The 37th Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2014)
Unazuki, Toyama, Japan, Dec. 09–12, 2014

非エルミート型の不確定性関係とその応用
Non-Hermitian Type Uncertainty Relation and its Application

柳　研二郎*
Kenjiro Yanagi

Abstract— In quantum mechanics it is well known that Heisenberg/Schrödinger uncertainty relations hold for two non-commutative observables and density operator. These are some kinds of trace inequalities. Recently Dou and Du [5, 6] obtained several uncertainty relations for two non-commutative non-hermitian observables and density operator. In this paper we show that their results can be given as corollaries of our non-hermitian type uncertainty relations for generalized metric adjusted skew informations or generalized metric adjusted correlation measures.

Keywords— Trace inequality, metric adjusted skew information, metric adjusted correlation measure

1 Introduction

$M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ complex matrices 全体, $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ self-adjoint matrices 全体, $M_{n,+}(\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ の中の strictly positive elements の全体, $M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を strictly positive density matrices 全体, すなわち $M_{n,+,1}(\mathbb{C}) = \{\rho \in M_n(\mathbb{C}) | Tr[\rho] = 1, \rho > 0\}$. 以下断らない限り faithful states を扱うものとする. すなわち $\rho > 0$ である. $M_n(\mathbb{C})$ 上の Hilbert-Schmidt 内積は $\langle A, B\rangle = Tr[A^*B]$ で与えられる. Wigner-Yanase 歪情報量 (skew information) は [22] で次のように定義されている.

$$\begin{aligned} I_\rho(H) &= \frac{1}{2}Tr\left[\left(i\left[\rho^{1/2}, H\right]\right)^2\right] \\ &= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^{1/2}H\rho^{1/2}H]. \end{aligned}$$

この量は量子状態 $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ と物理量 $H \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ の間のある種の非可換の度合いを表すものと考えられる. ここで commutator を $[X, Y] = XY - YX$ と表す. またこの量は Dyson によって次のように一般化され　Wigner-Yanase-Dyson skew information と呼ばれている.

$$\begin{aligned} I_{\rho,\alpha}(H) &= \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])] \\ &= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^\alpha H\rho^{1-\alpha}H], \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

$I_{\rho,\alpha}(H)$ は ρ に関して凸であることが E.H.Lieb [17] によって証明されたことはよく知られている. Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の関係は [19]. で最初に得られた. さらに Wigner-Yanase-Dyson skew information と uncertainty relation の関係については [15, 23] によって与えられた. その後 [23, 24] において一般化された歪情報量が定義され, ある種の uncertainty relation が得られた. また [25] においてはそれをさらに two parameter 化して uncertainty relation を得た. さらなる拡張が [27] によって最近得られている.

2 Dou-Du による非エルミート型の Uncertainty Relations

最近 Dou-Du [5, 6] によって次のような非エルミート型の Heisenberg/Schrödinger uncertainty relations が与えられた.

定義 2.1 $A, B \in M_n(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の記号を定義する.

(1) $[A, B]^0 = \frac{1}{2}([A, B] + [A^*, B^*])$,
ただし $[A, B] = AB - BA$.

(2) $\{A, B\}^0 = \frac{1}{2}(\{A, B\} + \{A^*, B^*\})$,
ただし $\{A, B\} = AB + BA$.

(3) $|Var_\rho|(A) = Tr[\rho A_0^* A_0]$,
ただし $A_0 = A - Tr[\rho A]I$.

(4) $|Var_\rho^0|(A) = \frac{1}{2}(|Var_\rho|(A) + |Var_\rho|(A^*))$.

このとき次の定理を得た.

定理 2.1 $A, B \in M_n(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の *uncertainty relations* が成り立つ.

(1) $|Var_\rho^0|(A)|Var_\rho^0|(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A, B]]|^2$.

(2) $|Var_\rho^0|(A)|Var_\rho^0|(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho\{A_0, B_0\}]|^2$.

(3) $|Var_\rho^0|(A)|Var_\rho^0|(B)$
$\geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A, B]^0]|^2 + \frac{1}{4}|Tr[\rho\{A_0, B_0\}^0]|^2$.

(4) $|U_\rho|(A)|U_\rho|(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A, B]^0]|^2$,
ただし

$$|U_\rho|(A) = \sqrt{(|Var_\rho^0|(A))^2 - (|Var_\rho^0|(A) - |I_\rho|(A))^2},$$

$$|I_\rho|(A) = \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^{1/2}, A^*])(i[\rho^{1/2}, A])].$$

* 山口大学大学院理工学研究科, 〒 755-8611 山口県宇部市常盤台 2-16-1, Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University, 2-16-1, Tokiwadai, Ube 755-8611, Japan, E-mail:yanagi@yamaguchi-u.ac.jp

3 作用素単調函数

函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ は，任意の $n\in\mathbb{N}$ と $0\le A\le B$ である任意の $A,B\in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して $0\le f(A)\le f(B)$ が成り立つとき，作用素単調 (operator monotone) という．operator monotone function が $f(x)=xf(x^{-1})$ を満たすとき，symmetric であるといい，$f(1)=1$ を満たすとき，normarized という．

定義 3.1 $\mathcal{F}_{op}$ を次の条件を満たす函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ の族とする．

1. $f(1)=1$,
2. $tf(t^{-1})=f(t)$,
3. f は *operator monotone.*

例 3.1 $\mathcal{F}_{op}$ の函数の例は次で与えられる．

$$f_{RLD}(x)=\frac{2x}{x+1},\ \ f_{WY}(x)=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)^2,$$

$$f_{BKM}(x)=\frac{x-1}{\log x},\ \ f_{SLD}(x)=\frac{x+1}{2},$$

$$f_{WYD}(x)=\alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha-1)(x^{1-\alpha}-1)},\ \alpha\in(0,1).$$

Remark 3.1 $f\in\mathcal{F}_{op}$ は次の不等式を満たす．

$$\frac{2x}{x+1}\le f(x)\le\frac{x+1}{2},\ \ x>0.$$

$f\in\mathcal{F}_{op}$ に対して $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$ と定義する．*regular* 函数の全体及び *non-regular* 函数の全体をそれぞれ次のようにおく．

$$\mathcal{F}_{op}^r=\{f\in\mathcal{F}_{op}|f(0)\neq0\},\ \ \mathcal{F}_{op}^n=\{f\in\mathcal{F}_{op}|f(0)=0\}$$

また次のような関係が成り立つ． $\mathcal{F}_{op}=\mathcal{F}_{op}^r\cup\mathcal{F}_{op}^n$.

定義 3.2 $f\in\mathcal{F}_{op}^r$ に対して $\tilde{f}$ を次のように定義する．

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2}\left[(x+1)-(x-1)^2\frac{f(0)}{f(x)}\right],\ \ x>0.$$

定理 3.1 ([8], [10], [16]) $f\to\tilde{f}$ は $\mathcal{F}_{op}^r$ と $\mathcal{F}_{op}^n$ の間を１対１に対応付ける．

4 Generalized Quasi-Metric Adjusted Skew Information and Generalized Quasi-Metric Adjusted correlation Measure

久保－安藤の行列平均理論によると平均 (mean) と作用素単調函数 (operator monotone function) との間には次のような関係があることが知られている．$A,B\in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して

$$m_f(A,B)=A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}.$$

そこで行列平均理論を用いると monotone metrics(quantum Fisher informations とも言う) を次のように定義することができる．

$$\langle A,B\rangle_{\rho,f}=Tr(A\cdot m_f(L_\rho,R_\rho)^{-1}(B)),$$

ただし $L_\rho(A)=\rho A, R_\rho(A)=A\rho$.　この場合，$A,B$ は点 ρ における多様体 $M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ への tangent vectors と考えられる．([20], [10] を見よ)．

定義 4.1 ([11]) $g,f\in\mathcal{F}_{op}^r$ はある $k>0$ に対して

$$g(x)\ge k\frac{(x-1)^2}{f(x)}$$

を満たすと仮定する．このとき

$$\Delta_g^f(x)=g(x)-k\frac{(x-1)^2}{f(x)}\in\mathcal{F}_{op}\tag{4.1}$$

と定義する．

定義 4.2 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, $\rho\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次を定義する．

$$Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B)=k\langle i[\rho,A],i[\rho,B]\rangle_{\rho,f},$$

$$I_\rho^{(g,f)}(A)=Corr_\rho^{s(g,f)}(A,A),$$

$$C_\rho^f(A,B)=Tr[A\cdot m_f(L_\rho,R_\rho)B],$$

$$C_\rho^f(A)=C_\rho^f(A,A),$$

$$U_\rho^{(g,f)}(A)=\sqrt{(C_\rho^g(A)+C_\rho^{\Delta_g^f}(A))(C_\rho^g(A)-C_\rho^{\Delta_g^f}(A))},$$

$I_\rho^{(g,f)}(A)$, $Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B)$ はそれぞれ *generalized quasi-metric adjusted skew information, generalized quasi-metric adjusted correlation measure* と呼ばれる．

命題 4.1 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, $\rho\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の関係が成り立つ．ただし $A_0=A-Tr[\rho A]I$, $B_0=B-Tr[\rho B]I$.

1. $I_\rho^{(g,f)}(A)=I_\rho^{(g,f)}(A_0)=C_\rho^g(A_0)-C_\rho^{\Delta_g^f}(A_0)$,
2. $J_\rho^{(g,f)}(A)=C_\rho^g(A_0)+C_\rho^{\Delta_g^f}(A_0)$,
3. $U_\rho^{(g,f)}(A)=\sqrt{I_\rho^{(g,,f)}(A)\cdot J_\rho^{(g,f)}(A)}$.
4. $Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B)=Corr_\rho^{s(g,f)}(A_0,B_0)$.

定理 4.1 $f\in\mathcal{F}_{op}^r$ に対して次の不確定性関係が成り立つ．

$$I_\rho^{(g,f)}(A)\cdot I_\rho^{(g,f)}(B)\ge|Corr_\rho^{s(g,f)}(A,B)|^2,$$

ただし $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, $\rho\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$.

定理 4.2 の証明. $X,Y\in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$Corr_\rho^{s(g,f)}(X,Y)=k\langle i[\rho,X],i[\rho,Y]\rangle_{\rho,f}.$$

とおくと

$$\begin{aligned}&Corr_\rho^{s(g,f)}(X,Y)\\=&\ kTr((i[\rho,X])^*m_f(L_\rho,R_\rho)^{-1}i[\rho,Y])\\=&\ kTr((i(L_\rho-R_\rho)X)^*m_f(L_\rho,R_\rho)^{-1}i(L_\rho-R_\rho)Y)\\=&\ Tr(X^*m_g(L_\rho,R_\rho)Y)-Tr(X^*m_{\Delta_g^f}(L_\rho,R_\rho)Y),\end{aligned}$$

だから $Corr_\rho^{s(g,f)}(X,Y)$ は $M_n(\mathbb{C})$ の内積であることがわかるので Schwarz inequality を用いることにより結果が得られる. □

定理 4.2 $f\in\mathcal{F}_{op}^r$ に対して, ある $\ell>0$ が存在して

$$g(x)+\Delta_g^f(x)\geq \ell f(x) \tag{4.2}$$

が成り立つならば次の不確定性関係が成り立つ.

$$U_\rho^{(g,f)}(A)\cdot U_\rho^{(g,f)}(B)\geq k\ell|Tr(\rho[A,B])|^2, \tag{4.3}$$

ただし $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, $\rho\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$.

定理 4.2 を証明するには次の補題を必要とする.

補題 4.1 *(4.1)* と *(4.2)* が満たされていれば次の不等式が成り立つ.

$$m_g(x,y)^2-m_{\Delta_g^f}(x,y)^2\geq k\ell(x-y)^2.$$

補題 4.1 の証明: (4.1), (4.2) より

$$m_{\Delta_g^f}(x,y)=m_g(x,y)-k\frac{(x-y)^2}{m_f(x,y)}. \tag{4.4}$$

$$m_g(x,y)+m_{\Delta_g^f}(x,y)\geq \ell m_f(x,y), \tag{4.5}$$

したがって (4.4), (4.5) より

$$\begin{aligned}&m_g(x,y)^2-m_{\Delta_g^f}(x,y)^2\\=&\ \left\{m_g(x,y)-m_{\Delta_g^f}(x,y)\right\}\left\{m_g(x,y)+m_{\Delta_g^f}(x,y)\right\}\\\geq&\ \frac{f(0)(x-y)^2}{2m_f(x,y)}\ell m_f(x,y)\\=&\ k\ell(x-y)^2.\end{aligned}$$

□

命題 4.1 と平均 $m_{\Delta_g^f}$ を用いて, $I_\rho^{(g,f)}(A)$, $J_\rho^{(g,f)}(A)$, $U_\rho^{(g,f)}(A)$ を表現すると次の補題を得る.

補題 4.2 $\{|\phi_1\rangle,|\phi_2\rangle,\cdots,|\phi_n\rangle\}$ を ρ の固有ベクトルからなる正規直交基底, 対応する固有値を $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ とする. $a_{jk}=\langle\phi_j|A_0|\phi_k\rangle, b_{jk}=\langle\phi_j|B_0|\phi_k\rangle$, ただし $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, $\rho\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して $A_0\equiv A-Tr[\rho A]I$, $B_0\equiv B-Tr[\rho B]I$ とする. このとき次が成り立つ.

$$I_\rho^{(g,f)}(A)=\sum_{j,k}\left\{(m_g(\lambda_j,\lambda_k)-m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k)\right\}|a_{jk}|^2,$$

$$J_\rho^{(g,f)}(A)=\sum_{j,k}\left\{m_g(\lambda_j,\lambda_k)+m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k)\right\}|a_{jk}|^2,$$

定理 4.2 の証明: まず始めに (4.3) を示す.

$$Tr(\rho[A,B])=\sum_{j,k}(\lambda_j-\lambda_k)a_{jk}b_{kj},$$

$$|Tr(\rho[A,B])|\leq\sum_{j,k}|\lambda_j-\lambda_k||a_{jk}||b_{kj}|.$$

したがって補題 4.1 より

$$\begin{aligned}&k\ell|Tr(\rho[A,B])|^2\\\leq&\ \left\{\sum_{j,k}\sqrt{k\ell}|\lambda_j-\lambda_k||a_{jk}||b_{kj}|\right\}^2\\\leq&\ \left\{\sum_{j,k}\left(m_g(\lambda_j,\lambda_k)^2-m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k)^2\right)^{1/2}|a_{jk}||b_{kj}|\right\}^2\\\leq&\ \left\{\sum_{j,k}\left(m_g(\lambda_j,\lambda_k)-m_{\Delta_g^f}(\lambda_j u,\lambda_k)\right)|a_{jk}|^2\right\}\\&\ \left\{\sum_{j,k}\left(m_g(\lambda_j,\lambda_k)+m_{\Delta_g^f}(\lambda_j,\lambda_k)\right)|b_{kj}|^2\right\}\\=&\ I_\rho^{(g,f)}(A)J_\rho^{(g,f)}(B).\end{aligned}$$

同様にして

$$I_\rho^{(g,f)}(B)J_\rho^{(g,f)}(A)\geq cd|Tr(\rho[A,B])|^2.$$

ゆえに目標の不等式 (4.3) を得る. □

5 系としての Dou-Du の結果

$g(x),f(x),k,\ell$ が次のときを考える.

$$g(x)=\frac{x+1}{2},$$

$$f(x)=\alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha-1)(x^{1-\alpha}-1)},\ (0<\alpha<1),$$

$$k=\frac{f(0)}{2},\quad \ell=2.$$

このとき

$$\Delta_g^f(x)=g(x)-k\frac{(x-1)^2}{f(x)}=\frac{1}{2}(x^\alpha+x^{1-\alpha})\geq 0.$$

$$\begin{aligned}
& g(x)+\Delta_g^f(x)-\ell f(x) \\
= \ & \frac{1}{2(x^\alpha-1)(x^{1-\alpha}-1)} \\
& \{(x^{2\alpha}-1)(x^{2(1-\alpha)}-1)-4\alpha(1-\alpha)(x-1)^2\} \\
\geq \ & 0.
\end{aligned}$$

特に $\alpha=1/2$ のとき

$$\begin{aligned}
& |I_\rho^{(f,g)}|(A)=|I_\rho^{(f,g)}|(A_0) \\
= \ & \frac{1}{2}Tr[\rho A_0 A_0^*]+\frac{1}{2}Tr[\rho A_0^* A_0]-Tr[\rho^{1/2}A_0\rho^{1/2}A_0^*].
\end{aligned}$$

系 5.1 (Dou-Du (4)) 任意の $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ と任意の $\rho\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& |U_\rho|(A)\cdot|U_\rho|(B) \\
\geq \ & \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2\geq\frac{1}{4}|Im\ Tr[\rho[A,B]]|^2 \\
= \ & \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}Tr[\rho[A,B]]-\frac{1}{2}\overline{Tr[\rho[A,B]]}\right|^2 \\
= \ & \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}Tr[\rho[A,B]]+\frac{1}{2}Tr[\rho[A^*,B^*]]\right|^2 \\
= \ & \frac{1}{4}\left|Tr\left[\rho\frac{[A,B]+[A^*,B^*]}{2}\right]\right|^2 \\
= \ & \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]^0]|^2.
\end{aligned}$$

系 5.2 (Dou-Du (1),(2)) 任意の $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ と任意の $\rho\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

(1) $|V_\rho|(A)\cdot|V_\rho|(B)\geq|U_\rho|(A)\cdot|U_\rho|(B)$
$\geq\frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2$.

(2) $|V_\rho|(A)\cdot|V_\rho|(B)\geq\dfrac{1}{4}|Tr[\rho\{A_0,B_0\}]|^2$.

(2) の証明: 任意の $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ に対して $f(x)=\frac{x+1}{2}$ であるので, $M_n(\mathbb{C})$ 上の内積を

$$\langle A,B\rangle=Tr[A_0^* m_f(L_\rho,R_\rho)B_0].$$

で導入すると Schwarz's inequality より

$$|\langle A,B\rangle|^2\leq\langle A,A\rangle\langle B,B\rangle.$$

したがって

$$\begin{aligned}
|\langle A,B\rangle|^2 &= \left|Tr\left[A_0^*\frac{L_\rho+R_\rho}{2}B_0\right]\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2}Tr[A_0^*\rho B_0]+\frac{1}{2}Tr[A_0^*B_0\rho]\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2}Tr[\rho B_0A_0^*]+\frac{1}{2}Tr[\rho A_0^*B_0]\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}|Tr[\rho\{A_0^*,B_0\}]|^2.
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\langle A,A\rangle &= Tr\left[A_0^*\frac{L_\rho+R_\rho}{2}A_0\right] \\
&= \frac{1}{2}Tr[A_0^*\rho A_0]+\frac{1}{2}Tr[A_0^*A_0\rho] \\
&= \frac{1}{2}Tr[\rho A_0A_0^*]+\frac{1}{2}Tr[\rho A_0^*A_0]=\frac{1}{2}|Var_\rho^0|(A)
\end{aligned}$$

であるので

$$|Tr[\rho\{A_0^*,B_0\}]|^2\leq|Var_\rho^0|(A)\cdot|Var_\rho^0|(B).$$

A の代わりに A^* をとると

$$|Tr[\rho\{A_0,B_0\}]|^2\leq|Var_\rho^0|(A^*)\cdot|Var_\rho^0|(B).$$

$|Var_\rho^0|(A)=|Var_\rho^0|(A^*)$ であるので結果を得る.

6 Remark

Dou-Du の結果 (3) に対応する不等式

$$\begin{aligned}
& |Var_\rho^0|(A)\cdot|Var_\rho^0|(B) \qquad (6.1)\\
\geq \ & \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]^0]|^2+\frac{1}{4}|Tr[\rho\{A_0,B_0\}^0]|^2.
\end{aligned}$$

系 5.1 に対応する不等式

$$\begin{aligned}
& |Var_\rho^0|(A)\cdot|Var_\rho^0|(B) \qquad (6.2)\\
\geq \ & |U_\rho|(A)\cdot|U_\rho|(B)\geq\frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2.
\end{aligned}$$

次の 2 つの例で大小を比べる. まず

$$\rho=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} i & 1\\ -1 & i\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

のとき (6.1) の右辺 $<$ (6.2) の右辺.
さらに

$$\rho=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} i & 1\\ -1 & i\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

のとき (6.1) の右辺 $>$ (6.2) の右辺.
よって一概に大小関係は成り立たないことがわかる.

Acknowledgement
The author was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26400119.

参考文献

[1] K.Audenaert, L.Cai and F.Hansen, *Inequalities for quantum skew information*, Lett.Math.Phys., vol.85(2008), pp.135-146.

[2] J.C.Bourin, *Some inequalities for norms on matrices and operators*, Linear Algebra and its Applications, vol.292(1999), pp.39-154.

[3] L.Cai and S.Luo, *On convexity of generalized Wigner-Yanase-Dyson information*, Lett.Math.Phys., vol.83(2008), pp.253-264.

[4] P.Chen and S.Luo, *Direct approach to quantum extensions of Fisher information*, Front.Math.China, vol.2(2007), pp.359-381.

[5] Y.N.Dou and H.K.Du, *Generalizations of the Heisenberg and Schrödinger uncertainty relations*, J.Math.Phys., vol.54(2013), pp.103508-1-7.

[6] Y.N.Dou and H.K.Du, *Note on the Wigner-Yanase-Dyson skew information*, Int.J.Theor.Phys., vol.53(2014), pp.952-958.

[7] S.Furuichi and K.Yanagi, *Schrödinger uncertainty relation, Wigner-Yanase-Dyson skew informatio and Metric adjusted correlation measure*, J.Math.Anal.Appl., vol.388(2012), pp1147-1156.

[8] P.Gibilisco, D.Imparato and T.Isola, *Uncertainty principle and quantum Fisher information, II*, J.Math.Phys., vol.48(2007), pp.072109-1-25.

[9] P.Gibilisco, D.Imparato and T.Isola, *A Robertson-type uncertainty principle and quantum Fisher information*, Linear Algebra and its Applications, vol.428(2008), pp.1706-1724.

[10] Gibilisco, P., Hansen, F., Isola, T.: *On a correspondence between regular and non-regular operator monotone functions*, Linear Algebra and its Applications, vol.430(2009), pp.2225-2232.

[11] P.Gibilisco, F.Hiai and D.Petz, *Quantum covariance, quantum Fisher information, and the uncertainty relations*, IEEE Trans.Information Theory, vol.55(2009), pp.439-443.

[12] P.Gibilisco and T.Isola, *On a refinement of Heisenberg uncertainty relation by means of quantum Fisher information*, J.Math.Anal.Appl., vol.375(2011), pp.270-275.

[13] F.Hansen, *Metric adjusted skew information*, Proc.Nat.Acad.Sci., vol.105(2008), pp.9909-9916.

[14] W.Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhat der quantummechanischen Kinematik und Mechanik*, Zeitschrift für Physik, vol.43(1927), pp.172-198.

[15] H.Kosaki, *Matrix trace inequality related to uncertainty principle*, Internatonal Journal of Mathematics, vol.16(2005), pp.629-646.

[16] Kubo, F., Ando, T.: *Means of positive linear operators*, Math.Ann., vol.246(1980), pp.205-224.

[17] E.H.Lieb, *Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture*, Adv.Math., vol.11(1973), pp.267-288.

[18] S.Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys.Rev.A, vol.72(2005), p.042110.

[19] S.Luo and Q.Zhang, *On skew information*, IEEE Trans.Information Theory, vol.50(2004), pp.1778-1782, and *Correction to "On skew information"*, IEEE Trans.Information Theory, vol.51(2005), p.4432.

[20] Petz, D.: *Monotone metrics on matrix spaces*, Linear Algebra and its Applications, vol.244(1996), pp.81-96.

[21] E.Schrödinger, *About Heisenberg uncertainty relation*, Proc.Prussian Acad.Sci., Phys.Math., vol.XIX(1930), p.293, Section.

[22] E.P.Wigner and M.M.Yanase, *Information content of distribution*, Proc.Nat.Acad.Sci. U,S,A., vol.49(1963), pp.910-918.

[23] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, *A generalized skew information and uncertainty relation*, IEEE Trans.Information Theory, vol.51(2005), pp.4401-4404.

[24] K.Yanagi, *Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information*, J.Math.Anal.Appl., vol.365(2010), pp.12-18.

[25] K.Yanagi, *Uncertainty relation on generalized Wigner-Yanase-Dyson skew information*, Linear Algebra and its Applications, vol.433(2010), pp.1524-1532.

[26] K.Yanagi, *Metric adjusted skew information and uncertainty relation*, J.Math.Anal.Appl., vol.380(2011), pp.888-892.

[27] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, *Uncertainty relations for generalized metric adjusted skew information and generalized metric adjusted correlation measure*, J.Uncertainty Anal.Appl., vol.1(2013), pp1-14.

[28] K.Yanagi, *Generalized meric adjusted skew information and uncertainty relation*, Proc. ISBFS, vol.IV(2014), pp.435-442.