化が起こることから、その要因を繊維-マトリックス界面の摩擦係数の変化によって説明できることを自身のモデルに基づき報告している。これによると、摩擦係数は繰返し初期では大きいものの繰返しにともなって減少し、界面はく離領域が大きくなってループの面積（エネルギー損失）も大きくなる。さらに繰返し数が増加するにつれ、摩擦係数はさらに減少し、繊維のみの変形挙動に変化していく（ループの面積は再び小さくなる）。しかしながら、Li らのモデルではループの移動までは再現できず、形状変化と移動の両者の再現を兼ね備えたモデリングが必要である。そこで、マトリックスき裂飽和後の界面特性（摩擦係数および界面せん断強度）の変化のみに着目し、提案した制約条件付き有限要素モデルによってヒステリシスループの形状変化と移動が再現可能かどうかを調査する必要がある。

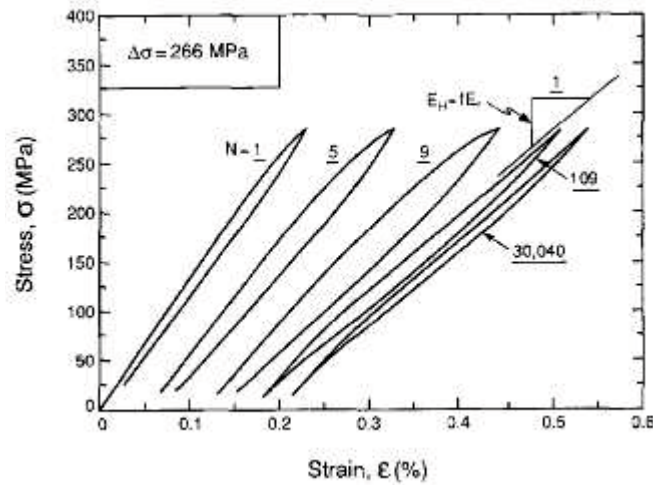


Fig.1-6 Hysteresis loops of CAS glass fiber /SiC ceramics composite¹³⁾.

1-4 汎用有限要素解析における繊維複合材料の損傷解析

繊維複合材料の損傷過程として、繊維破断やマトリックスクラックが発生したのち、界面はく離が生じる。この界面はく離を解析するために、汎用有限要素解析ソフトにツールとして付随した接触解析が流用され、ペナルティ法や拡大ラグランジュ法などの解析アルゴリズムが用いられている¹⁸⁾。

ペナルティ法は最も簡単な接触の定式化であり、接触面間の剛性を接触剛性と呼ばれるバネで表現する。このバネは、面間が離れている間は剛性が 0 であり、面間が触れ合うことで初めて剛性を発揮する。このとき、フックの法則およびクーロン摩擦則に従い、法線方向の接触力は P_n [N] および接線方向の接触力（摩擦力） P_t [N] は、

$$P_n = \begin{cases} 0 & (u_n < 0) \\ K_n u_n & (u_n > 0) \end{cases} \quad (1-1)$$

$$P_t = \mu P_n = \mu(K_n u_n) \quad (1-2)$$

で与えられる。ここで、 K_n は接触剛性[N/mm]、 u_n は食込み量[mm]、 μ は静摩擦係数である。ここで、 $u_n < 0$ のとき、界面は離れており、接触力は働かない。一方、 $u_n > 0$ のとき、界面は食込んでおり、食込み量 u_n に比例した接触力 P_n および摩擦力 P_t を生じる。ペナルティ法では、この食込み量 u_n が許容量以下になるように接触剛性 K_n を更新しながら、繰返し計算を行なう。しかし、 K_n を大きくすると食込み量は減少するが、全体剛性マトリクスの悪条件を引き起こし、解析の精度が低下することが問題とされている。

一方、拡大ラグランジュ法において、法線方向の接触力は P_n [N] は、

$$P_n = \begin{cases} 0 & (u_n < 0) \\ K_n u_n + \lambda & (u_n > 0) \end{cases} \quad (1-3)$$

で与えられる．ここで， λ はラグランジュ乗数コンポーネントである．拡大ラグランジュ法では，ペナルティ法による収束計算を行なった後，すべり量および食込み量をチェックし，これが許容量を超える場合，接触剛性およびラグランジュ乗数コンポーネントを再定義し，再計算を行なう．このように2段階の収束計算を行なうことにより，ペナルティ法の安定した計算と，食込み量低減の両立を図っており，接触剛性の大きさにあまり影響を受けないのが特徴である．

この他にも，ペナルティ&ラグランジュ混合法，純ラグランジュ法などの手法があり，混合法では法線方向に拡大ラグランジュ法，接線方向にペナルティ法を使用し，食込み量0を強制するため，ペナルティ法などより計算が多くなることが報告されている．

以上のように，接触解析で用いられる手法は，すべり量および食込み量が許容量以下となるように繰り返し計算を必要とすることから，計算時間が長く，精度も許容量に依存することが問題視されている．

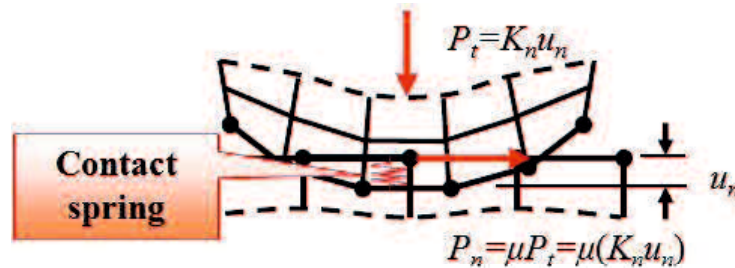


Fig.1-6 Schematic diagram of penalty and Lagrange method.

1-5 理論界面はく離モデル

1-5-1 すべり抵抗を一定とするモデル

先述のように，CMCの損傷挙動の一つとして，繊維-マトリックス間の界面接着が分断されて発生する界面はく離挙動が挙げられる．この界面はく離を表現したモデルとして，Budianskyら¹⁹⁾によって提案されたShear-lagモデルが挙げられる．これは，界面はく離領域において，繊維-マトリックス間のすべり抵抗（単位はく離面積当たり）を一定とみなし，界面せん断応力 $\tau_i(z)$ を一定値 $\bar{\tau}$ に仮定したものである．この仮定に基づき，Budianskyらは繊維およびマトリックスの z 方向応力 σ_f ， σ_m および界面せん断応力 τ_i を理論的に導出している．

ここで，マトリックスき裂からの距離を z ，負荷応力を σ とすると，界面はく離領域($0 \leq z \leq L_d$)における σ_f ， σ_m および τ_i は，

$$\sigma_f(z) = \frac{\sigma}{V_f} - \frac{2\tau_c}{r_f} z \quad (1-4)$$

$$\sigma_m(z) = \frac{2\tau_c}{r_f} z \quad (1-5)$$

$$\tau_i(z) = \tau_c = \text{const} \quad (1-6)$$

で与えられる. 式(1-4)~(1-6)で示すように, このとき繊維およびマトリックスの軸応力は, $\tau_i(z)$ を一定値とみなしたことから z の一次関数で与えられ, 線形挙動となる.

また, 固着領域 ($z \geq L_d$) においては, σ_f , σ_m および τ_i は次式で与えられる.

$$\sigma_f(z) = (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} + \sigma_f(\infty) \quad (1-7)$$

$$\sigma_m(z) = \frac{\sigma}{V_m} - \gamma \left\{ (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} + \sigma_f(\infty) \right\} \quad (1-8)$$

$$\tau_i(z) = \frac{\rho}{2} (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} \quad (1-9)$$

1-5-2 クーロン摩擦モデル

既存の研究¹⁹⁾⁻²¹⁾によると, CMC は焼成後の冷却過程において熱ひずみを生じ, 無負荷状態でも繊維-マトリックス界面に締付け応力が働くことが報告されている. この状態において繊維に引張負荷を与えると, 締付け応力が徐々に緩くなってすべりが生じるが, そのすべり抵抗はクーロン摩擦力によって決定される. このような現象も界面はく離の一形態とみなされ, 熱ひずみおよびポアソン効果を考慮した界面はく離モデルが Chiang²¹⁾によって提案されている. このモデルによると, 界面はく離領域 ($0 \leq z \leq L_d$) において σ_f , σ_m および τ_i は次式で与えられる.

$$\sigma_f(z) = \frac{\sigma}{V_f} - \frac{\alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{V_f (\alpha v_f + \gamma v_m)} (1 - e^{-\lambda z}) \quad (1-10)$$

$$\sigma_m(z) = \frac{\alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{V_m (\alpha v_f + \gamma v_m)} (1 - e^{-\lambda z}) \quad (1-11)$$

$$\tau_i(z) = \frac{r_f \lambda \alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{2 V_f (\alpha v_f + \gamma v_m)} e^{-\lambda z} = -\frac{r_f}{2} \frac{d\sigma_f}{dz} = \frac{r_f}{2\gamma} \frac{d\sigma_f}{dz} = \mu (q_0(z) - q_i) \quad (1-12)$$

式(1-10)-(1-12)に示すように, はく離領域において界面せん断応力 (クーロン摩擦力に相当) は一定ではなく, 応力分布は非線形となる. また, 固着領域 ($z \geq L_d$) における応力は shear-lag モデルと同様に式(1-7)~(1-9)で与えられる. さらに, 半径および円周方向応力 σ_r および σ_θ は次式で与えられる.

$$(\sigma_r)_f = (\sigma_\theta)_f = \frac{\alpha v_f \sigma_f(z) - v_m \sigma_m(z)}{1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)} = q_0(z) \quad (1-13)$$

$$(\sigma_r)_m = [(r_m/r)^2 - 1] \gamma q_0(z) \quad (1-14)$$

$$(\sigma_\theta)_m = [-(r_m/r)^2 - 1] \gamma q_0(z) \quad (1-15)$$

ただし,

$$\bar{\sigma} = \frac{V_f q_i}{\alpha v_f} [1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)] \quad (1-16)$$

$$q_i = \frac{(\alpha_f - \alpha_m) E_m E_f \Delta T}{(1 + v_m) E_f + (1 - v_f) E_m} \quad (1-17)$$

$$\lambda = \frac{2\mu}{r_f} \kappa = \frac{2\mu}{r_f} \frac{\alpha v_f + \gamma v_m}{1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)} \quad (1-18)$$

$$\sigma_f(\infty) = \frac{1 - 2v_m \kappa}{V_m [\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)]} \sigma \quad (1-19)$$

$$\sigma_m(\infty) = \frac{1}{V_m} \left[1 - \frac{\gamma(1 - 2v_m \kappa)}{\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)} \right] \sigma \quad (1-20)$$

$$\rho = \left\{ \frac{2G_m [\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)]}{E_m \ln(\bar{R}/r_f)} \right\}^{1/2} \quad (1-21)$$

$$\ln(\bar{R}/r_f) = -\frac{2 \ln V_f + V_m (3 - V_f)}{4V_m} \quad (1-22)$$

$$\alpha = E_m / E_f \quad (1-23)$$

$$\gamma = V_f / V_m \quad (1-24)$$

である．ここで、 E_f および E_m はヤング率、 v_f および v_m はポアソン比、 α_f および α_m は熱膨張係数、 V_f および V_m は体積率、 r_f および r_m は外半径、 $\sigma_f(\infty)$ および $\sigma_m(\infty)$ は $z=\infty$ における z 方向応力であり、添字の f および m は繊維およびマトリックスを示す．また、 σ は負荷応力、 ΔT は温度変化、 q_i および $q_0(z)$ は熱ひずみおよびポアソン効果による締付け応力、 μ は静摩擦係数、 r は任意の r 座標 ($r_f \leq r \leq r_m$)、 \bar{R} は有効半径（マトリックスの z 方向応力は $r=\bar{R}$ に集中し、 $r_f \leq r \leq \bar{R}$ の領域のみにせん断応力が働く）である．式(1-10)から式(1-20)までの導出法については付録 A に示す．

1-6 本研究の目的

先述のとおり、有限要素解析ソフトによる接触問題では、ペナルティ法などの解析アルゴリズムが用いられているが、繰返し計算を必要とするため、計算時間が長く、精度も許容量に依存することが問題視されている．そこで、本研究では、CMC 損傷後の界面における各節点変位の等価性や接触力のつり合いを仮定し、これを制約条件として数値解を求める、制約条件付き有限要素モデルを提案する．同モデルを利用すれば、繰返し計算を必要とすることなく、わずか一回の計算で全体剛性方程式から変位解が得られる．また、マトリックスき裂や繊維破断が複数箇所生成した場合にも、解の発散現象を防ぐことが可能になると期待される．

また、接触問題におけるクーロン摩擦の発生は、CMC内の繊維またはマトリックスに圧縮負荷が加わるとき、両者に接着関係がないとしても繊維-マトリックス界面に常に生じる。一方、引張負荷が与えられると、半径方向の圧縮残留応力が解放された時点で両者の接触は無くなり、界面摩擦による力学的相互干渉は生じない。しかし、繊維-マトリックス間に接着関係が存続すれば、両者は‘ずれ’のない状態が続くであろうし、接着強度以上の負荷があれば、はく離後の繊維-マトリックス間の界面状態いかんですべり抵抗も生じるであろう。したがって、制約条件付き有限要素モデルをより広範に適用する上で、クーロン摩擦以外にも適用できる定式化を行なう必要がある。

そこで、本研究ではCMCの界面はく離後に界面摩擦として (i) 圧縮負荷下でクーロン摩擦が生じる場合および (ii) 引張負荷下で一定の界面すべり抵抗が働く場合に対して有限要素モデルの定式化を行ない、これを既存の汎用有限要素解析ソフトANSYSおよび過去に提案された理論モデルと比較検討し、本手法の有効性について議論した。また、界面損傷後の力学的挙動を扱う代表的な有限要素である、結合力要素についても本モデルによる定式化を図ったので報告する。

本研究の概要を以下に示す。まず、第1章では、以上のように本研究の背景および目的について述べた。第2章では制約条件付き有限要素モデルの定式化の詳細について述べる。2-2~2-4節がクーロン摩擦モデル、2-5節がすべり抵抗を一定とするモデルの内容である。次に、第3章では制約条件付き有限要素モデルの解析結果を示し、理論モデルおよび汎用有限要素解析ソフトANSYSの解析結果との比較を行うことで、その妥当性の検証を行なう。さらに、第4章では、結合力要素についての定式化を行うとともに、CMCの繰返し負荷下での繰返し界面すべりによる摩擦固着状態の定式化を行なう。最後に、第5章では本研究の総括と今後の展望について述べる。

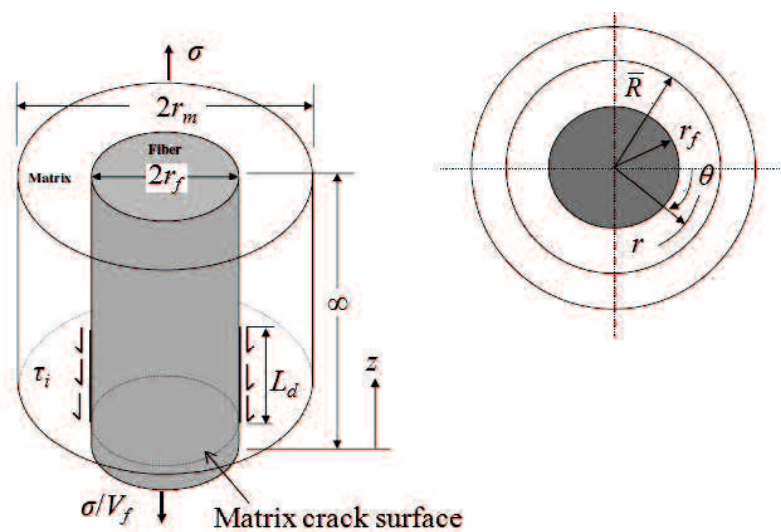


Fig.1-7 Theoretical interfacial debonding model.

第2章 制約条件付き有限要素モデルによる界面損傷問題の定式化

2-1 はじめに

CMC は負荷応力の増加に伴い、マトリックスクラックが生じ、その周辺に界面摩擦をともなう界面はく離生じながら、損傷が進展していく。この界面摩擦の一つであるクーロン摩擦の発生は、CMC 内の繊維またはマトリックスに圧縮負荷が加わる時、両者に接着関係がないとしても繊維-マトリックス界面に常に生じる。一方、引張負荷が与えられると、半径方向の圧縮残留応力が解放された時点で両者の接触は無くなり、界面摩擦による力学的相互干渉は生じない。しかし、繊維-マトリックス間に接着関係が存在すれば、両者は接触した状態が続くであろうし、接着強度以上の負荷があれば、はく離後の繊維-マトリックス間界面の粗さいかんで界面摩擦の発生も予想される。したがって、制約条件付き有限要素モデルをより広範に適用する上で、クーロン摩擦以外にも適用できる定式化を行なう必要がある。

そこで、本研究では、界面摩擦として (i) 圧縮負荷下においてクーロン摩擦が生じる場合、および (ii) 引張負荷下においてすべり抵抗を一定とする場合に対して定式化を行った。すなわち、繊維要素-マトリックス要素間に4重節点を導入することでそれぞれの界面接触状態を表現し、制約条件として変位の等価性および接触力のつり合い式を仮定することで、それぞれの界面接触状態を定義した。これを全体剛マトリックス(行列)または定数ベクトル項に組み込み、未知変数の個数を変えることなく連立一次方程式が導けることを示す。

2-2 接触力を考慮した剛性方程式

本手法では、界面上の多重節点に接触力を取り入れてモデリングを行なう。接触力を取り入れた仮想仕事の原理は、一般に以下のように与えられる。

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \left(\iiint_V \bar{p}_i \delta u_i dV + \iint_{S_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dS \right) - \iint_C \bar{R}_i \delta u_i dS = 0 \quad (2-1)$$

ここで、 σ_{ij} , ε_{ij} , \bar{p}_i , u_i は弾性体内での応力、ひずみ、物体力、変位、 T_i , R_i は表面力、接触力、 C は接触面を、 S_σ は C 以外の力学的境界を表す。なお、添字 i, j はそれぞれ r, z 方向を示す。式(2-1)を離散化し、各要素上の節点に等価節点力を定義することにより、通常有限要素法による剛性方程式に接触力を加えた次式が導かれる。

$$[K]\{\Delta u\} = \{Af\} + \{\Delta R\} \quad (2-2)$$

ここで、 $[K]$ は式(2-1)第1項から導かれる全体剛性マトリックス、 $\{\Delta u\}$ は節点変位増分、 $\{Af\}$ は式(2-1)の第2および3項から導かれる節点荷重増分である。また、 $\{\Delta R\}$ は接触力増分であり、未知変数として扱う。

2-3 界面接触状態の定義と界面接触条件

CMC 材料内の繊維破断やマトリックスき裂近傍の界面損傷過程は力学的につり合った接触状態から界面はく離を生じ、続いて界面すべりによる挙動を伴い、最終的に界面摩擦を通じて再び力学的につり合った状態に変化すると考えられる。そこで、本解析では繊維-マトリックス界面の接触状態を Fig.2-1 に示すような界面および要素間の重複節点モデルを用いて表現した。節点 1, 3 は繊維側, 2, 4 はマトリックス側にある。以下に、想定される損傷状態の界面接触条件（制約条件）を示す。

(a) 固着状態

Fig.2-1(a)に示すように、界面がはく離せず固着している状態である。変位増分の等価性および接触力増分のつり合いは次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta u_1 = \Delta u_2 = \Delta u_3 = \Delta u_4, \quad \Delta w_1 = \Delta w_2 = \Delta w_3 = \Delta w_4 \\ \Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4 = 0, \quad \Delta R'_1 + \Delta R'_2 + \Delta R'_3 + \Delta R'_4 = 0 \end{aligned} \quad (2-3)$$

ここで、 Δu および Δw は節点 1~4 の r および z 方向変位増分、 ΔR および $\Delta R'$ は r および z 方向の接触力増分を表す。

(b) 界面はく離状態

Fig.2-1(b)に示すように、繊維-マトリックス間において界面せん断はく離が起こり、繊維側とマトリックス側で z 方向に相対的なずれが生じている状態である。変位増分の等価性および増分力のつり合いは、静摩擦係数を μ とおくと、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta u_1 = \Delta u_2 = \Delta u_3 = \Delta u_4, \quad \Delta w_1 = \Delta w_3, \Delta w_2 = \Delta w_4 \\ \Delta R'_1 + \Delta R'_3 = \pm\mu(\Delta R_1 + \Delta R_3), \quad \Delta R'_2 + \Delta R'_4 = \pm\mu(\Delta R_2 + \Delta R_4) \\ (\Delta R_1 + \Delta R_3) + (\Delta R_2 + \Delta R_4) = 0, \quad (\Delta R'_1 + \Delta R'_3) + (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) = 0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

ここで、静摩擦係数 μ の符号は、繊維およびマトリックス節点の位置関係およびすべりの方向によって変化し、Fig.1-2 のようにマトリックス節点の方が上方向にすべるとき μ の符号は+となり、下方向にすべるとき μ の符号は-となる。なお、本章では界面すべりが z 方向に生じる場合のみを示しているが、界面の形状が幾何学的に変動する場合にも拡張は可能である（付録 B）。

(c) マトリックス破断を伴う界面はく離状態

Fig.2-1(c)に示すように、マトリックス破断が起こることでマトリックス要素が分断し、繊維-マトリックス間において界面せん断はく離が生じ、 z 方向に相対的なずれが生じている状態である。変位増分の等価性および接触力増分のつり合いは次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= \Delta u_2 = \Delta u_3 = \Delta u_4, \quad \Delta w_1 = \Delta w_3 \\
\Delta R'_2 &= -\mu \Delta R_2, \quad \Delta R'_4 = \mu \Delta R_4 \\
\Delta R'_1 + \Delta R'_3 &= 0 \\
(\Delta R_1 + \Delta R_3) + (\Delta R_2 + \Delta R_4) &= 0, \quad (\Delta R'_1 + \Delta R'_3) + (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) = 0
\end{aligned} \tag{2-5}$$

(d) 繊維破断を伴う界面はく離状態

Fig1(d)に示すように、繊維破断が起こることで繊維要素が分断し、かつ繊維マトリクス間で界面せん断はく離が生じ、 z 方向に相対的なずれが生じている状態である。変位増分の等価性および接触力増分のつり合いは次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= \Delta u_2 = \Delta u_3 = \Delta u_4, \quad \Delta w_2 = \Delta w_4 \\
\Delta R'_1 &= -\mu \Delta R_1, \quad \Delta R'_3 = \mu \Delta R_3 \\
\Delta R'_2 + \Delta R'_4 &= 0 \\
(\Delta R_1 + \Delta R_3) + (\Delta R_2 + \Delta R_4) &= 0, \quad (\Delta R'_1 + \Delta R'_3) + (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) = 0
\end{aligned} \tag{2-6}$$

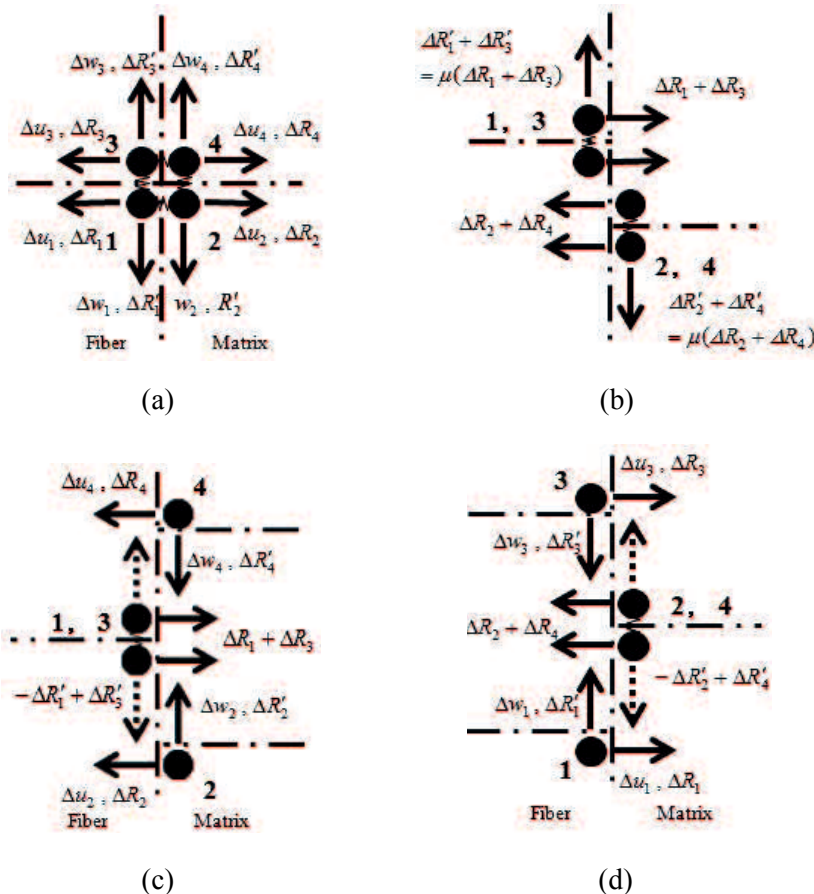


Fig-2-1 Interfacial contact states. (a) Bonding, (b) Interfacial shear debonding, (c) Interfacial shear debonding with matrix crack and (d) Interfacial shear debonding with fiber breakage.

2-4 接触条件の全体剛性方程式への組み込み

式(2-2)の剛性方程式において、界面における任意の4重節点の部分のみを書き出すと、

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta w_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta w_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta w_3 \\ \Delta u_4 \\ \Delta w_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R'_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R'_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R'_3 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta f_{r1} \\ \Delta f_{z1} \\ \Delta f_{r2} \\ \Delta f_{z2} \\ \Delta f_{r3} \\ \Delta f_{z3} \\ \Delta f_{r4} \\ \Delta f_{z4} \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

となる。ここで、 K_{ij} は剛性マトリックス成分であり、 f_{pq} は等価節点力を表す。さらに、界面接触条件（式(2-3)～(2-6)）を用いて、式(2-7)を

$$[K_c]\{\Delta u_c\} = \{\Delta f\} \quad (2-8)$$

のように変形する。その後、式(2-8)を Gauss の消去法により解くことで $\{\Delta u_c\}$ を算出する。この $\{\Delta u_c\}$ は変位と同時に未知荷重（接触力に関する等価節点力 R および R' ）を含み、各変位増分の等価性を基に変位の更正を行なうことで、変位増分 $\{\Delta u\}$ を求める。ここで、(a) 固着状態、(b) 界面はく離状態、(c) マトリックス破断を伴う界面はく離状態、および(d) 繊維破断を伴う界面はく離状態におけるそれぞれの界面接触条件における接触剛性方程式およびその変形方法を以下に示す。

(a) 固着状態

式(2-7)を式(2-3)の制約条件を考慮して展開すると、1行目の f_{1r} は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta f_{r1} &= K_{11}\Delta u_1 + K_{12}\Delta w_1 + K_{13}\Delta u_2 + K_{14}\Delta w_1 + K_{15}\Delta u_3 + K_{16}\Delta w_3 - \Delta R_1 \\ &= (K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17})\Delta u_1 + (K_{12} + K_{14} + K_{16} + K_{18})\Delta w_1 - \Delta R_1 \\ &= (K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17})\Delta u_1 + (K_{12} + K_{14} + K_{16} + K_{18})\Delta w_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4 \end{aligned} \quad (2-9)$$

同様にして、2～8行目の $\Delta f_{z1} \sim \Delta f_{z4}$ は、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta f_{z1} &= (K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27})\Delta u_1 + (K_{22} + K_{24} + K_{26} + K_{28})\Delta w_1 + \Delta R'_2 + \Delta R'_3 + \Delta R'_4 \\ \Delta f_{r2} &= (K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37})\Delta u_1 + (K_{32} + K_{34} + K_{36} + K_{38})\Delta w_1 - \Delta R_2 \\ \Delta f_{z2} &= (K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47})\Delta u_1 + (K_{42} + K_{44} + K_{46} + K_{48})\Delta w_1 - \Delta R'_2 \\ \Delta f_{r3} &= (K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57})\Delta u_1 + (K_{52} + K_{54} + K_{56} + K_{58})\Delta w_1 - \Delta R_3 \\ \Delta f_{z2} &= (K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67})\Delta u_1 + (K_{62} + K_{64} + K_{66} + K_{68})\Delta w_1 - \Delta R'_3 \\ \Delta f_{r4} &= (K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77})\Delta u_1 + (K_{72} + K_{74} + K_{76} + K_{78})\Delta w_1 - \Delta R_4 \\ \Delta f_{z4} &= (K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87})\Delta u_1 + (K_{82} + K_{84} + K_{86} + K_{88})\Delta w_1 - \Delta R'_4 \end{aligned} \quad (2-10)$$

したがって、以下のような行列式に整理することができる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & K_{12} + K_{14} + K_{16} + K_{18} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & K_{22} + K_{24} + K_{26} + K_{28} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & K_{32} + K_{34} + K_{36} + K_{38} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & K_{42} + K_{44} + K_{46} + K_{48} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & K_{52} + K_{54} + K_{56} + K_{58} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & K_{62} + K_{64} + K_{66} + K_{68} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & K_{72} + K_{74} + K_{76} + K_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & K_{82} + K_{84} + K_{86} + K_{88} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta w_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R'_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R'_3 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{A}f_{r1} \\ \mathcal{A}f_{z1} \\ \mathcal{A}f_{r2} \\ \mathcal{A}f_{z2} \\ \mathcal{A}f_{r3} \\ \mathcal{A}f_{z3} \\ \mathcal{A}f_{r4} \\ \mathcal{A}f_{z4} \end{Bmatrix}$$

(2-11)

式(2-3)の接触条件をみると、接触力の変数が6つ増えるが変位の未知変数が6つ減少しているため、未知変数の総数は変わらないことがわかる。このため、式(2-8)の接触力項を左辺に取り込むことが可能になる。この手法を用いると、有限要素法において反復計算を行なうことなく未知変数および未知接触力を得ることができ、計算時間を大幅に短縮することができる。

(b) 界面はく離状態

固着の場合と同様にすると、以下のような行列式に整理することができる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & K_{12} + K_{16} & 1 & K_{14} + K_{18} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & K_{22} + K_{26} & \pm\mu & K_{24} + K_{28} & 1 & 0 & \pm\mu & 0 \\ K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & K_{32} + K_{36} & -1 & K_{34} + K_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & K_{42} + K_{46} & \mp\mu & K_{44} + K_{48} & 0 & 0 & \mp\mu & 1 \\ K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & K_{52} + K_{56} & 0 & K_{54} + K_{58} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & K_{62} + K_{66} & 0 & K_{64} + K_{68} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & K_{72} + K_{76} & 0 & K_{74} + K_{78} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & K_{82} + K_{86} & 0 & K_{84} + K_{88} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta w_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta w_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R'_3 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{A}f_{r1} \\ \mathcal{A}f_{z1} \\ \mathcal{A}f_{r2} \\ \mathcal{A}f_{z2} \\ \mathcal{A}f_{r3} \\ \mathcal{A}f_{z3} \\ \mathcal{A}f_{r4} \\ \mathcal{A}f_{z4} \end{Bmatrix}$$

(2-12)

この場合においては、式(2-4)の接触条件から、接触力の変数が2つ増えるが変位の未知変数が2つ減少しているため、未知変数の総数は変わらず、固着の場合と同様に式(2-8)の接触力項を左辺に取り込むことが可能となる。

(c) マトリックス破断を伴う界面はく離状態

固着の場合と同様にすると、以下のような行列式に整理することができる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & K_{12} + K_{16} & 1 & K_{14} & 1 & 0 & 1 & K_{18} \\ K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & K_{22} + K_{26} & 0 & K_{24} & 0 & 1 & 0 & K_{28} \\ K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & K_{32} + K_{36} & -1 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & K_{38} \\ K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & K_{42} + K_{46} & \mu & K_{14} & 0 & 0 & 0 & K_{48} \\ K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & K_{52} + K_{56} & 0 & K_{14} & -1 & 0 & 0 & K_{58} \\ K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & K_{62} + K_{66} & 0 & K_{14} & 0 & -1 & 0 & K_{68} \\ K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & K_{72} + K_{76} & 0 & K_{14} & 0 & 0 & -1 & K_{78} \\ K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & K_{82} + K_{86} & 0 & K_{14} & 0 & 0 & -\mu & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta w_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta w_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R'_3 \\ \Delta R_4 \\ \Delta w_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{A}f_{r1} \\ \mathcal{A}f_{z1} \\ \mathcal{A}f_{r2} \\ \mathcal{A}f_{z2} \\ \mathcal{A}f_{r3} \\ \mathcal{A}f_{z3} \\ \mathcal{A}f_{r4} \\ \mathcal{A}f_{z4} \end{Bmatrix} \quad (2-13)$$

この場合においては、式(2-5)の接触条件から、接触力の変数が2つ増えるが変位の未知変数が2つ減少しているため、未知変数の総数は変わらず、固着の場合と同様に式(2-8)の接触力項を左辺に取り込むことが可能となる。

(d) 繊維破断を伴う界面はく離状態

固着の場合と同様にすると、以下のような行列式に整理することができる。

$$\begin{bmatrix} -1 & K_{12} & K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & K_{18} + K_{14} & 0 & K_{16} & 0 & 0 \\ \mu & K_{22} & K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & K_{28} + K_{24} & 0 & K_{26} & 0 & 0 \\ 1 & K_{32} & K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & K_{38} + K_{34} & 1 & K_{36} & 1 & 0 \\ 0 & K_{42} & K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & K_{48} + K_{44} & 0 & K_{46} & 0 & 1 \\ 0 & K_{52} & K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & K_{58} + K_{54} & -1 & K_{56} & 0 & 0 \\ 0 & K_{62} & K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & K_{68} + K_{64} & -\mu & K_{66} & 0 & 0 \\ 0 & K_{72} & K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & K_{78} + K_{74} & 0 & K_{76} & -1 & 0 \\ 0 & K_{82} & K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & K_{88} + K_{84} & 0 & K_{86} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta w_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta w_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta w_3 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{A}f_{r1} \\ \mathcal{A}f_{z1} \\ \mathcal{A}f_{r2} \\ \mathcal{A}f_{z2} \\ \mathcal{A}f_{r3} \\ \mathcal{A}f_{z3} \\ \mathcal{A}f_{r4} \\ \mathcal{A}f_{z4} \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

この場合においては、式(2-6)の接触条件から、接触力の変数が2つ増えるが変位の未知変数が2つ減少しているため、未知変数の総数は変わらず、固着の場合と同様に式(2-8)の接触力項を左辺に取り込むことが可能となる。

2-5 すべり抵抗を一定とするモデルの定式化

界面はく離領域に摩擦応力が働く際の力学挙動がしばしば論じられるが、引張負荷が与えられるとき、摩擦によるすべり抵抗（界面せん断応力）を一定値とみなす扱いが主流である^{19),22),23)}。せん断応力を一定値 τ_c として扱うことは、界面のすべり方向（ z 方向）における単位面積当たりの抵抗（接触力）が一定であることを意味する。このとき制約条件は、界面において半径方向に分離しないという前提の元、以下のように与えられる。

(b') 界面はく離状態 (すべり抵抗一定)

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= \Delta u_2 = \Delta u_3 = \Delta u_4, \quad \Delta w_1 = \Delta w_3, \Delta w_2 = \Delta w_4 \\
\Delta R'_1 + \Delta R'_3 &= -(\Delta R'_2 + \Delta R'_4) = T = (2\pi r_f dz) \bar{\tau} \\
(\Delta R_1 + \Delta R_3) + (\Delta R_2 + \Delta R_4) &= 0, (\Delta R'_1 + \Delta R'_3) + (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) = 0
\end{aligned} \tag{2-15}$$

ここで、 T は繊維（半径 r_f 、微小長さ dz ）とマトリックスの界面（表面積 $2\pi r_f dz$ ）に働くすべり方向の荷重であり、界面はく離領域で一定値とみなす。

また、この接触状態において、剛性方程式（式(2-7)）は次のよう整理できる。

(b') 界面はく離状態 (すべり抵抗一定)

$$\begin{bmatrix}
K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & K_{12} + K_{16} & 1 & K_{14} + K_{18} & 1 & 0 & 1 & 0 \\
K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & K_{22} + K_{26} & 0 & K_{24} + K_{28} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & K_{32} + K_{36} & -1 & K_{34} + K_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & K_{42} + K_{46} & 0 & K_{44} + K_{48} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & K_{52} + K_{56} & 0 & K_{54} + K_{58} & -1 & 0 & 0 & 0 \\
K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & K_{62} + K_{66} & 0 & K_{64} + K_{68} & 0 & -1 & 0 & 0 \\
K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & K_{72} + K_{76} & 0 & K_{74} + K_{78} & 0 & 0 & -1 & 0 \\
K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & K_{82} + K_{86} & 0 & K_{84} + K_{88} & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta u_1 \\
\Delta w_1 \\
\Delta R_2 \\
\Delta w_2 \\
\Delta R_3 \\
\Delta R'_3 \\
\Delta R_4 \\
\Delta R'_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathcal{A}_{r1} \\
\mathcal{A}_{z1} + T \\
\mathcal{A}_{r2} \\
\mathcal{A}_{z2} - T \\
\mathcal{A}_{r3} \\
\mathcal{A}_{z3} \\
\mathcal{A}_{r4} \\
\mathcal{A}_{z4}
\end{bmatrix} \tag{2-16}$$

この場合においては、式(2-15)の接触条件から、接触力の変数が5つ増えるが変位の未知変数が5つ減少しているため、未知変数の総数は変わらず、固着の場合と同様に式(2-8)の接触力項を左辺に取り込むことが可能となる。

2-6 要素および境界条件

従来の報告²⁴⁾⁻²⁹⁾で指摘されているように、CMCは他の繊維複合材料に比べ界面はく離の規模が大きく、よって繊維破断点周りの応力集中は著しく小さい。それゆえ、繊維間の相互干渉も極めて小さくなる。そこで、本研究では、Fig.2-2に示すような、円筒状のマトリックス（外半径 $r_m=0.011$ [mm]）に単繊維1本（外半径 $r_f=0.0055$ [mm]）を埋め込んだ長さ $L=2.5$ [mm]の解析モデルをCMCとして想定した。要素タイプは軸対称線形三角形要素とし、節点数1250、要素数1000とした。また、モデル下部を z 軸方向に固定し、モデル中央部にマトリックス破断を、その上下に任意の長さ L_d の界面はく離状態をそれぞれ初期条件として与えたのち、モデル上部の各節点に荷重境界条件を与え解析を行なった。

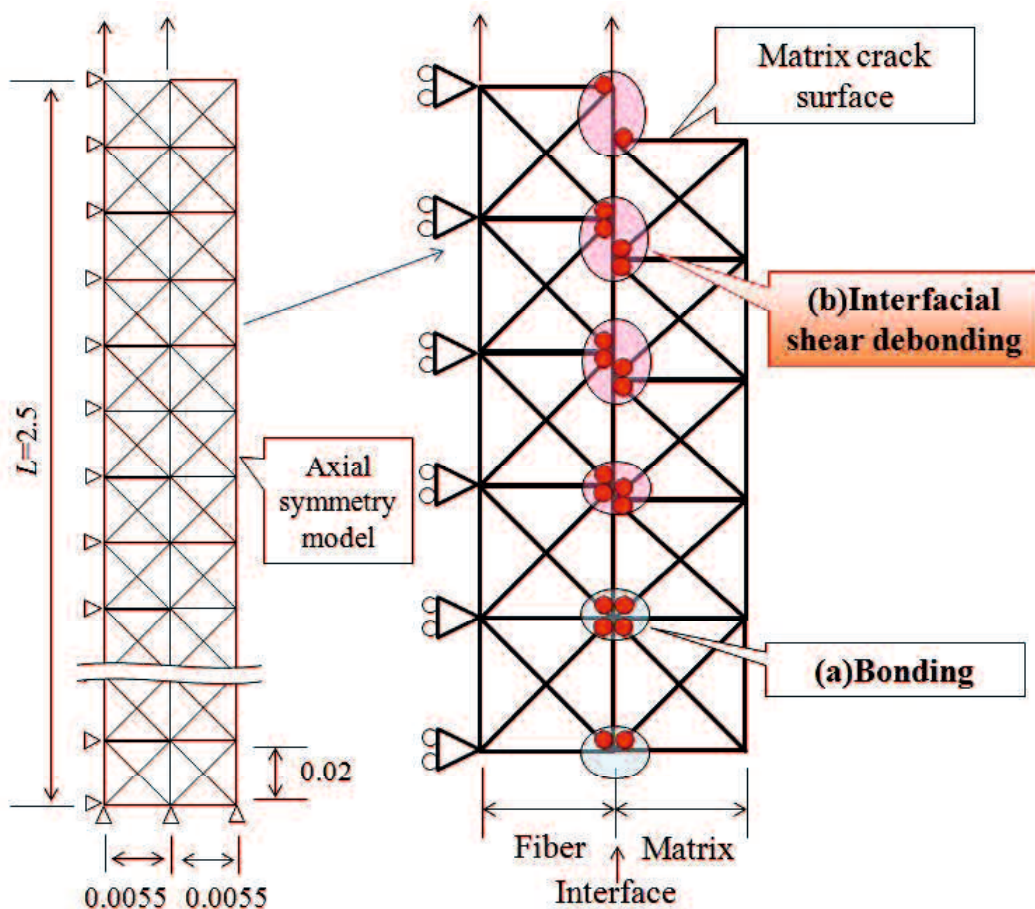


Fig.2-2 Present finite element model.

2-7 結言

本章では、CMCの界面はく離挙動を再現した制約条件付き有限要素モデル提案し、界面摩擦として (i)クーロン摩擦が生じる場合、および (ii) 一定の界面せん断応力が働く場合に対して定式化を行なった。このモデルは、節点における変位の等価性や接触力のつり合いを仮定し、これを制約条件として数値解を求めるものである。利点として、従来の接触問題における繰返し計算を必要とせず、わずか一回の計算で解が得られることが挙げられる。したがって、この制約条件付き有限要素モデルは、計算コストの削減および数値解の発散を防ぐことができ、複数のマトリックスき裂やき裂偏向が生じる場合など、理論モデルや汎用有限要素解析ソフトでは再現が困難な状況下での活用が期待できる。なお、本モデルでは、繊維-マトリックス界面に4重節点を導入することで、(a) 界面固着、(b) 界面はく離（クーロン摩擦則）、(c) マトリックス破断を伴う界面はく離、および(d) 繊維破断を伴う界面はく離状態、以上4つの界面接触状態を提案した。また、(b') 界面はく離（すべり抵抗一定）についても同様の定式化を行った。

第3章 制約条件付き有限要素モデルの妥当性の検証

3-1 はじめに

本章では, 第2章で提案した制約条件付き有限要素モデルにおいて(i) 圧縮負荷下においてクーロン摩擦が生じる場合, および (ii) 引張負荷下においてすべり抵抗を一定とする場合の解析結果として, そのマトリックスクラック周辺の繊維およびマトリックスの軸方向, 半径方向および円周方向応力について示す. また, 以上の制約条件付き有限要素法による解析結果に加え, 既存の理論モデルおよび汎用有限要素解析ソフト ANSYS の解析結果との比較を行なうことで, 本モデルの妥当性を検証する. さらに, 制約条件付き有限要素モデルにおいて, ヤング率, ポアソン比, 静摩擦係数の各種パラメータについてもその影響について調査する.

3-2 制約条件付き有限要素モデル, 理論モデルおよび汎用有限要素解析結果

Fig.3-1~Fig.3-3 に制約条件付き有限要素法, 理論界面はく離モデルおよび汎用有限要素解析ソフト ANSYS による解析結果を示す. ここでは, 便宜上, ヤング率 $E_f=E_m=200$ [GPa], ポアソン比 $\nu_f=\nu_m=0.2$, 静摩擦係数 $\mu=0.05$, 温度変化 $\Delta T=0$ [K], 界面はく離長さ $L_d=1.0$ [mm]とした (Table 3-1). また, 制約条件付き有限要素モデルでは線形三角形要素 (節点数 1250, 要素数 1000), ANSYS では軸対称 6 節点三角形要素 (節点数 1506, 要素数 1000) を用い, 理論モデルは, Chiang²¹⁾によって提案されたものを用いた (1章5節2項参照). なお, 境界条件として, 解析モデル上部の節点に荷重応力が $\sigma=0.25$ [MPa]となるように, $P=\pi r_m^2 \sigma$ の荷重境界条件を与え, 解析を行った.

Table 3-1 Material constants and simulation conditions of present FE model and ANSYS.

	Fiber	Matrix	Total
Young's modulus E_f, E_m [GPa]	200	200	-
Poisson's ratio ν_f, ν_m	0.2	0.2	-
Radius r_f, r_m	0.0055	0.011	-
Number of node	625/377	625/377	1250/754
Number of element	500	500	1000
Coefficient of static friction μ		0.05	
Temperature change ΔT [K]		0 ($q_i=0$)	
Debonding length L_d [mm]		1.0	

※Present FE model (Axial symmetry linear triangular element)

ANSYS (Axial symmetry 6-node triangular element)

Fig.3-1(a)より、本モデルではマトリックスき裂面から1 mm以上の固着領域において、 σ_f および σ_m はともに一致し、一定の推移になることが確認できる。一方、き裂面から1 mm以内のはく離領域において σ_m はマトリックスき裂面より非線形的な応力回復を示し、 σ_f はマトリックスき裂面で最大値をとることが確認できる。これは、マトリックスき裂の発生により、本来マトリックス側で受け持つべき荷重を繊維側ですべて受け持つためである。また、はく離先端近傍の力学的挙動において、繊維及びマトリックスの急激な応力変化を確認することができる。これは、界面の接触状態がはく離状態から固着状態に移行するためである。一方、Fig.3-1(b)より固着領域においては、 σ_r および σ_θ はともに0になることが確認できる。これは、熱応力を初期条件として与えておらず、繊維およびマトリックスのポアソン比を同値であるためである。はく離領域においては、両者の分布は非線形的にふるまい、 r 方向において繊維およびマトリックスに圧縮応力が働いていることが認められた。これは、界面はく離領域では、繊維とマトリックスの z 方向のひずみに差異が生じ、ポアソン効果によって r 方向のひずみに違いが生じた結果である。また、マトリックス側の σ_r および σ_θ については r 座標の位置によりひずみ分布が変化し、外側の要素の応力が小さくなることが確かめられた。なお、図中の半径 r の値はそれぞれの要素の重心座標で与えている。

Fig.3-2より理論モデルによる解析結果においても、はく離領域で応力分布は非線形性を示し、 z 方向に関しては繊維、マトリックスともに本モデルの結果と良好な一致を示すことが確認できる。また、 r および θ 方向に関しても繊維応力は良好な一致を示し、マトリックス応力はわずかな差異は見られるものの、ほぼ一致することが確認できた。この差異は、要素形状や理論モデルにおける $(\sigma_r)_m$ および $(\sigma_\theta)_m$ (式(1-13)および(1-14))中の半径 r の定義に問題があったのではないかと考えられる。

また、Fig.3-3-1~3-3-3より、ANSYSによる解析結果において、はく離領域で応力分布は非線形性を示すことが確認できる。また、その応力分布は、拡大ラグランジュ法 (Fig.3-3-1) とペナルティ法 (Fig.3-3-2)、混合法 (Fig.3-3-3) と制約条件付きモデル (Fig.3-1) でそれぞれ一致することが確認できる。さらに、Table 3-2に示すように、拡大ラグランジュ法とペナルティ法の繰返し計算数および解析時間はほぼ一致したのに対し、混合法では繰返し計算数および解析時間が大きくなることが確認できた。

Table 3-2 Iteration number and simulation time by ANSYS and present FE model.

Simulation algorithm	Bite tolerance	Iteration number	Simulation time [sec]
Lagrange	△	9	4
Penalty	○	9	4
Lagrange & Penalty	×	13	5
Present	×	1	0.733

※windows7, 4GB,32bit

このようになった原因としては、混合法および制約条件付きモデルでは、共に『食込み量0, 即ち, 界面における変位が等しい』を強要し, 拡大ラグランジュ法およびペナルティ法ではそれを強要しないためであると考えられる. また, 制約条件付きモデルは繰り返し計算回数が一回で済むことから, 計算時間が短く, 計算コストの面でANSYSより優れているということが確認できた.

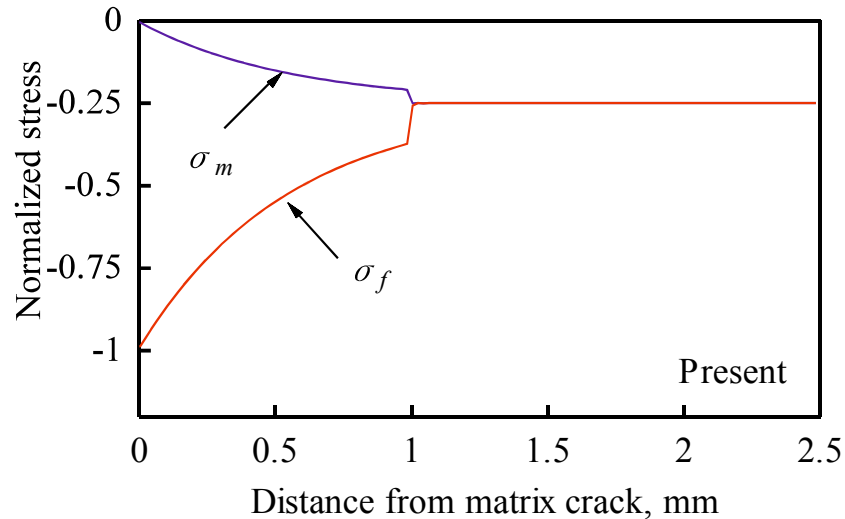
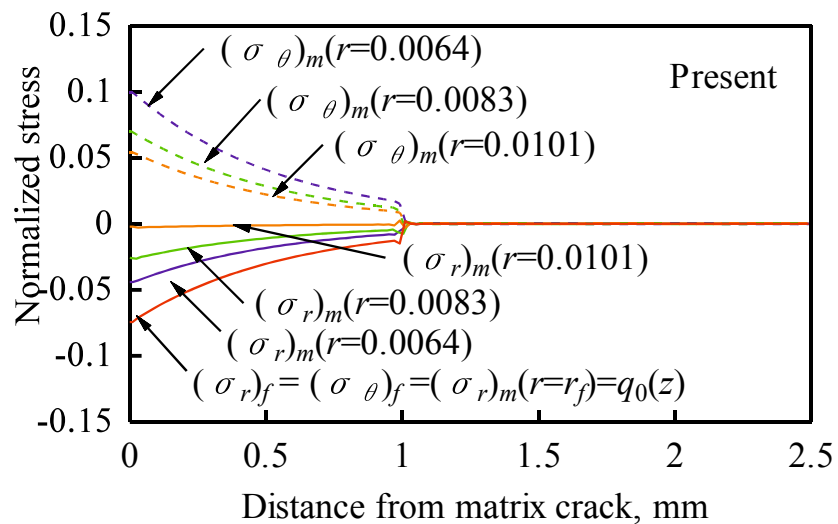
(a) σ_f and σ_m (b) σ_r and σ_θ

Fig.3-1 Stress distributions by present FE model.

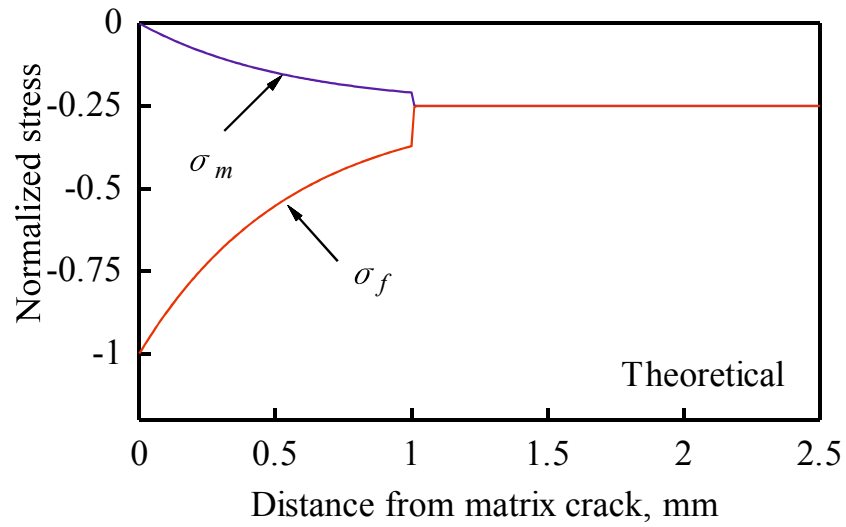
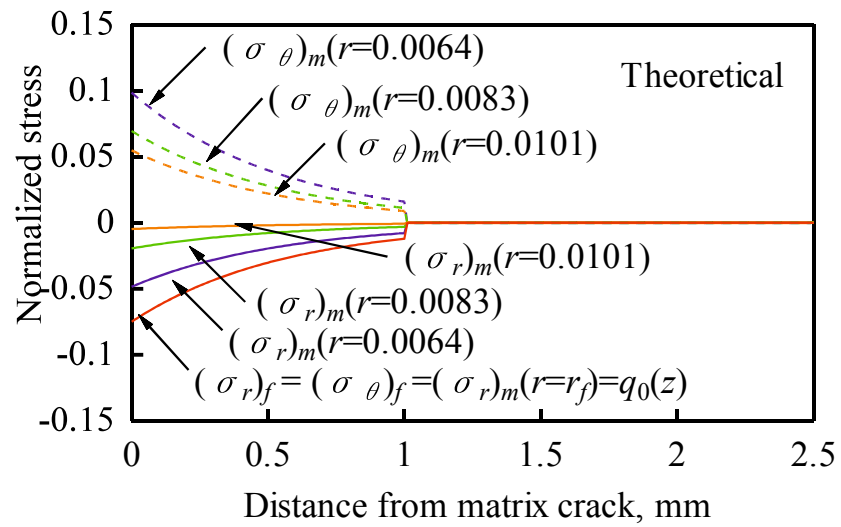
(a) σ_f and σ_m (b) σ_r and σ_θ

Fig.3-2 Stress distributions by theoretical model.

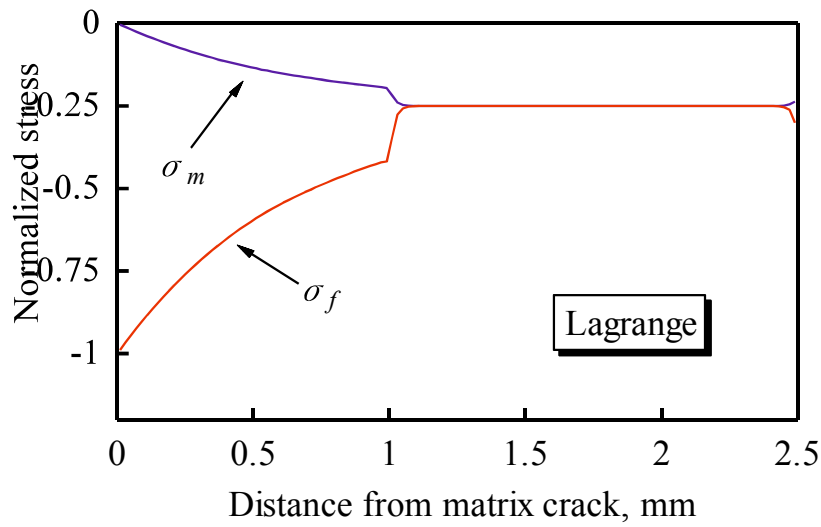
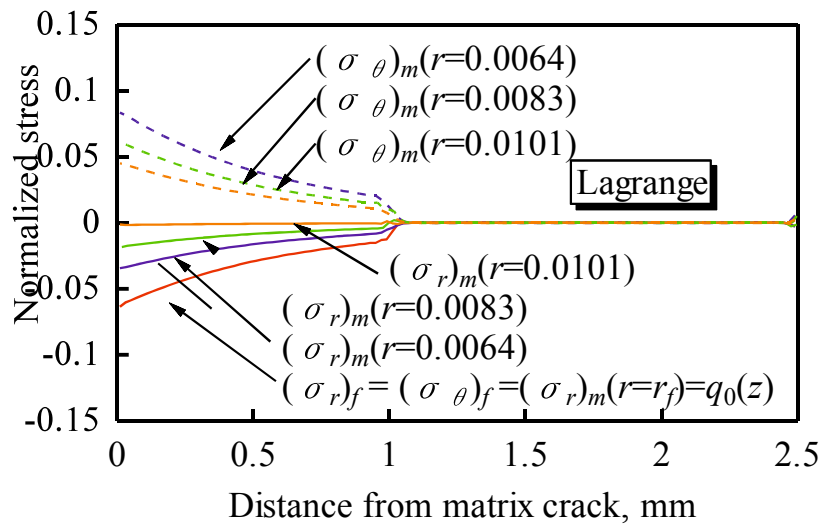
(a) σ_f and σ_m (b) σ_r and $\sigma_{\theta r}$

Fig.3-3-1 Stress distributions by ANSYS (Lagrange method).

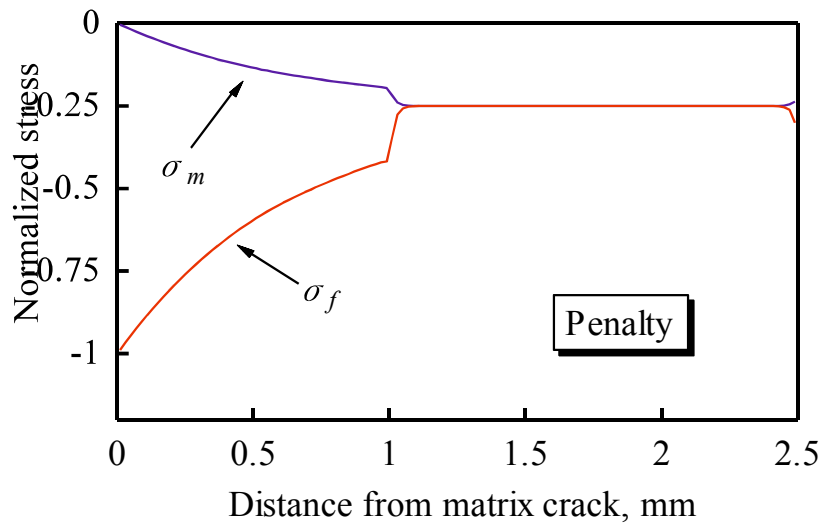
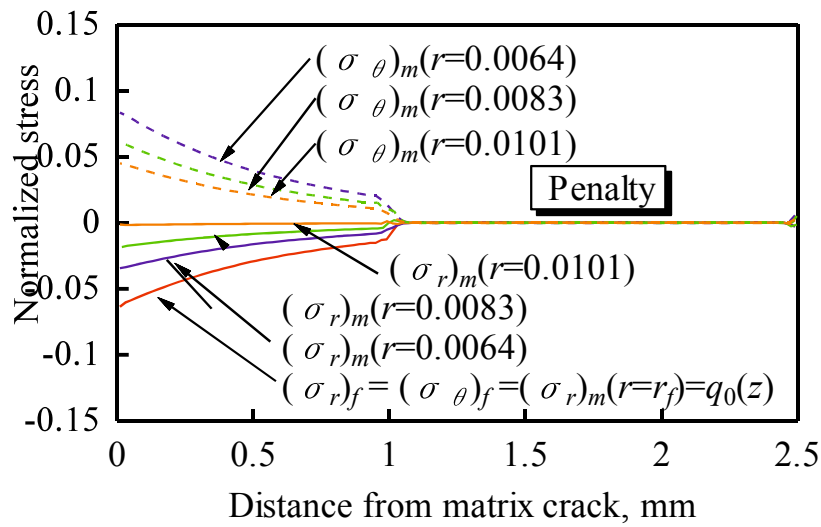
(a) σ_f and σ_m (b) σ_r and $\sigma_{\theta r}$

Fig.3-3-2 Stress distributions by ANSYS (Penalty method).

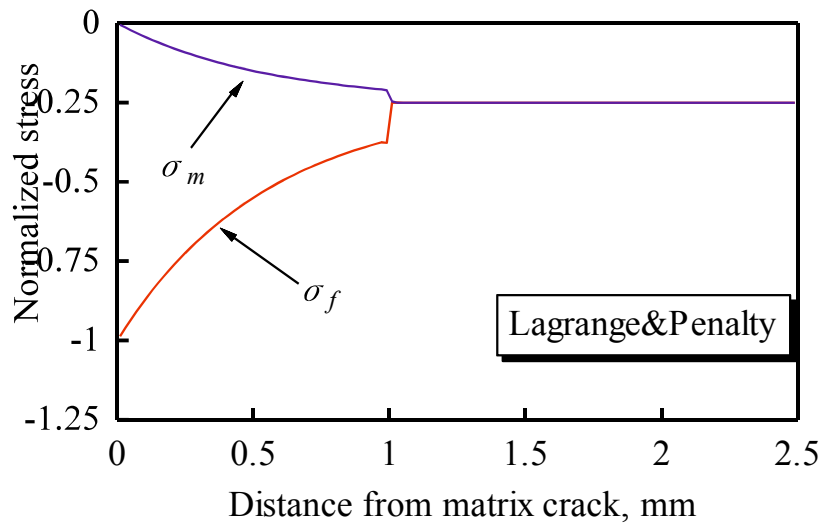
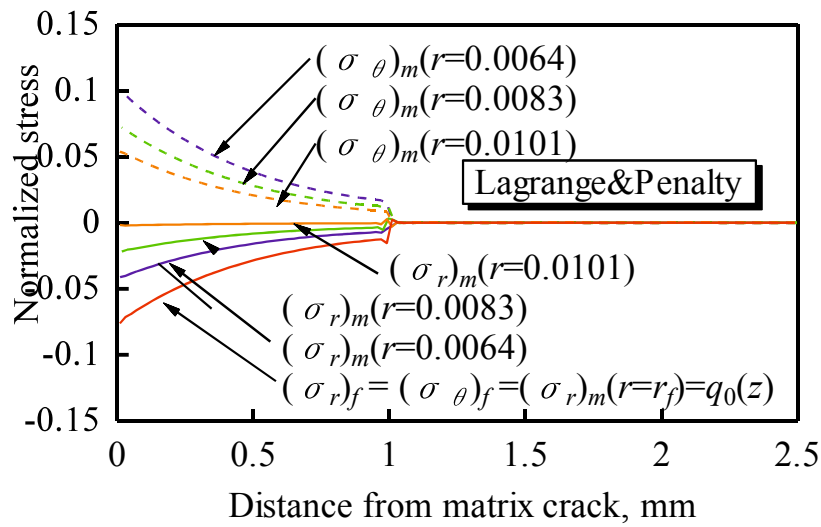
(a) σ_f and σ_m (b) σ_r and σ_θ

Fig.3-3-3 Stress distributions by ANSYS (Lagrange and Penalty method).

3-3 各種パラメータの影響

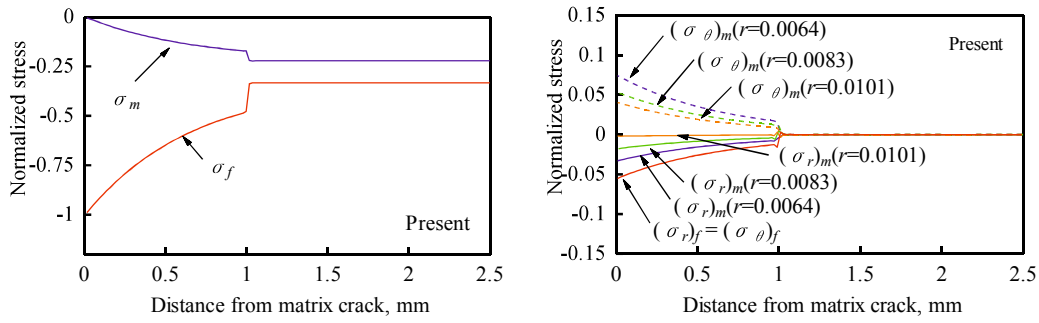
ヤング率, ポアソン比および静摩擦係数を変化させたときの制約条件付き有限要素モデルによる解析結果をそれぞれ Fig.3-4~3-6 に示す. なお, ヤング率は $\alpha=E_m/E_f=200/300, 200/200, 300/300$, ポアソン比は $\nu_f/\nu_m=0.3/0.2, 0.2/0.2, 0.2/0.3$, 静摩擦係数は $\mu=0.03, 0.05, 0.1$ と変化させた.

Fig.3-4 より繊維マトリックスのヤング率大きくすると, 界面はく離領域において, それぞれの繊維マトリックス z 方向応力が大きくなることが確認できた. また, r および θ 方向応力に関して, 繊維のヤング率 E_f が大きくなるにつれ σ_r および σ_θ が小さくなることが確認できる. これは, E_f が大きくなると繊維が変形しにくくなり, 繊維マトリックス界面に働くポアソン応力 $q_0(z)$, すなわち繊維の r および θ 方向応力 $(\sigma_r)_f=(\sigma_\theta)_f$ が小さくなるためである. また, 固着領域において, 応力が一定となっていることが確認できる. これは, ポアソン比を $\nu_f=\nu_m=0.2$ と同値としているためである.

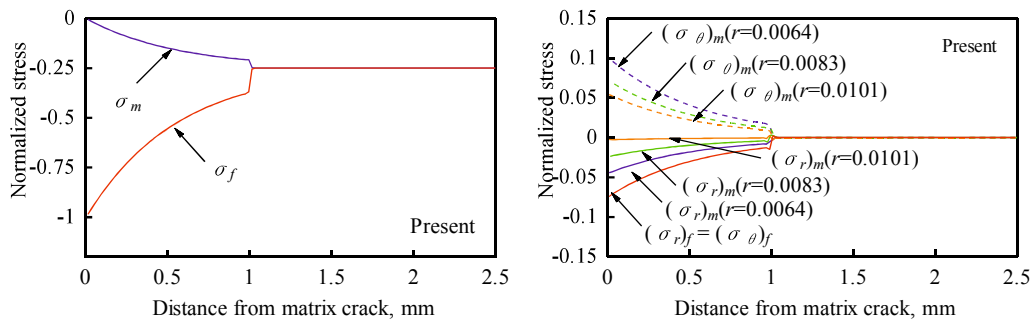
Fig.3-5 より繊維のポアソン比 ν_f を大きくすると, 界面はく離領域において, r および θ 方向応力が大きくなることが確認できる. これは, ポアソン比 ν_f が大きくなるとポアソン効果により繊維の r 方向ひずみが大きくなり, 結果として繊維の r および θ 方向応力 $(\sigma_r)_f=(\sigma_\theta)_f$ が大きくなるためである. また, $\nu_f > \nu_m$ のとき (Fig.3-5(a)), 固着領域において, ポアソン応力 $q_0(z)=(\sigma_r)_f=(\sigma_\theta)_f$ が応力となることが確認できる. これは, 繊維のほうにポアソン効果により半径 r 方向に大きく膨張しようとするため, 界面が食い込むような応力が働き, 結果として繊維に r 方向の圧縮応力がかかるためである.

Fig.3-6 より静摩擦係数 μ を変化させると, z, r および θ 方向いずれの応力分布の傾きに変化が現れ, μ を大きくすると, 応力の変化が急になることが確認できる. これは, μ が大きくなると, 繊維マトリックス界面に働くすべり方向 (z 方向) の接触力が大きくなり, 結果として, マトリックス破断点からの応力回復が大きくなるためである.

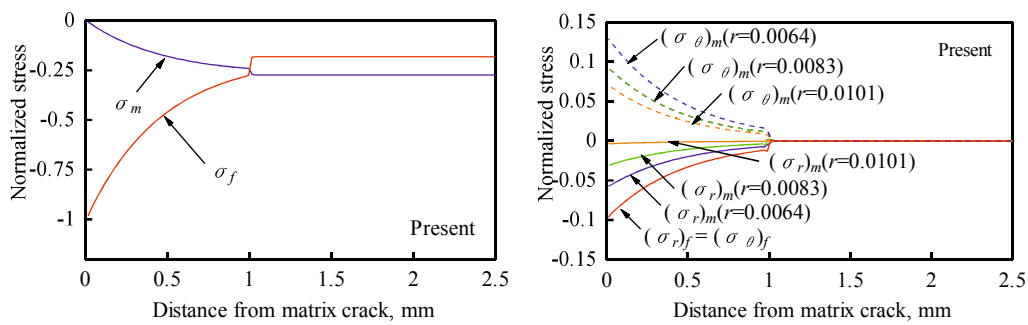
以上のように, CMC の界面はく離挙動において, ヤング率, ポアソン比, 静摩擦係数などが影響を与えることが確認できた.



(a) $\alpha = E_m/E_f = 200/300$



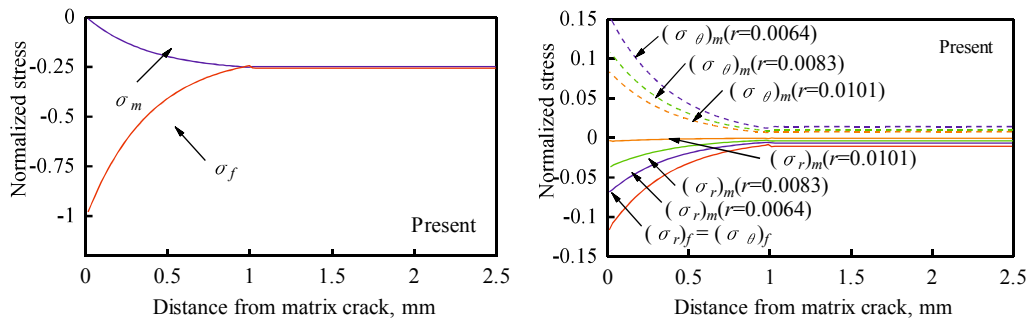
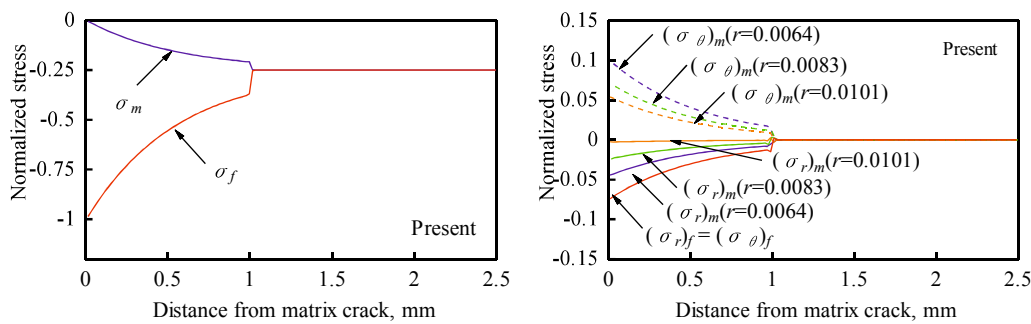
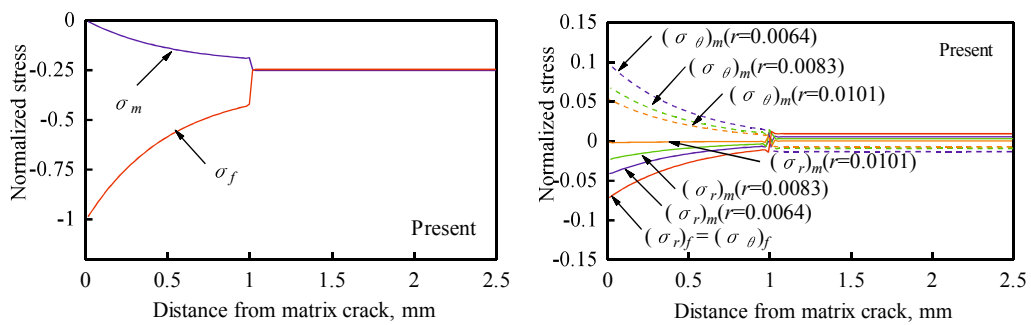
(b) $\alpha = E_m/E_f = 200/200$

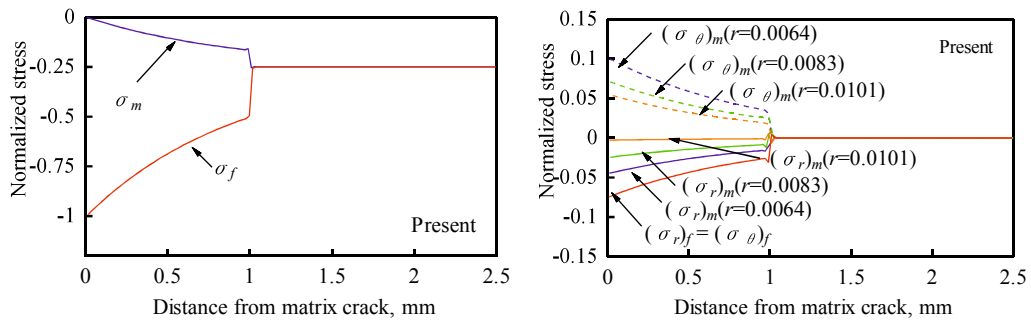
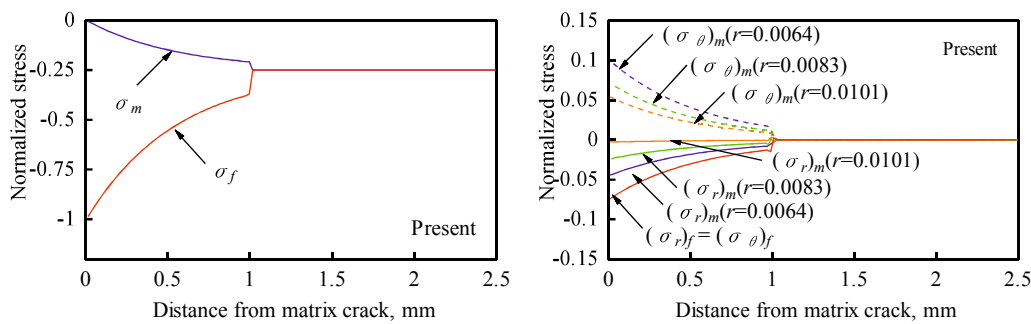
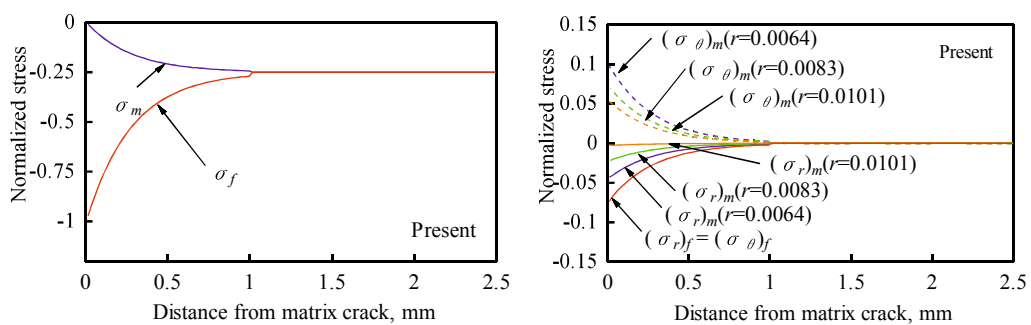


(c) $\alpha = E_m/E_f = 300/200$

Fig.3-4 Stress distributions by present FE model with various young's modulus E_f and E_m .

($\nu_f = \nu_m = 0.2 = \text{const}$, $\mu = 0.05 = \text{const}$)

(a) $v_f/v_m=0.3/0.2$ (b) $v_f/v_m=0.2/0.2$ (c) $v_f/v_m=0.2/0.3$ Fig.3-5 Stress distributions by present FE model with various Poisson's ratio v_f and v_m . $(E_f=E_m=200\text{GPa}=\text{const}, \mu=0.05=\text{const})$

(a) $\mu=0.03$ (b) $\mu=0.05$ (c) $\mu=0.1$ Fig.3-6 Stress distributions by present FE model with various coefficient static friction μ .

$$(E_f=E_m=200\text{GPa}=\text{const}, \nu_f=\nu_m=0.2=\text{const})$$

3-4 すべり抵抗を一定とするモデルの解析結果

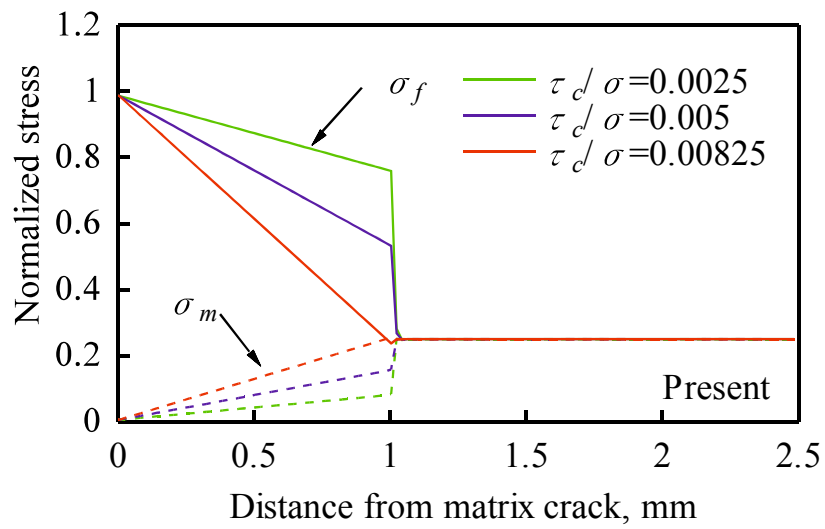
摩擦によるすべり抵抗を一定としたときの z 方向応力分布を Fig.3-7(a)および(b)に示す. 前者が提案した制約条件付き有限要素モデル, および後者は Budiansky ら¹⁹⁾のモデル (1章5節1項参照) である. このとき, $\tau_c/\sigma=0.0025, 0.005, 0.00825$ ($T=2\pi r_f dz=4.3\times 10^{-7}, 8.6\times 10^{-7}, 1.47\times 10^{-6}$ [N]) とした. 同図に示すように, 応力分布はともに界面はく離領域において線形的に変化し, τ_c/σ が大きくなるにつれてその傾きが大きくなることを確認できる. また, 両者の結果はほぼ一致し, 本有限要素モデルにより, せん断応力一定の場合の理論解を数値的に再現できたと言える.

3-5 結言

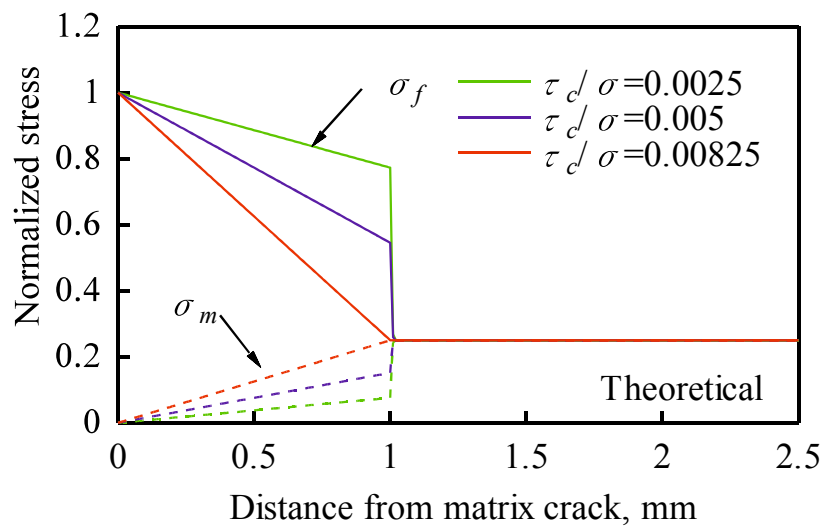
本章では, 第2章で提案した CMC の界面はく離挙動を再現した制約条件付き有限要素モデルによる解析結果を, 界面摩擦として (i) 圧縮負荷においてクーロン摩擦が生じる場合, および (ii) 引張負荷において一定の界面すべり抵抗が働く場合に対して示した. また, その解析結果を理論界面はく離モデルおよび汎用有限要素解析ソフト ANSYS と比較し, その妥当性の検証を行なった.

その結果, 制約条件付き有限要素モデルにおいて, (i) 圧縮負荷下でクーロン摩擦が生じる場合, 界面固着領域においてマトリックスおよび繊維軸応力はともに一定になることが確認された. 界面はく離領域では, マトリックス軸応力はマトリックスき裂面から非線形的な応力回復を示し, 繊維軸応力はマトリックスき裂面で最大値をとることが確認された. また, 界面はく離先端近傍の力学的挙動において, 繊維及びマトリックスの急激な応力変化を確認することができた. 一方, 半径および円周方向応力は, 界面固着領域においてともにゼロになることが確認された. また, 界面はく離領域では, 応力はともに非線形を示し, 繊維およびマトリックスの半径方向に圧縮応力が働くことも確認した. 以上の力学挙動は, 従来からの界面はく離をともなう CMC の損傷メカニズムと合致するものである. さらに, 以上の本モデルによる数値解を汎用有限要素解析ソフト (ANSYS) による数値解および理論モデルによる解析解と比較したところ, すべて定量的にほぼ一致することが判明した.

一方, 制約条件付き有限要素モデルにおいて(ii) 引張負荷下で一定の界面すべり抵抗が働く場合 (界面せん断応力を一定とする), 界面はく離領域において繊維およびマトリックスの応力分布は線形的に変化し, この場合も理論モデルによる解析解と定量的にほぼ一致することが判明した.



(a) Present FE model



(b) Theoretical model

Fig.4-6 z-axis stress distribution of contact shear stress model with various τ_c/σ .

第4章 制約条件付き有限要素モデルの応用

4-1 はじめに

第2, 3章では, CMCの界面はく離後に界面摩擦として(i) 圧縮負荷下でクーロン則に基づくクーロン摩擦が生じる場合および(ii) 引張負荷下で一定のすべり抵抗が働く場合について述べてきた. しかし, CMCの損傷過程を再現するためには, 損傷のない状態から界面はく離発生への推移条件, すなわち, 接着強度や界面はく離エネルギーのような臨界値を踏まえた上で論じられる必要がある. さらに, このような静的負荷に加え, 繰返し負荷における挙動についても考慮しなければならない.

そこで本章では, まず界面損傷前後の力学的挙動を扱う代表的な有限要素である結合力要素に対し, 制約条件付き有限要素モデルによる定式化を行う. 続いて, CMCの繰返し負荷下におけるヒステリシスループ挙動を再現するため, 繰返し界面すべりによる摩擦固着状態の定式化を行なう.

4-2 結合力要素の定式化

CMCの損傷の一つである界面はく離をシミュレートするために, 面間に結合力を配した結合力要素(cohesive element)が提案されている³⁰⁾. この要素は, ①層間における複数の節点をバネ要素で結合するモデルと, ②層間にソリッド要素を配置して層間を連続的に結合するモデルが存在し, 外力により生じた節点間の相対変位の変化にともない, 結合力が変化するように定義されている. このとき, 最終的な分離は, 結合力の最大値または結合力要素の破壊に要するエネルギーの値で決定される.

そこで, この結合力要素を①の手法に基づいて本研究における制約条件付き有限要素モデルに適用させる. ここで, Fig.4-1(a)に示すように, 結合力が働く状態, 即ち, 界面は z 方向にすべるが, 半径方向に分離せず, また, z 方向の接触力がFig.4-2に示すように繊維マトリックス間の相対変位 $\delta w = |w_m - w_f|$ の大きさにより変化する状態であるとき, 変位増分の等価性および接触力増分のつり合いは次式で表わされる.

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_2 = \Delta u_3 = \Delta u_4 \\ \Delta w_1 &= \Delta w_3, \quad \Delta w_2 = \Delta w_4 \\ \Delta R'_2 + \Delta R'_4 &= -(\Delta R'_1 + \Delta R'_3) = m(\Delta w_1 - \Delta w_2) \\ (\Delta R_1 + \Delta R_3) + (\Delta R_2 + \Delta R_4) &= 0 \\ (\Delta R'_1 + \Delta R'_3) + (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) &= 0 \end{aligned} \quad (4-1)$$

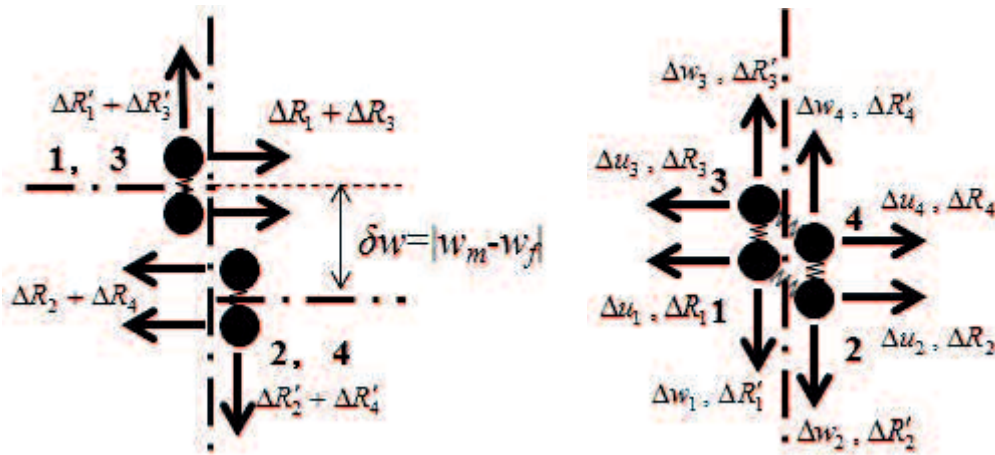
$$m = \begin{cases} m_0 & (0 \leq \delta w \leq \delta w_{\max}) \\ \frac{m_0 \delta w_{\max} (1 - \delta w_{sp} / \delta w)}{\delta w_{sp} - \delta w_{\max}} & (\delta w_{\max} < \delta w \leq \delta w_{sp}) \\ 0 & (\delta w_{sp} < \delta w) \end{cases} \quad (4-2)$$

ここで、Fig.4-2 に示すように、 δw_{\max} および δw_{sp} はそれぞれ結合力が最大および 0 となる相対変位を示す。また、係数 m は $0 \leq \delta w \leq \delta w_{\max}$ の領域で $m=m_0$ で一定であり、 $\delta m_{\max} \leq \delta w \leq \delta w_{sp}$ の領域では $m=m_0$ から 0 に減衰し、 $\delta w_{sp} \leq \delta w$ の領域では $m=0$ となる関数である。

また、この接触状態において、剛性方程式（式(2-8)）は次のよう変形できる。

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & K_{12} + K_{16} & 1 & K_{14} + K_{18} & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & K_{22} + K_{26} + m & 0 & K_{24} + K_{28} - m & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & K_{32} + K_{3,6} & -1 & K_{34} + K_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & K_{42} + K_{46} - m & 0 & K_{44} + K_{48} + m & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & K_{52} + K_{56} & 0 & K_{54} + K_{58} & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & K_{62} + K_{66} & 0 & K_{64} + K_{68} & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & K_{72} + K_{76} & 0 & K_{74} + K_{78} & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & K_{82} + K_{86} & 0 & K_{84} + K_{88} & 0 & 0 & 0 & -1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta u_1 \\
 \Delta w_1 \\
 \Delta R_2 \\
 \Delta w_2 \\
 \Delta R_3 \\
 \Delta R'_3 \\
 \Delta R_4 \\
 \Delta R'_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \Delta f_{r1} \\
 \Delta f_{z1} \\
 \Delta f_{r2} \\
 \Delta f_{z2} \\
 \Delta f_{r3} \\
 \Delta f_{z3} \\
 \Delta f_{r4} \\
 \Delta f_{z4}
 \end{bmatrix}
 \tag{4-3}$$

この場合においては、式(4-1)の接触条件から、接触力の変数が 5 つ増えるが変位の未知変数が 5 つ減少しているため、未知変数の総数は変わらず、固着の場合と同様に式(2-8)の接触力項を左辺に取り込むことが可能となる。



(a) Interfacial debonding (Cohesive element) (b) Interfacial re-bonding with friction

Fig.4-1 Interfacial contact states.

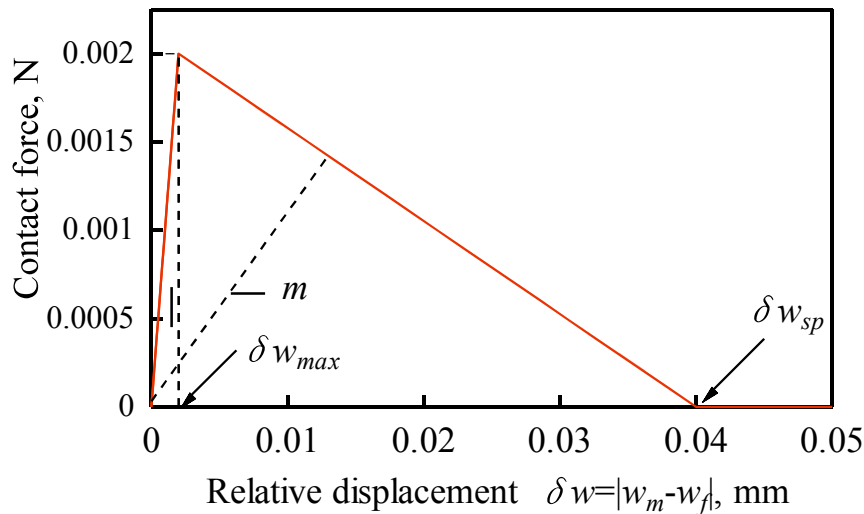


Fig.4-2 The relationship of relative displacement and contact force in cohesive element.

4-3 繰返し界面すべりによる摩擦固着状態の定式化

4-3-1 界面状態の定義と接触条件

CMC は繰返し負荷下において、ヒステリシスループを描き、繰返し数の増加に伴い、そのループは徐々に右方向（正のひずみ方向）に移動するとともにひずみ幅も大きくなる傾向がみられる。そこで本研究では、この繰返し負荷下における変形挙動を再現するために、提案した制約条件付き有限要素モデルにより繰返し界面すべりによる摩擦固着状態の定式化を行なった。

Fig.4-1(b)に示すように、摩擦固着状態、即ち、繰返し負荷において負荷、除荷が反転し、再びすべりが生じる直前の状態（一度界面はく離れた4重節点が、 z 方向にずれてすべらない状態）のとき、変位増分の等価性および接触力増分のつり合いは、次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 \Delta u_1 &= \Delta u_2 = \Delta u_3 = \Delta u_4 \\
 \Delta w_2 &= (z_2/z_1)\Delta w_1, \quad \Delta w_3 = (z_3/z_1)\Delta w_1, \quad \Delta w_4 = (z_4/z_1)\Delta w_1 \\
 \Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4 &= 0, \quad \Delta R'_1 + \Delta R'_2 + \Delta R'_3 + \Delta R'_4 = 0
 \end{aligned} \tag{4-4}$$

ここで、 z は節点 1~4 の z 座標であり、 z 方向変位増分 Δw はその節点の z 座標に比例するとしている。

また、この接触状態において、剛性方程式（式(2-8)）は次のよう整理できる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}+K_{13}+K_{15}+K_{17} & K_{12}+(z_2/z_1)K_{14}+(z_3/z_1)K_{16}+(z_4/z_1)K_{18} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ K_{21}+K_{23}+K_{25}+K_{27} & K_{22}+(z_2/z_1)K_{24}+(z_3/z_1)K_{26}+(z_4/z_1)K_{28} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ K_{31}+K_{33}+K_{35}+K_{37} & K_{32}+(z_2/z_1)K_{34}+(z_3/z_1)K_{36}+(z_4/z_1)K_{38} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}+K_{43}+K_{45}+K_{47} & K_{42}+(z_2/z_1)K_{44}+(z_3/z_1)K_{46}+(z_4/z_1)K_{48} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{51}+K_{53}+K_{55}+K_{57} & K_{52}+(z_2/z_1)K_{54}+(z_3/z_1)K_{56}+(z_4/z_1)K_{58} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{61}+K_{63}+K_{65}+K_{67} & K_{62}+(z_2/z_1)K_{64}+(z_3/z_1)K_{66}+(z_4/z_1)K_{68} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ K_{71}+K_{73}+K_{75}+K_{77} & K_{72}+(z_2/z_1)K_{74}+(z_3/z_1)K_{76}+(z_4/z_1)K_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ K_{81}+K_{83}+K_{85}+K_{87} & K_{82}+(z_2/z_1)K_{84}+(z_3/z_1)K_{86}+(z_4/z_1)K_{88} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta w_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R'_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R'_3 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta f_{r1} \\ \Delta f_{z1} \\ \Delta f_{r2} \\ \Delta f_{z2} \\ \Delta f_{r3} \\ \Delta f_{z3} \\ \Delta f_{r4} \\ \Delta f_{z4} \end{Bmatrix} \quad (4-5)$$

この場合においては、式(2-7)の接触条件から、接触力の変数が6つ増えるが変位の未知変数が6つ減少しているため、未知変数の総数は変わらず、固着の場合と同様に式(2-8)の接触力項を左辺に取り込むことが可能となる。

4-3-2 R_{min} 法による界面接触状態の判定

繊維複合材料の繰返し負荷下に現れるヒステリシスループ挙動を再現するためにあたり、 R_{min} 法³¹⁾により繊維-マトリックス界面の接触状態の変化を判定した。ここで、Fig.4-3 に本解析における界面接触状態判定のフローチャートを示す。

まず、モデル中央部にマトリックス破断を初期条件として与え、モデル上部に任意の荷重境界条件を与える。その後、第2章の内容に従い、接触力を考慮した剛性方程式 $[K]\{\Delta u\}=\{\Delta f\}+\{\Delta R\}$ (式(2-7)) を作製した後、各接触条件を組み込み、接触剛性方程式 $[K_c]\{\Delta u_c\}=\{\Delta f\}$ (式(2-8)) を作製する。これを Gauss の消去法で解き、 $\{\Delta u_c\}$ を算出するが、この $\{\Delta u_c\}$ は、式(2-11)~(2-14),(2-16),(4-3)および(4-5)に示すように、変位計算と同時に未知荷重（接触力に関する等価節点力 R および R' ）が計算される。よって、式(2-3)~(2-6),(2-15)および(4-4)に示す、各変位増分の等価性を基に変位の更正を行い、変位増分 $\{\Delta u\}$ を求めた後、ひずみ増分 $\{\Delta \varepsilon\}=[B]\{\Delta u\}$ および応力増分 $\{\Delta \sigma\}=[D]\{\Delta \varepsilon\}$ を求めた。

次に繊維-マトリックス界面の接触状態の判定を行なう。まず、界面はく離の判定する際、隣り合う繊維およびマトリックスの要素のせん断応力の絶対値の平均値をその界面における界面せん断応力 $\bar{\tau}$ とし (Fig.4-4)、界面せん断強度 τ_{int} との比 $r_{intmin}=\tau_{int}/\bar{\tau}$ を計算する。また、繊維（もしくはマトリックス）の破断を判定する際には、繊維（もしくはマトリックス）の正方断面上下2つの三角形要素の z 軸方向応力の平均値を $\bar{\sigma}$ とし (Fig.4-4)、引張強度 σ_{UTS} との比 $r_{UTSmin}=\sigma_{UTS}/\bar{\sigma}$ を計算する。Fig.4-4 に示すように、 R_{min} 法では、すべての界面において、 $r_{intmin}=\tau_{int}/\bar{\tau}$ および $r_{UTSmin}=\sigma_{UTS}/\bar{\sigma}$ を計算し、その中で最小の r_{min} 、即ち、 R_{min} を持つ対象要素の界面、繊維、マトリックスをそのステップにおける損傷点とした。続いて、その R_{min} に基づいて各節点変位増分を変更するとともに、同様な計算を繰返した。指定の負荷応力に達したのちは、圧縮方向に変位増分を与えながら同様な繰返し計算を行ない、繰返し応力-ひずみ曲線を作成した。

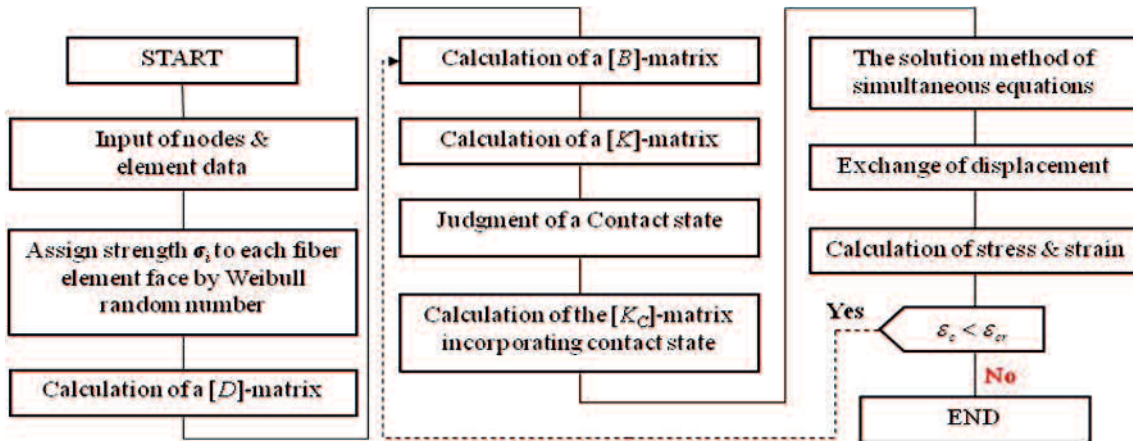


Fig.4-3 Flowchart of damage propagation analysis program.

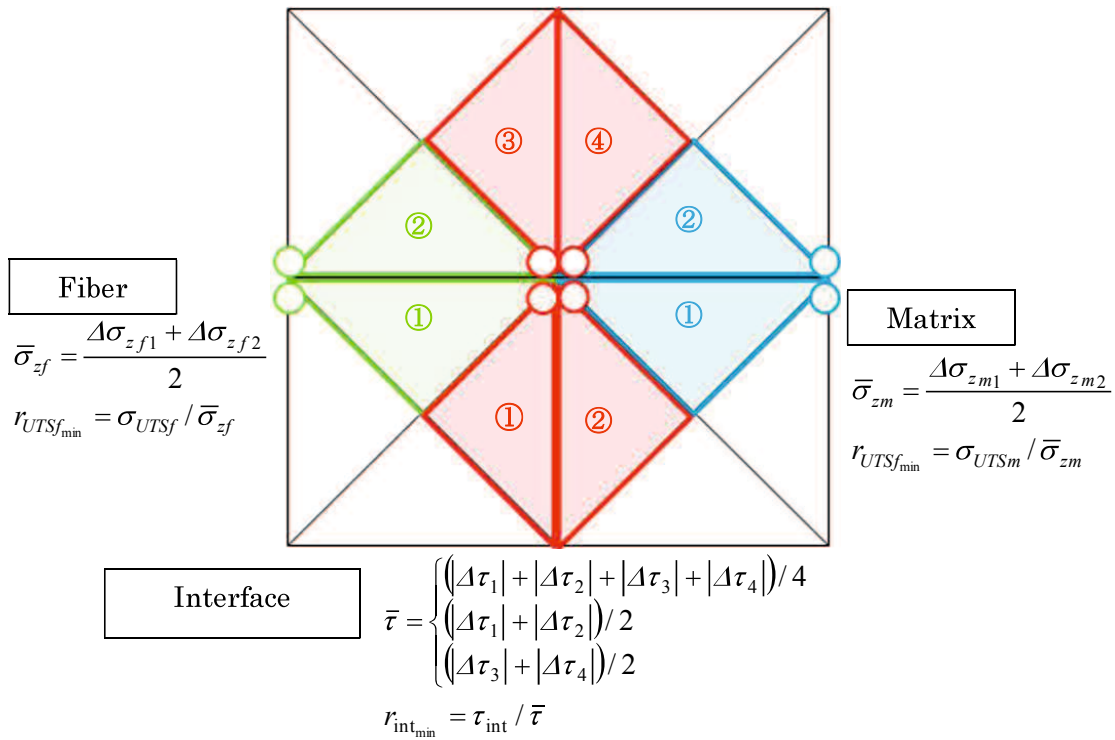
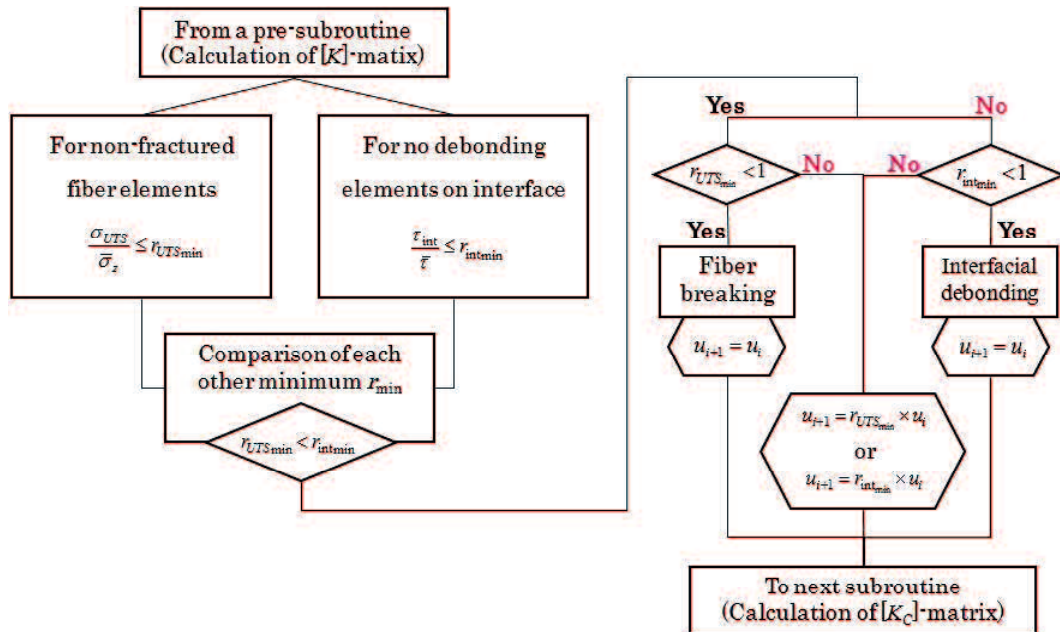


Fig.4-4 Determination of interfacial contact condition.

Fig.4-5 Flowchart of R_{min} method.

4-3-3 繰返し負荷による界面せん断応力の低下

Evans らは、Fig.4-6 に示すように、繰返し数の増加に伴い、界面せん断応力が低下していくことを報告している¹³⁾。そこで本解析では、この Evans らの界面せん断応力低下モデルを繰返し荷重下におけるヒステリシスループの形状変化の要因として適用した。この扱いは、以下のように、繰返し数 N における界面せん断応力 $\tau_i(N)$ が N に依存して低下することを仮定したものである。

$$\tau_i(N) = \tau_{imin} + [1 - \exp(-\omega N^\lambda)](\tau_{imax} - \tau_{imin}) \quad (4-6)$$

ここで、 τ_{imax} は初期界面せん断応力、 τ_{imin} は最小界面せん断応力、 ω および λ は実験定数である。式(4-6)によると、界面せん断応力は、 $N = 100$ までの比較的早期に τ_{imin} まで減少し、その後 τ_{imin} で一定となる。Evans らは式(4-6)を界面のすべり応力とみなしているため、上述の平均せん断応力 $\bar{\tau}$ が $\tau_i(N)$ に達するとき界面接触状態の変化を判定する指標となり得る。そこで本研究では、便宜上、界面せん断強度 τ_{int} の変化を式(4-6)に対応させて解析を進めた。

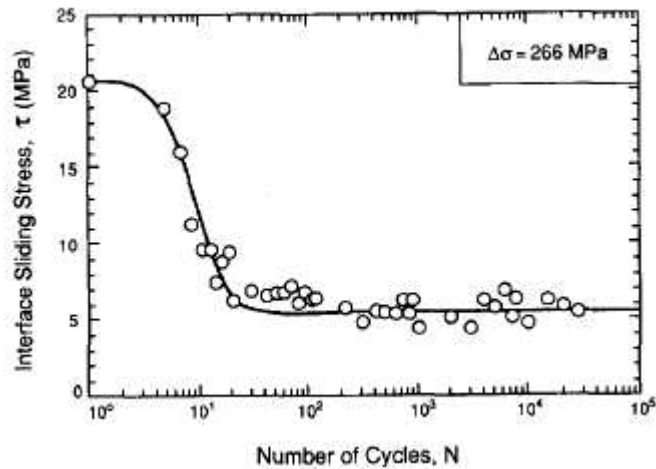


Fig.4-6 Comparison of theoretical and experimental results in interfacial shear stress¹³⁾.

4-4 結合力要素および繰返し界面摩擦すべりの解析結果および考察

4-4-1 結合力要素の解析結果

結合力要素を制約条件付き有限要素モデルに適応させて解析を行なった。このとき、 $m_0=1.0$ 、 $\delta w_{\max}=0.002[\text{mm}]$ 、 $\delta w_{sp}=0.04[\text{mm}]$ とし、負荷応力 σ を 200.6、367.2 および 727.9 [MPa] とした。ここで Fig.4-7 にそれぞれの応力での(a)相対変位 δw および(b)係数 m の z 方向分布を示す。同図に示すように、応力が大きくなるにつれ δw が大きくなり、 $\delta w \geq \delta w_{\max}$ となる領域が拡大して (Fig.4-7(a))、この領域で係数 m の低下、すなわち結合力の減衰が生じることが確認できる (Fig.4-7(b))。また、結合力減衰領域における応力分布の傾きが小さくなっており (Fig.4-8 破線部)、界面における結合力が低下していることが確認できる。また、 σ の増加に伴い、この結合力減衰領域が拡大し、応力の傾きが小さくなることを確認できた。

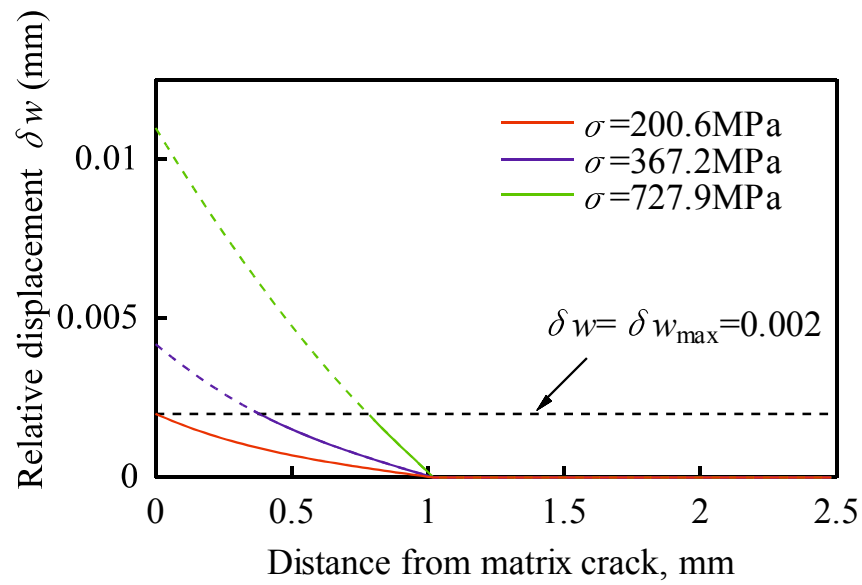
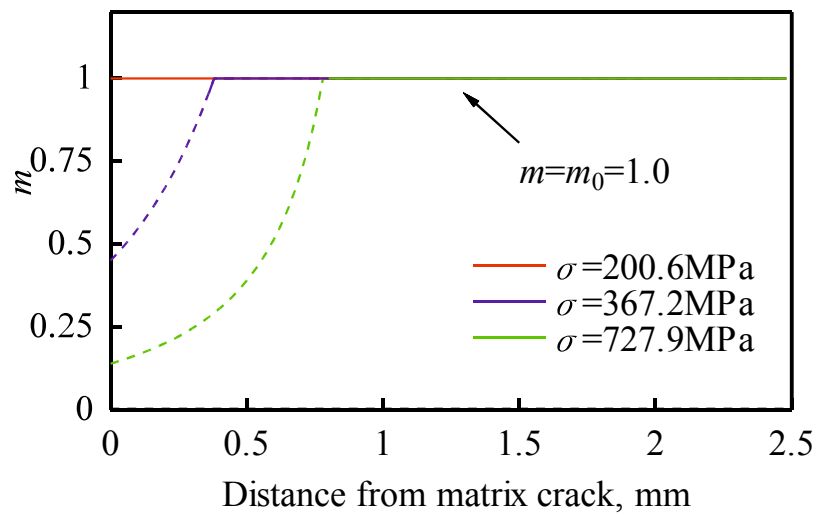
(a) Relative displacement $\delta w = |w_m - w_f|$ (b) Coefficient m

Fig.4-7 z-axis distribution by present FE model with cohesive element.

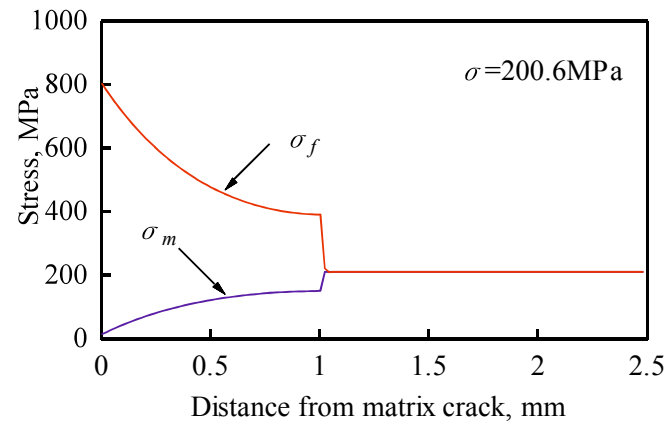
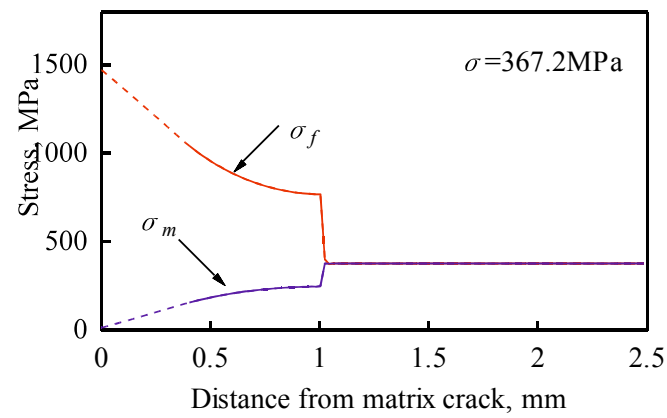
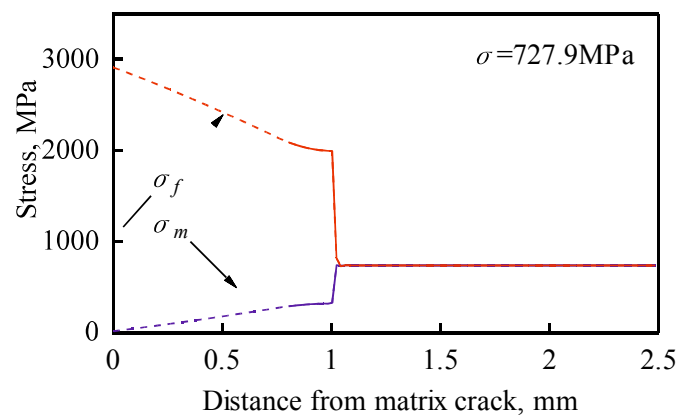
(a) $\sigma = 200.6 \text{ MPa}$ (b) $\sigma = 367.2 \text{ MPa}$ (c) $\sigma = 727.9 \text{ MPa}$

Fig.4-8 z-axis stress distribution by present FE model with cohesive element.

4-4-2 繰返し界面すべりの解析結果

繰返し界面すべりの解析結果として Fig.4-9 に応力-ひずみ線図を示す．ここでは，静摩擦係数 $\mu=0.03$ ，界面せん断強度 $\tau_{int}=20$ MPa とした．Fig.4-9 (a)より明らかにヒステリシスループが現れるが，Fig.4-9 (b)に細部を示すように，完全除荷前にすでにループは閉じ右方向への移動は再現されなかった．右方向への移動が生じない原因として，まず界面はく離長さの違いが挙げられる．これは，負荷から除荷への反転の際，界面はく離領域で繊維-マトリックス要素間に変位差が生じており，接触条件として摩擦固着状態を用いる．除荷過程ではその状態で弾性変形を経たのち，界面はく離状態に移行するが，除荷過程の開始時では，負荷時に界面はく離の生じた各要素はすでにせん断変形を呈しており，除荷時ではいち早く界面せん断強度に達するためであると考えられる．

完全除荷後にループが閉じなければ永久ひずみが生じるので，このような負荷 - 除荷過程を繰り返せば，ループの移動が可能となる．これを実現するためには，除荷時の界面はく離長さを負荷時より小さくするような要因を付与しなければならない．Hsueh ら³²⁾の SiC/borosilicate glass 複合材料を用いた報告によると，単繊維の push-out 時の摩擦係数が pull-out 時より大きくなることが報告されている．これは，pull-out では，ポアソン効果による繊維の r 方向収縮により界面の付着が切れ，すべり抵抗が小さくなるためである．そこで，本解析では除荷時の静摩擦係数を，便宜上，負荷時の 1.1 倍，即ち $\mu=0.033$ に変更して計算した．なお，ここでは Evans らの式(4-6)を用いずに，まずループの移動の有無を調査した．その結果を Fig.4-10(a)に示す．明らかに，繰返し数の増加にともなうヒステリシスループの移動がみられる．このとき，除荷時の界面はく離長さは 0.36 mm であった．なお，ループを閉じないようにするため，界面はく離強度を除荷時に 25MPa に引き上げて解析したところ，界面はく離長さが負荷時より減じられループの移動が実現した．しかし，界面はく離強度は繰返しにともなって減少すると推測されるので，これを要因とする移動は考えにくく，摩擦係数の負荷-除荷時での変化がループの移動に係わっていると考えられる．

次に，静摩擦係数の負荷-除荷時での変化および繰返し負荷による界面せん断強度変化を同時に取り入れた解析結果を Fig.4-10(b)に示す．材料定数は $\omega=0.001$ ， $\lambda=2$ で一定とし，繰返しにより界面せん断強度 τ_{int} を 20 から 10 MPa へと変化させた．同図より，繰返し数の増加にともない，ループのシフトとともにループの面積が増加する現象を確認できる．本条件では， $N=1$ のとき，負荷時および除荷時の界面はく離長さは 0.4 および 0.36 mm であり， $N=2$ 以降，負荷時の界面はく離長さは徐々に増加する一方で，除荷時の界面はく離長さも多少増加するものの，常に負荷時より少なく，両者は最終的にそれぞれ収束することが確認できた．このように，静摩擦係数の差によりループの移動が起こり，界面はく離強度の劣化にともなって新たな界面はく離が発生することで，ループが右に傾いてループの面積が大きくなること現象を再現できた．

次に、Fig.4-10(b)の最終ループを初期条件とし、繰返しにより τ_{int} を 10 から 5 MPa へと変化させた結果を Fig.4-10(c)に示す。同図より繰返し数の増加にともないループの移動は起こるものの、ループ面積は Fig.4-10(b)の変化とは異なり、逆に減少することが確認できる。これは、界面はく離領域がさらに大きくなり、繊維が荷重をより多く受け持つからである。これより、本有限要素モデルにより、従来のヒステリシスループの実験的推移を再現できることが認められた。

さらに、Fig.4-10(b)と同様に、繰返しにより τ_{int} を 20 から 10 MPa へと変化させ、一方で μ を負荷/除荷時に 0.025/0.0275 に変えたときの結果を Fig.4-10(d)に示す。同図より繰返し数の増加にともない、ループの移動およびひずみ幅の増加を確認できる。Fig.4-10(b)と比較すると、ひずみ幅およびループ面積が増加している。

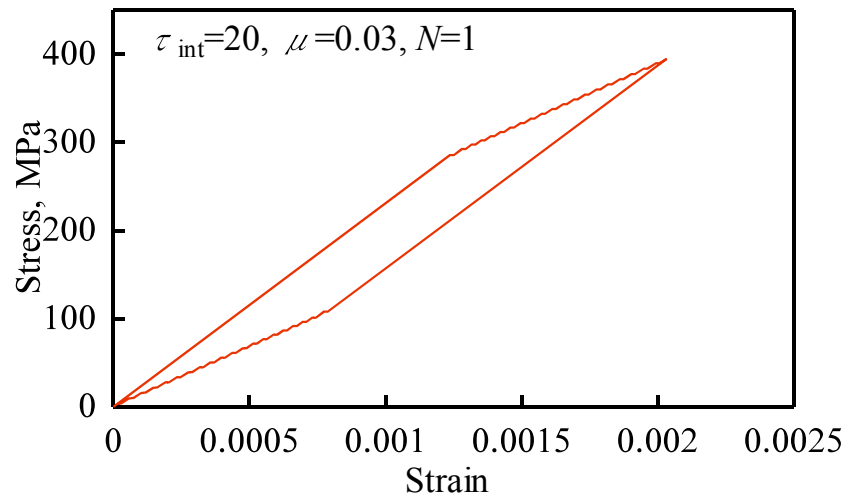
以上の繰返し界面すべりの解析結果をまとめると、以下のようになる。

Table 4-1 Simulation results of hysteresis loops.

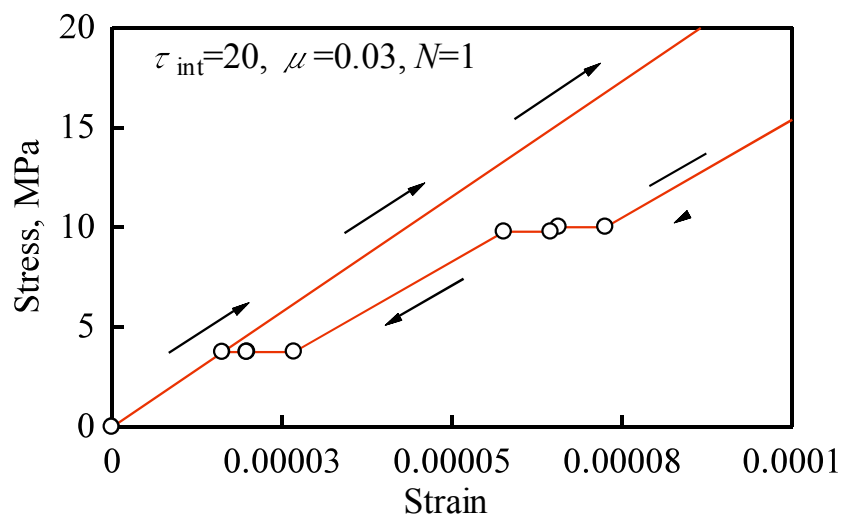
Figure	Interfacial shear strength τ_{int} [MPa]	Coefficient of static friction μ (load/unload)	Permanent strain	Strain range	Area of loops
Fig.4-10(a)	20=const	0.03/0.033	+	± 0	± 0
Fig.4-10(b)	20→10	0.03/0.033	+	+	+
Fig.4-10(c)	10→5	0.03/0.033	++	++	-
Fig.4-10(d)	20→10	0.025/0.0275	++	++	++

ここで、Table 4-1 中の+, ++および ± 0 は、永久ひずみ、ひずみ幅、ループ面積が繰返し数の増加に伴い、それぞれ増加、大きく増加および変化しないことを示している。まず、1)ループの移動に関して、負荷/除荷時の静摩擦係数 μ の差によりすべり長さとは逆すべり長さに差が現れ、永久ひずみが増加していくが、ひずみ幅およびループ面積は変化しない (Fig.4-10(a))。次に、2)ループの形状変化に関して、界面せん断強度 τ_{int} の大小により界面はく離の開始点が変わり、 τ_{int} が小さいほどループの非線形部分が増加し、それに伴い永久ひずみも増加していく (Fig.4-10(b)および(c))。また、 τ_{int} の減少はまず始めにループ面積を増加させるが (Fig.4-10(b))、さらに減少するとこれを減少させる (Fig.4-10(c))。3)静摩擦係数 μ の大小によりループの非線形部分の傾きが変化し、 μ が小さいほどひずみ幅が増加する (Fig.4-10(a)および(d))。また、それによりループ面積は増加していくものの減少することはない。つまり、Liらの提案によるループ面積の変化を摩擦係数の変化のみで対応付ける手法は、極めて難点があることを付記する。

以上の結論として、マトリックスき裂飽和後において、CMCのヒステリシスループの移動と形状変化は、静摩擦係数と界面せん断強度の両因子の変化により再現可能であると判断できる。



(a) General view



(b) Enlarged view

Fig.4-9 Simulation results of hysteresis loops ($\mu=0.03/0.03$, $\tau_{int}=20$ MPa).

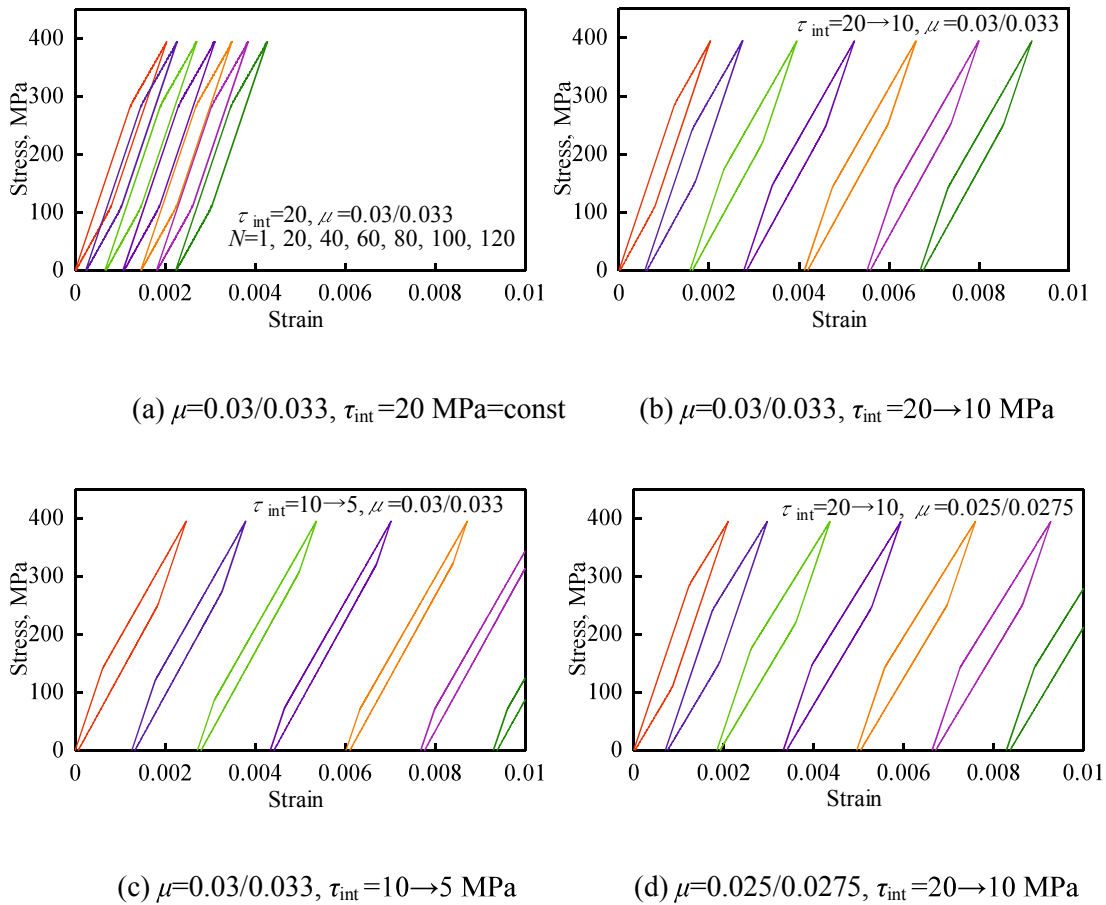


Fig.4-10 Simulation results of hysteresis loops.

4-5 結言

本章では、界面損傷後の力学的挙動を扱う代表的な有限要素である、結合力要素についての定式化を行なった。さらに、CMCの繰返し負荷下における、ヒステリシスループ挙動を再現するため、繰返し界面すべりの定式化を行なった。

その結果、結合力要素を取り入れた制約条件付き有限要素モデルについて数値解を取得したところ、応力分布が結合力の変化に対応して首尾よく現れることを確認した。また、CMCの繰返し数の増加によるひずみ幅が増加するヒステリシスループの移動と形状変化は、静摩擦係数と界面せん断強度の両因子の変化により再現可能であることが確認できた。

第5章 結論および今後の展望

5-1 本研究の結論

第2章では、CMCの界面はく離挙動を再現した制約条件付き有限要素モデル提案し、界面摩擦として (i) 圧縮負荷下でクーロン摩擦が生じる場合、および (ii) 引張負荷下で一定の界面せん断応力が働く（界面せん断応力を一定とする）場合に対して定式化を行なった。本モデルは、節点における変位の等価性や接触力のつり合いを仮定し、これを制約条件として数値解を求めるものである。利点として、従来の接触問題における繰返し計算を必要とせず、わずか一回の計算で解が得られることが挙げられる。したがって、この制約条件付き有限要素モデルは、計算コストの削減および数値解の発散を防ぐことができ、複数のマトリックスき裂やき裂偏向が生じる場合など、理論モデルや汎用有限要素解析ソフトでは再現が困難な状況下での活用が期待できる。なお、本モデルでは、繊維マトリックス界面に4重節点を導入することで、(a) 界面固着、(b, b') 界面はく離（クーロン摩擦則、すべり抵抗一定）、(c) マトリックス破断を伴う界面はく離、および(d) 繊維破断を伴う界面はく離状態、以上5つの界面接触状態を提案した。

第3章では、第2章で提案したCMCの界面はく離挙動を再現した制約条件付き有限要素モデルによる解析結果を示し、また、その解析結果を理論界面はく離モデルおよび汎用有限要素解析ソフトANSYSと比較し、その妥当性の検証を行なった。

その結果、制約条件付き有限要素モデルにおいて、(i) 圧縮負荷下でクーロン摩擦が生じる場合、界面固着領域においてマトリックスおよび繊維軸応力はともに一定になることが確認された。界面はく離領域では、マトリックス軸応力はマトリックスき裂面から非線形的な応力回復を示し、繊維軸応力はマトリックスき裂面で最大値をとることが確認された。また、界面はく離先端近傍の力学的挙動において、繊維及びマトリックスの急激な応力変化を確認することができた。一方、半径および円周方向応力は、界面固着領域においてともにゼロになることが確認された。また、界面はく離領域では、応力はともに非線形を示し、繊維およびマトリックスの半径方向に圧縮応力が働くことも確認した。以上の力学挙動は、従来からの界面はく離をともなうCMCの損傷メカニズムと合致するものである。さらに、以上の本モデルによる数値解を汎用有限要素解析ソフト(ANSYS)による数値解および理論モデルによる解析解と比較したところ、すべて定量的にほぼ一致することが判明した。

一方、制約条件付き有限要素モデルにおいて(ii) 引張負荷下で一定の界面すべり抵抗が働く場合、界面はく離領域において繊維およびマトリックスの応力分布は線形的に変化し、この場合も理論モデルによる解析解と定量的にほぼ一致することが判明した。

第4章では、第2および3章で扱った制約条件付き有限要素法の応用編として、界面損傷後の力学的挙動を扱う代表的な有限要素である、結合力要素についての定式化および解析を行なった。さらに、CMCの繰返し負荷下における、ヒステリシスループ挙動を再現するため、繰返し界面すべりの定式化および解析を行なった。

その結果、結合力要素を取り入れた制約条件付き有限要素モデルについて数値解を取得したところ、応力分布が結合力の変化に対応して首尾よく現れることを確認した。また、CMCの繰返し数の増加によるひずみ幅が増加するヒステリシスループの移動と形状変化は、静摩擦係数と界面せん断強度の両因子の変化により再現可能であることが確認できた。

以上のように、本研究で提案した制約条件付き有限要素モデルは、界面はく離、繊維破断、マトリックスき裂などの損傷を多重節点と制約条件によりの確に定義でき、損傷力学における様々な物理現象を再現することが期待できる。

5-2 今後の展望

5-2-1 制約条件付き有限要素法の汎用性に向けて

CMCは優れた耐熱性を持つことから、高温環境下構造用材料として期待がされている。したがって、温度変化による熱ひずみを考慮した力学挙動評価が非常に重要となると考えられる。この熱ひずみについては、Gaoら²⁰⁾およびChiang²¹⁾によりその影響が述べられており、その定式化が行なわれている。そこで、①この熱ひずみを考慮した制約条件付き有限要素法の定式化を今後行なっていく予定である。また、CMCの損傷過程を再現するにあたり、②界面はく離により消費されるエネルギーを定義することにより、臨界エネルギー解放率を加味した界面はく離やマトリックスのき裂伝ばなどの損傷進展についても定式化を行っていく予定である。

5-2-2 制約条件付き有限要素法の3次元への拡張について

2, 3 および 4 章では二次元軸対称座標系(r, z)における制約条件付き有限要素法を取り扱ったが、同手法の汎用性をさらに高めるために、これを三次元に拡張することを目指す。この定式化の詳細を付録Cに示す。付録Cでは円筒座標系(r, θ, z)における制約条件および剛性方程式の変形について記述しているが、直行座標系(x, y, z)においても同様に用いることができる。このような定式化に基づいてプログラムを作成し、その有効性を確認していく予定である。

謝辞

本研究の遂行にあたり、終始適切なるご指導、ご協力いただきました機械工学科材料信頼性工学講座の合田公一教授、野田淳二准教授に心より感謝の意を示します、

また、本学位論文の副査をつとめて頂きました、機械工学科医用機械工学講座の陳猷教授、大木順司准教授、感性デザイン工学科建築材料学講座の藤田正則教授にも心より感謝の意を示します。

また、学部4年および博士前期1年時に、供試材料の提供にご協力くださいました宇部興産(株)無機機能材料研究部の鈴木道之氏、供試材料の加工にご協力下さいました宇部興産(株)機能品技術開発部の酒井拓馬氏に厚くお礼申し上げます。

また、実験、解析の遂行およびデータ整理にご協力頂きました材料信頼性工学研究室メンバー、博士後期課程3年の金顯凡氏、新田悠二氏、同2年の Taweesak Piyatuchsananon 氏、Azmi Nordin 氏、博士前期課程2年の尹杰君、今津弘太君、杉田朋洋君、同1年の伊達雄人君、花表孝亮君、山崎恵理さん、ヌルフルカンさん、長澤昌也君、古賀恭平君、学部4年の伊達宝子さん、中島航希君、坂本瞳さん、権藤純平君、清水貴大君、本田宗靖君、槇野裕太君、佐藤優斗君、山口雄大君に深く感謝の意を表します。

喜多村竜太

参考文献

- 1) 米屋勝利, 安藤元英, “自動車用セラミックス材料の進歩”, 日本セラミックス協会, Vol.31, No.4, (1996), pp.311-315
- 2) 上野明ほか, “常圧焼結窒化ケイ素の高温繰返し荷重下におけるき裂進展挙動 : 周波数および応力波形の影響”, 材料, Vol.42, No.479 (1993), pp.976-982
- 3) 梶田昌明ほか, “セラミックスの疲労(第2報) : 常圧焼結窒化ケイ素の室温における繰返し疲労特性”, セラミックス論文誌, Vol.97, No.5 (1989), pp.520-524
- 4) 猿木勝司, 山田明, “加熱負荷を受けた窒化けい素セラミックスの強度”, 日本材料強度学会誌, Vol.28, No.3 (1994), pp.91-99
- 5) 飛田守孝ほか, 機械材料学, 朝倉書店, (2002), pp.193-194
- 6) 堤三佳ほか, “多孔質セラミックスの破壊特性とそのモデル解析”, 材料システム, Vol.27 (2009), pp.35-42
- 7) 西川直宏ほか, “多孔質アルミナの力学特性に及ぼす気孔率および気孔形態の影響”, 材料, Vol.50, No.6 (2001), pp.625-629
- 8) 邊吾一ほか, 複合材料活用辞典, 産業調査会事典出版センター, (2001), pp.719-735
- 9) 合田公一ほか, “セラミックス基繊維強化複合材料の界面接触モデルによる FEM 定式化と強度シミュレーション”, 日本複合材料学会誌, Vol.31, No.4 (2005), pp.184-191
- 10) 井上茂夫ほか, “ウイスカによるセラミックスの強じん化”, セラミックス, Vol.21, No.7 (1986), pp.621-629
- 11) 阿部修実ほか, 注目の炭化ケイ素と窒化ケイ素及びセラミックス繊維強化, (株)ティール・アイ・シー, (1992), pp.349-388
- 12) 安田公一ほか, “セラミックスの信頼性 (最近 10 年間の研究動向)”, 日本信頼性学会誌, Vol.30, No.8 (2008), pp.652-659
- 13) A. G. Evans *et al.*, “Fatigue of ceramic matrix composites”, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol.43, No. 3 (1995), pp.859-867
- 14) L. Li and Y. Song, “Estimate interfacial coefficient of ceramic matrix composites from hysteresis loops”, *Journal of Composite Materials*, Vol.45, No. 9 (2010), pp.989-1006
- 15) J. W. Holmes and C. Cho, “Experimental observations of frictional heating in fiber-reinforced ceramics”, *Journal of the American Ceramic*, Vol.75, No. 4 (1992), pp.929-958
- 16) T. Kotil *et al.*, “Origin of hysteresis observed during fatigue of ceramic-matrix composites”, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol.73, No. 7 (1990), pp.1879-1883
- 17) P. Reynaud, “Cyclic fatigue of ceramic matrix composite at ambient and elevated

- temperatures”, *Composites Science Technology*, Vol.56 (1996), pp.809-814
- 18) P. H. Geubelle and J. S. Baylor, “Impact-induced delamination of composites: a 2D simulation”, *Composites Part B: Engineering*, Vol.29, No.5 (1998) pp.589-603
 - 19) B. Budiansky and J. W. Hutchinson, “Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.34, No.2 (1986) , pp.167-189
 - 20) B. Y. C. Gao *et al.*, “Fracture of fiber-reinforced materials”, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol.39, No.4 (1988), pp.550-572
 - 21) Y. C. Chiang, “On a matrix cracking model using Coulomb’s friction law”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.74, No.10 (2007), pp.1602-1616
 - 22) C. H. Hsueh, “Crack-wake interfacial debonding criteria for fiber-reinforced ceramic composites”, *Acta materialia*, Vol.44, No.6 (1996), pp.2211-2216
 - 23) L. Longbiao *et al.*, “Modeling loading/unloading hysteresis behavior of unidirectional C/SiC ceramic matrix composites”, *Applied Composite Materials*, Vol.20, No.4 (2012), pp.655-672
 - 24) H. Cao and M. D. Thouless, “Tensile tests of ceramic-matrix composites: Theory and experiment”, *Journal of The American Ceramic Society*, Vol.73, No.7 (1990), pp.2091-2094
 - 25) W. A. Curtin, “Theory of mechanical properties of ceramic-matrix composites”, *Journal of The American Ceramic Society* , No.74, No.11 (1991), pp.2837- 2845
 - 26) S. L. Phoenix and R. Raj, “Scalings in fracture probabilities for a brittle matrix fiber composite”, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol.40, No. 11 (1992), pp.2813-2828
 - 27) J. M. Neumeister, “A constitutive law for continuous fiber-reinforced brittle-matrix composites with fiber fragmentation and stress recovery autore”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.41, No. 8 (1993), pp.1383-1404
 - 28) A. Kelly and W. R. Tyson, “Tensile properties of fiber reinforced metals: Copper/tungsten and copper/molybdenum”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.13, No.11 (1965), pp.329-350
 - 29) J. K. Kim and Y. W. MAI, “Engineered Interfaces in Fiber Reinforced Composites”, ELSEVIER SCIENCE Ltd, kidlington (1998), pp.93-169
 - 30) P. H. Geubelle and J. S. Baylor, “Impact-induced delamination of composites: a 2D simulation”, *Composites Part B: Engineering*, Vol.29, No.5 (1998), pp.589-602
 - 31) Y. Yamada *et al.*, “Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.10, No. 5 (1986), pp.343-354.
 - 32) C.H. Hsueh *et al.*, ”Interfacial properties of SiC-borosilicate glass composites evaluated from pushout and pullout tests”, *Journal of Materials Science Letters*, Vol.10 No.3 (1991), pp.135-138

付録 A 理論界面はく離モデルの導出

A-1 理論界面はく離モデル (Chiang, 2007)

既存の研究によると, CMC は焼成後の冷却過程において材料中に熱ひずみを生じ, 繊維-マトリックス界面に締付け応力 (fiber/matrix interface thermal residual clamping stress) が働くことが報告されている. また, Li らはこの熱ひずみを考慮した界面はく離モデルを提案している. ここで, 繊維, マトリックスの z 方向応力 σ_f , σ_m および界面せん断応力 τ_i は, マトリックスき裂からの距離を z とすると, 界面はく離領域 ($0 \leq z \leq L_d$) において,

$$\sigma_f(z) = \frac{\sigma}{V_f} - \frac{\alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{V_f (\alpha v_f + \gamma v_m)} (1 - e^{-\lambda z}) \quad (1-10)$$

$$\sigma_m(z) = \frac{\alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{V_m (\alpha v_f + \gamma v_m)} (1 - e^{-\lambda z}) \quad (1-11)$$

$$\tau_i(z) = \frac{r_f \lambda \alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{2V_f (\alpha v_f + \gamma v_m)} e^{-\lambda z} \quad (1-12)$$

で与えられる. また, 界面固着領域 ($z \geq L_d$) においては,

$$\sigma_f(z) = (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} + \sigma_f(\infty) \quad (1-13)$$

$$\sigma_m(z) = \frac{\sigma}{V_m} - \gamma \left\{ (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} + \sigma_f(\infty) \right\} \quad (1-14)$$

$$\tau_i(z) = \frac{\rho}{2} (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} \quad (1-15)$$

で与えられる. また, r および θ 方向応力 σ_r および σ_θ は,

$$(\sigma_r)_f = (\sigma_\theta)_f = \frac{\alpha v_f \sigma_f(z) - v_m \sigma_m(z)}{1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)} = q_0(z) \quad (1-7)$$

$$(\sigma_r)_m = [(r_m/r)^2 - 1] \gamma q_0(z) \quad (1-8)$$

$$(\sigma_\theta)_m = [-(r_m/r)^2 - 1] \gamma q_0(z) \quad (1-9)$$

で与えられる. ただし,

$$\bar{\sigma} = \frac{V_f q_i}{\alpha v_f} [1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)] \quad (1-16)$$

$$q_i = \frac{(\alpha_f - \alpha_m) E_m E_f \Delta T}{(1 + v_m) E_f + (1 - v_f) E_m} \quad (1-17)$$

$$\lambda = \frac{2\mu}{r_f} \kappa = \frac{2\mu}{r_f} \frac{\alpha v_f + \gamma v_m}{1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)} \quad (1-18)$$

$$\sigma_f(\infty) = \frac{1 - 2v_m \kappa}{V_m [\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)]} \sigma \quad (1-19)$$

$$\sigma_m(\infty) = \frac{1}{V_m} \left[1 - \frac{\gamma(1 - 2v_m \kappa)}{\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)} \right] \sigma \quad (1-20)$$

$$\rho = \left\{ \frac{2G_m [\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha v_f + \gamma v_m)]}{E_m \ln(\bar{R}/r_f)} \right\}^{1/2} \quad (1-21)$$

$$\ln(\bar{R}/r_f) = -[2 \ln V_f + V_m(3 - V_f)] / (4V_m) \quad (1-22)$$

$$\alpha = E_m / E_f \quad (1-23)$$

$$\gamma = V_f / V_m \quad (1-24)$$

である。さらに E_f および E_m はヤング率, v_f および v_m はポアソン比, α_f および α_m は熱膨張係数, V_f および V_m は体積率, r_f および r_m は外半径, $\sigma_f(\infty)$ および $\sigma_m(\infty)$ は $z=\infty$ における z 方向応力であり, 添字の f および m は繊維およびマトリックスを示す。また, σ は負荷応力, ΔT は温度変化, q_i および $q_0(z)$ は熱ひずみおよびポアソン効果による締付け応力, μ は静摩擦係数, r は任意の r 座標 ($r_f < r < r_m$), \bar{R} は有効半径 (マトリックスの z 方向応力は $r=\bar{R}$ に集中し, $r_f \leq r \leq \bar{R}$ の領域のみにせん断応力が働く) である。Li らは熱ひずみおよびポアソン効果により繊維-マトリックス界面に締付け応力が発生し, 界面はく離領域で非線形の応力分布が現れることを報告している。本付録では, 上記の理論モデルの導出について述べる。

A-2 半径 r および円周 θ 方向応力の関係式の導出

Fig.A-1 に示す円筒座標系における応力の平衡方程式は次式で与えられる。

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - 2\sigma_\theta dr \sin(d\theta/2) dz = 0 \quad (A-1)$$

$$\therefore \sigma_r r + \sigma_r dr + rd\sigma_r + d\sigma_r dr - rd\sigma_r - \sigma_\theta dr = 0 \quad (A-1')$$

$$\therefore \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (A-1'')$$

また, 平面ひずみにおける適合条件は次式で与えられる。

$$(1 - \nu) \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (A-2)$$

$$\therefore (1-\nu)\frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (\text{A-2}')$$

$$\therefore \frac{d\sigma_\theta}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (\text{A-2}'')$$

ここで、この微分方程式の一般解は、

$$\sigma_r = g(r) + C \quad (\text{A-3})$$

$$\sigma_\theta = -g(r) + C \quad (\text{A-3}'')$$

で与えられる。よって

$$(1-\nu)\frac{dg}{dr} - \nu\frac{dg}{dr} - \frac{2g}{r} = 0 \quad (\text{A-4})$$

$$\therefore \frac{dg}{dr} + \frac{2g}{r} = 0 \quad (\text{A-4}')$$

$$\therefore g(r) = 1/r^2 \quad (\text{A-4}'')$$

したがって、 σ_r および σ_θ は、

$$\sigma_r = \frac{B}{r^2} + C \quad (\text{A-5})$$

$$\sigma_\theta = -\frac{B}{r^2} + C \quad (\text{A-5}')$$

となる。ここで、 A 、 B および C を定数として

$$(\sigma_r)_f = (\sigma_\theta)_f = A \quad (\text{A-6})$$

$$(\sigma_r)_m = \frac{B}{r^2} + C \quad (\text{A-6}')$$

$$(\sigma_\theta)_m = -\frac{B}{r^2} + C \quad (\text{A-6}'')$$

とおくと、繊維およびマトリックスの r 方向ひずみ ε_r は、

$$(\varepsilon_r)_f = \frac{1}{E_f} \left((\sigma_r)_f - \nu_f (\sigma_\theta)_f - \nu_f \sigma_f \right) = \frac{1}{E_f} \left\{ (1-\nu_f)A - \nu_f \sigma_f \right\} \quad (\text{A-7})$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_r)_m &= \frac{1}{E_m} \left((\sigma_r)_m - \nu_m (\sigma_\theta)_m - \nu_m \sigma_m \right) = \frac{1}{E_m} \left\{ \left(\frac{B}{r^2} + C \right) - \nu_m \left(-\frac{B}{r^2} + C \right) - \nu_m \sigma_m \right\} \\ &= \frac{1}{E_m} \left\{ -\frac{(1+\nu_m)}{r^2} B + (1-\nu_m)C - \nu_m \sigma_m \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-7}'')$$

よって、繊維およびマトリックスの r 方向変位 u_r は、

$$(u_r)_f = \int (\varepsilon_r)_f dr = \int \frac{1}{E_f} \left\{ (1-\nu_f)A - \nu_f \sigma_f \right\} dr = \frac{r}{E_f} \left\{ (1-\nu_f)A - \nu_f \sigma_f \right\} + c_1 \quad (\text{A-8})$$

$$\begin{aligned} (u_r)_m &= \int (\varepsilon_r)_m dr = \int \frac{1}{E_m} \left\{ \left(\frac{B}{r^2} + C \right) - \nu_m \left(-\frac{B}{r^2} + C \right) - \nu_m \sigma_m \right\} dr \\ &= \frac{1}{E_m} \left\{ \left(-\frac{B}{r} + Cr \right) - \nu_m \left(\frac{B}{r} + Cr \right) - \nu_m \sigma_m r \right\} + c_2 \\ &= \frac{r}{E_m} \left\{ -\frac{1+\nu_m}{r^2} B + (1-\nu_m)C - \nu_m \sigma_m r \right\} + c_2 \end{aligned} \quad (\text{A-8''})$$

以下で、定数 A 、 B および C を求める。まず、 r 方向応力 σ_r はマトリックス外径 ($r=r_m$) で 0 であるから、

$$(\sigma_r)_m(r=r_m) = B/r_m^2 + C = 0 \quad (\text{A-9})$$

また、 r 方向応力 σ_r は繊維-マトリックス界面 ($r=r_f$) で連続であるから、

$$(\sigma_r)(r=r_f) = A = B/r_f^2 + C \quad (\text{A-10})$$

したがって、式(A-9)および(A-10)より、定数 B および C は

$$B = \frac{A}{1/r_f^2 - 1/r_m^2} = \frac{r_f^2 r_m^2 A}{r_m^2 - r_f^2} = \gamma r_m^2 A \quad (\text{A-11})$$

$$C = -\frac{B}{r_m^2} = -\frac{\gamma r_m^2 A}{r_m^2} = -\gamma A \quad (\text{A-11'})$$

さらに、半径方向変位 u_r は繊維-マトリックス界面 ($r=r_f$) で連続であるから、

$$\frac{r_f}{E_f} \left\{ (1-\nu_f)A - \nu_f \sigma_f \right\} + c_1 = \frac{r_f}{E_m} \left\{ -\frac{1+\nu_m}{r_f^2} B + (1-\nu_m)C - \nu_m \sigma_m r \right\} + c_2 \quad (\text{A-12})$$

$$\therefore \frac{E_m}{E_f} \left\{ (1-\nu_f)A - \nu_f \sigma_f \right\} = -\frac{1+\nu_m}{r_f^2} \gamma r_m^2 A + (1-\nu_m)(-\gamma A) - \nu_m \sigma_m + c_3 \quad (\text{A-12''})$$

ここで、 $\alpha = E_m/E_f$ および $\gamma r_m^2/r_f^2 = \gamma(V_f+V_m)/V_f = \gamma(1+1/\gamma) = 1+\gamma$ であるから、

$$\alpha(1-\nu_f)A - \alpha\nu_f \sigma_f = -(1+\nu_m)(\gamma+1)A - (1-\nu_m)\gamma A - \nu_m \sigma_m + c_3 \quad (\text{A-13})$$

$$\therefore A = \frac{\alpha\nu_f \sigma_f - \nu_m \sigma_m}{\alpha(1-\nu_f) + 1 + \nu_m + 2\gamma} + A_0 \quad (\text{A-13'})$$

以上より, $A_0=0$ およびポアソン収縮応力を $q_0(z)=A$ とすると,

$$A = \frac{\alpha v_f \sigma_f - v_m \sigma_m}{\alpha(1-v_f) + 1 + v_m + 2\gamma} = q_0(z) \quad (\text{A-14})$$

$$B = \gamma_m^2 A \quad (\text{A-14}')$$

$$C = -\gamma A \quad (\text{A-14}'')$$

となる. よって, 半径 r および円周 θ 方向応力はそれぞれ以下の式で与えられる.

$$(\sigma_r)_f = (\sigma_\theta)_f = A = \frac{\alpha v_f \sigma_f(z) - v_m \sigma_m(z)}{1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)} = q_0(z) \quad (\text{A-15})$$

$$(\sigma_r)_m = \frac{B}{r^2} + C = \frac{\gamma_m^2 A}{r^2} - \gamma A = \left[\left(\frac{r_m}{r} \right)^2 - 1 \right] \gamma q_0(z) \quad (\text{A-15}'')$$

$$(\sigma_\theta)_m = -\frac{B}{r^2} + C = -\frac{\gamma_m^2 A}{r^2} - \gamma A = \left[-\left(\frac{r_m}{r} \right)^2 - 1 \right] \gamma q_0(z) \quad (\text{A-15}''')$$

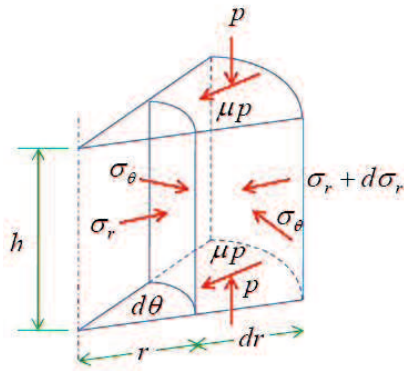


Fig.A-1 The balance of the stresses along r - and θ - axes.

A-3 界面はく離領域 ($0 \leq z \leq L_d$) における応力分布の導出

界面せん断応力 τ_i は

$$\tau_i(z) = \mu(q_0(z) - q_i) = -\frac{r_f}{2} \frac{d\sigma_f(z)}{dz} = \frac{r_f}{2\gamma} \frac{d\sigma_m(z)}{dz} \quad (\text{A-16})$$

で与えられる. よって,

$$\frac{d\sigma_m(z)}{dz} = \frac{2\gamma}{r_f} \mu(q_0(z) - q_i) = \frac{2\gamma\mu}{r_f} \left(\frac{\alpha v_f \sigma_f(z) - v_m \sigma_m(z)}{1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f)} - q_i \right) \quad (\text{A-17})$$

また,

$$\sigma_f(z) = \sigma/V_f - \sigma_m(z)/\gamma \quad (\text{A-18})$$

$$b = 1 + v_m + 2\gamma + \alpha(1 - v_f) \quad (\text{A-18}')$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_m(z)}{dz} &= -\frac{2\gamma\mu}{r_f}q_i + \frac{2\gamma\mu}{r_fb} \left[\alpha v_f \left(\frac{\sigma}{V_f} - \frac{1}{\gamma} \sigma_m(z) \right) - v_m \sigma_m(z) \right] \\
&= -\frac{2\gamma\mu}{r_f}q_i + \frac{2\gamma\mu}{r_fb} \frac{\alpha v_f}{V_f} \sigma - \frac{2\gamma\mu}{r_fb} \frac{\alpha v_f + \gamma v_m}{\gamma} \sigma_m(z) \\
&= \frac{2\mu\alpha v_f}{r_fbV_m} \left(\sigma - \frac{bV_f}{\alpha v_f} q_i \right) - \frac{2\mu}{r_fb} (\alpha v_f + \gamma v_m) \sigma_m(z) \\
&= \frac{2\mu\alpha v_f}{r_fbV_m} (\sigma - \bar{\sigma}) - \lambda \sigma_m(z) = a_0 + a_1 \sigma_m(z)
\end{aligned} \tag{A-19}$$

この式を変数分離し, 両辺積分すると,

$$\int \frac{\sigma_m(z)}{a_0 + a_1 \sigma_m(z)} = \int dz \tag{A-20}$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} \ln \left(\frac{a_0}{a_1} + \sigma_m(z) \right) = z + const \tag{A-20'}$$

マトリックスき裂が $z=0$ に存在する場合, 境界条件は $\sigma_m(z=0)=0$ となる. したがって, $const=(1/a_0)\ln(a_1/a_0)$ より, 式(A-20')は,

$$\frac{1}{a_1} \ln \left(\frac{a_0}{a_1} + \sigma_m(z) \right) = z + \frac{1}{a_1} \ln \left(\frac{a_0}{a_1} \right) \tag{A-21}$$

$$\therefore \sigma_m(z) = \frac{a_0}{a_1} (e^{a_1 z} - 1) \tag{A-21'}$$

となる. また,

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{2\mu\alpha v_f}{r_fbV_m} (\sigma - \bar{\sigma}) \frac{-r_fb}{2\mu(\alpha v_f + \gamma v_m)} = \frac{-\alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{V_m (\alpha v_f + \gamma v_m)} \tag{A-22}$$

であるから, 界面はく離領における $\sigma_m(z)$, $\sigma_f(z)$ および $\tau_i(z)$ は,

$$\sigma_m(z) = \frac{\alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{V_m (\alpha v_f + \gamma v_m)} (1 - e^{-\lambda z}) \tag{A-23}$$

$$\therefore \sigma_f(z) = \frac{\sigma}{V_f} - \frac{\sigma_m(z)}{\gamma} = \frac{\sigma}{V_f} - \frac{\alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{V_f (\alpha v_f + \gamma v_m)} (1 - e^{-\lambda z}) \tag{A-23'}$$

$$\therefore \tau_i(z) = -\frac{r_f}{2} \frac{d\sigma_f(z)}{dz} = \frac{r_f}{2\gamma} \frac{d\sigma_m(z)}{dz} = \frac{r_f \lambda \alpha v_f (\sigma - \bar{\sigma})}{2V_f (\alpha v_f + \gamma v_m)} e^{-\lambda z} \tag{A-23''}$$

A-4 界面固着領域 ($z \geq L_d$) における応力分布の導出

円柱座標系における応力平衡方程式およびせん断応力 τ_{rz} は,

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{r} = 0 \quad (\text{A-24})$$

$$\tau_{rz} = G_m \gamma_{rz} = G_m \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{A-25})$$

で与えられる。よって、界面せん断応力 $\tau_i(z)$ は,

$$\tau_i(z) = \frac{r}{r_f} \tau_{rz} = \frac{r}{r_f} G_m \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{G_m [w_m(z) - w_f(z)]}{r_f \ln(\bar{R}/r_f)} = -\frac{r_f}{2} \frac{d\sigma_f(z)}{dz} \quad (\text{A-26})$$

$$\therefore \frac{d\sigma_f(z)}{dz} = -\frac{2}{r_f} \tau_i(z) = -\frac{2}{r_f} \frac{G_m [w_m(z) - w_f(z)]}{r_f \ln(\bar{R}/r_f)} \quad (\text{A-26}')$$

となる。さらに式(A-26')の両辺を z に関して 1 回微分し整理すると,

$$\frac{d\sigma_f^2(z)}{dz^2} + \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} ((\varepsilon_z)_m - (\varepsilon_z)_f) = 0 \quad (\text{A-27})$$

となる。ここで、 w および ε_z は z 方向の変位およびひずみを表し、 $(\varepsilon_z)_f$ および $(\varepsilon_z)_m$ は、それぞれ、

$$\begin{aligned} (\varepsilon_z)_f &= \frac{1}{E_f} [\sigma_f - \nu_f ((\sigma_r)_f + (\sigma_\theta)_f)] = \frac{1}{E_f} [\sigma_f - 2\nu_f q_0(z)] \\ &= \frac{1}{E_f} \left[\sigma_f - 2\nu_f \frac{1}{b} \left\{ (\alpha\nu_f + \gamma\nu_m) \sigma_f - \frac{\nu_m \sigma}{V_m} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{E_f} \left[\left(1 - 2\nu_f \frac{\alpha\nu_f + \gamma\nu_m}{b} \right) \sigma_f - \frac{2\nu_f}{b} \frac{\nu_m \sigma}{V_m} \right] \\ &= \frac{1}{E_f} [(1 - 2\nu_f \kappa) \sigma_f + K \sigma] = \frac{1 - 2\nu_f \kappa}{E_f} \sigma_f + \frac{K}{E_f} \sigma \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_z)_m &= \frac{1}{E_m} [\sigma_m - \nu_f ((\sigma_r)_m + (\sigma_\theta)_m)] = \frac{1}{E_m} [\sigma_m + 2\nu_m \gamma q_0(z)] \\
&= \frac{1}{E_m} \left[\sigma_m - 2\nu_m \gamma \frac{1}{b} \left\{ \frac{\alpha \nu_f + \gamma \nu_m}{\gamma} \sigma_m - \frac{\alpha \nu_f \sigma}{V_f} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{E_m} \left[\left(1 - \frac{2\nu_m \gamma}{b} \frac{\alpha \nu_f + \gamma \nu_m}{\gamma} \right) \sigma_m + \frac{2\nu_m \gamma}{b} \frac{\alpha \nu_f \sigma}{V_f} \right] \\
&= \frac{1}{E_m} [(1 - 2\nu_m \kappa) \sigma_m + \alpha K \sigma] \\
&= \frac{1 - 2\nu_m \kappa}{E_m} \sigma_m + \frac{K}{E_f} \sigma = \frac{1 - 2\nu_m \kappa}{E_m} \left(\frac{\sigma}{V_m} - \gamma \sigma_f \right) + \frac{K}{E_f} \sigma
\end{aligned} \tag{A-28'}$$

となる。ただし,

$$K = \frac{2\nu_f \nu_m}{V_m [1 + \nu_m + 2\gamma + \alpha(1 - \nu_f)]} = \frac{2\nu_f \nu_m}{V_m b} \tag{A-29}$$

である。よって、式(A-26')は,

$$\frac{d^2 \sigma_f}{dz^2} + \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \left\{ \frac{1 - 2\nu_m \kappa}{E_m} \left(\frac{\sigma}{V_m} - \gamma \sigma_f \right) + \frac{K}{E_f} \sigma - \frac{1 - 2\nu_f \kappa}{E_f} \sigma_f - \frac{K}{E_f} \sigma \right\} = 0 \tag{A-30}$$

となる。式(A-30)を整理すると、次式に示す σ_f に関する 2 階の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \sigma_f}{dz^2} - \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \left\{ \frac{\gamma(1 - 2\nu_m \kappa)}{E_m} + \frac{1 - 2\nu_f \kappa}{E_f} \right\} \sigma_f + \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \frac{1 - 2\nu_m \kappa}{E_m} \frac{\sigma}{V_m} = 0 \tag{A-31}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \left\{ \frac{\gamma(1 - 2\nu_m \kappa)}{E_m} + \frac{1 - 2\nu_f \kappa}{E_f} \right\} \\
&= \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \left\{ \frac{\gamma(1 - 2\nu_m \kappa)}{E_m} + \frac{(E_m/E_f)(1 - 2\nu_f \kappa)}{(E_m/E_f)E_f} \right\} \\
&= \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \left\{ \frac{\gamma(1 - 2\nu_m \kappa)}{E_m} + \frac{\alpha(1 - 2\nu_f \kappa)}{E_m} \right\} \\
&= \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \frac{\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha \nu_f + \gamma \nu_m)}{E_m} = \left(\frac{\rho}{r_f} \right)^2
\end{aligned} \tag{A-32}$$

$$A_2 = \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \frac{1-2\nu_m \kappa}{V_m E_m} \sigma \quad (\text{A-32}')$$

とおくと、式(A-31)は、

$$\frac{d^2 \sigma_f}{dz^2} - A_1 \sigma_f + A_2 = 0 \quad (\text{A-33})$$

となり、その解は特性方程式 $t^2 - A_1 = 0$ より、

$$\sigma_f(z) = C_1 e^{\sqrt{A_1} z} + C_2 e^{-\sqrt{A_1} z} + C_3 \quad (\text{A-34})$$

で与えられる。ここで、以下で式(A-34)中の定数 $C_1 \sim C_3$ を境界条件を用いて求める。まず、 $\sigma_f(z)$ は $z \rightarrow \infty$ で $\sigma_f(\infty)$ に収束するので、

$$\sigma_f(z \rightarrow \infty) = C_1 e^{\sqrt{A_1} \infty} + C_2 e^{-\sqrt{A_1} \infty} + C_3 = \sigma_f(\infty) \quad (\text{A-35})$$

$$\frac{d\sigma_f(z \rightarrow \infty)}{dz} = \sqrt{A_1} (C_1 e^{\sqrt{A_1} \infty} - C_2 e^{-\sqrt{A_1} \infty}) = 0 \quad (\text{A-35}')$$

$$\therefore C_1 = 0, \quad C_3 = \sigma_f(\infty) \quad (\text{A-35}'')$$

また、 $\sigma_f(z)$ は $z = L_d$ で連続であるので、

$$\sigma_f(z = L_d) = \sigma_f(L_d) = C_2 e^{-\sqrt{A_1} L_d} + \sigma_f(\infty) \quad (\text{A-36})$$

$$\therefore C_2 = (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{\sqrt{A_1} L_d} \quad (\text{A-36}')$$

以上より、界面固着領域における $\sigma_f(z)$ 、 $\sigma_m(z)$ および $\tau_i(z)$ は、

$$\begin{aligned} \sigma_f(z) &= C_1 e^{\sqrt{A_1} z} + C_2 e^{-\sqrt{A_1} z} + C_3 \\ &= 0 \cdot e^{\sqrt{A_1} z} + (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{\sqrt{A_1} L_d} \cdot e^{-\sqrt{A_1} z} + \sigma_f(\infty) \\ &= (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} + \sigma_f(\infty) \end{aligned} \quad (\text{A-37})$$

$$\begin{aligned} \sigma_m(z) &= \frac{\sigma}{V_m} - \gamma \sigma_f(z) \\ &= \frac{\sigma}{V_m} - \gamma \left\{ (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} + \sigma_f(\infty) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-37}')$$

$$\tau_i(z) = -\frac{r_f}{2} \frac{d\sigma_f(z)}{dz} = \frac{r_f}{2\gamma} \frac{d\sigma_m(z)}{dz} = \frac{\rho}{2} (\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty)) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} \quad (\text{A-37}'')$$

また、以下でマトリックスき裂から無限遠（即ち、 $z=\infty$ ）における繊維およびマトリックスの z 方向応力 $\sigma_f(z=\infty)$ および $\sigma_m(z=\infty)$ を求める。ここで、2階の微分方程式(式(A-33))に界面固着領域における $\sigma_f(z)$ (式(A-37))を代入すると

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty) \right) \frac{\rho^2}{r_f^2} e^{-\rho(z-L_d)/r_f} \\ & - \frac{\rho^2}{r_f^2} \left[\left(\sigma_f(L_d) - \sigma_f(\infty) \right) e^{-\rho(z-L_d)/r_f} + \sigma_f(\infty) \right] + \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \frac{(1-2\nu_m\kappa)}{V_m E_m} \sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

したがって、無限遠における繊維およびマトリックス応力 $\sigma_f(z=\infty)$ および $\sigma_m(z=\infty)$ は、

$$\begin{aligned} \sigma_f(\infty) &= \frac{r_f^2}{\rho^2} \frac{2G_m}{r_f^2 \ln(\bar{R}/r_f)} \frac{(1-2\nu_m\kappa)}{V_m E_m} \sigma \\ &= \frac{E_m \ln(\bar{R}/r_f)}{2G_m [\alpha + \gamma + 2\kappa(\alpha\nu_f + \gamma\nu_m)] \ln(\bar{R}/r_f)} \frac{2G_m}{V_m E_m} \frac{(1-2\nu_m\kappa)}{V_m E_m} \sigma \\ &= \frac{1-2\nu_m\kappa}{V_m [\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha\nu_f + \gamma\nu_m)]} \sigma \end{aligned} \quad (\text{A-39})$$

$$\sigma_m(\infty) = \frac{\sigma}{V_m} - \gamma\sigma_f(\infty) = \frac{1}{V_m} \left[1 - \frac{\gamma(1-2\nu_m\kappa)}{\alpha + \gamma - 2\kappa(\alpha\nu_f + \gamma\nu_m)} \right] \quad (\text{A-39}')$$

となる。

付録 B Off-axis 方向の界面すべり

2, 3 および 4 章では, 二次元軸対称座標系(r, z)における制約条件付き有限要素法を対象に繊維軸方向 (z 方向) に沿った, すなわち, on-axis 上の界面すべりを扱ったが, 実際には界面の幾何学的変動等により, z 方向に対して角度を持った Off-axis 方向の界面すべりが生じることも考えられる. そこで, 本付録では, off-axis 方向の界面すべりにおける制約条件付き有限要素法の定式化について述べる.

Fig.B-1 に off-axis における界面はく離状態を示す. 同図に示すように, この界面接触状態では, 繊維およびマトリックスの節点が z 方向に対して α の角度 (時計回りを正) を持つ界面すべりを想定している.

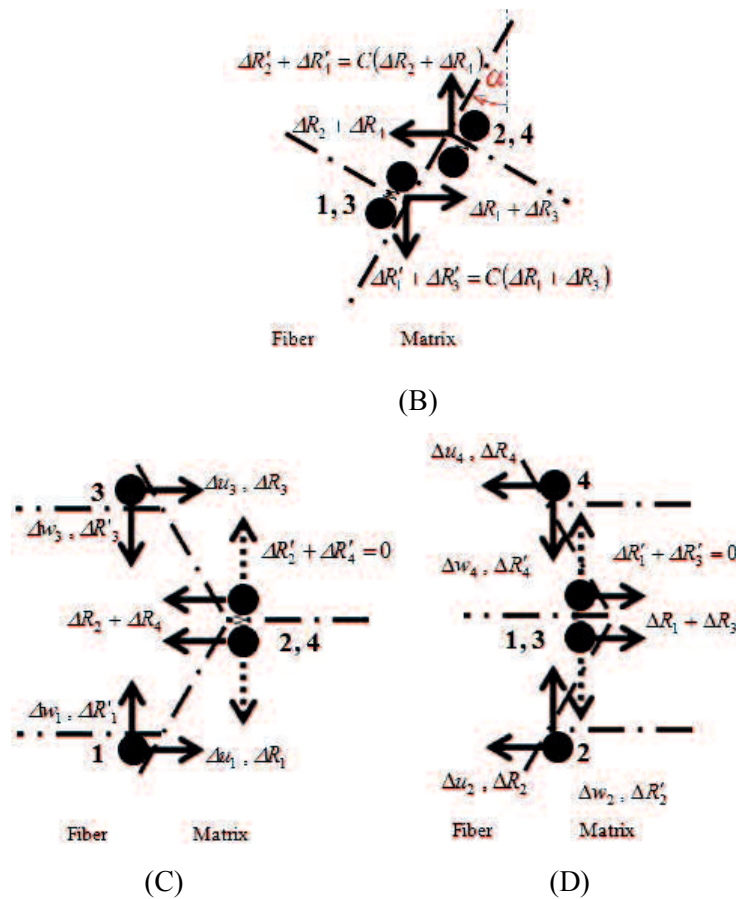


Fig.B-1 Interfacial contact state along off-axis direction. (B) Interfacial debonding, (C) Interfacial debonding with matrix crack, and (D) Interfacial debonding with fiber breakage

Fig.B-2 に示すように、この界面はく離状態 (off-axis) における r および z 方向の接触力をすべりおよびすべり垂直方向に分解し、クーロン摩擦則を適用させると、

$$(\Delta R_2 + \Delta R_4) \sin \alpha - (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) \cos \alpha = \mu \{ (\Delta R_2 + \Delta R_4) \cos \alpha + (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) \sin \alpha \} \quad (\text{B-1})$$

この式を ΔR および $\Delta R'$ で整理すると、

$$(\Delta R'_2 + \Delta R'_4) = \frac{\mu + \tan \alpha}{1 - \mu \tan \alpha} (\Delta R_2 + \Delta R_4) \equiv C (\Delta R_2 + \Delta R_4) \quad (\text{B-2})$$

同様に、

$$(\Delta R'_1 + \Delta R'_3) = C (\Delta R_1 + \Delta R_3) \quad (\text{B-3})$$

ここで、 $C = (\mu + \tan \alpha) / (1 - \mu \tan \alpha)$ は等価摩擦係数で、角度 α により見掛け上の摩擦係数が変化することを示している。

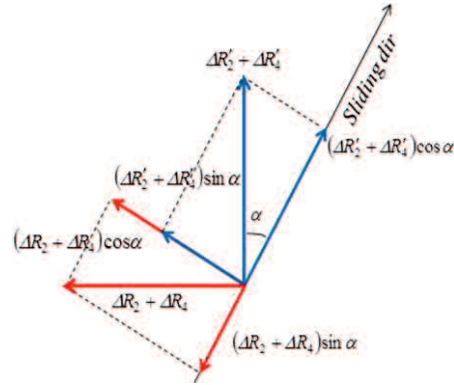


Fig.B-2 Analyzing of contact forces in interfacial debonding (off-axis).

以上より、off-axis 方向の界面はく離状態における制約条件および変形後の剛性方程式はそれぞれ次式のようなになる。なお、固着状態に関しては、on-axis の場合と全く同じ (式(2-3)および(2-12)) なので省略する。

(B) 界面はく離状態 (off-axis)

$$\Delta u_1 = \Delta u_3, \quad \Delta u_2 = \Delta u_4, \quad \Delta w_1 = \Delta w_3, \quad \Delta w_2 = \Delta w_4$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{\Delta w_2 - \Delta w_1} \quad (\text{B-4})$$

$$(\Delta R'_1 + \Delta R'_3) = \pm C (\Delta R_1 + \Delta R_3), \quad (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) = \pm C (\Delta R_2 + \Delta R_4)$$

$$(\Delta R_1 + \Delta R_3) + (\Delta R_2 + \Delta R_4) = 0, \quad (\Delta R'_1 + \Delta R'_3) + (\Delta R'_2 + \Delta R'_4) = 0$$

(C) マトリックス破断を伴う界面はく離状態 (off-axis)

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= \Delta u_3, \quad \Delta w_1 = \Delta w_3 \\
\tan \alpha &= \frac{\Delta u_1 - \Delta u_2}{(\Delta w_4 - \Delta w_2)/2} \\
\Delta R'_2 &= -C \Delta R_2, \quad \Delta R'_4 = C \Delta R_4 \\
\Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4 &= 0, \quad \Delta R'_1 + \Delta R'_2 + \Delta R'_3 + \Delta R'_4 = 0 \\
\Delta R'_1 + \Delta R'_3 &= 0
\end{aligned} \tag{B-5}$$

(D) 繊維破断を伴う界面はく離状態 (off-axis)

$$\begin{aligned}
\Delta u_2 &= \Delta u_4, \quad \Delta w_2 = \Delta w_4 \\
\tan \alpha &= \frac{\Delta u_2 - \Delta u_3}{(\Delta w_3 - \Delta w_1)/2} \\
\Delta R'_1 &= -C \Delta R_1, \quad \Delta R'_3 = C \Delta R_3 \\
\Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4 &= 0, \quad \Delta R'_1 + \Delta R'_2 + \Delta R'_3 + \Delta R'_4 = 0 \\
\Delta R'_2 + \Delta R'_4 &= 0
\end{aligned} \tag{B-6}$$

(B) 界面はく離状態 (off-axis)

$$\begin{bmatrix}
K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & K_{12} + K_{16} - (K_{13} + K_{17}) \tan \alpha & 1 & K_{14} + K_{18} + (K_{13} + K_{17}) \tan \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 \\
K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & K_{22} + K_{26} - (K_{23} + K_{27}) \tan \alpha & \pm C & K_{24} + K_{28} + (K_{23} + K_{27}) \tan \alpha & 0 & 1 & \pm C & 0 \\
K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & K_{32} + K_{36} - (K_{33} + K_{37}) \tan \alpha & -1 & K_{34} + K_{38} + (K_{33} + K_{37}) \tan \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & K_{42} + K_{46} - (K_{43} + K_{47}) \tan \alpha & \mp C & K_{44} + K_{48} + (K_{43} + K_{47}) \tan \alpha & 0 & 0 & \mp C & 1 \\
K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & K_{52} + K_{56} - (K_{53} + K_{57}) \tan \alpha & 0 & K_{54} + K_{58} + (K_{53} + K_{57}) \tan \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 \\
K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & K_{62} + K_{66} - (K_{63} + K_{67}) \tan \alpha & 0 & K_{64} + K_{68} + (K_{63} + K_{67}) \tan \alpha & 0 & -1 & 0 & 0 \\
K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & K_{72} + K_{76} - (K_{73} + K_{77}) \tan \alpha & 0 & K_{74} + K_{78} + (K_{73} + K_{77}) \tan \alpha & 0 & 0 & -1 & 0 \\
K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & K_{82} + K_{86} - (K_{83} + K_{87}) \tan \alpha & 0 & K_{84} + K_{88} + (K_{83} + K_{87}) \tan \alpha & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta u_1 \\
\Delta w_1 \\
\Delta R_2 \\
\Delta w_2 \\
\Delta R_3 \\
\Delta R_3 \\
\Delta R_4 \\
\Delta R_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\Delta f_{r1} \\
\Delta f_{z1} \\
\Delta f_{r2} \\
\Delta f_{z2} \\
\Delta f_{r3} \\
\Delta f_{z3} \\
\Delta f_{r4} \\
\Delta f_{z4}
\end{bmatrix}
\tag{B-7}$$

(C) マトリックス破断を伴う界面はく離状態 (off-axis)

$$\begin{bmatrix}
K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & K_{12} + K_{16} & 1 & K_{14} + (1/2)(K_{13} + K_{17}) \tan \alpha & 1 & 0 & 1 & K_{18} - (1/2)(K_{13} + K_{17}) \tan \alpha \\
K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & K_{22} + K_{26} & 0 & K_{24} + (1/2)(K_{23} + K_{27}) \tan \alpha & 0 & 1 & 0 & K_{28} - (1/2)(K_{23} + K_{27}) \tan \alpha \\
K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & K_{32} + K_{36} & -1 & K_{34} + (1/2)(K_{33} + K_{37}) \tan \alpha & 0 & 0 & 0 & K_{38} - (1/2)(K_{33} + K_{37}) \tan \alpha \\
K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & K_{42} + K_{46} & C & K_{44} + (1/2)(K_{43} + K_{47}) \tan \alpha & 0 & 0 & 0 & K_{48} - (1/2)(K_{43} + K_{47}) \tan \alpha \\
K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & K_{52} + K_{56} & 0 & K_{54} + (1/2)(K_{53} + K_{57}) \tan \alpha & -1 & 0 & 0 & K_{58} - (1/2)(K_{53} + K_{57}) \tan \alpha \\
K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & K_{62} + K_{66} & 0 & K_{64} + (1/2)(K_{63} + K_{67}) \tan \alpha & 0 & -1 & 0 & K_{68} - (1/2)(K_{63} + K_{67}) \tan \alpha \\
K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & K_{72} + K_{76} & 0 & K_{74} + (1/2)(K_{73} + K_{77}) \tan \alpha & 0 & 0 & -1 & K_{78} - (1/2)(K_{73} + K_{77}) \tan \alpha \\
K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & K_{82} + K_{86} & 0 & K_{84} + (1/2)(K_{83} + K_{87}) \tan \alpha & 0 & 0 & -C & K_{88} - (1/2)(K_{83} + K_{87}) \tan \alpha
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta u_1 \\
\Delta w_1 \\
\Delta R_2 \\
\Delta w_2 \\
\Delta R_3 \\
\Delta R_3 \\
\Delta R_4 \\
\Delta w_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\Delta f_{r1} \\
\Delta f_{z1} \\
\Delta f_{r2} \\
\Delta f_{z2} \\
\Delta f_{r3} \\
\Delta f_{z3} \\
\Delta f_{r4} \\
\Delta f_{z4}
\end{bmatrix}
\tag{B-8}$$

(D) 繊維破断を伴う界面はく離状態 (off-axis)

$$\begin{bmatrix}
-1 & K_{12} + (1/2)(K_{11} + K_{15})\tan\alpha & K_{11} + K_{13} + K_{15} + K_{17} & K_{18} + K_{14} & 0 & K_{16} - (1/2)(K_{11} + K_{15})\tan\alpha & 0 & 0 \\
C & K_{22} + (1/2)(K_{21} + K_{25})\tan\alpha & K_{21} + K_{23} + K_{25} + K_{27} & K_{28} + K_{24} & 0 & K_{26} - (1/2)(K_{21} + K_{25})\tan\alpha & 0 & 0 \\
1 & K_{32} + (1/2)(K_{31} + K_{35})\tan\alpha & K_{31} + K_{33} + K_{35} + K_{37} & K_{38} + K_{34} & 1 & K_{36} - (1/2)(K_{31} + K_{35})\tan\alpha & 1 & 0 \\
0 & K_{42} + (1/2)(K_{41} + K_{45})\tan\alpha & K_{41} + K_{43} + K_{45} + K_{47} & K_{48} + K_{44} & 0 & K_{46} - (1/2)(K_{41} + K_{45})\tan\alpha & 0 & 1 \\
0 & K_{52} + (1/2)(K_{51} + K_{55})\tan\alpha & K_{51} + K_{53} + K_{55} + K_{57} & K_{58} + K_{54} & -1 & K_{56} - (1/2)(K_{51} + K_{55})\tan\alpha & 0 & 0 \\
0 & K_{62} + (1/2)(K_{61} + K_{65})\tan\alpha & K_{61} + K_{63} + K_{65} + K_{67} & K_{68} + K_{64} & -C & K_{66} - (1/2)(K_{61} + K_{65})\tan\alpha & 0 & 0 \\
0 & K_{72} + (1/2)(K_{71} + K_{75})\tan\alpha & K_{71} + K_{73} + K_{75} + K_{77} & K_{78} + K_{74} & 0 & K_{76} - (1/2)(K_{71} + K_{75})\tan\alpha & -1 & 0 \\
0 & K_{82} + (1/2)(K_{81} + K_{85})\tan\alpha & K_{81} + K_{83} + K_{85} + K_{87} & K_{88} + K_{84} & 0 & K_{86} - (1/2)(K_{81} + K_{85})\tan\alpha & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\Delta R_1 \\
\Delta w_1 \\
\Delta u_2 \\
\Delta w_2 \\
\Delta R_3 \\
\Delta w_3 \\
\Delta R_4 \\
\Delta R_4
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\Delta f_{r1} \\
\Delta f_{z1} \\
\Delta f_{r2} \\
\Delta f_{z2} \\
\Delta f_{r3} \\
\Delta f_{z3} \\
\Delta f_{r4} \\
\Delta f_{z4}
\end{Bmatrix}
\tag{B-9}$$

なお、off-axis における制約条件式 (式(B-4)~(B-6)) および変形後の剛性方程式 (式(B-7)~(B-9)) において角度 α を 0 とおくと、on-axis の場合 (式(2-4)~(2-6)および(2-12)~(2-14)) と一致する。

付録 C 3次元における制約条件付き有限要素法

制約条件付き有限要素法モデルを3次元に拡張するにあたり，円筒座標系における繊維-マトリックス界面の接触状態を Fig.C-1 に示すような界面および要素間の重複節点モデルを用いて表現する．節点1~4は繊維側，5~8はマトリックス側にあり，重複節点数は8個となる．また，固着状態においては全ての節点は同一座標上にあるのに対し，界面はく離を生じることにより繊維およびマトリックス側の節点が z または θ 方向にスライドし，クーロン摩擦則に基づく接触力を生じる．なお，本モデルでは半径 r 方向には分離しないものとした．以下に，想定される損傷状態の界面接触条件（制約条件）を示す．

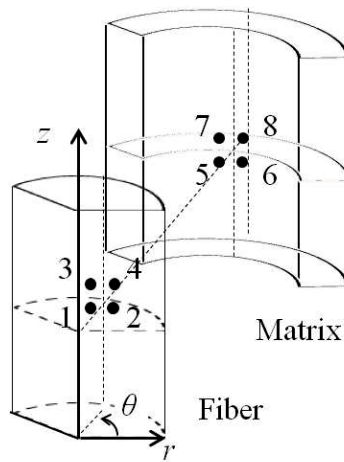


Fig.C-1 3-dimentional interfacial contact states.

(a-1) 固着状態（円筒座標系）

Fig.C-1 において，界面がはく離せず固着している状態である．変位増分の等価性および接触力増分のつり合いは次式で表わされる．ここで， Δu は節点変位増分， ΔR は接触力増分であり，添字の r ， θ および z はその方向を示す．

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{r1} &= \Delta u_{r2} = \Delta u_{r3} = \Delta u_{r4} = \Delta u_{r5} = \Delta u_{r6} = \Delta u_{r7} = \Delta u_{r8} \\
 \Delta u_{\theta1} &= \Delta u_{\theta2} = \Delta u_{\theta3} = \Delta u_{\theta4} = \Delta u_{\theta5} = \Delta u_{\theta6} = \Delta u_{\theta7} = \Delta u_{\theta8} \\
 \Delta u_{z1} &= \Delta u_{z2} = \Delta u_{z3} = \Delta u_{z4} = \Delta u_{z5} = \Delta u_{z6} = \Delta u_{z7} = \Delta u_{z8} \\
 (\Delta R_{x1} + \Delta R_{x2}) + (\Delta R_{x3} + \Delta R_{x4}) + (\Delta R_{x5} + \Delta R_{x6}) + (\Delta R_{x7} + \Delta R_{x8}) &= 0 \\
 (\Delta R_{\theta1} + \Delta R_{\theta2}) + (\Delta R_{\theta3} + \Delta R_{\theta4}) + (\Delta R_{\theta5} + \Delta R_{\theta6}) + (\Delta R_{\theta7} + \Delta R_{\theta8}) &= 0 \\
 (\Delta R_{z1} + \Delta R_{z2}) + (\Delta R_{z3} + \Delta R_{z4}) + (\Delta R_{z5} + \Delta R_{z6}) + (\Delta R_{z7} + \Delta R_{z8}) &= 0
 \end{aligned} \tag{C-1}$$

この制約条件は2章における界面はく離状態の制約条件(式(2-3))と同様のものであり，2次元軸対称座標系における節点1, 2, 3, 4を，3次元円筒座標系でそれぞれ1と2, 5と6, 3と4, 7と8のように置き換えたものである．

(b-1) 界面はく離状態 (円筒座標系, z 方向のみにすべる状態)

Fig.C-1 において, 繊維マトリックス間において界面せん断はく離が起こり, 繊維側とマトリックス側で z 方向に相対的なずれが生じている状態である. 変位増分の等価性および増分力のつり合いは, r 方向接触力と z 方向接触力間におけるクーロン摩擦則より, 次式のように表わされる.

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{r1} &= \Delta u_{r2} = \Delta u_{r3} = \Delta u_{r4} = \Delta u_{r5} = \Delta u_{r6} = \Delta u_{r7} = \Delta u_{r8} \\
 \Delta u_{\theta1} &= \Delta u_{\theta2} = \Delta u_{\theta3} = \Delta u_{\theta4} = \Delta u_{\theta5} = \Delta u_{\theta6} = \Delta u_{\theta7} = \Delta u_{\theta8} \\
 \Delta u_{z1} &= \Delta u_{z2} = \Delta u_{z3} = \Delta u_{z4}, \quad \Delta u_{z5} = \Delta u_{z6} = \Delta u_{z7} = \Delta u_{z8} \\
 (\Delta R_{r1} + \Delta R_{r2} + \Delta R_{r3} + \Delta R_{r4}) + (\Delta R_{r5} + \Delta R_{r6} + \Delta R_{r7} + \Delta R_{r8}) &= 0 \\
 (\Delta R_{\theta1} + \Delta R_{\theta2} + \Delta R_{\theta3} + \Delta R_{\theta4}) + (\Delta R_{\theta5} + \Delta R_{\theta6} + \Delta R_{\theta7} + \Delta R_{\theta8}) &= 0 \\
 (\Delta R_{z1} + \Delta R_{z2} + \Delta R_{z3} + \Delta R_{z4}) + (\Delta R_{z5} + \Delta R_{z6} + \Delta R_{z7} + \Delta R_{z8}) &= 0 \\
 (\Delta R_{z1} + \Delta R_{z2} + \Delta R_{z3} + \Delta R_{z4}) &= \mu(\Delta R_{r1} + \Delta R_{r2} + \Delta R_{r3} + \Delta R_{r4}) \\
 (\Delta R_{z5} + \Delta R_{z6} + \Delta R_{z7} + \Delta R_{z8}) &= \mu(\Delta R_{r5} + \Delta R_{r6} + \Delta R_{r7} + \Delta R_{r8})
 \end{aligned} \tag{C-2}$$

(b-2) 界面はく離状態 (円筒座標系, θ 方向のみにすべる状態)

Fig.C-1 において, 繊維マトリックス間において界面せん断はく離が起こり, 繊維側とマトリックス側で θ 方向に相対的なずれが生じている状態である. 変位増分の等価性および増分力のつり合いは, r 方向接触力と θ 方向接触力間におけるクーロン摩擦則より次式のように表わされる.

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{r1} &= \Delta u_{r2} = \Delta u_{r3} = \Delta u_{r4} = \Delta u_{r5} = \Delta u_{r6} = \Delta u_{r7} = \Delta u_{r8} \\
 \Delta u_{\theta1} &= \Delta u_{\theta2} = \Delta u_{\theta3} = \Delta u_{\theta4}, \quad \Delta u_{\theta5} = \Delta u_{\theta6} = \Delta u_{\theta7} = \Delta u_{\theta8} \\
 \Delta u_{z1} &= \Delta u_{z2} = \Delta u_{z3} = \Delta u_{z4} = \Delta u_{z5} = \Delta u_{z6} = \Delta u_{z7} = \Delta u_{z8} \\
 (\Delta R_{r1} + \Delta R_{r2} + \Delta R_{r3} + \Delta R_{r4}) + (\Delta R_{r5} + \Delta R_{r6} + \Delta R_{r7} + \Delta R_{r8}) &= 0 \\
 (\Delta R_{\theta1} + \Delta R_{\theta2} + \Delta R_{\theta3} + \Delta R_{\theta4}) + (\Delta R_{\theta5} + \Delta R_{\theta6} + \Delta R_{\theta7} + \Delta R_{\theta8}) &= 0 \\
 (\Delta R_{z1} + \Delta R_{z2} + \Delta R_{z3} + \Delta R_{z4}) + (\Delta R_{z5} + \Delta R_{z6} + \Delta R_{z7} + \Delta R_{z8}) &= 0 \\
 (\Delta R_{\theta1} + \Delta R_{\theta2} + \Delta R_{\theta3} + \Delta R_{\theta4}) &= \mu(\Delta R_{r1} + \Delta R_{r2} + \Delta R_{r3} + \Delta R_{r4}) \\
 (\Delta R_{\theta5} + \Delta R_{\theta6} + \Delta R_{\theta7} + \Delta R_{\theta8}) &= \mu(\Delta R_{r5} + \Delta R_{r6} + \Delta R_{r7} + \Delta R_{r8})
 \end{aligned} \tag{C-3}$$

(b-3) 界面はく離状態 (円筒座標系, z および θ 方向にすべる状態)

Fig.C-1 において, 繊維マトリックス間において界面せん断はく離が起こり, 繊維側とマトリックス側で z および θ 方向に相対的なずれが生じている状態である. この界面はく離状態では, 変位および接触力の方向が同じであると仮定し, Fig.C-2 に示すように, その θ と z 方向の変位 (接触力) のなす角を ϕ とおいている. したがって, r および θ 方向の変位増分・接触力増分の関係は次式となる.

$$\tan\phi = \frac{\Delta u_z}{\Delta u_\theta} = \frac{\Delta R_z}{\Delta R_\theta} \tag{C-4}$$

また, r と θ 方向の接触力増分の合力は次式で与えられる.

$$\Delta R_{\theta} \cos \phi + \Delta R_z \sin \phi \quad (\text{C-5})$$

以上より, 変位増分の等価性および接触力増分のつり合いは, 次式のように表わされる.

$$\begin{aligned} \Delta u_{r1} &= \Delta u_{r2} = \Delta u_{r3} = \Delta u_{r4} = \Delta u_{r5} = \Delta u_{r6} = \Delta u_{r7} = \Delta u_{r8} \\ \Delta u_{\theta1} &= \Delta u_{\theta2} = \Delta u_{\theta3} = \Delta u_{\theta4}, \quad \Delta u_{\theta5} = \Delta u_{\theta6} = \Delta u_{\theta7} = \Delta u_{\theta8} \\ \Delta u_{z1} &= \Delta u_{z2} = \Delta u_{z3} = \Delta u_{z4}, \quad \Delta u_{z5} = \Delta u_{z6} = \Delta u_{z7} = \Delta u_{z8} \\ \tan \phi &= \frac{\Delta u_z}{\Delta u_{\theta}} = \frac{\Delta R_z}{\Delta R_{\theta}} \\ (\Delta R_{r1} + \Delta R_{r2} + \Delta R_{r3} + \Delta R_{r4}) + (\Delta R_{r5} + \Delta R_{r6} + \Delta R_{r7} + \Delta R_{r8}) &= 0 \\ (\Delta R_{\theta1} + \Delta R_{\theta2} + \Delta R_{\theta3} + \Delta R_{\theta4}) + (\Delta R_{\theta5} + \Delta R_{\theta6} + \Delta R_{\theta7} + \Delta R_{\theta8}) &= 0 \\ (\Delta R_{z1} + \Delta R_{z2} + \Delta R_{z3} + \Delta R_{z4}) + (\Delta R_{z5} + \Delta R_{z6} + \Delta R_{z7} + \Delta R_{z8}) &= 0 \\ (\Delta R_{\theta1} + \Delta R_{\theta2} + \Delta R_{\theta3} + \Delta R_{\theta4}) \cos \phi + (\Delta R_{z1} + \Delta R_{z2} + \Delta R_{z3} + \Delta R_{z4}) \sin \phi &= \mu (\Delta R_{r1} + \Delta R_{r2} + \Delta R_{r3} + \Delta R_{r4}) \\ (\Delta R_{\theta5} + \Delta R_{\theta6} + \Delta R_{\theta7} + \Delta R_{\theta8}) \cos \phi + (\Delta R_{z5} + \Delta R_{z6} + \Delta R_{z7} + \Delta R_{z8}) \sin \phi &= \mu (\Delta R_{r5} + \Delta R_{r6} + \Delta R_{r7} + \Delta R_{r8}) \end{aligned} \quad (\text{C-6})$$

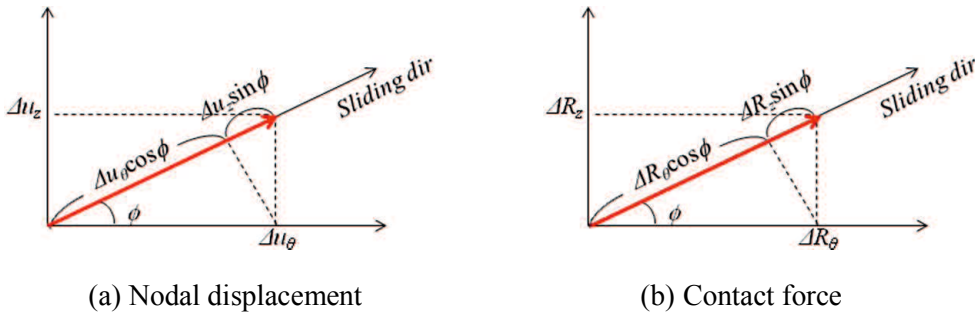


Fig.C-2 Assumption of movement to identical angle ϕ for nodal displacement and contact force.

この円筒座標系(r, θ, z)における剛性方程式は式(C-7)で示され, 未知数 48 (変位増分 24, 接触力増分 24) に対し, 方程式は 24 であり, このままではこれを解くことができない. そこで, 2次元軸対称座標系のとくと同様に制約条件(式(C-1)~(C-3)および(C-6))を用いて剛性方程式を変形することで, この方程式を解くことを可能とする.

(a-1) 固着状態 (円筒座標系)

$$\begin{bmatrix}
 K_{1,1} + K_{1,4} + \cdots + K_{1,22} & K_{1,2} + K_{1,5} + \cdots + K_{1,23} & K_{1,3} + K_{1,6} + \cdots + K_{1,24} & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
 K_{2,1} + K_{2,4} + \cdots + K_{2,22} & K_{2,2} + K_{2,5} + \cdots + K_{2,23} & K_{2,3} + K_{2,6} + \cdots + K_{2,24} & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
 K_{3,1} + K_{3,4} + \cdots + K_{3,22} & K_{3,2} + K_{3,5} + \cdots + K_{3,23} & K_{3,3} + K_{3,6} + \cdots + K_{3,24} & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & 1 & & & & & & & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & & & & & & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & 1 & & & & & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & & & & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \ddots & & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & 1 & & & & \\
 K_{24,1} + K_{24,4} + \cdots + K_{24,22} & K_{24,2} + K_{24,5} + \cdots + K_{24,23} & K_{24,3} + K_{24,6} + \cdots + K_{24,24} & & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta u_{r1} \\
 \Delta u_{\theta1} \\
 \Delta u_{z1} \\
 \Delta R_{r2} \\
 \Delta R_{\theta2} \\
 \Delta R_{z2} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \Delta R_{r8} \\
 \Delta R_{\theta8} \\
 \Delta R_{z8}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \Delta f_{r1} \\
 \Delta f_{\theta1} \\
 \Delta f_{z1} \\
 \Delta f_{r2} \\
 \Delta f_{\theta2} \\
 \Delta f_{z2} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \Delta f_{r8} \\
 \Delta f_{\theta8} \\
 \Delta f_{z8}
 \end{bmatrix}$$

(C-8)

ここで、式(C-6)は変位（接触力）方向と θ 軸のなす角 ϕ が既知であるときの制約条件であり、 ϕ が未知であるときこの界面はく離状態を定義することができない。そこで、 z - θ 平面上の界面すべりを考える際には、まず、 z 方向のみ（式(C-2)）および θ 方向のみ（式(C-3)）に界面がすべる制約条件を与えて個別に解析を行い、それぞれの変位を計算する。その後、その変位の比 $\Delta u_z / \Delta u_\theta = \tan\phi$ から界面すべりの方向角 ϕ が決定できるので、得られた ϕ を式(C-6)および(C-11)に代入することで、三次元における界面すべりを再現できると考えられる。

また、本付録では円筒座標系(r, θ, z)における制約条件および剛性方程式の変形について記述しているが、直行座標系(x, y, z)においても同様に用いることができる。