||||| 研究ノート |||||

推移閉包演算と対称的推移関係

橋 本　　寛

1．はじめに

二項関係は様々の数理的な分野の基礎理論において重要であり，その基本的性質はよく知られている[1,2,5]。その中でも，対称的な推移関係は基本的な役割を果たしていると考えられる。本稿では，対称的推移関係の同値条件を推移閉包の演算との関係で調べている。得られた性質は従来知られている性質の若干の一般化となっている。

2．定義

以下のように演算を定義する。x, y を0, 1の値をとる変数とするとき

$x \vee y = \max(x, y)$，$x \wedge y = \min(x, y)$

と定める。次に0, 1の要素をもつ n 次ブール行列 $R = [r_{ij}], S = [s_{ij}]$ に対して

$R \vee S = [r_{ij} \vee s_{ij}]$，$R \wedge S = [r_{ij} \wedge s_{ij}]$

$R' = [r_{ji}]$（転置）

$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdot\cdot\cdot \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$

$R^0 = I = [\delta_{ij}]$（δ_{ij} はクロネッカーのデルタ）

$R^k = R^{k\text{-}1} \times R \quad (k = 1, 2, \cdot\cdot\cdot)$

$R^+ = R \vee R^2 \vee R^3 \vee \cdot\cdot\cdot$　（推移閉包）

$R \leqq S \Leftrightarrow r_{ij} \leqq s_{ij}\ (i, j = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, n)$

$(R)_{ij} = r_{ij}$

と定める。

一般に二項関係はブール行列で表現でき，対称な関係を表現するブール

行列 R は $R \leqq R'$ となり，推移的な関係を表現するブール行列 R は $R^2 \leqq R$ となる。以下においては，i, j, k, ℓ, m, p などは非負の整数を示し，R, S, T, U, V などは0, 1要素の n 次ブール行列を表すものとする。

3．結果

対称的推移関係の同値条件を示す。対称的推移関係は，ブール行列 R で表現すると，$R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$ となる。

［性質1］ $\ell, m, p \geqq 1$ とする。S は $R^m \times R'$, $(R^+)^m \times R'$, $(R^m)^+ \times R'$, $R^m \times (R')^+$, $(R^+)^m \times (R')^+$ または $(R^m)^+ \times (R')^+$ であるとする。T は $R' \times R$, $(R')^+ \times R$, $R' \times R^+$ または $(R')^+ \times R^+$ であるとする。U は S^ℓ, $(S^+)^\ell$ または $(S^\ell)^+$ であるとする。V は T^p, $(T^+)^p$ または $(T^p)^+$ であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$

(2) $U \leqq R$，$V \wedge I \leqq R$

(3) $U = R$，$V \wedge I \leqq R$

(4) $U \leqq R$，$V \wedge I \leqq R \wedge I$

(5) $U \leqq R$，$V \wedge I = R \wedge I$

(6) $U = R$，$V \wedge I \leqq R \wedge I$

(7) $U = R$，$V \wedge I = R \wedge I$

(8) $U \leqq R$，$V \leqq R$

(9) $U \leqq R$，$V = R$

(10) $U = R$，$V \leqq R$

(11) $U = R$，$V = R$

（証明） (1) ⇒ (11) $R' = R, R^2 = R, R^m = R, R^+ = R$ であるから，$S = R^2 = R, S^\ell = R^\ell = R, (S^+)^\ell = R^\ell = R, (S^\ell)^+ = R^+ = R$ となり，$U = R$，$T = R^2 = R, V = R$ となる。

(11) ⇒ (7) ⇒ (6) ⇒ (3) ⇒ (2)，(11) ⇒ (10) ⇒ (8) ⇒ (4) ⇒ (2)，(11) ⇒ (9) ⇒ (5) ⇒ (2)　明らかである。

(2) $\Rightarrow$ (1) $R^m \times R' \leqq S, (R^m \times R')^\ell \leqq S^\ell \leqq U \leqq R$ となり，また $R' \times R \leqq T, (R' \times R)^p \leqq T^p \leqq V$ となり，$(R' \times R)^p \wedge I \leqq V \wedge I \leqq R$ となる。

（i） $(R)_{ij} = 1$ とおく。$(R')_{ji} = 1, (R' \times R)_{jj} = 1, ((R' \times R)^p)_{jj} = 1, (R)_{jj} = 1$ となるから，$((R^m \times R')^{\ell-1})_{jj} \wedge (R^m)_{jj} \wedge (R')_{ji} = 1, ((R^m \times R')^\ell)_{ji} = 1, (R)_{ji} = 1$ となり，$R' = R, R^{\ell(m+1)} \leqq R$ が得られる。

（ii） $(R)_{ik} \wedge (R)_{kj} = 1$ とおく。$(R)_{kj} = 1, (R')_{jk} = 1, (R' \times R)_{jj} = 1, ((R' \times R)^p)_{jj} = 1, (R)_{jj} = 1$ となるから，$(R^2)_{ij} \wedge (R^{\ell(m+1)-2})_{jj} = 1, (R^{\ell(m+1)})_{ij} = 1, (R)_{ij} = 1$となり，$R^2 \leqq R$ が得られる。　（証明終）

上の性質1に関しては，以下の性質8で示すように，

$$R \leqq R', R^2 \leqq R \Leftrightarrow V = R$$

が成立する。

また性質1における条件の組み合わせから次のような性質を得ることができる。

［性質2］ $\ell, m, p \geqq 1$に対して次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R',\ R^2 \leqq R$

(2) $(R^m \times R')^\ell \leqq R,\ (R' \times R)^p \wedge I \leqq R$

(3) $(R^m \times R')^\ell = R,\ (R' \times R)^p \wedge I \leqq R$

(4) $(R^m \times R')^\ell \leqq R,\ (R' \times R)^p \wedge I \leqq R \wedge I$

(5) $(R^m \times R')^\ell \leqq R,\ (R' \times R)^p \wedge I = R \wedge I$

(6) $(R^m \times R')^\ell = R,\ (R' \times R)^p \wedge I \leqq R \wedge I$

(7) $(R^m \times R')^\ell = R,\ (R' \times R)^p \wedge I = R \wedge I$

(8) $(R^m \times R')^\ell \leqq R,\ (R' \times R)^p \leqq R$

(9) $(R^m \times R')^\ell \leqq R,\ (R' \times R)^p = R$

(10) $(R^m \times R')^\ell = R,\ (R' \times R)^p \leqq R$

(11) $(R^m \times R')^\ell = R,\ (R' \times R)^p = R$

なお，この性質2に関しても，以下の性質8で示すように，$p \geqq 1$に対して

$$R \leqq R', R^2 \leqq R \Leftrightarrow (R' \times R)^p = R$$

が成立する。

[性質3]　$\ell, m, p \geqq 1$と　す　る。Sは$R' \times R^m$, $(R')^+ \times R^m$, $R' \times (R^+)^m$, $R' \times (R^m)^+$, $(R')^+ \times (R^+)^m$ または$(R')^+ \times (R^m)^+$であるとする。Tは$R \times R'$, $R^+ \times R'$, $R \times (R')^+$または$R^+ \times (R')^+$であるとする。UはS^ℓ, $(S^+)^\ell$または$(S^\ell)^+$であるとする。VはT^p, $(T^+)^p$または$(T^p)^+$であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $U \leqq R$,　$V \wedge I \leqq R$

(3) $U = R$,　$V \wedge I \leqq R$

(4) $U \leqq R$,　$V \wedge I \leqq R \wedge I$

(5) $U \leqq R$,　$V \wedge I = R \wedge I$

(6) $U = R$,　$V \wedge I \leqq R \wedge I$

(7) $U = R$,　$V \wedge I = R \wedge I$

(8) $U \leqq R$,　$V \leqq R$

(9) $U \leqq R$,　$V = R$

(10) $U = R$,　$V \leqq R$

(11) $U = R$,　$V = R$

（証明）性質1と同様である。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

上の性質3に関しては，以下の性質8で示すように，性質1と同じく

$$R \leqq R', R^2 \leqq R \Leftrightarrow V = R$$

が成立する。

[性質4]　$m \geqq 2$, $p \geqq 1$とする。SはR^m, $(R^+)^m$または$(R^m)^+$であるとする。Tは$R' \times R$,　$(R')^+ \times R$, $R' \times R^+$または$(R')^+ \times R^+$であるとする。VはT^p, $(T^+)^p$または$(T^p)^+$であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$,　$R^2 \leqq R$

(2) $S \leqq R'$,　$V \wedge I \leqq R$

(3) $S = R'$,　$V \wedge I \leqq R$

(4) $S \leqq R'$,　$V \wedge I \leqq R \wedge I$

(5) $S \leqq R'$,　$V \wedge I = R \wedge I$

(6) $S = R', \ V \wedge I \leqq R \wedge I$

(7) $S = R', \ V \wedge I = R \wedge I$

(8) $S \leqq R', \ V \leqq R$

(9) $S \leqq R', \ V = R$

(10) $S = R', \ V \leqq R$

(11) $S = R', \ V = R$

(証明)　(1) ⇒ (11) $R' = R, R^2 = R, R^m = R, R^+ = R$ であるから，$S = R = R', T = R^2 = R, V = R$ となる。

(11) ⇒ (7) ⇒ (6) ⇒ (3) ⇒ (2)，(11) ⇒ (10) ⇒ (8) ⇒ (4) ⇒ (2)，(11) ⇒ (9) ⇒ (5) ⇒ (2)　明らかである。

(2) ⇒ (1)　$R^m \leqq S \leqq R', \ R' \times R \leqq T, T^p \leqq V$ であるから，$(R' \times R)^p \wedge I \leqq T^p \wedge I \leqq V \wedge I \leqq R$ となる。

(ⅰ)　$(R)_{ij} = 1$とおく。このとき$(R')_{ji} = 1, (R' \times R)_{jj} = 1, ((R' \times R)^p)_{jj} = 1, (R)_{jj} = 1$ となるから，$(R\ )_{ij} \wedge (R^{m\text{-}1})_{jj} = 1, (R^m)_{ij} = 1, (R')_{ij} = 1 \ (R)_{ji} = 1$ となり，$R' = R\ , R^m \leqq R$ が得られる。

(ⅱ)　$(R)_{ik} \wedge \ (R)_{kj} = 1$ とおく。このとき$(R)_{kj} = 1, (R')_{jk} = 1, (R' \times R)_{jj} = 1, ((R' \times R)^p)_{jj} = 1, (R)_{jj} = 1, (R^2)_{ij} \wedge (R^{m\text{-}2})_{jj} = 1$となるから，$(R^m)_{ij} = 1, (R)_{ij} = 1$となり，$R^2 \leqq R$ となる。　(証明終)

上の性質4に関しては，以下の性質8で示すように，性質1や性質3の場合と同様

$$R \leqq R', R^2 \leqq R \Leftrightarrow V = R$$

が成立する。

なお，性質4の S に関して，$R^+ \times R = R \times R^+ = (R^+)^2$ であるから，$R^+ \times R, R \times R^+$ も S の特別な場合となる。

また，この性質4における S の $m = 1$に相当する場合として次の性質5と性質6が成立する。

[性質5] 次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R', \ R^2 \leqq R$

(2) $R^+ \leqq R'$

(3) $R^+ = R'$

（証明）　(1) ⇒ (3) $R' = R, R^2 = R, R^+ = R$ であるから，$R^+ = R = R'$ となる。

(3) ⇒ (2)　明らかである。

(2) ⇒ (1) $R^+ = R \vee R^2 \vee \cdot\cdot\cdot \leqq R'$ であるから，$R \leqq R', R^2 \leqq R'$ となり，したがって $R' = R, R^2 \leqq R$ となる。　（証明終）

［性質6］ $p \geqq 1$とする。Vは R^{2p}, $(R^+)^{2p}$, $(R^{2p})^+$, $((R^2)^+)^p$ または $((R^p)^+)^2$ であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $R \leqq R'$, $V \leqq R$

(3) $R \leqq R'$, $V = R$

（証明）　(1) ⇒ (3) $R^2 = R$, $R^p = R, R^{2p} = R, R^+ = R$ であるから，$V = R$ となる。

(3) ⇒ (2)　明らかである。

(2) ⇒ (1) $R^{2p} \leqq V \leqq R$ であり，一般に $R \leqq R \times R' \times R$ となるから，$R \leqq R'$ すなわち $R' = R$ のとき $R \leqq R^3$となる。したがって，これから $R^2 \leqq R^4 \leqq \cdot\cdot\cdot \leqq R^{2p} \leqq R$ となる。　（証明終）

［性質7］ $m \geqq 2, p \geqq 1$とする。Sは R^m, $(R^+)^m$ または $(R^m)^+$ であるとする。Tは $R \times R', R^+ \times R', R \times (R')^+$ または $R^+ \times (R')^+$ であるとする。Vは T^p, $(T^+)^p$ または $(T^p)^+$ であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$, $R^2 \leqq R$

(2) $S \leqq R'$, $V \wedge I \leqq R$

(3) $S = R'$, $V \wedge I \leqq R$

(4) $S \leqq R'$, $V \wedge I \leqq R \wedge I$

(5) $S \leqq R'$, $V \wedge I = R \wedge I$

(6) $S = R'$, $V \wedge I \leqq R \wedge I$

(7) $S = R'$, $V \wedge I = R \wedge I$

(8) $S \leqq R',\ V \leqq R$

(9) $S \leqq R',\ V = R$

(10) $S = R',\ V \leqq R$

(11) $S = R',\ V = R$

（証明） 性質4と同様である。（証明終）

上の性質7に関しては，次の性質8で示すように，性質4と同じく

$$R \leqq R', R^2 \leqq R \Leftrightarrow V = R$$

が成立する。

［性質8］ $p \geqq 1$とする。Tは$R' \times R$, $R \times R'$, $(R')^+ \times R$, $R^+ \times R'$, $R' \times R^+$, $R \times (R')^+$, $(R')^+ \times R^+$または$R^+ \times (R')^+$であるとする。VはT^p, $(T^+)^p$または$(T^p)^+$であるとする。このとき

$$R \leqq R', R^2 \leqq R \Leftrightarrow V = R$$

（証明） ($\Rightarrow$) $R' = R, R^2 = R, R^+ = R, (R')^+ = R' = R$であるから，$T = R \times R = R^2 = R, T^p = R^p = R, T^+ = R^+ = R, (T^+)^p = R^p = R, (T^p)^+ = R^+ = R$となる。したがって$V = R$となる。

($\Leftarrow$) (1) $V = T^p$のとき

(i) Tが$(R')^+ \times R, R^+ \times R', R' \times R^+$または$R \times (R')^+$のとき

$T = (R')^+ \times R$の場合を示す。他の場合も同様である。

このとき$((R')^+ \times R)^p = R$であり，これから$(R' \times R)^p \leqq ((R')^+ \times R)^p = R$となる。$(R)_{ij} = 1$とおく。このとき$(R')_{ji} = 1$となる。$R \leqq ((R')^+ \times R)^p$だから，$(R)_{ij} = 1$に対して，ある$k$が存在して$(R')_{ik} = 1$となり，$(R' \times R)_{ii} = 1, ((R' \times R)^p)_{ii} = 1, (R)_{ii} = 1$となるので，$(R')_{ji} \wedge (R)_{ii} \wedge ((R' \times R)^{p-1})_{ii} = 1$すなわち$((R' \times R)^p)_{ji} = 1, (R)_{ji} = 1$となり，$R \leqq R', R' = R$が得られる。このとき$((R')^+ \times R)^p = (R^+ \times R)^p = ((R^+)^2)^p = (R^+)^{2p}$となり，したがって$(R^+)^{2p} = R$となり，$((R^+)^{2p})^2 \leqq (R^+)^{2p}$だから，$R^2 \leqq R$となる。

(ii) Tが$R' \times R$, $R \times R'$, $(R')^+ \times R^+$または$R^+ \times (R')^+$のとき

$T' = T$だから$(T^p)' = T^p, V' = V$となり，$R' = R$となる。これから$R^2 \leqq T$となり，$R^{2p} \leqq T^p = V = R$となる。一般に$R \leqq R \times R' \times R$であるか

ら，$R' = R$ とき $R \leqq R^3$ となり，$R^2 \leqq R^4 \leqq \cdot\cdot\cdot \leqq R^{2p} \leqq R$ となる。

(2) V が $(T^+)^p$ または $(T^p)^+$ のとき

$V^2 \leqq V$ であるから $R^2 \leqq R$, $R^+ = R$, $(R')^+ = R'$ となり，$T = R' \times R$ または $T = R \times R'$ となるので，$T' = T$, $V' = V$ となり，$R'=R$ となる。

（証明終）

上の性質8の特別な場合として，次のような性質が得られる。

［性質9］ $p \geqq 1$ に対して次の条件は同値である。

(1) $R \leqq R'$，$R^2 \leqq R$

(2) $(R^+ \times R')^p = R$

(3) $(R' \times R^+)^p = R$

4．まとめ

推移閉包の演算を条件に含む対称的推移関係の同値条件について考察をおこない，いくつかの結果を得た。本稿で示した性質における条件の組み合わせおよびそれらの特別な場合として，対称的推移性に関する多数の同値条件が得られる。対称的推移関係に関しては，これまでにも種々の同値条件が知られているが[3,4]，ここでの結果はそれらの条件の一部を推移閉包の演算を用いて一般化した形になっている。推移閉包に関する対称的推移関係の同値条件はここで示したもの以外にも存在するのでそれらについては別の機会に検討したい。

文　献

[1] Arrow, K.J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

[2] Chipman, J.S.: "The foundations of utility," Econometrica, Vol.28, 2, pp.193-224 (1960).

[3] 橋本　寛："同値関係を表現するブール行列のいくつかの性質，" 山口経済学雑誌，第57巻，第6号，pp.1015-1039（平成21年3月）.

[4] Maddux, R.D.: "Relation Algebras," Elsevier, Amsterdam (2006).

[5] Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).