消費遺産動機，生産技術，安定性分析と比較静学

仲 間 瑞 樹

1．はじめに

遺産に代表される私的世代間移転を扱う場合，Diamond（1965）型の2期間世代重複モデルを利用することが多い。もともとのDiamond（1965）モデルは，遺産および遺産動機の存在を前提としていなかった。むしろDiamond（1965）の論点は，2期間世代重複モデルの構築すること，そして外国債，内国債の経済効果にあるものと評価されよう。しかしDiamond（1965）での重要な論点は，まだあるのではなかろうか。それは資本ストックで表された動学経路が定常均衡に収束するか否かといった，動学体系に関する安定性分析である。もしDiamond（1965）モデルにおける定常均衡が一意に存在し，動学経路がその定常均衡に必ず収束するならば，大域的な安定性が保証されることになる。しかし，その定常均衡が複数存在するような複数均衡となる場合，必ずしも動学経路の安定性は保証されない。したがって2期間世代重複モデルで様々な政策効果を分析する際，その動学経路の安定性が保証されていなければ，政策効果の分析にも影響を及ぼすことになる。このような点から，安定性分析はDiamond（1965）モデルで重要な位置を占めるものと考えられる[1]。

もちろん2期間世代重複モデルに遺産を含める場合でも，安定性分析は必要不可欠である。ところが遺産を含む2期間世代重複モデルでは，安定性分析が正面から取り上げられる機会が少ない。そのため遺産動機を含む2期間

1）言うまでもなく，Diamond（1965）では動学体系の安定性分析が議論されている。ただしDiamond（1965）モデルでの定常均衡の存在，一意性，安定性といったモデルの基本的性質については，Galor and Ryder（1989）らが厳密な議論を展開している。遺産を含まないDiamond（1965）モデルでの安定性が大きく議論されなくなった理由は，Galor and Ryder（1989）らが安定性に関する議論を十分に展開したからと考えられる。

世代重複モデルでも，動学経路の安定性を分析する余地が生じる。ただし遺産を考慮する場合，どのような遺産動機を想定するかが問われる。そこで本論文ではYaari（1964）型の消費遺産動機を採用し，その動学経路の安定性分析を行う。消費遺産動機を扱う大きな理由は，Diamond（1965）モデルの最もシンプルな拡張ケースだからである。Diamond（1965）モデルの効用関数は，今期の消費と来期の消費から構成される2財モデルである。一方で消費遺産動機は今期の消費，来期の消費そして遺産そのものから構成される3財モデルである。もし遺産そのものが効用関数に加わらなければ，その効用関数は今期と来期の消費から構成される2財モデルでしかない。したがってDiamond（1965）モデルに遺産を含める場合，最もシンプルな拡張ケースがYaari（1964）型の消費遺産動機なのである[2)]。

本論文では，より明確な安定性分析を行うために，効用関数を対数線形型，生産関数を新古典派型生産技術に基づくコブ＝ダグラス型の生産関数を設定している。さらに生産技術は新古典派型生産技術だけではなく，Jones and Manuelli（1990）で提唱され，Barro and Sala-i-Martin（1995）で紹介された，新古典派型生産技術とAK型生産関数が混合した内生成長モデルも扱っている。そしてその内生成長モデルでも，やはり新古典派型生産技術の下での動学経路の安定性分析と同様の安定性分析が可能であることを示す。また消費遺産動機がある場合と消費遺産動機がない場合の定常均衡の比較，消費遺産動機がありかつ新古典派型生産技術での定常均衡と消費遺産動機がありかつ内生成長モデルでの定常均衡の比較も行う。

2．モデル

人口が一定率 $n>0$ で成長する，Diamond（1965）による2期間世代重複

2）消費遺産動機を採用した他の理由は，この遺産動機が利己的な遺産動機を代表する1つの遺産であり，Barro（1974）の利他的遺産動機と対極的な遺産動機だからである。Yaari（1964）型の消費遺産動機は，遺産そのものが効用関数に加わるため，アドホックな遺産動機，ミクロ的な基礎づけがない遺産動機と評価されることもある。しかし本論文では，利他的遺産動機と逆の立場にある利己的な遺産動機，といった観点から消費遺産動機を分析対象として扱っている。

モデルを用いる。人口は一定率 $n>0$ で成長するため，$(t+1)$ 期の労働力を L_{t+1} と表すならば，$L_{t+1}=(1+n)L_t$ が成立する。個人の効用関数は対数線形型効用関数で表され，t期t世代の効用関数は下の（1）のとおり表される。

$$u_t=\varepsilon_1 \log c_{1t}+\varepsilon_2 \log c_{2t+1}+\varepsilon_3 \log b_{t+1} \tag{1}$$

ただし ε_1，ε_2，ε_3 はt期t世代の消費 c_{1t}，$(t+1)$ 期t世代の消費 c_{2t+1}，$(t+1)$ 期 t 世代が $(t+1)$ 期 $(t+1)$ 世代に与える遺産 b_{t+1} に対する選好を表す度合であり，$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=1$ をみたす。t期t世代の個人は労働を非弾力的に供給し，賃金 w_t を受け取り，t期 $(t-1)$ 世代の個人から遺産 b_t を受け取る。それらは消費 c_{1t} と貯蓄 s_t に充当される。その個人は $(t+1)$ 期に退職し，貯蓄の元利合計 $(1+r_{t+1})\,s_t$ を受け取る一方，貯蓄の元利合計は消費 c_{2t+1}，$(t+1)$ 期 $(t+1)$ 世代への遺産 $(1+n)b_{t+1}$ にすべて充当される。したがってt世代の個人の予算制約式は，下の（2）と（3）のとおり表される。

$$c_{1t}=w_t+b_t-s_t \tag{2}$$

$$c_{2t+1}=(1+r_{t+1})s_t-(1+n)b_{t+1} \tag{3}$$

この（2）と（3）から，t世代の個人の生涯予算制約式として下の（4）を得る。

$$c_{1t}+\frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}}+\left(\frac{1+n}{1+r_{t+1}}\right)b_{t+1}=w_t+b_t \tag{4}$$

企業は新古典派型生産技術にしたがい生産を行う。t期における集計化された生産関数はコブ＝ダグラス型生産関数で特定化され，それは下の（5）のとおり表される。

$$Y_t=L_t^{1-\alpha}K_t^{\alpha} \tag{5}$$

ただし Y_t は集計化されたt期の生産物，L_t は集計化されたt期の労働力，K_t は集計化されたt期の資本ストック，α はパラメータで $0<\alpha<1$ をみたしている。一人あたりの生産関数は，下の（6）のとおり表される。

$$y_t=k_t^{\alpha} \tag{6}$$

ただし $y_t=\dfrac{Y_t}{L_t}$，$k_t=\dfrac{K_t}{L_t}$ である。企業の利潤最大化問題から，資本と労働の

限界生産物条件として $r_t=\alpha k_t^{\alpha-1}$，$w_t=(1-\alpha)k_t^{\alpha}$ を得る。

財市場の均衡式は下の（７），資本市場の均衡式は下の（８）である。

$$c_{1t}+\frac{c_{2t}}{1+n}+(1+n)k_{t+1}=w_t+k_t+r_tk_t \tag{7}$$

$$s_t=(1+n)k_{t+1} \tag{8}$$

ｔ期のラグランジュ関数を L_t^1とおくと，ｔ世代の個人の効用最大化問題は下記の式で表される。

$$L_t^1=\varepsilon_1\ logc_{1t}+\varepsilon_2\ logc_{2t+1}+\varepsilon_3\ logb_{t+1}$$
$$-\lambda_t^1\left[c_{1t}+\frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}}+\left(\frac{1+n}{1+r_{t+1}}\right)b_{t+1}-w_t-b_t\right]$$

ただし λ_t^1はｔ期のラグランジュ未定乗数である。この効用最大化問題から，一階条件は下の（９）と（10）として導かれる。

$$c_{1t}=\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)\left(\frac{1+n}{1+r_{t+1}}\right)b_{t+1} \tag{9}$$

$$c_{2t+1}=\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)(1+n)\,b_{t+1} \tag{10}$$

上の（９）と（10）を生涯予算制約式（４）に代入し，整理するならば遺産関数 b_{t+1}として下の（11）を得る。

$$b_{t+1}=\varepsilon_3\left(\frac{1+r_{t+1}}{1+n}\right)(\mathrm{w}_t+b_t) \tag{11}$$

遺産関数（11）を一階条件（９）と（10）に代入することによって，消費関数が下の（12），（13）のとおり得られる。

$$c_{1t}=\varepsilon_1(w_t+b_t) \tag{12}$$

$$c_{2t+1}=\varepsilon_2(1+r_{t+1})(w_t+b_t) \tag{13}$$

資本市場の均衡式（８）と消費関数（12）を個人の予算制約式（２）に代入し，整理するならば下の（14）を得る。

$$(1+n)k_{t+1}=(\varepsilon_2+\varepsilon_3)(w_t+b_t) \tag{14}$$

上の（14）から下の（15）の関係を得る。

$$w_t + b_t = \left(\frac{1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}\right)(1+n)k_{t+1} \tag{15}$$

この（15）を遺産関数（11）に代入すると，資本ストックのみで表される遺産関数（16）を得る。

$$b_{t+1} = \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}\right)(1+r_{t+1})k_{t+1} \tag{16}$$

資本の限界生産物条件に注意することにより，上の（16）は下の（17）のとおり書き換えられる。

$$\frac{b_{t+1}}{k_{t+1} + \alpha k_{t+1}^{a}} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} \tag{17}$$

この（17）の右辺は一定であるので，

$$\frac{b_t}{k_t + \alpha k_t^{a}} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3},$$

つまり下の（18）も成立する。

$$b_t = \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}\right)(1+r_t)k_t \tag{18}$$

この（18）そして労働の限界生産物条件を（14）に代入し，整理するならば，下の（19）の形で表される動学式を得る。

$$(1+n)k_{t+1} = \varepsilon_3 k_t + [\varepsilon_2(1-\alpha) + \varepsilon_3]k_t^{a} \tag{19}$$

この（19）が資本ストックのみで表された消費遺産動機の動学式である。本論文では遺産を明示的に扱っている。しかし資本ストックと遺産の２つの変数からなる動学式ではなく，資本ストック１変数のみからなる動学式を導出している点が重要である。つまり消費遺産動機及び遺産が存在しても，Diamond（1965）と同様，動学式は資本ストック１変数のみの式で表され，Diamond（1965）と同様の安定性分析が可能となる。

３．安定性分析

前節で導出された（19）を利用し，動学式の安定性を求める。まず $k_t =$

$k_{t+1}=k_*$ をみたす k_* を定常状態での資本ストックと定義する。(19) をみたす定常均衡は，下の (20) のとおり k^* として一意に得られる。

$$k^*=\left[\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3}{1+n-\varepsilon_3}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{20}$$

(19) をもとにして安定性分析を行う。(19) は資本ストックのみの動学式であるため，Diamond (1965) と同様の手順で安定性を分析できる。動学式 (19) を全微分し，その結果を定常状態で評価すると下の (21) を得る。

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\frac{\varepsilon_3+[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]\alpha k_*^{\alpha-1}}{1+n}>0 \tag{21}$$

この動学式が定常均衡の近傍で安定，つまり局所的安定であるためには定常均衡の近傍で

$$0<\frac{dk_{t+1}}{dk_t}<1 \tag{22}$$

をみたす必要がある。すなわち (22) の分母の値が分子の値より大きければ，言い換えるならば

$$1+n-\varepsilon_3-[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]\alpha k_*^{\alpha-1}>0 \tag{23}$$

をみたすならば，(22) は成立する。

なお本論文では効用関数，生産関数が特定化されているため，定常均衡も (20) のとおり一意に求められる。したがって定常均衡 (20) を (23) に代入し，整理すると，

$$(1+n-\varepsilon_3)(1-\alpha)>0 \tag{24}$$

を得る。したがって動学式は定常均衡において局所的安定の状態にある。

あるいは Wickens (2008) と同様，(21) に定常均衡 (20) を直接代入，整理することでも，局所的安定の確認ができる。(21) に定常均衡 (20) を直接代入すると，

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\frac{\alpha(1+n)+(1-\alpha)\varepsilon_3}{1+n} \tag{25}$$

を得る。(25) の分母の値から分子の値を引くならば，その値は (24) の左辺と同じである。しかし (25) の分母の値から分子の値を差し引かなくても，(25) の右辺を整理するだけで

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\alpha+\left(\frac{1}{1+n}\right)\varepsilon_3(1-\alpha) \tag{26}$$

を得る。明らかに (26) の値は1より小さい。したがって (26) から

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\alpha+\left(\frac{1}{1+n}\right)\varepsilon_3(1-\alpha) < 1 \tag{27}$$

が成立するため，やはり動学式は定常均衡において局所的安定の状態にある。

次に定常状態で評価する前の (21) を，さらに k_t について微分すると，下の (28) を得る。

$$\frac{d^2k_{t+1}}{dk_t^2}=-\frac{\alpha(1-\alpha)\left[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3\right]k_*^{\alpha-2}}{1+n} < 0 \tag{28}$$

さらに (19) において，t 期における資本ストックを，限りなくゼロに近づけてゆくと，

$$\lim_{k_t\to 0}(1+n)k_{t+1}=0$$

である。以上の結果から資本ストックに関する位相図は，下の図1の曲線①のように描くことができる。その曲線①の傾きは正であり，定常均衡を反映している A_1点において，その傾きが1より小さくなる。もちろん，初期時点の資本ストックがどのような水準にあっても，漸近的に経済は A_1点に収束するため，定常均衡は大域的にも安定である。今までの議論から下の命題1を得る。

命題 1

個人が消費遺産動機を持ち，個人の効用関数は対数線形型効用関数で表される。企業は新古典派型生産技術にしたがって生産を行い，企業の生産関数はコブ＝ダグラス型生産関数で表される。このとき定常均衡 k^* が一意に与

えられ，その定常均衡 k^* は（大域的に）安定的である。

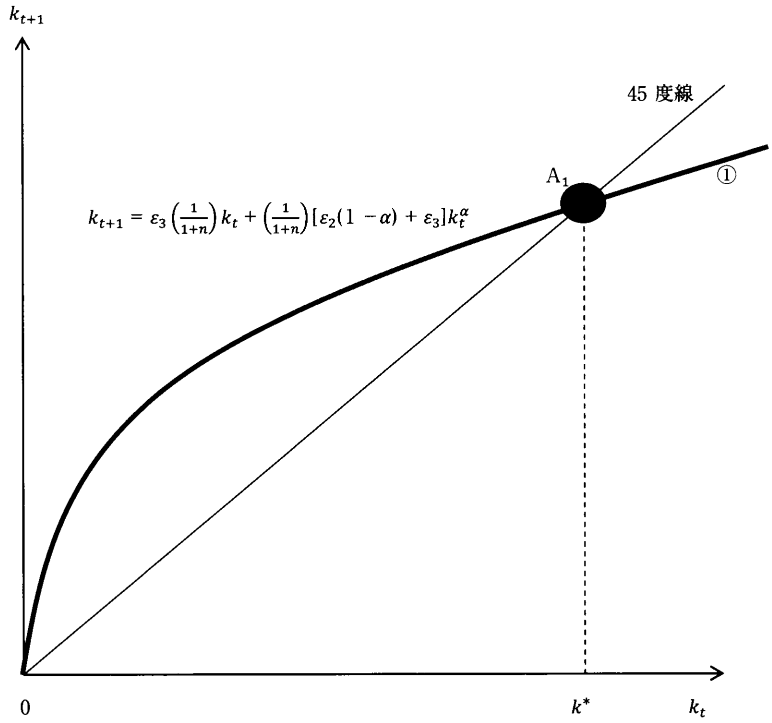

図１：消費遺産動機における位相図

4．ダイアグラマティック・ディスカッション

この節では前節の図１に加えて，消費遺産動機の全く存在しない場合を想定する。その上で，まず消費遺産動機のもとでの定常均衡と，消費遺産動機の全く存在しない場合での定常均衡の大小を比較する。消費遺産動機が全く存在しない場合，遺産に対する選好が$\varepsilon_3=0$をみたすことになる。したがって動学式（19）は

$$(1+n)k_{t+1}=\varepsilon_2\ (1-\alpha)k_t^{\alpha} \tag{29}$$

となる。この場合の定常状態における資本ストックを$k_*^{b=0}$と表すならば，定常均衡は下の（30），$k^{*b=0}$として表される。

$$k^{*b=0}=\left[\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)}{1+n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{30}$$

（20）と（30）の大小関係については，（30）の大カッコ内の値と（20）の大カッコ内の値に注目すればよい。（20）の大カッコ内の値から（30）の大カッコ内の値を引くならば，下の（31）の関係が得られる。

$$\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3}{1+n-\varepsilon_3}-\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)}{1+n}=\frac{\varepsilon_3[1+n+\varepsilon_2(1-\alpha)]}{(1+n-\varepsilon_3)(1+n)}>0 \tag{31}$$

上の（31）の右辺は正の値である。これより消費遺産動機に基づいて個人が遺産を授受する場合の定常均衡（20）が，消費遺産動機がまったくない場合の定常均衡（30）よりも大きい。つまり消費遺産動機が存在することによって，資本ストックがより一層蓄積されていることがわかる。

（29）から

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)\alpha(k_*^{b=0})^{\alpha-1}}{1+n}>0 \tag{32}$$

が成立する。定常均衡における局所的安定がみたされるためには，定常均衡で評価した（32）から

$$1+n-\varepsilon_2\ (1-\alpha)\alpha(\mathrm{k}^{*b=0})^{\alpha-1}>0 \tag{33}$$

が成立すればよい。そこで定常均衡 (30) を (33) に代入し，整理するならば

$$(1+n)(1-\alpha)>0$$

となる。あるいは定常均衡で評価した（32）に定常均衡（30）を代入するならば，

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\alpha<1$$

である。したがって定常均衡の局所的安定性はみたされている。定常状態で評価する前の（32）を，さらに k_t について微分すると

$$\frac{d^2k_{t+1}}{dk_t^2}=-\frac{\varepsilon_2\alpha(1-\alpha)^2(k_*^{b=0})^{\alpha-2}}{1+n}<0 \tag{34}$$

となる。(29）において，k_t を限りなくゼロに近づけると，（29）の値はゼロとなる。

したがって消費遺産動機が全く存在しない場合の位相図は，図２の破線②のように描くことができる。初期時点の資本ストックがどのような水準にあっても，漸近的に経済は定常均衡を反映しているＢ点に収束するため，定常均衡は大域的に安定である。

図２からも明らかなように，消費遺産動機が全く存在しない場合の位相図は，消費遺産動機がある場合の位相図よりも下に位置している。図２の位相図①と位相図②から明らかなとおり，消費遺産動機という遺産動機が生じることで，位相図そして定常均衡が変化する。

この背景はシンプルな説明で事足りる。個人が消費遺産動機を持つ場合，遺産を次世代に与える必要が生じ，個人は貯蓄を増やさざるを得ない。そのため図２が示すように，個人が消費遺産動機を持つならば，消費遺産動機を持たない場合と比べて，定常均衡が増加するものと解釈できる。あるいは個人が消費遺産動機をまったく持たない状態から，消費遺産動機を持つ状態へと転じた場合を考えてみよう。その場合，位相図が図２の破線②から実線①へと上方にシフトする。それとともに定常均衡も $k^{*b=0}$ から k^* へと増加する。このように消費遺産動機の有無は，資本ストックの増減とも結びついていることがわかる。

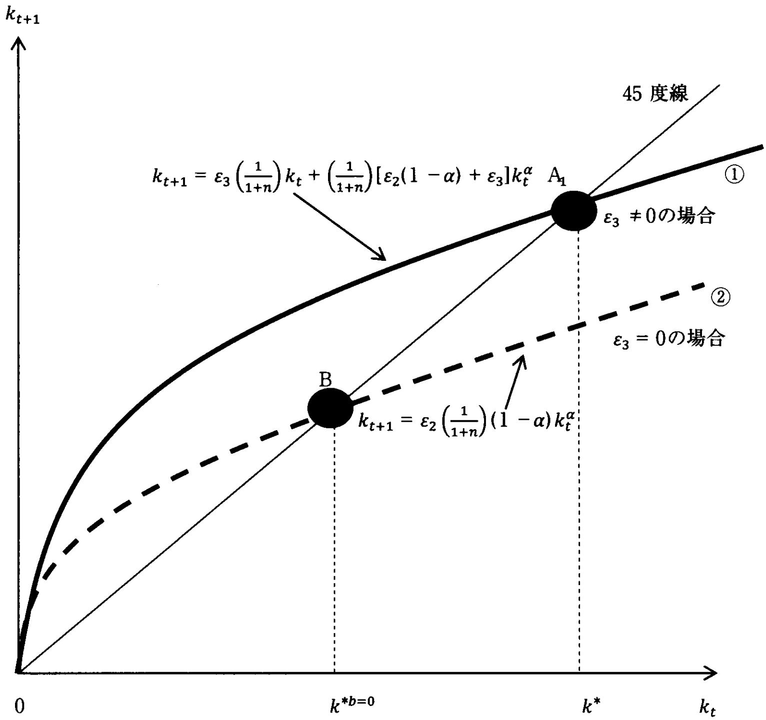

図２：消費遺産動機がある場合（$\varepsilon_3 \neq 0$），ない場合の（$\varepsilon_3 = 0$）の位相図

5．比較静学

前節の図2では消費遺産動機が存在する場合としない場合の2つに分けて，消費遺産動機の有無が位相図及び定常均衡に与える効果を分析した。この節では，個人の遺産に対する選好ε_3が増加した場合，位相図及び定常均衡にもたらす影響を比較静学として分析する。(19) を定常状態で評価するならば，

$$(1+n)k_* = \varepsilon_3 k_* + [\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]k_*^{\alpha}$$

であり，この式を遺産に対する選好ε_3について微分する。すると

$$\frac{dk_*}{d\varepsilon_3} = \frac{k_*[1+k_*^{\alpha-1}]}{1+n-\varepsilon_3-[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]\alpha k_*^{\alpha-1}} \tag{35}$$

を得る。(23) から分母の符号は正。分子の符号も明らかに正であるので，

$$\frac{dk_*}{d\varepsilon_3} = \frac{k_*[1+k_*^{\alpha-1}]}{1+n-\varepsilon_3-[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]\alpha k_*^{\alpha-1}} > 0$$

が成立する。以上から遺産に対する選好ε_3が増すことで，定常状態の資本ストックも増加することがわかる。

もちろん遺産に対する選好ε_3が増加することによって，定常均衡にいかなる効果をもたらすかについては，(35) を定常均衡で評価し，定常均衡の値を代入するか，定常均衡 (20) を遺産に対する選好ε_3で微分すればよい。その結果は

$$\frac{dk_*}{d\varepsilon_3} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3}\right]\left[\frac{1+n+\varepsilon_2(1-\alpha)}{1+n-\varepsilon_3}\right]k^* > 0 \tag{36}$$

のとおりである。(36) より，遺産に対する選好ε_3が増加することによって，定常均衡も図3が示すようにA_1点からC点へと増加することがわかる。

一般に課税，社会保障，公債などに代表されるように，政府の政策によって図1から図3で描かれる資本ストックの位相図が上下し，それにともない定常均衡も変化する。しかし図2が示すように消費遺産動機の有無，そして図3及び (36) が示すように，遺産に対する選好の増減によって，資本ストックに関する位相図，定常均衡が変化する。

特に消費遺産動機に基づく遺産に対する選好が増すことで，資本ストックが増加する。これは遺産に対する選好の増加，貯蓄の増加（資本ストックの増加）そして遺産の増加といったながれを反映した結果と解釈できる。政府の政策を特に必要としなくとも，私的な評価に基づく変数すなわち遺産に対する選好が，資本ストックの水準に影響を与えることのできる一例といえよう[3)]。

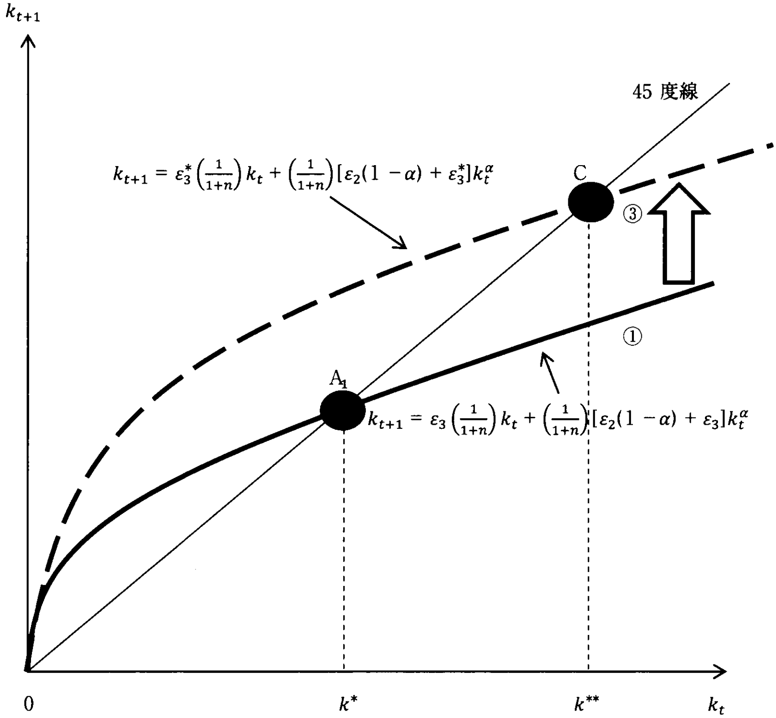

図３：遺産に対する選好 ε_3が増加した場合（ε_3^*は増加後の選好 ε_3）

3）同様の分析はIhori（1994）でも行われている。Ihori（1994）では公共資本を考慮したBarro（1990）型の内生成長モデルに消費遺産動機を加え，相続税財源による積立方式の公的年金政策，賦課方式の公的年金政策が経済成長に与える経済効果を定性的に分析している。そして個人の遺産に対する選好が経済成長率に与える経済効果も分析している。

６．内生成長モデルの導入

２節から５節にかけて，企業の生産技術を新古典派型生産技術として，安定性分析と比較静学分析を行ってきた。しかし生産技術は必ずしも新古典派型生産技術だけではない。内生成長モデルも有力な生産技術として存在する。

この節では新古典派型生産技術モデルの拡張として，Barro and Sala-i-Martin（1995）で紹介され，Jones and Manuelli（1990）らが提唱したAK型生産技術と新古典派型生産技術が組み合わされた生産技術を扱う。その上で消費遺産動機経済における安定性を分析する。

Barro and Sala-i-Martin（1995）では，Jones and Manuelli（1990）型の生産技術を，下の（37）のような形で定式化している。

$$Y_t = AK_t + L_t^{1-\alpha}K_t^{\alpha} \tag{37}$$

Aは技術水準を反映している正の定数である。(37）からわかるように，この生産関数はAK型生産関数，コブ＝ダグラス型生産技術を反映した新古典派型生産技術の両者が組み合わされている。２節と同様，上の（37）を一人あたりの生産関数として表すならば，下の（38）となる。

$$y_t = Ak_t + k_t^{\alpha} \tag{38}$$

企業の利潤最大化問題から，資本の限界生産物条件は$r_t = A + \alpha k_t^{\alpha-1}$となる。この資本の限界生産物条件は新古典派型生産技術での資本の限界生産物条件と異なる。つまり（37）あるいは（38）で表される生産技術の場合，新古典派型生産技術で成立する稲田条件の一つである$\lim_{k_t \to \infty} r_t = 0$が成立せず，$\lim_{k_t \to \infty} r_t = A > 0$が成立するからである。一方，労働の限界生産物は新古典派型生産技術の場合と同様，$w_t = (1-\alpha)k_t^{\alpha}$のままである。

なお効用関数，個人の予算制約式，財市場の均衡式，資本市場の均衡式は，すべて前節と同じである。個人の効用最大化問題から得られる一階条件は（39）と（40）である[4]。

4）（39）から（46）は，（９）から（16）と同一のように見えるが，６節での生産技術は２節での生産技術と異なる。そのため（39）から（46）は（９）から（16）と同一ではなく，両者を区別する意味でも，あえて（39）から（46）の形で式を明記している。

$$c_{1t}=\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)\left(\frac{1+n}{1+r_{t+1}}\right)b_{t+1} \tag{39}$$

$$c_{2t+1}=\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)(1+n)b_{t+1} \tag{40}$$

一階条件 (39) と (40) を個人の生涯予算制約式（4）に代入することによって遺産関数 b_{t+1}を得る。

$$b_{t+1}=\varepsilon_3\left(\frac{1+r_{t+1}}{1+n}\right)(w_t+b_t) \tag{41}$$

上の (41) を一階条件 (39) と (40) に代入することによって，前節と同様，消費関数 (42) と (43) を得る。

$$c_{1t}=\varepsilon_3(w_t+b_t) \tag{42}$$

$$c_{2t+1}=\varepsilon_2(1+r_{t+1})(w_t+b_t) \tag{43}$$

資本市場の均衡式（8）と消費関数 (42) を個人の予算制約式（2）に代入し，整理することによって，前節と同様 (44) を得る。

$$(1+n)k_{t+1}=(\varepsilon_2+\varepsilon_3)(w_t+b_t) \tag{44}$$

(44) は下の (45) のように書き換えられる。

$$w_t+b_t=\left(\frac{1}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}\right)(1+n)k_{t+1} \tag{45}$$

この (45) を遺産関数 (41) に代入すると，下の (46) を得る。

$$b_{t+1}=\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}\right)(1+r_{t+1})k_{t+1} \tag{46}$$

ただし資本の限界生産物条件に注意するならば (46) は，下の (47) のように書き換えられる。

$$\frac{b_{t+1}}{k_{t+1}+Ak_{t+1}+\alpha k_{t+1}^{a}}=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3} \tag{47}$$

(47) の右辺は一定であるので，

$$\frac{b_t}{k_t+Ak_t+\alpha k_t^{a}}=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3},$$

つまり

$$b_t=\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}\right)(1+r_t)k_t \tag{48}$$

も成立する。ただし，この（48）と労働の限界生産物条件を（44）に代入し，整理するならば，下の（49）を得る。

$$(1+n)k_{t+1}=\varepsilon_3(1+A)k_t+[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]k_t^{\alpha} \tag{49}$$

この（49）がBarro and Sala-i-Martin（1995）で定式化されたJones and Manuelli（1990）型の生産技術に基づく動学式である。

7．安定性分析

（49）をもとにして，安定性分析を行う。まず $k_t=k_{t+1}=k_{**}$ をみたす k_{**} を，Barro and Sala-i-Martin（1995）で定式化されたJones and Manuelli（1990）型生産関数の下での，定常状態での資本ストックと定義する。すると（49）から定常均衡は下の（50）のとおり，k^{**} として一意に与えられる。

$$k^{**}=\left[\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3}{1+n-\varepsilon_3(1+A)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{50}$$

ただし正の定常均衡が保証されるためには，下の（51）あるいは（52）の成立が必要とされる。

$$1+n>\varepsilon_3(1+A) \tag{51}$$

$$\frac{1+n}{1+A}>\varepsilon_3 \tag{52}$$

（51）あるいは（52）は，n ≥ A ならば確実に成立する。もちろん A > n でも，（51）あるいは（52）が成立するならば，正の定常均衡が保証される。

さて（49）を全微分し，その結果を定常状態で評価すると，下の（53）を得る。

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\frac{\varepsilon_3(1+A)+[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]\alpha k_{**}^{\alpha-1}}{1+n} \tag{53}$$

定常状態での局所的安定がみたされるためには，

$$1+n-\varepsilon_3\,(1+A)-[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]\alpha k_{**}^{\alpha-1}>0 \tag{54}$$

が成立すればよい。定常均衡で評価した（54）に定常均衡（50）を代入，整理し，（51）の成立を仮定するならば

$$[1+n-\varepsilon_3(1+A)](1-\alpha)>0 \tag{55}$$

を得る。(51）を仮定するならば，（55）の値は正となり，定常均衡で局所的安定がみたされる。あるいは定常均衡（50）を定常均衡で評価した（53）に代入し，整理するならば下の（56）を得る。

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\alpha+\left(\frac{1+A}{1+n}\right)\varepsilon_3(1-\alpha)$$

$$=\alpha+\left(\frac{\varepsilon_3}{\dfrac{1+n}{1+A}}\right)(1-\alpha) \tag{56}$$

(52）を仮定するならば，（56）の符号は正であり，かつ１より小さい。

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}==\alpha+\left(\frac{\varepsilon_3}{\dfrac{1+n}{1+A}}\right)(1-\alpha)<1$$

したがって定常均衡での局所的安定がみたされる。

さらに定常状態で評価する前の（53）を k_t について微分すると，下の（57）を得る。

$$\frac{d^2k_{t+1}}{dk_t^2}=-\frac{\alpha(1-\alpha)[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]\;k_{**}^{\alpha-2}}{1+n}<0 \tag{57}$$

もちろん動学式（49）において，t 期における資本ストックを，限りなくゼロに近づけてゆくと，

$$\lim_{k_t\to 0}(1+n)k_{t+1}=0$$

が成立する。

以上の結果から資本ストックに関する位相図は，下の図４の曲線④のように描くことができる。その曲線④の傾きは正であり，D 点において，その

傾きが1より小さくなる。もちろん，初期時点の資本ストックがどのような水準にあっても，漸近的に経済はD点に収束するため，定常均衡は大域的にも安定である。今までの議論から下の命題2を得る。

命題2

個人が消費遺産動機を持ち，個人の効用が対数線形型効用関数で表される。企業はBarro and Sala-i-Martin（1995）で定式化されたJones and Manuelli（1990）型の生産技術にしたがって生産を行い，生産関数は（37）のとおり表される。さらに$1+n > \varepsilon_3(1+A)$，あるいは$\frac{1+n}{1+A} > \varepsilon_3$を仮定する。このとき正の定常均衡の資本ストック$k^{**}$が一意に与えられ，その定常均衡の資本ストック$k^{**}$は（大域的に）安定的である。

8．ダイアグラマティック・ディスカッション

Barro and Sala-i-Martin（1995）で定式化されたJones and Manuelli（1990）型の生産技術は，コブ＝ダグラス型生産関数で表された新古典派型生産技術だけではなく，AK型生産関数で表された内生成長モデルが加わっている。そのため，資本の限界生産物条件が$r_t = A + \alpha k_t^{\alpha-1}$となり，技術水準を反映する正の定数Aの大きさが，資本ストックで表される動学式，正の定常均衡の存在，動学経路の安定性に影響する。

図4では新古典派型生産技術における定常均衡A_1点と，Barro and Sala-i-Martin（1995）で定式化されたJones and Manuelli（1990）型の生産技術における定常均衡D点，さらに消費遺産動機が全く存在しない場合の定常均衡B点の3つが描かれている。図4からも分かるように，D点がA_1点よりも右側に位置している。このことは，内生成長モデルでの定常均衡（50）の大カッコ内の値から，新古典派型生産技術における定常均衡（20）の大カッコ内の値を引くことから明らかとなる。つまり

$$\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3}{1+n-\varepsilon_3(1+A)}-\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3}{1+n-\varepsilon_3}=\frac{\varepsilon_3 A[\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3]}{[1+n-\varepsilon_3(1+A)](1+n-\varepsilon_3)}>0$$

が成立するため，図4で示したように $k^{**} > k^{*}$ が成立する。前節で述べたとおり，新古典派型生産技術の下での定常均衡の資本ストックは，遺産動機のないライフサイクルモデルでの定常均衡の資本ストックよりも大きい。したがって $k^{**} > k^{*} > k^{*b=0}$ が成立する。

図4から，同じ新古典派型生産技術であっても，個人が消費遺産動機に基づいて遺産を授受する方が，資本ストックや定常均衡を高めることになる。しかし個人が消費遺産動機に基づいて遺産を授受しても，企業の生産技術がBarro and Sala-i-Martin (1995) で定式化された Jones and Manuelli (1990) 型ならば，資本ストックや定常均衡は新古典派型生産技術の場合の資本ストックや定常均衡よりも高い水準を維持する。消費遺産動機に基づく遺産の授受があることによって，より高い資本ストックが維持される。消費遺産動機に基づく遺産の授受があったとしても，生産技術が新古典派型生産技術ではなく，内生成長モデルならば，さらに高い資本ストックが維持される。このように消費遺産動機に基づく遺産の有無，新古典派型生産技術か内生成長経済といった生産技術の差異によって，定常均衡の水準が左右される。

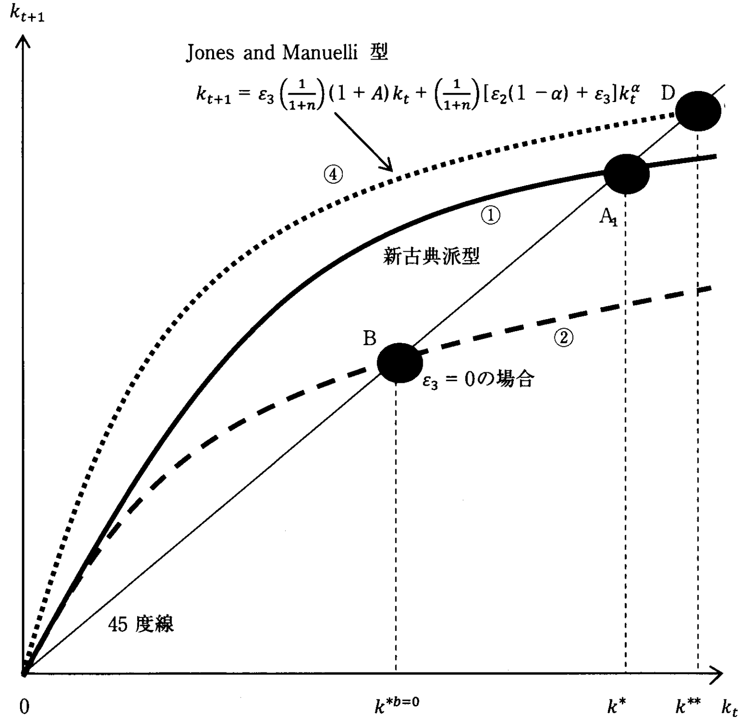

図４：消費遺産動機がない場合（②）・消費遺産動機と新古典派型生産技術（①）・消費遺産動機と内生成長モデル（④）での位相図

9．動学的非効率と本論文での定常均衡

遺産動機のないDiamond（1965）モデルでは，過剰貯蓄が生じる場合についても論じられてきた。例えばBarro and Sala-i-Martin（1995）では，CRRA型効用関数で表された効用関数の相対的危険回避係数を1とした上で，その点について説明をしている。

一方，本論文では効用関数が対数線形型，生産関数がコブ＝ダグラス型である。したがって新古典派型生産技術や内生成長モデルに消費遺産動機が加わっても，過剰貯蓄の可能性について容易に確認することができる。

まず第2節でも導出したとおり，資本の限界生産物は$r_t=\alpha k_t^{\alpha-1}$であり，定常状態での利子率を$r_*$として表すならば黄金律水準は$r_*=n$である。定常状態で表した黄金律水準をみたす資本ストックをk_gと表すならば，

$$k_g=\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{58}$$

である。新古典派型生産技術と消費遺産動機に基づく定常均衡は（20）であるので，（20）と（58）の大小比較をする。（20）と（58）のカッコ内の値を大小比較するだけで，定常均衡（20）と（58）の大小比較ができることに注意するならば，

$$\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3}{1+n-\varepsilon_3}-\frac{\alpha}{n}=\left(\frac{1}{1+n-\varepsilon_3}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left[\varepsilon_3(n+\alpha)+(1+n)(1-\alpha)\left\{\varepsilon_2\left(\frac{n}{1+n}\right)-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\}\right] \tag{59}$$

といった関係を得る。もし

$$\varepsilon_2\left(\frac{n}{1+n}\right)\geq\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

が成立するならば（59）の値は確実に正となり，$k^*>k_g$となる。

同様の関係は，6節で扱った内生成長モデルと消費遺産動機に基づく定常均衡（50）と（58）の大小比較でも確かめられる。定常均衡（50）と（58）のカッコ内の値を大小比較するならば，

$$\frac{\varepsilon_2(1-\alpha)+\varepsilon_3}{1+n-\varepsilon_3(1+A)}-\frac{\alpha}{n}$$

$$=\left[\frac{1}{1+n-\varepsilon_3(1+A)}\right]\left(\frac{1}{n}\right)\left[\varepsilon_3\{n+\alpha(1+A)\}+(1+n)(1-\alpha)\left\{\varepsilon_2\left(\frac{n}{1+n}\right)-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\}\right] \tag{60}$$

といった関係を得る。やはり

$$\varepsilon_2\left(\frac{n}{1+n}\right)\geq\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

が成立するならば，(60) の値は確実に正となり，$k^{**}>k_g$ となる。Barro and Sala-i-Martin（1995）でも言及しているが，消費遺産動機を含む本論文のモデルでも，生産関数のパラメータ α の値が（相当）小さい場合，本論文における資本ストックが黄金律水準の資本ストックを超過する可能性，すなわち動学的非効率性の可能性が生じる。

10. おわりに

本論文では消費遺産動機を含む２期間世代重複モデルでも，その動学式がDiamond（1965）と同様，資本ストックのみに基づく動学式で表され，資本ストック1変数に基づく安定性分析が可能であることを明らかにした。このようなことが可能となった大きな理由は，消費遺産動機のもとで導出された遺産関数が資本ストックの関数として表され，資本ストック１変数のみで動学式が導かれるからである。

生産技術が新古典派型生産技術であったとしても，個人が消費遺産動機を持つ場合，個人が消費遺産動機を持たない場合に比べて，その定常均衡は大きくなる。さらに生産技術が Barro and Sala-i-Martin（1995）で定式化された Jones and Manuelli（1990）型のような内生成長モデルであるならば，個人が消費遺産動機を持っていても，新古典派型生産技術の場合と比べて，定常均衡はより一層大きくなることを明らかにした。

一般に黄金律水準の資本ストックと比較して，資本ストックが過剰であっ

ても過少であっても，経済効率には良い影響を与えないことが知られている。そのこととは別に，単に資本ストックの高低という尺度だけに注目するならば，まったく遺産を授受しない経済であるよりも，消費遺産動機に基づいて遺産を授受するようなストック経済へと転ずるならば，資本ストックも高まる。技術の変化も資本ストックの水準に影響を与える。いくら消費遺産動機を個人が保有していても，生産技術が新古典派型生産技術ではなく，内生成長モデルに基づく生産技術であるならば，資本ストックをより高める方向へと寄与するのである。言い換えるならば，本論文の分析では消費遺産動機といった遺産動機の存在，内生成長モデルによる生産技術が資本ストックを高める要因として機能するのである。

もちろん９節でも言及したとおり，新古典派型生産技術の下で消費遺産動機を含む場合であっても，あるいは内生成長モデルの下で消費遺産動機を含む場合のいずれの定常均衡でも，過剰資本ストックすなわち動学的非効率の状態が生じうる。もし経済が動学的非効率の状態にあるならば，消費遺産動機や内生成長モデルに基づく生産技術は，経済の効率性を阻害する要因になりかねない。その場合，伝統的な手法に帰着するが課税，公債発行や公的年金政策といった政府の政策を使い，動学的非効率の解消を考えなければいけなくなる。本論文で描いた各位相図を下方にシフトさせるような政策が求められる。本論文の分析手法をもとに政府の様々な政策が資本ストック，厚生に与える効果を分析する課題が残されていることは言うまでもない。

参考文献

Barro, R.J. (1974). Are Government Bonds Net Wealth?, Journal of Political Economy, Vol.82, No.6, 1095-1117.

Barro.R.J. and Sala-i-Martin, X (1995). Economic Growth, USA, McGraw-Hill

Diamond, P.A. (1965) National Debt in a Neoclassical Growth Model. American Economic Review, Vol.55, No.5, Part.1, 1126-1150.

Galor, O and Ryder, H. (1989). Existence, Uniqueness and Stability in Equilibrium in

Overlapping Generations Model with Productive Capital. Journal of Economic Theory, Vol.49, No.2. pp360-375.

Ihori, T. (1994) "Bequests, Fiscal Policy, and Social Security", in Savings and Bequests, ed, Toshiaki Tachibanaki, pp137-166, USA, The University of Michigan Press.

Jones, L.E. and Manuelli, R.E. (1990). A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Implications. Journal of Political Economy, Vol.98, Mo.5, pp1008-1038

Yaari, M.E. (1964). On the Consumer's Lifetime Allocation Process. International Economic Review, Vol.5, No.3, 304-317.