中学校・高等学校物理分野における科学的事象と指数関数との相関
～CR回路・光減衰・液体の冷却を例として～

風盛　文哉*・重松　宏武

The Correlation between a Scientific Phenomenon and an Exponential Function in the Field of Physics in Secondary School Science Education:
The case of CR circuit, light attenuation, and cooling of water

KAZAMORI Fumiya*, SHIGEMATSU Hirotake

（Received January 7, 2014）

キーワード：指数関数、CR回路・光減衰・液体の冷却、物理と数学のリンク

はじめに

小学校・中学校における新学習指導要領の完全実施に続き、高等学校においても新学習指導要領に沿った教育過程への移行が順次進められている[1]。その中の注目すべき事項として、理科　第３款「各項目にわたる指導計画の作成と内容の取扱い」の中に『各科目を履修させるに当たっては、当該科目や他の科目の内容及び数学科や家庭科等の内容を踏まえ、相互の関連を図るとともに、学習の内容の系統性に留意すること』と追記されたことが挙げられる。このことには、理科の各科目の内容は単教科という概念にとらわれることなく多面的・多角的に考察及び学習させるねらいが含まれている。例えば、等加速度運動における速度は時間に比例、放射線量の放射線源からの距離依存性は距離の二乗に反比例のように数学とリンクした学習指導を推奨していることを意味する。実際にこれら事象は、日常生活を通じた実体験や『逆二乗の法則』のような概念をイメージしやすい法則に従うものであり、必ずしも各科目との強い相関を求めなくとも理解しやすい内容である[2]。しかし、物理現象を表す他の代表的な関数の一つでもある『指数関数』、特に自然対数の底eを用いた指数関数で表される物理現象は、数式を活用せずして真の理解をすることは難しく、活用しない場合は起こった現象を事実（知識）として暗記せざるを得ないのが現状である。ところが、この指数関数も前で述べた比例または反比例同様に身の回りの現象と深く関係を持ったものである。そのため、これら指数関数と対応する物理現象を数式を活用して定量的に考察することは、物理現象についての本質的な理解促進をもたらすと期待する。

これら背景を踏まえ、本稿では中学校・高等学校理科物理分野における指数関数で表される代表的な3つの物理現象（CR回路の過度現象、遮蔽による光の減衰、液体の冷却）に注目し、それぞれ数式展開を行い、補完的に数式を活用した物理学習の例を紹介する。なお、ここで述べる内容は中学校・高等学校における生徒に対する直接的指導内容ではなく発展的内容に属するものであり、指導者、特に理科教員を目指した大学生を対象とした知識向上のために構成した内容とする。

１．中学校・高等学校で学習する減衰に関係する関数

前で述べたように中学校・高等学校物理分野において学習する現象の中には、「減衰」によって表される事象は多く存在する。これら事象における「減衰」を特徴付ける代表的な関数として①：「反比例する関

＊山口大学大学院教育学研究科

数」、②:「二乗に反比例する関数」、③:「指数関数」の3つが挙げられる。これらの関数によって表される現象としてはx軸となる変数が増加するに従って急激な減少を伴うものであるが、数式(一般式)がもつ物理的な意味は個々によって異なる。そのため本論文中で扱う③指数関数と①,②の2つの関数との違いを明確化するために、表1にそれぞれの関数に対する一般式、変化の特徴並びに代表的な物理現象を示す。

表1. 中学校・高等学校物理分野において減衰関数で表される代表的な物理現象

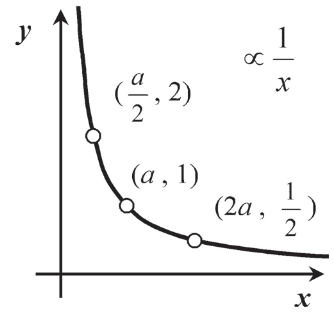
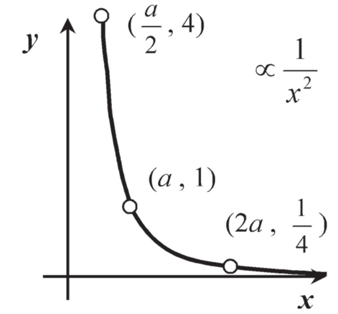
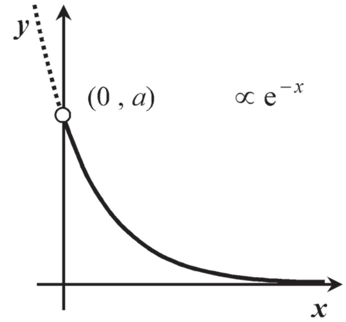
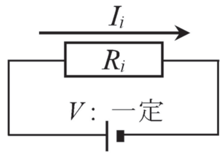
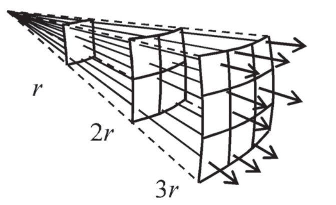
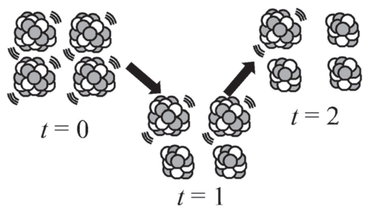
関数	①:反比例する関数	②:二乗に反比例する関数	③:指数関数
一般式	$y=\dfrac{a}{x}$	$y=\dfrac{a}{x^2}$	$y=ae^{-bx}$
グラフ			
概略図	オームの法則:$V=RI$ 電圧Vが一定のとき、抵抗R_iと電流I_iは反比例の関係。 例):R_1=1　R_2=5　R_3=25 I_1=25　I_2=5　I_3=1	距離がn倍になると単位面積当たりを貫く線束が元の$1/n^2$倍になる[2]。	一定の割合で変化する現象は指数関数で表される。 例):$y=4\times(2^{-t})$
特徴	・x値が2倍、3倍となるとき、y値はそれぞれ1/2倍、1/3倍と変化する。 ・xとyの積は常に一定となり、x-yグラフは双曲線を描く。 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}=0$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{a}{x}=\infty$	・x値が2倍、3倍となるとき、y値はそれぞれ$1/2^2$倍、$1/3^2$倍と変化する。 ・上に示したような単位面積当たりを貫く線束が減少していく図を用いるとイメージしやすい。 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^2}=0$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{a}{x^2}=\infty$	・原点で発散する関数①、②と異なり原点において値を持ち、x値が2倍、3倍となるとき、y値はそれぞれe^{-2}倍、e^{-3}倍と変化する。 ・減衰・崩壊の特徴を表すパラメータとして時定数や半減期を用いる。 $\lim_{x\to\infty} ae^{-bx}=0$, $\lim_{x\to 0} ae^{-bx}=a$
例	・オームの法則(ただし、電圧一定時の電流と抵抗の関係) ・時間、速度、距離の関係 ※距離のみ定数 ・力とモーメント、距離の関係	・クーロンの法則 ・万有引力 ・放射線の距離に関する減衰	・原子核崩壊 ・遮蔽による放射線の減衰 ・ニュートンの冷却曲線 その他様々な自然現象

表1中で示した一般式と概略図から分かることとして、それぞれの関数を$f(x)$とすると3つの関数全てにおいてxの値が増加するとyの値は急激な減衰を伴うこと、さらに$x\to\infty$においては$y\to 0$となり、x軸との交点を持たないという共通項を持つ。しかし、関数③のみは$x=0$においてy軸と交点を持つが($\lim_{x\to 0} f(x)=a$(定数))、一方関数①と関数②はy軸と交点を持たず発散する($\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$)という相違点がある。このことは、関数①と関数②は変数xに依存しない特定のyの値は存在せず、ある値からある値への変数xの変化

に対するyの値の変化比 ($y \propto 1/x, 1/x^2$) に重要な物理が隠れていることを意味する。特に関数②における『逆二乗の法則』が有名であり、クーロンの法則や万有引力などさまざまな物理式において活用されている[2)]。一方、関数③は y 軸との交点を持つことから、変数 x には依存しない物理量 $y=f(0)=a$ が存在すること、さらに、減衰を表すために自然対数 e が用いられることが特徴として挙げられる。自然対数の使用は底の変換（$y=2^x=e^{\ln 2^x}$）や微積分（$y=e^x, dy/dx=e^x$）など数学的テクニックを容易にする面があるが、数式が表す物理的意味を直感的に理解することは困難と言わざるを得ない。そのため、指数関数で表される物理現象は、系全体を満たす関係式から最終的に表された関数までの導出プロセスを含めた学習を行った方がより理解しやすいと考えられる。そうした意味でも、物理学と数学のリンクにより系統的な学習が行うことができる良き例と言える。次章ではこれらについて、いくつかの具体例を示しつつ、各々が持つ指数関数の意味について説明を行う。

２．指数関数的な減衰に関する実験

本章では、中学校・高等学校における電気・光・熱に関する発展的学習に位置する『CR回路の過度現象』、『遮蔽による光の減衰』、『液体の冷却』に注目し、それぞれについて、系全体を満たす関係式から指数関数的な減衰変化を表す特定の物理量の算出を行う。これら3つの例における変数（物理量）とはそれぞれ充電時間（秒）、遮蔽物の厚さ（mm）、冷却時間（分）であり、変化（増加）により得られる物理量はそれぞれ抵抗にかかる電圧（V）、光強度（lux）、液体の温度（℃）が挙げられる（図1）。以下、それぞれの事象において、物理現象を表す数式及び実験結果両方を議論することにより、指数関数的な減衰をする物理量の定量的な理解促進についての検討を行う。なお、本稿で示す数式自体は広く用いられている典型的なものであり、式展開自体に新規性は無い。しかし、改めて同様な関数で表される現象を式展開を含めて系統的に示すことは、中学校・高等学校における指導者に対して理解向上のための活用例としては重要な役割を担っていると考える。

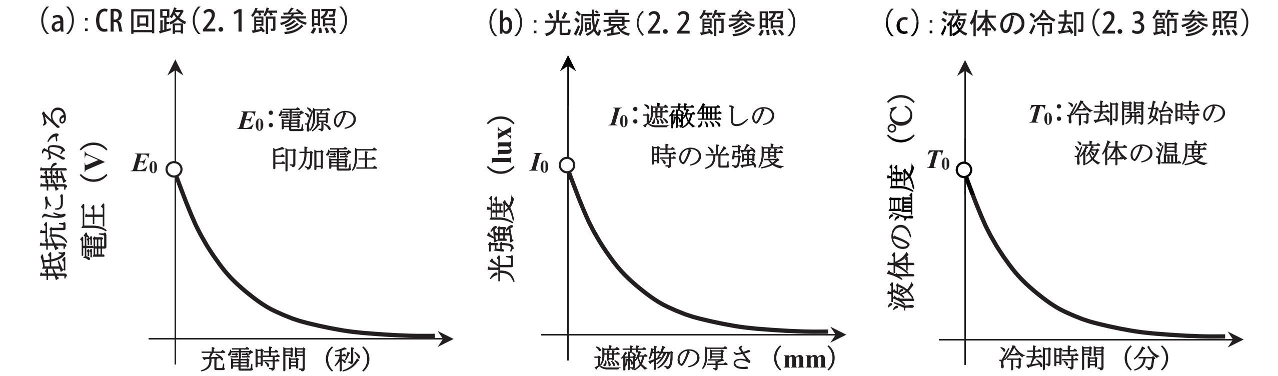


図１　各現象と物理量のまとめ。全ての現象は指数関数的な減衰を行うが、減衰に伴う物理量はそれぞれ異なる。

２－１　CR回路の充放電

電荷(電気エネルギー)を蓄えたり、放出を行う受動素子であるコンデンサについては、電気をためる電気部品の1つであることを、小学校第6学年において定性的に学習する。その後、中学校では教材として扱われることなく、高等学校物理の単元「電気と磁気」において再び、コンデンサを含む回路に関する定量的な学習が行われる。このコンデンサの特性を理解する上で重要な実験として「CR回路の過度現象」が挙げられる。この回路により得られる物理量(実験事実と数式展開)を理解することにより、高等学校における学習内容のみならず、小学校で行った手回し発電機を用いたコンデンサへの充放電現象も容易に理解可能となる。つまり、数式を活用した広い意味での物理現象理解へとつながるのである(1章参照)。

ここで言うCR回路とはコンデンサ(Capacitor)と電気抵抗(Resistor)によって構成される直列回路を意味する(図2)。この回路に、直流電源の着脱が誘因するコンデンサの充放電の影響を抵抗が受けて、抵抗に掛かる端子電圧の時間変化(指数関数変化)が観測される。この時間変化を数式を活用した解析を行うことにより、コンデンサの電気容量 C 及びCR回路の時定数 τ を表す物理定数を導くことが可能となる。以下に数式

を活用した具体的な説明を行う。なお、コンデンサの電気容量と時定数の関係に関する学習は大学の理工系学部の教養物理に相当する内容であり、高校物理の範囲では定性的な説明に留められ、かつ発展的な学習に位置づけられるものである。ゆえに、ここでは基本となる数式のみに止める。詳細な式展開並びに現象説明は大学教養物理レベルの電磁気学の教科書を参照頂きたい[3)]。

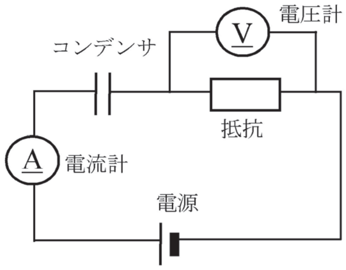


図２　CR回路の回路図。電源，コンデンサ及び電気抵抗を用いた直列回路である。

図2のような電気抵抗の抵抗 R と電気容量 C のコンデンサの直列回路において、E_0の一定電圧が印加され場合、キルヒホッフの第二法則により、以下の関係式が導かれる。

$$E_0 = \frac{Q(t)}{C} + R\frac{dQ(t)}{dt} \qquad (1)$$

ここで、右辺第一項はコンデンサに掛かる電圧、そして第二項は抵抗に掛かる電圧を意味しており、これら両項の和が直流電源の印加電圧 E_0（一定）に等しいことを示している。ここで初期条件として、充電開始時(t=0)にはコンデンサには電荷が貯まっていない状態($Q(0)=0$)を仮定すると(1)式は、電荷 $Q(t)$ に関して

$$Q(t) = CE_0(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{CR}t}) \qquad (2)$$

と求められ、最終的に、時刻 t での抵抗 R の両端にかかる電圧変化 $E(t)$ ((1)式右辺第二項)は

$$E(t) = R\frac{dQ(t)}{dt} = E_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{CR}t} \qquad (3)$$

と導かれる。これは t=0 のとき、電圧 $E(t)$ は最大値 E_0を持ち、時間経過にともなって指数関数的に減少することを意味している。この結果を元に、(1)式の時間変化の関係を表す概略図を図3に示す。

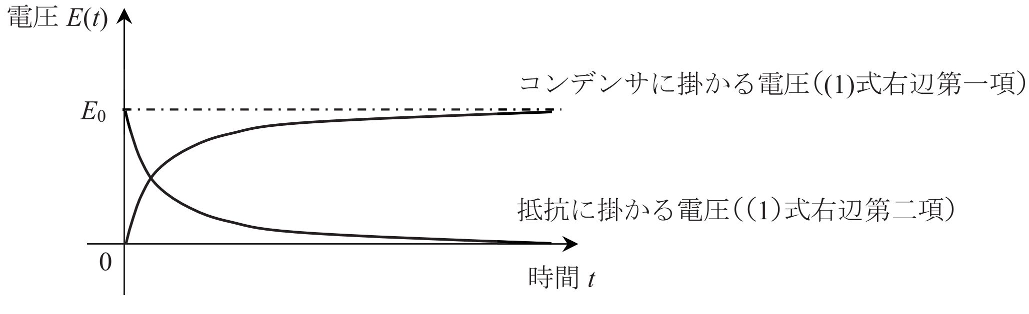


図３　(1)式の関係を表す概念図。充電時にコンデンサにかかる電圧が高くなると、対称的に抵抗 R に掛かる電圧は減衰することを意味する。また、これら電圧の和は時間的に変化せず一定値 E_0 となる。

図3における抵抗に掛かる電圧の時間変化は、コンデンサに電荷が蓄えられ、電位差が発生・増加することに伴う電圧の低下（もしくは回路として電流量が減少）を意味し、最終的には時間無限大において電流は流れなくなることを意味している。なお、この変化傾向は、前でも述べた小学校理科におけるコンデンサを用いた蓄電学習の説明にも最適である。具体的には、手回し発電機を用いてコンデンサに蓄電する際に、初めはトルクが大きく回転しにくかったハンドルが次第に軽くなってくるという、充電の際に要する印加電圧(＝抵抗 R に掛かる電圧)の指数関数的減衰も説明したこととなる。さらに手回しによる充電を止め、手を放

すと、コンデンサに蓄えられた電荷が流れだし、手回し発電機にかかる電圧は初期値E_0から指数関数的に減少することとなる。よって、初めは勢いよく回るハンドルが、時間と共に劇的に弱くなる現象を数式を活用することにより、小学校で体感的・定性的理解のみで流されていた現象がいとも簡単に説明できるのである。

また、電気容量Cと電気抵抗Rの積CRで表される値（定数）は時定数τ ($=CR$)と呼ばれ、過度現象において平衡状態に達する時間の目安となる重要な値として扱われている。具体的には(3)式の時間変数tに時定数τ ($=CR$)を代入すると抵抗Rにかかる電圧は必ず$E_0e^{-1} \cong 0.368E_0$という変数tに依存しない一定値を持つこととなる（図4（左））。このことは充電時において時定数τが大きいほど抵抗にかかる電圧の時間変化は小さくなり、電圧低下が少なくなることと同時に、コンデンサへの充電にかかる時間は長くなることを意味する。つまり、これら時定数を比較することで、充電に要する時間という物理を定量的に議論することが可能となる。

以上の基礎知識を踏まえつつ、実験事実を理論にフィードバックさせるために行った実験を紹介する。具体的にはブレッドボード上にCR回路（図2）を作成し、電気抵抗の両端かかる電圧の時間経過を5秒ごとに測定を行った（図4）。なお、抵抗は接触抵抗の作用を小さくするため実測値100.38 kΩ（規格値100 kΩ）の抵抗値の大きなカーボン抵抗器を採用し、コンデンサは番号①～④のそれぞれ未知の電気容量（規格値：①1000 μF, ②470 μF, ③220 μF, ④100 μF）を持つ4種類を用いた。

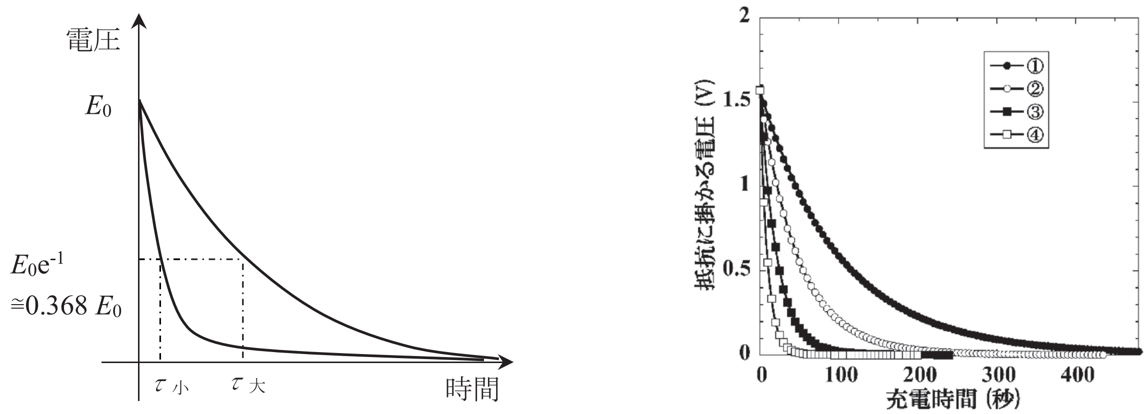


図４（左）時定数の概念図。時定数の大きさは減衰の様子を表す。（右）CR回路の過度現象の実験結果。凡例①～④はそれぞれ未知のコンデンサ（規格値：1000 μF, 470 μF, 220 μF, 100 μF）を表す。

図4（右）に示した実験データから算出した時定数（E_0e^{-1}となる時間）を表2に、時定数τ、電気容量C、電気抵抗Rの関係式$\tau=CR$から導き出した電気容量の計算値を規格値と共に表3にそれぞれ示す。計算値と規格値の差は最大差6%より、十分良い精度でコンデンサの電気容量が比較的簡単に算出できることがわかる。

表2　時定数の導出

	時定数τ（秒）
①	101.1
②	47.2
③	20.8
④	9.7

表3　電気容量の算出

	電気容量C（μF）	
	計算値	規格値
①	1007	1000
②	470	470
③	207	220
④	97	100

このように抵抗に掛かる電圧の時間変化を測定することにより時定数τが求まり、電気容量の大きさによる減衰曲線の変化、すなわち充電に要する時間を定量的に比較することが可能となる。さらに式展開によって現れた$\tau=CR$の関係式を活用することにより、電気容量Cが既知の場合は未知の抵抗値Rが、同様に抵抗値Rが既知の場合は未知の電気容量Cがそれぞれ算出可能となる。

これら実験によって$\tau=CR$の値が大きくなるほど充電に要する時間が長くなる結果が得られたが、これは電気容量Cがある一定のコンデンサを用いた場合、抵抗Rを小さくすれば短時間での充放電が可能となることを、同様に抵抗Rを大きくすれば充放電に長時間要することを意味している。この現象は数式として表されるのみではなく、実は我々の日常生活でも深く応用されている特性でもある。具体的には電子機器等で用いられているコンデンサにおいてはその必要な用途に応じた適切な抵抗Rを組み込んだCR回路により構成

されており、充放電を抑制したり、他の部品に過電圧が掛かることを防止しているのである。
本小節で述べた様に、微分方程式からの数式展開と実験結果と照らし合わせることにより、小学校・中学校・高等学校での教科書の範囲では扱われていないことや発展・応用内容のために詳細に説明されていなかった内容に対して理解促進が期待される。具体的には本小節の「CR回路の過度現象」の理解を通じて、小学校での指導内容であるコンデンサの充電時の負荷変化や様々な電子機器が恩恵を受けているCR回路におけるコンデンサ・抵抗の果たす役割などを正しく理解できることとなる。さらに、本実験で行ったように接触抵抗を配慮した電気抵抗の選び方など、実際に手を動かして実験を行うことが、教材を深く掘り下げることにも通ずる。生徒実験では指導者側の意図する結果が得られないことも多々あるが、往々に正確なデータが得られにくい教材や適切ではない実験条件を用いたことが原因であることも少なくない。ゆえに指導者がより深い知識を持ち、実験ミス・測定ミスが起こらない教材の活用や実験条件の選択を適切に行う技量が必要である。

２－２　遮蔽による光の減衰

平成23年3月11日に東日本大震災の津波被害による福島第一原子力発電所の事故が起こり、放射線に関する不正確な情報や不適切な情報によって、日本国民に不必要な混乱が生じたことは記憶に新しい。また、平成24年度から本格的に実施された中学校理科新学習指導要領においては「科学技術と人間」のエネルギー資源に関して約30年ぶりに「放射線」に関する内容が組み込まれ、さらに放射線の性質と利用に触れることが明記された。このことは、これまで以上に中学校理科教員に放射線に関する広く深い知識や指導力を持つことが要求されることを意味する。これらの状況を踏まえ、正確かつ詳細な指導を学校現場において行うための支援の一つとして、文部科学省は『放射線等に関する副読本』を作成し、その利用を推奨している[5]。この副読本には指数関数で表される物理量である「放射線防御の三原則の一つである『遮蔽』」に関する内容も含まれており、我々はこの物理量に関する評価・検討は既に行っている[2]。しかし、放射線を活用した実験は手軽に行えるものではなく、より身近で比較的理解しやすいテーマである、同じ電磁波に属し同様な減衰現象が期待される『光』に注目した。この光に関する学習は各校種の単元学習にも結びついており、具体的には小学校理科の「光の性質」、中学校理科の「光と音」、「エネルギー」、そして高等学校物理の「波」「電気と磁気」が挙げられる。以上を踏まえ、本小節では光の中でも実際に目で認知することが可能な『可視光』に限定した指数関数で表される物理量変化『減衰』に関する議論を行うこととする。
はじめに、光と放射線に関する物理量を表4にまとめた。光源・放射線源にはそれぞれ「線源自体が持つエネルギーに相当する物理量」、「照射された物体が受けるエネルギーに相当する物理量」といった共通意味を持った物理量を持っている。本小節で扱う実験では照度計によって明るさを表す「ルクス」を測定しているが、これは放射線源において放射線が体に与える影響を表す「シーベルト」に相当する物理量である。表4に示した放射線に関するワードは上で述べた原発事故に関する報道などで一般的な国民レベルでも耳にすることが多くなったが、正しく理解できていないことや混同が原因で、様々な誤解や風評被害をもたらすこととなったと考えられている[4]。例えば、1974年の原子力船「むつ」の事故、この度の原発事故での報道等では「放射能漏れ」「放射線漏れ」の混同が起き、過剰な混乱や不必要な風評被害が起きている。

表４　光と放射線の物理量

光源	cd：カンデラ 光の強さを表す単位	lux：ルクス 明るさを表す単位
放射線源	Bq：ベクレル 放射能の強さを表す単位	Sv：シーベルト 放射線が体に与える影響を表す単位
概念	線源自体が持つエネルギーに相当	照射された物体が受けるエネルギー

以上の光と放射線の共通項を踏まえ、光に関する定量的理解促進と放射線に関しても知識向上を期待し、光の遮蔽に関する実験を扱うこととした。この遮蔽の概念図を図5に示す。遮蔽物の厚さが増すと遮断される線束が増大することよって、通過する線束の数が減少するイメージをして頂きたい。一見減衰のイメージとしては光源からの距離によっても光の明るさは減衰し、表1中に示す「二乗に反比例する関数」に従う物理量と混同されやすい事象である。しかし、遮蔽が無い時点でも定まった一定値の照度を持つことからも、

同じ減衰でも「二乗に反比例する物理量」ではなく、「指数関数に従う物理量」であることがわかる。また指数関数であることは遮蔽物が一定の割合で線束を吸収する様子から容易にイメージできる。以下に数式を活用して具体的に説明を行う。

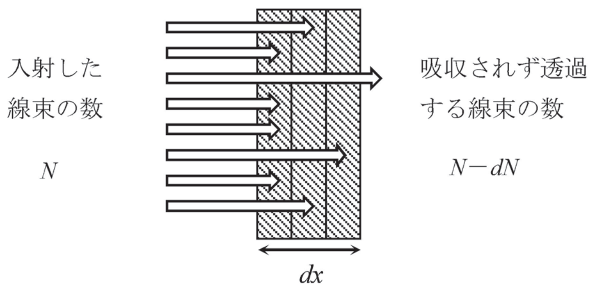


図５　遮蔽の概念図。一枚当たり線束を1/2（50%）吸収する遮蔽物3枚に光を入射し厚さが*dx*となったときの様子を描写している。この図から厚さが1倍、2倍、3倍…、*n*倍と変化すると線束の数は2^{-1}倍、2^{-2}倍、2^{-3}倍…2^{-n}倍と変化し、まさに指数関数的な減衰であることが分かる。

図5の概念図から、入射した線束の数をN、厚さdxの遮蔽物によって吸収された線束の数をdNとおくと、dNはNとdxに比例すると考えられることから（4）式が導かれる。

$$dN(x) = -\mu N dx \qquad (4)$$

ここで、右辺の-（マイナス）記号はdxが増加すると線束の数が減少することを意味しており、μは光吸収係数と呼ばれ媒質ごとに決まる比例定数を表す。μの値が大きいほど入射した光を吸収する割合が大きいことから、遮蔽物の違いによる減衰量の大小を比較できる値である。なお、(4)式は変数分離により(5)式のように展開され、

$$\frac{dN}{N} = -\mu dx \qquad (5)$$

この式を両辺積分することにより、解として吸収されず透過する線束の数と厚さxの関係式

$$N(x) = N_0 \mathrm{e}^{-\mu x} \qquad (6)$$

が導かれる。(6)式中の$\mathrm{e}^{-\mu x}$が重要な項であり、これは遮蔽物の厚さxが増すことによって、透過線束が指数関数的に減衰するという物理現象を特徴付けるものである。さらに、積分定数に位置付けられるN_0も遮蔽物が無い状態で測定される線束Nの値、つまり横軸が0での$N(x=0)$を表す重要な物理量である。このように式展開を行うことで、厚さxの増加に伴い透過する線束の数Nが指数関数的に減衰することや原点における値N_0が持つ意味の情報を関係式から得ることが可能となる。残念ながら実験として直接、線束の数を測定することはできないことから、線束の数に比例する照度を測定することにより遮蔽物の吸収係数μを導き出す方法を以下に紹介する。図6に示すように、光源には60 Wの裸電球を使用し、電球から発する光から距離50　cm（電球の中心からの距離）に照度計を固定設置し、照度計から距離1cmの位置から電球側に遮蔽物を挿入することによる照度の減衰の様子を測定した。

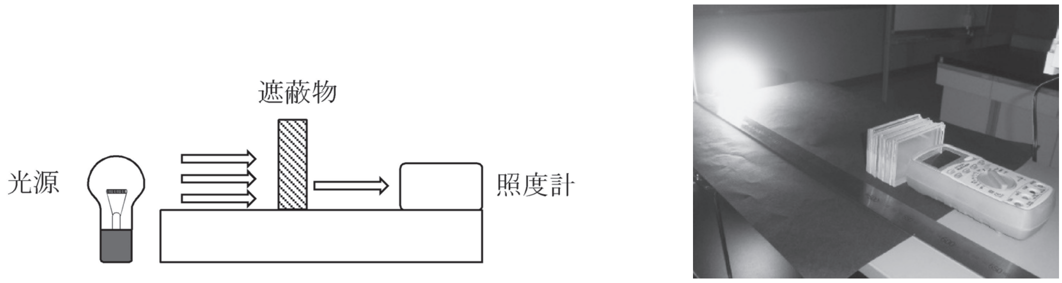


図６　（左）遮蔽による光の減衰実験の概略図。（右）実験の様子。暗室で測定を行い、電球が最も明るく測定できる高さに照度計を置き測定した。

遮蔽物には安価かつ手軽に行えることを考慮して、ホームセンター等で購入できるアクリルと理科室の必需品でもある薬包紙を使用して実験を行った。遮蔽物の厚さはあらかじめ一枚当たりの厚みをマイクロメータで測定し、遮蔽物の数を一枚、二枚と変化させることで遮蔽物の厚みの変化とした。アクリルと薬包紙を用いた実験データを図7に示す。

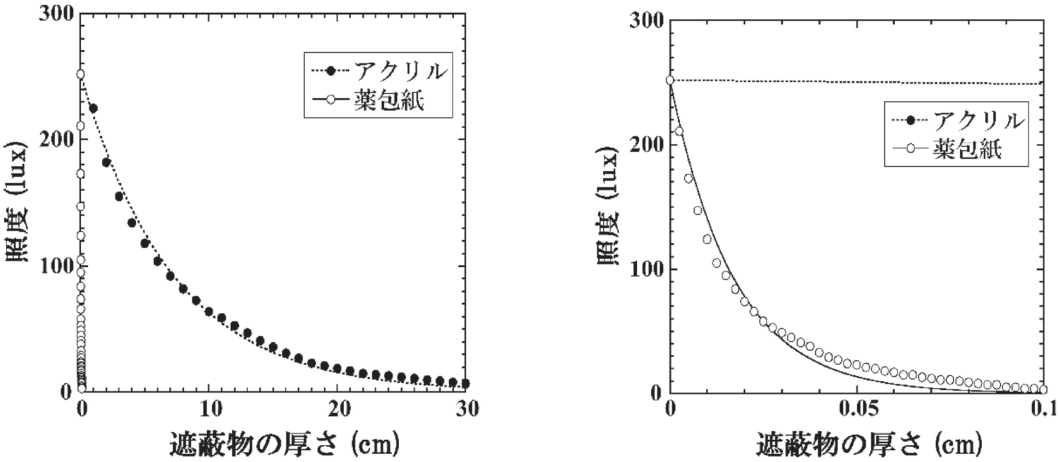


図７　（左）『光の遮蔽による減衰』実験の結果。アクリル（●）と薬包紙（○）のデータをプロットした。（右）薬包紙のプロットが軸と重なっているために横軸の最大値を小さくして拡大した。

アクリル及び薬包紙の減衰曲線を比較すると、アクリルと薬包紙では図7右のように横軸スケールを300倍に拡大しなければ、薬包紙の場合の変化は把握できず、両者において減衰曲線が大きく異なることに気づく。このことは遮蔽物の光の透過度（または吸収度）に大きく依存した変化をすることを意味する。そこで、CR回路の時定数同様に初期値の36.8（$\cong e^{-1}\times 100$）％の値に減衰するまでに要する遮蔽物の厚さδを求め、比較検討を行った。この厚さは電磁気学的には表皮深度δ（skin depth）と呼ばれる値で減衰曲線の違いを定量的に比較するための値であり、表皮深度δとこのδの逆数である光吸収係数μを求めて、表5に示す。

表5　求めた吸光係数

遮蔽した試料	表皮深さδ（cm）	光吸収係数μ
アクリル	7.2	0.1405
薬包紙	0.017	56.95

アクリルと薬包紙における光の透過度の違いは目視からも顕著であることは容易に確認できるが、数式を活用することにより、光吸収係数に約400倍という具体的な差が算出可能となった。また、遮蔽物を入れることにより光の照度が減衰すること、さらにはその厚さが少ない場合の方が単位厚さあたりの減衰量が顕著であり、厚さが多い場合はそれが少ないことは目視からも確認することが可能である。より詳細な計器、より詳細な数式を活用することによる理解度向上が期待されるが、我々が持つ五感（ここでは視覚）も大切にし、実感との系統性や相違を検証しつつ、より深い学習・深い理解を期待したい。

２－３　液体の冷却

小学校第４学年の単元『金属、水、空気と温度』においては、金属、水及び空気を温めたり冷やしたりすることによる物質の状態変化や熱の伝わり方の違いを視覚や触覚を活用した定性的学習を行う。さらに中学校の単元『粒子』においては、物質の状態変化を粒子モデルを用いて理解を深め、熱については熱がエネルギーであることや熱の3つの伝わり方(伝導、対流、放射)についてより具体的な学習を行う。そして、高校化学では冷却曲線の学習を通じて、全ての校種にまたがり「熱」に関する総括的な理解がなされる。

既にご存じの通り、熱は温度の高いものから低いものへ移動するエネルギーであり、このエネルギーの量と表された物理量を熱量と呼んでいる。質量m、比熱cの値を持つある物体の温度がΔT変化したときに生成される熱量の変化は、以下のように表される。

$$Q = mc\Delta T = K\Delta T \qquad (7)$$

この式から分かることは同じ熱量を与えられたとしても、物体特有の値をもつ熱容量K（=mc；熱をためる容量）が異なることから温度の変化量も異なるということである。よって熱容量Kは物体の温度を1℃上昇させるために必要な熱量を表す値である。また、伝導・対流・放射またはこれらの組み合わせからなる熱の移動を総称して熱伝達と呼ばれており、この熱伝達によって物体が冷却される現象は、力学でも有名なニュートンにより経験則として次のように示されている[6)]。「ニュートンの冷却の法則：物体と周囲との温度差があまり大きくない時には、このア両者の単位時間当たりの熱伝達量はそのイ温度差に比例する」。つまり、温度差が大きいと早く冷え、一方、温度差が小さくなるとゆっくり冷えることを意味しており、周囲の温度が低い冬場に風呂が早く冷めたりする減少など日常生活においても定性的に知られていることである。これを具体的に数式化したものが（8）式である。

$$K\frac{dT}{dt} = -\sigma(T - T_{\mathrm{cool}}) \qquad (8)$$

ここでKは(7)式で既出である熱容量、dT/dt は微小時間dt 間の温度dTの変化を表し、Tは物体の温度、T_{cool}は周囲の温度となっている。右辺のσは物体の表面状態などに起因する物体固有の比例定数とする。この(8)式は、上で示したニュートンの冷却の法則の説明とも対応しており、左辺は下線部アで示した冷却される物体と周囲とので行われる単位時間当たりの熱伝達量を表し、一方右辺は、下線部イで示した物体と周囲の温度差に比例する量であることを意味している。

以下に示す変形の方法は、項は異なるが「CR回路の過度現象」・「遮蔽による光の減衰」で現れた過程と同様である。変数分離により(9)式が導かれ、

$$\frac{dT}{(T - T_{\mathrm{cool}})} = -\frac{K}{\sigma}t \qquad (9)$$

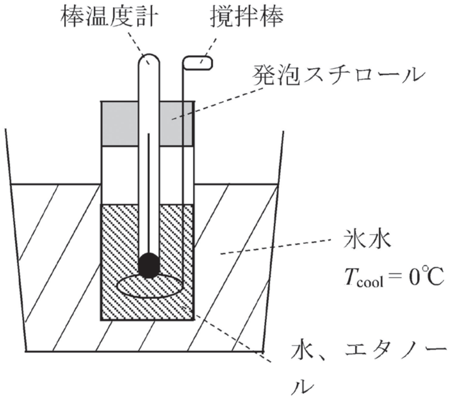
両辺を積分（不定積分をCとする）することにより(10)式が、さらに初期条件を考慮することにより温度の関数式(11)式が導かれる。

$$\ln(T - T_{\mathrm{cool}}) = -\frac{K}{\sigma}t + C \qquad (10)$$

$$T = T_{\mathrm{cool}} + T_0 \mathrm{e}^{-\frac{K}{\sigma}t} \qquad (11)$$

ここで、(11)式のT_0はe^cで表される積分定数で、冷却される前の状態にある物体の温度を表す。これは1章で示したy軸と交点を有し、かつ指数関数的な減衰を示す事象が持つ特徴的な物理であり、反比例する関数・逆二乗に反比例する関数で示される事象とは異なる点である。

次に、実際に行った検証実験について述べる。大量の氷水により0℃が保たれた水槽（T_{cool}=0℃）により構成された図8に示す簡易装置を作成し、その中央部には上部を断熱材で塞がれ、中に対象物（液体）が入ったスチール缶を入れることによる冷却効果を測定した。測定は液体である水とエタノールそれぞれ100 mgを使用し、温度を棒温度計で10秒ごとに測定することにより冷却曲線を得た。



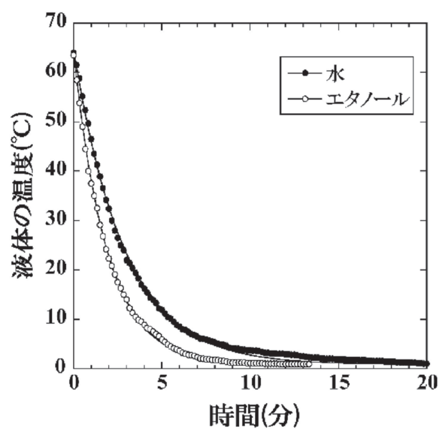


図８　液体の冷却実験の概略図。氷水によって冷却水の温度0℃の一定に保ち、終始にわたり撹拌を行った。

図8の結果から、両者とも時間経過に伴って指数関数的に温度が低下し、さらに温度の減衰曲線の違いからエタノールの方が水に比べて、より短時間での冷却が可能であることが求められた。ここで、水とエタノールの物質の違いによる冷却時間の変化を定量的に議論するために、他小節同様に初期値の36.8%の温度に冷却するまでに要する緩和時間 t_R を求めた(比熱の文献値と共に表6に示す)。

表6　求めた緩和時間、比熱(文献値)

	緩和時間 t_R (分：秒)	比熱 (J/g·K)[6]
水	2:52	4.19
エタノール	1:53	2.39

エタノールの比熱が小さいことから冷却に必要な熱量も小さくて良いことが予想され、それを裏付けるように緩和時間の有意な差が観測された。この現象は日常生活における冷却現象と関連付けると、冷却する温度が低い冬場の風呂の湯は、風呂を沸かすと短時間で急激な温度変化を伴うため、夏場に比べて早めに入浴すべきであるという日常生活にも繋がる内容である。また、水とエタノールの物体による温度変化の違いは、中学校理科の指導内容である季節風の考え方にも通じている。この季節風の指導内容としては大陸と海では冷え方に違いがあるため、季節によって風向きが変化することを指導するものである。ここで、さらに指導者が持つと良い発展事項として、固体－液体間のみではなく、水とエタノールのような液体－液体間でも冷え方が違うことを本実験により体験的に深めることができるのである。

おわりに

以上に述べたように、指数関数的変化を示す各事象の数式を実験結果と照らし合わせることで、指数関数的変化を示す事象を把握するだけではなく、各現象で変化する物理量は時間・厚さ・電圧・照度・温度と各現象ごとに異なる物理量が存在すること。さらには、CR回路実験で紹介した、コンデンサ充電における負荷変化など発展事項の理解促進や日常生活とリンクした事象の深い理解に通じ、初等・中等教育で指導する理科（特に物理分野）についてさらに突き詰めることが可能となる。現在、新しい学習指導要領の実施に伴い、特に理科においては授業数増加や以前削減されていた内容の復帰、高等学校から中学校への指導内容の移行など、指導者が中学校・高等学校で学んできた内容＋αの内容を指導することが求められている。そのため、本稿で紹介した実験や知識の深め方が、理科教員並びに理科教員を目指す大学生方に活用され、指導力向上のお力添えとなることに通じれば幸いである。

引用文献

1)　文部科学省：『高等学校学習指導要領（平成21年3月)』，　文部科学省，2009.
2)　例えば，内田由美子，松永武，西山桂，重松宏武：「中学校理科「放射線」に関する学習・指導のための基礎研究II　－簡易放射線測定器「はかるくん」を活用した測定例－」，山口大学教育学部附属教育実践総合センター研究紀要，33，125-134，2012.
3)　原康夫：『電磁気学(I)』，裳華房，2008.3）.
4)　例えば，北海道庁：「放射線に関するＱ＆Ａ」http://www.pref.hokkaido.lg.jp/sm/gat/kiso/q_a.htm
5)　文部科学省：『放射線等に関する副読本』　以下文部科学省HPにて公開。
http://www.mext.go.jp/b_menu/shuppan/sonota/attach/1313004.htm
6)　吉田卯三郎，武居文助，橘芳實，武居文雄：『六訂　物理学実験』，三省堂，1979.