

# 弾塑性構成式に基づく砂の非排水せん断挙動 の評価と液状化解析への適用に関する研究

Evaluation of the undrained shear characteristics of sand based on a elasto-  
plastic constitutive equation and its application to the liquefaction analysis

平成7年7月

森尾 敏



# 目次

第1章 序論	1
1.1 本研究の目的	1
1.2 本論文の構成	6
1.3 繰返し弾塑性構成式に関する既往の研究の概観	9
1.3.1 多曲面モデル	9
1.3.2 二曲面モデル	12
1.3.3 単曲面モデル	14
1.3.4 無数曲面モデル	16
1.3.5 拡張下負荷面モデル	17
1.4 本論文で用いる応力、ひずみの定義	20
参考文献(第1章)	22
第2章 非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成式	25
2.1 概説	25
2.2 繰返し弾塑性構成式	27
2.2.1 モデルの特徴	27
2.2.2 モデルの概要	28
2.2.3 正規降伏曲面 $F$ 、負荷曲面 $f$ 、応力反転曲面 $f_s$ および 弾性領域を定義する硬化曲面 $f^E$	29
2.2.4 流れ則	31
2.2.5 負荷指標	36
2.2.6 硬化則	36
2.2.7 硬化係数 $K_P$	39
2.2.8 弾塑性係数テンソル $D^{EP}_{ijkl}$	40
2.2.9 本モデルの材料定数	41
2.2.10 $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ の評価	41

2.3	非共軸性の程度を表すスカラー変数 $c$ .....	43
2.3.1	$c$ の決定法 .....	43
2.3.2	試験方法および試験結果 .....	43
2.4	非排水単純せん断試験の解析結果 .....	47
2.4.1	液状化強度試験のシミュレーション解析 .....	47
2.4.2	液状化強度曲線のシミュレーション解析 .....	51
2.5	中間主応力に基づく異方性の評価 .....	55
2.6	本章の要約 .....	58
	参考文献 (第2章) .....	59
第3章	三軸応力状態での飽和砂の不安定挙動の解析的検討 .....	61
3.1	概説 .....	61
3.2	単調載荷時のモデルの概要 .....	63
3.2.1	正規降伏曲面 $F$ および負荷曲面 $f$ .....	63
3.2.2	流れ則 .....	64
3.2.3	負荷指標 $df$ と硬化係数 $K_p$ .....	65
3.2.4	弾塑性係数テンソル $D^{EP}_{ijkl}$ .....	65
3.2.5	本モデルの材料定数 .....	66
3.3	非排水三軸圧縮試験のシミュレーション解析結果 .....	67
3.4	三軸応力状態でのひずみ軟化挙動の理論的考察 .....	70
3.4.1	非排水時のひずみ軟化挙動の検討 .....	70
3.4.2	ひずみ軟化時の構成式の安定性 .....	73
3.4.3	体積ひずみを制御したときのひずみ軟化挙動の検討 .....	77
3.5	パラメトリック・スタディ .....	82
3.6	本章の要約 .....	85
	参考文献 (第3章) .....	86
第4章	弾塑性構成式に基づく異方性砂の非排水挙動の評価 .....	88
4.1	概説 .....	88
4.2	実験結果に基づく体積変化特性の定量的評価 .....	90

4. 2. 1	三主応力制御試験における富士川砂の体積変化特性	90
4. 2. 2	供試体作成法の違いによる豊浦砂の体積変化特性	92
4. 2. 3	空中落下法による豊浦砂の体積変化特性	93
4. 2. 4	Dogs Bay砂の体積変化特性	93
4. 2. 5	体積変化特性の定量的評価	94
4. 3	構成式の概要と流れ則への新たな異方性の導入	97
4. 3. 1	第2章、第3章のモデルの正規降伏曲面 $F$ 、負荷曲面 $f$ および流れ則	97
4. 3. 2	流れ則への新たな異方性の導入	99
4. 3. 3	本モデルの材料定数	100
4. 4	実験試験と解析結果の比較	102
4. 4. 1	平均主応力一定、 $\theta$ 一定排水せん断試験の解析	102
4. 4. 2	非排水三軸圧縮および伸張試験の解析	102
4. 5	$\phi$ と $\phi_m$ の相対的な大小関係	108
4. 6	本章の要約	110
	参考文献(第4章)	111
 第5章 繰返し弾塑性構成式の有限要素法による液状化解析への適用		113
5. 1	概説	113
5. 2	繰返し弾塑性構成式の定式化	114
5. 2. 1	繰返し弾塑性構成式の概要	114
5. 2. 2	正規降伏曲面 $F$ 、負荷曲面 $f$ および最新の応力反転曲面 $f_s^N$	115
5. 2. 3	流れ則	116
5. 2. 4	硬化則	117
5. 2. 5	弾塑性係数テンソル $D^{EP}_{ijkl}$ と本モデルの材料定数	119
5. 3	液状化解析プログラム	120
5. 3. 1	液状化解析プログラムの一覧	120
5. 3. 2	$u-U$ 形式の基礎方程式	122
5. 3. 3	非線形方程式の解法	123
5. 4	液状化解析への適用	126

5. 4. 1 新潟地震における川岸町地盤の液状化解析（一次元問題） … 126  
5. 4. 2 遠心力載荷実験のシミュレーション解析（二次元問題） …… 132  
5. 5 本章の要約 …………… 137  
参考文献（第5章） …………… 138

第6章 総括 141

記号説明 …………… 145

APPENDIX A：要素試験のシミュレーション解析法 …………… 151

APPENDIX B：材料の安定性に関する理論 …………… 155

謝辞 …………… 157

# 第1章 序論

## 1. 1 本研究の目的

最近 20 年余の間、有限要素法に代表される数値計算法の進歩と、大型電算機のめざましい発達によって、土の構成式を適用した境界値問題の解析が盛んに行われるようになった。室内での要素試験 ( element test ) の結果を忠実に表現し得る構成式を用いて、盛土や掘削時における地盤の静的な挙動、あるいは、地震時における地盤の動的な挙動を数値解析するシミュレーションであり、解析と模型実験または現場での動態観測との対応関係も明らかにされつつある。

構成式の歴史は、大きく三つの発展段階に分けられる。1960年までには降伏曲面の内部を弾性領域として、応力が降伏曲面に達した状態における顕著な塑性変形を記述する古典的な弾塑性構成モデルが提案された。このなかで、粘性土の硬化時の変形挙動を記述する Roscoeら<sup>1)</sup>のカムクレイ・モデルは、これまでは別々に取り扱われることが多かった「圧密」と「せん断」を統一的に説明できる画期的なモデルであり、今日の土の構成式の出発点となる歴史的なものと考えられる。次いで、1960~1980年代において、降伏曲面の内部を弾性領域とせず、その内部の応力変化による塑性変形を記述する種々の繰返し弾塑性構成モデル<sup>2)~7)</sup>が提案された。これらの繰返しモデルについては、1. 3で詳述するが、すべて等方硬化則と移動硬化則を組み合わせた何らかの異方硬化則を導入することで、繰返し載荷時の Masing 則あるいはパウシンガー効果等の履歴挙動をうまく表現しようとしたものである。さらに、1970年代以降、塑性不安定<sup>8)</sup>を伴う破壊現象予測に不可欠といわれる塑性ひずみ増分方向の応力増分方向依存性や主応力軸の回転等を評価した種々のモデルが提案された。このなかには、 $J_2$  変形理論<sup>9)</sup>、亜塑性モデル<sup>10)</sup>、接線塑性モデル<sup>11)</sup>等が含まれる。

土の構成式は、単なる概念あるいは純理論から組み立てられるものではなく、圧密履歴、ダイレイタンシー特性等の土固有の特性を現実の形で理解し、ふまえた上で、これら

が妥当に表現できることが必要である。また、構成式を有限要素法解析プログラムに導入し、現実の問題に適用するには、モデルはできるだけ単純で扱い易いこと、使用される材料定数の意味付け、決定法が確立されていることが必要がある。しかし、複雑な土の挙動を広く説明する上で、万人の肯定を期待しうる構成式は現在においてもまだ見出されていないのが実情であり、土質工学における重要な課題のひとつになっている。

本論文では、この点に鑑み、以下の諸点を主要な目的としたものである。

- (1) 一般応力空間での砂質土の非線形挙動を表現する繰返し弾塑性構成式を開発する。この繰返しモデルは、静的な载荷条件下での砂の挙動を包含するものでなければならない。
- (2) 開発した弾塑性構成式を静的な载荷条件下におけるひずみ軟化挙動の解析へ適用し、砂の非排水挙動を十分な精度で予測し得ることを明らかにする。
- (3) 開発した弾塑性構成式を有限要素法による砂地盤の液状化解析へ応用し、境界値問題としての現実の問題への適用性を明らかにする。

本論文で取り扱う砂の非排水挙動に関するこのような理論的研究の成果は、砂の変形・強度特性をよりよく理解する上で重要な情報を提供し、また、実際の境界値問題を取り扱う上で有益な知見を与え得るものであると考えている。

砂質土のモデル化を行う場合、考慮されなければならない課題が数多くあるが、以下に、本研究において特に重視した項目と関連する章番号を示す。

①：繰返し载荷時の履歴挙動（第2章、第5章）

図1-1 (a) のバイ・リニア型の応力-ひずみ曲線において、 $0 \rightarrow A \rightarrow B$  の処女载荷

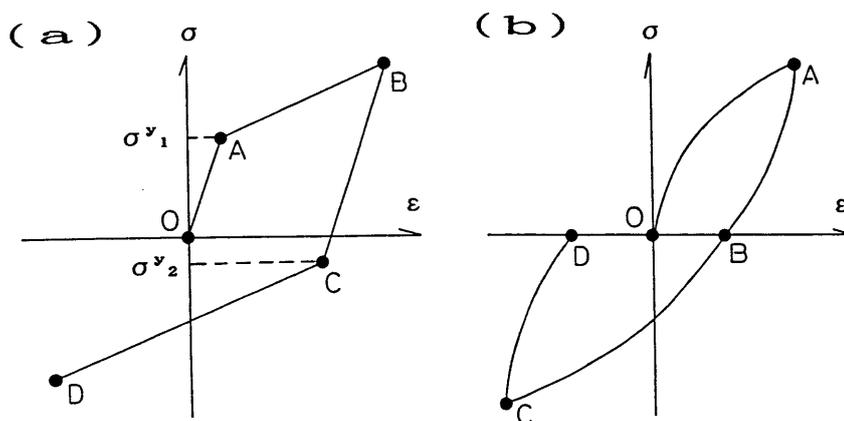


図1-1 バウシンガー効果および Masing 則

時と  $B \rightarrow C \rightarrow D$  の除荷時（逆方向載荷時）を考える。処女載荷時には、A点 ( $\sigma^y_1$ ) で降伏が発生するのにに対し、逆方向載荷時にはこれより絶対値の小さいC点 ( $\sigma^y_2$ ) で降伏が生じる。このように、ある方向の載荷に対する塑性変形の発生によって、逆方向載荷時の降伏応力が低下する現象は、バウシinger効果と呼ばれる。

また、図 (b) の滑らかな応力-ひずみ曲線において、 $0 \rightarrow A$  の処女載荷時に比べて、 $A \rightarrow B \rightarrow C$  の逆方向載荷時の応力-ひずみ曲線は約 1/2の曲率でゆるやかに変化する。このため、 $C \rightarrow D$  の再載荷時の応力-ひずみ曲線を延長するとA点に戻ることになる。このように、ある方向の載荷に対する塑性変形の発生によって、逆方向載荷時の応力-ひずみ曲線の曲率が低下する現象は、Masing 則と呼ばれる。

繰返し弾塑構成式においては、このようなバウシinger効果、Masing 則等の履歴挙動、および繰返し載荷時のストレス-ダイレイタンス関係を妥当に表現しなければならない。また、図 1-1 は一次元応力-ひずみ曲線であるが、一般応力空間でモデルを組み立てる場合、多次元空間での応力の反転を妥当に表現しなければならない。

## ②：非共軸性（第2章）

降伏曲面（塑性ポテンシャル曲面）が応力の不変量で与えられる等方硬化モデルでは、塑性ひずみ増分の主軸は応力増分の主軸ではなく、応力の主軸と一致する。このように、塑性ひずみ増分と応力の主軸が一致する現象は共軸性（coaxiality）と呼ばれる。逆に、両者が一致しない現象は非共軸性（noncoaxiality）と呼ばれる。図 1-2 (a) は、鉛直方向と応力の主軸のなす角  $\beta_s$ 、同じく鉛直方向と塑性ひずみ増分の主軸のなす

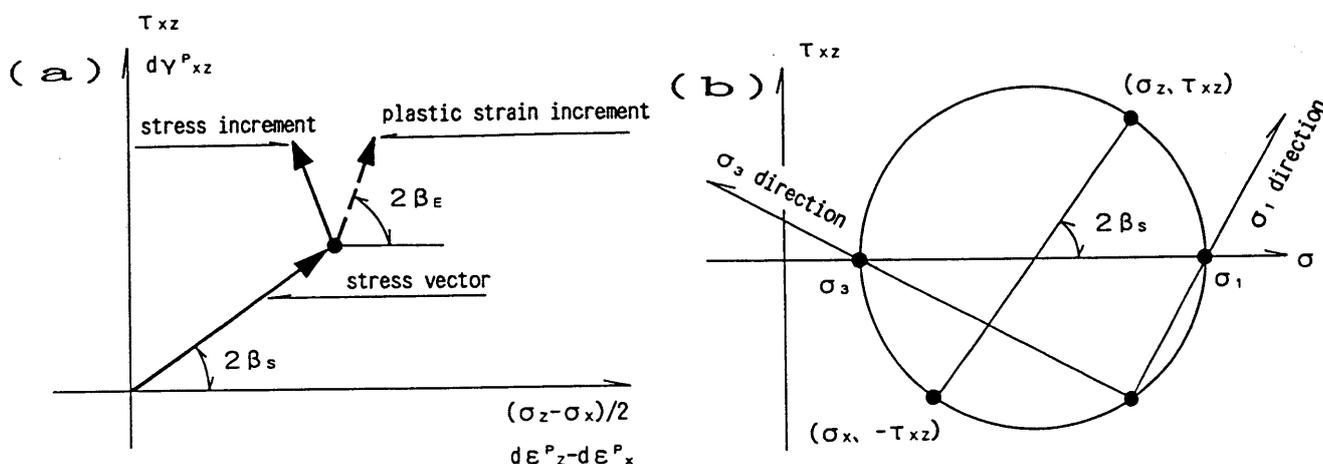


図 1-2 非共軸性の説明図

角  $\beta_E$  を偏差応力空間で示したもので、 $\beta_s = \beta_E$  の場合が共軸である。また、同図 (b) は、モールの応力円における  $\beta_s$  を示したものである。矢富ら<sup>12)、13)</sup> は、砂のような粒状体に発生するせん断帯 (すべり面) を解析的に表現するには、使用する構成式にこの非共軸性を評価する必要があること、すなわち、塑性不安定<sup>8)</sup> を伴う破壊現象の解析には、非共軸性の導入が不可欠であることを指摘している。

地盤材料の構成式で表現される非共軸性の要因は、次の2つに分類することができる。

㊸：塑性ひずみ増分が、現在の応力状態により唯一に決定されるのではなく、応力増分の方向に依存することによって生じる非共軸性。この性質は、塑性応答の応力増分方向依存性あるいは増分非線形性と呼ばれ、単曲面モデル<sup>4)、5)</sup>、亜塑性モデル<sup>10)</sup>、Gutierrez のモデル<sup>14)</sup>、Ashok のモデル<sup>15)</sup> がこの範疇に入る。

㊹：異方性を含む定式化を行うことによって生じる非共軸性で、この場合、塑性ひずみ増分方向は塑性ポテンシャル曲面により応力増分方向に関係なく唯一に決定される。異方硬化則に基づく繰返しモデル<sup>2)、3)、6)、7)</sup>、初期応力による応力誘導異方性を考慮した関口・太田モデル<sup>16)</sup> がこの範疇に入る。

また、この㊸と㊹の割合を自在に設定できる繰返しモデル<sup>17)、18)</sup> も提案されている。

### ㊺：中間主応力に基づく異方性 (第2章、第4章)

一般に、土の強度は主として平均有効主応力、拘束圧、中間主応力の影響を受け、静水圧軸を含む三軸平面上と静水圧軸と直交する  $\pi$  平面上において議論されることが多い。つまり、三軸平面上では平均有効主応力と拘束圧の影響について、 $\pi$  平面上では中間主応力の影響について議論される。

一般応力空間での構成式を考える場合には、 $\pi$  平面上における異方性 (規準) をどのように取り扱うかということが重要であり、どのような規準を用いるかによって、応力-ひずみ関係に与える影響も異ってくる。

### ㊻：非排水時あるいは間隙水圧の移動に伴うひずみ軟化挙動 (第3章、第4章)

新潟地震、日本海中部地震において大規模な地盤の側方流動が観測され<sup>19)、20)</sup>、液状化に関係した最近の話題になっている。この原因として、液状化層の傾斜、基盤面の傾斜等が指摘されているが、水平地盤においても%オーダーまたは数十%オーダーのひずみが生じていることを考えると、非排水時あるいは間隙水圧の移動 (migration) に伴うひず

み軟化挙動の影響が考えられる。

しかしながら、砂の挙動は、③で述べた中間主応力に基づく異方性や構造的な異方性の影響を受け、応力状態によって非排水時のひずみ軟化の表れ方も大きく異なったものになる。一般応力空間でモデルを組み立てる上で、種々の応力状態における砂の非排水挙動、特に液状化による大変形の要因と考えられるひずみ軟化挙動の評価は重要である。

このため、液状化解析に用いる繰返し弾塑性構成式は、繰返し载荷に伴う破壊包絡線の低下（強度低下）が妥当に表現できると同時に、静的な種々の载荷重条件下においてもこのひずみ軟化挙動が表現できなければならない。

## 1.2 本論文の構成

本論文は、次の6つの章から構成されている。

第1章 序論

第2章 非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成式

第3章 三軸応力状態での飽和砂の不安定挙動の解析的検討

第4章 弾塑性構成式に基づく異方性砂の非排水挙動の評価

第5章 砂の繰返し弾塑性構成式の有限要素法による液状化解析への適用

第6章 総括

第1章では、本研究の目的と着目点、および繰返し弾塑性構成モデルに関する既往の研究の概観を述べている。研究の概観のなかで、第2章、第5章で提案する繰返しモデルと既往のモデルとの違いについても説明している。

第2章では、有限要素法による二次元あるいは三次元液状化解析への適用を目的として、一般応力空間での砂の非線形挙動を表現するひとつの繰返し弾塑性構成モデルを提案している。このモデルは、一般応力空間での応力反転等の履歴挙動が説明できること、負荷曲面はひずみの増加に伴って塑性状態で破壊曲面に漸近するが、両曲面は交差しないこと、土の異方性の影響により、応力主軸の回転に伴う塑性変形を記述できること等を考慮して組み立てたものであり、繰返し載荷時の砂の挙動を妥当に表現できると同時に、静的な載荷条件下の挙動を包含するものである。また、本モデルの最大の特徴は、非共軸性の評価が積極的に取り入れられていることであり、その重要性が実験結果（非排水単純せん断試験）との比較から示される。

第3章では、第2章で提案したモデルを非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験（体積ひずみ増分と軸ひずみ増分の比を一定に制御した三軸試験）で表れるひずみ軟化を伴う不安定挙動の解析に適用している。本章では、まずモデルを静的な単調載荷の解析に適用したときの構成関係を示している。次に、このモデルを用いて非排水三軸圧縮試験のシミュレーション解析を行い、ゆる詰め砂の非排水せん断強度がゼロになり静的液状化に

至る挙動、間隙比の減少に伴いひずみ軟化からひずみ硬化に至る挙動をうまく表現できることを示している。さらに、非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験でのひずみ軟化を表現する構成式の安定性について理論的考察を加えたうえで、両試験でのひずみ軟化の判定式を示している。そして、この結果を基に材料固有のダイレイタンスー特性に加えて、飽和砂要素に課せられる体積変化、すなわち、排水条件（間隙水の流出入）がひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生に重要な役割を演じていることを明らかにしている。

第4章では、一般応力空間での両極端の応力状態である三軸圧縮と伸張時の砂の非排水挙動を統一的に表現する構成式について解析的に検討している。三軸圧縮と伸張時には、中間主応力に基づく異方性、構造的な異方性の影響が含まれ、砂の非排水挙動に大きな違いがみられるため、一般応力空間でモデルを組み立てる上で両者を統一的に表現できることは重要な課題のひとつである。本章では、第2章で提案したモデルの流れ則を拡張し、これを静的な単調載荷に対して適用している。具体的には、塑性ポテンシャル曲面（流れ則）を定義する体積最大圧縮時の応力比の $\pi$ 平面での形状を任意に選定できるモデルを提案している。これによって、飽和砂の非排水三軸圧縮と伸張挙動の大きな違い（異方性）をうまく表現できることを示している。

第5章では、第2章で提案した砂の繰返し弾塑性構成モデルを、構造骨格と間隙水の二相系からなる有限要素法による液状化解析に適用している。具体的には、「土質工学会・地盤と土構造物の地震時の挙動に関する研究委員会」で取り上げられた新潟地震での川岸町地盤の液状化解析（一次元問題）および水浸盛土の遠心力載荷実験のシミュレーション解析（二次元問題）を実施し、同委員会で示された7種類のモデルによる解析結果と比較するとともに、本モデルの液状化解析への適用性について検討している。ただし、繰返し弾塑性構成モデルを有限要素法解析プログラムに導入するにあたり、第2章で提案したモデルをさらに単純化したものを使用している。

第6章では、以上の結果を要約し、結論としている。また、各章の相互の関連を示すと図1-3のようである。

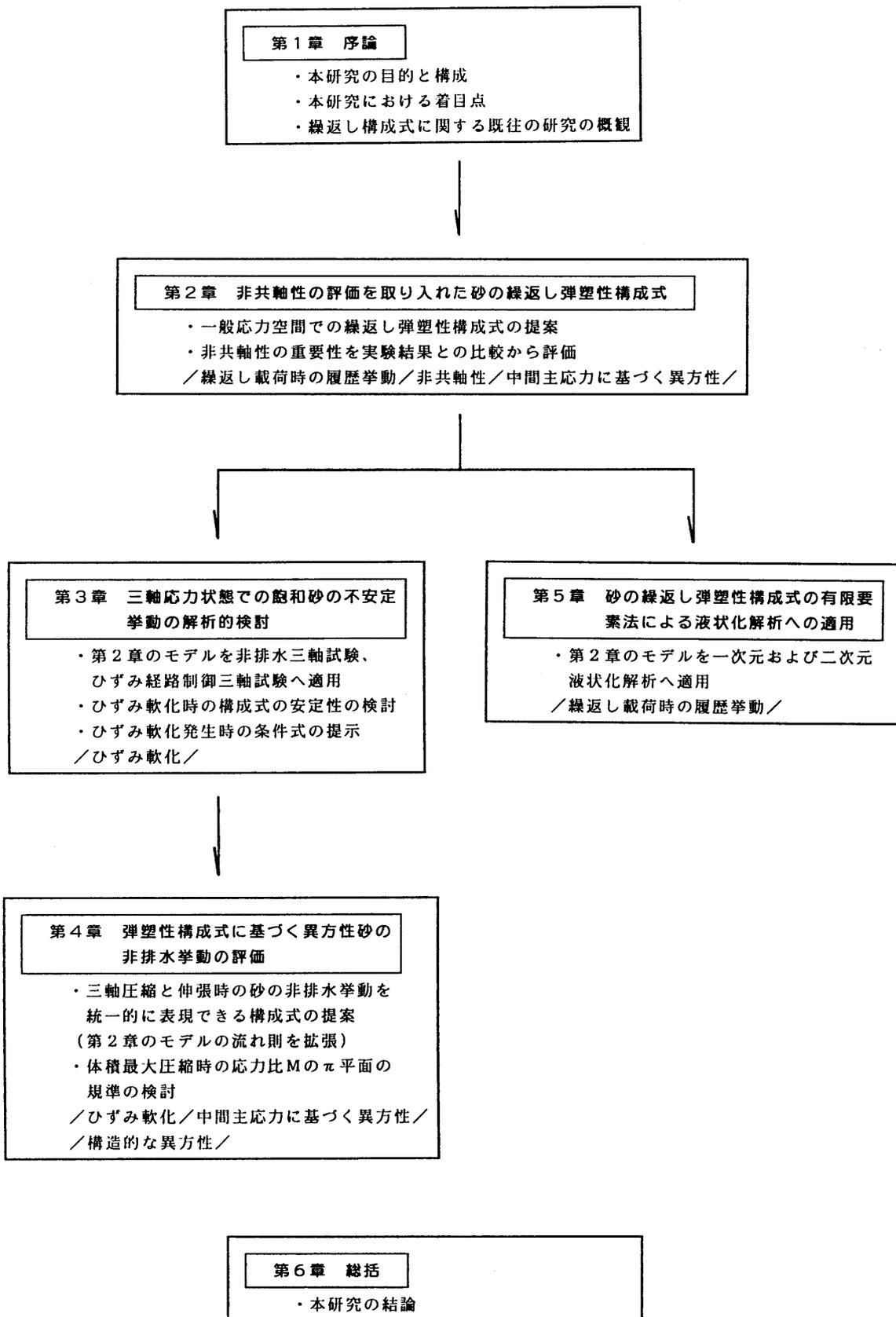


図 1 - 3 本論文の概要

## 1.3 繰返し弾塑性構成式に関する既往の研究の概観

1960～1980年代、降伏曲面の内部を弾性領域とする前提を捨て、その内部の応力変化による塑性変形の記述を目的として種々の繰返し弾塑性構成式が提案された。これらのモデルは、すべて等方硬化則と移動硬化則を組み合わせた何らかの異方硬化則を導入することで繰返し載荷時の Masing 則あるいはパウシンガー効果等の履歴挙動をうまく表現しようとしたものである。

本節では、これらの繰返しモデルのうち、その後の繰返しモデルの発展の出発点となった Mroz ら<sup>2)</sup>の多曲面モデル、多曲面モデルの煩雑さを嫌ってこのモデルを単純化した Dafaliasら<sup>3)</sup>の2曲面モデル、二曲面モデルをさらに簡潔にした単曲面モデル<sup>4)、5)</sup>、多曲面モデルを数学的に一般化した Mroz ら<sup>6)</sup>の無数曲面モデル、および橋口<sup>7)</sup>の拡張下負荷面モデルの概要について述べる。

第2章、第5章で提案する繰返し弾塑性構成モデルは、このなかの無数曲面モデルの範疇に属するものである。ここでは、Mrozらのオリジナルの無数曲面モデルと提案するモデルの違いについても述べる。

以下では、古典的な弾塑性理論における降伏曲面を橋口<sup>21)</sup>にならって正規降伏曲面と呼ぶこととする。

### 1.3.1 多曲面モデル

塑性硬化係数場理論<sup>2)</sup>に基づく本モデルは、等方硬化と移動硬化による異方硬化モデルである。塑性硬化係数場は、応力空間に一定の硬化係数 $K_P$ を有する多数の曲面の配置によって決定される。材料の弾塑性挙動は、負荷経路に伴って変化するこれらの曲面の移動、拡大(縮小)によって表現される。

図1-4は、本モデルの概念を簡単に示したものである。応力～ひずみ( $\sigma \sim \varepsilon$ )関係は、同図(a)に示すように一定の硬化係数 $K_{P(0)}$ 、 $K_{P(1)}$ 、 $K_{P(2)}$ 、 $\dots$ 、 $K_{P(n)}$ の線分で近似できると仮定する。図(a)には、 $n=4$ の場合を示しており、 $K_P$ の大きさは、 $K_{P(0)} > K_{P(1)} > K_{P(2)} > K_{P(3)} > K_{P(4)}$ の順である。この仮定は、図(b)に示すよう

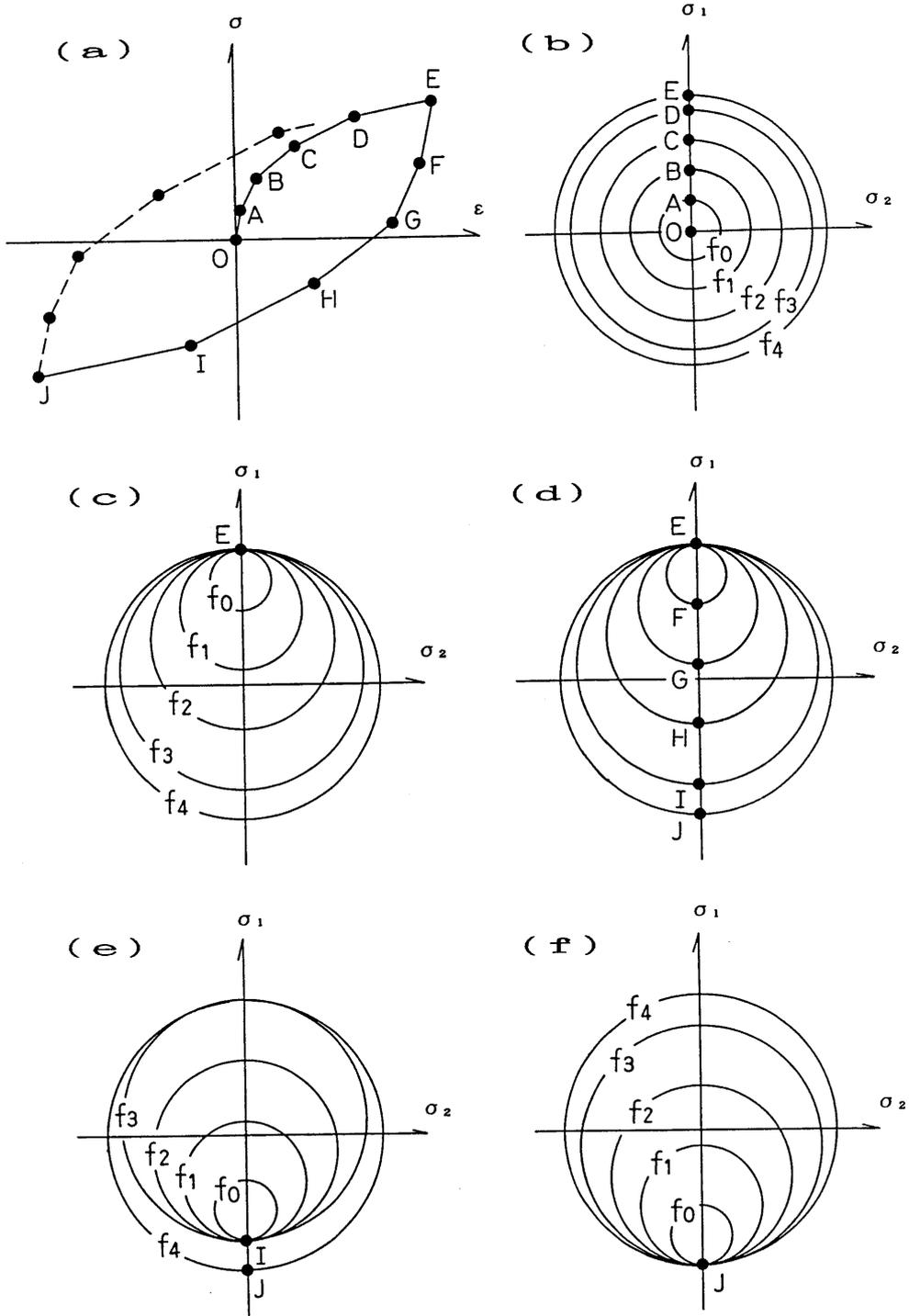


図 1 - 4 多曲面モデルの概要

に応力空間において一定の硬化係数を有する硬化曲面  $f_0$ 、 $f_1$ 、 $f_2$ 、 $f_3$ 、 $f_4$  を規定する。ここに、 $f_0$  は弾性領域を規定する硬化曲面、すなわち降伏曲面であり、この領域内では  $K_{P(0)} = \infty$  である。また、 $f_1 \sim f_4$  はそれぞれ一定の硬化曲面  $K_{P(1)} \sim K_{P(4)}$  の領域を定義する硬化曲面である。

応力点が  $\sigma_1$  軸に沿って  $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$  と動く比例負荷のとき、応力点は A 点において弾性限界を示す  $f_0$  に達する。 $f_0$  は、B 点で  $f_1$  に接するまで応力点に伴って移動するが、この間他の曲面は動かない。その後、応力点が C 点に達するまで  $f_0$  と  $f_1$  は応力点に伴って移動する。このように、硬化曲面は順次移動して、図 (c) には応力点が  $f_4$  (E 点) に達した状態を示している。この時点では、 $f_0 \sim f_4$  のすべての曲面が応力点 (E 点) で接することになる。

次に、図 (d) に E 点から逆方向への除荷過程 ( $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J$ ) を示す。E ~ F 間では、応力点は弾性限界を示す  $f_0$  内にあるため、すべての曲面は移動しない。この間の硬化係数は、O ~ A 間と同じ  $K_{P(0)} = \infty$  であり、材料は弾性体として挙動する。図 (b) と図 (d) の比較から、E ~ F 間の応力差は O ~ A 間の応力差の 2 倍になっている。応力点が F 点を過ぎると、 $f_0$  は E 点から離れ、応力点に伴って移動する。図 (e) には、応力点が I 点に達したときの  $f_0 \sim f_4$  を示しており、I 点で  $f_0 \sim f_3$  が接している。また、図 (f) は応力点が J 点に達したときの  $f_0 \sim f_4$  を示しており、すべての曲面が J 点で接することになる。このとき、 $F \rightarrow G$ 、 $G \rightarrow H$ 、 $H \rightarrow I$ 、 $I \rightarrow J$  間の応力差は、それぞれ  $A \rightarrow B$ 、 $B \rightarrow C$ 、 $C \rightarrow D$ 、 $D \rightarrow E$  間の応力差の 2 倍であり、応力-ひずみ関係は図 (a) のように表される。

図 (a) には、J 点からの再載荷時の曲線も破線で併記している。図 (d) ~ 図 (f) と同じルールに従って、再載荷時の応力-ひずみ関係が描かれる。最終的に、この曲線は E 点に戻り、Masing 則が満足される。

一方、比例負荷ではない場合、それぞれの曲面は互いに一点で接するが、決して交わることがないという仮定が必要である。いま、図 1-4 (d) の H 点まで除荷されたときの  $f_0 \sim f_4$  を図 1-5 (a) に示している。この後、応力点が  $H \rightarrow K$  に移動したときを考える。 $f_0$ 、 $f_1$ 、 $f_2$  の中心は、最終的に応力点が K 点に到達したとき、すべて  $f_3$  の中心と K 点を結ぶ直線上に位置するように移動しなければならない。理由は、 $f_0 \sim f_2$  と  $f_3$  が交わってしまうためである。このことは、 $f_0 \sim f_3$  の外向き法線方向がすべて同じであり、逆に  $f_0 \sim f_3$  の外向き法線方向が同じ点を結ぶ直線に沿って負荷曲面の中

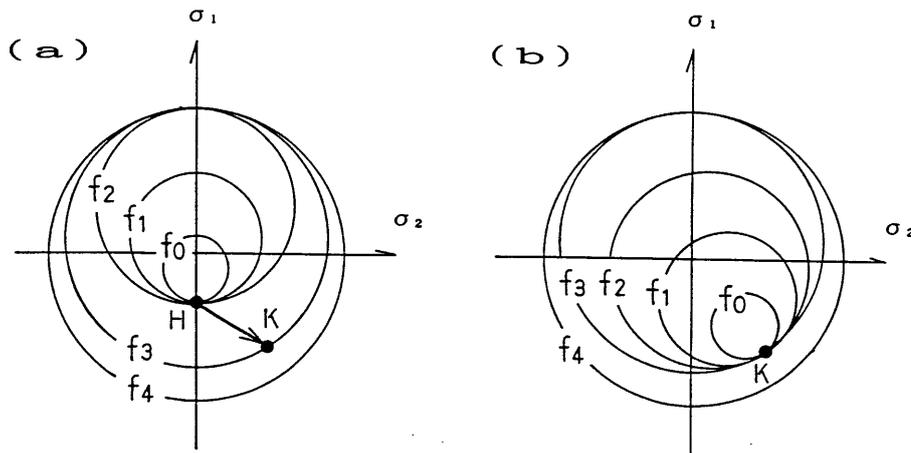


図 1 - 5 比例負荷ではない場合の多曲面モデル

心が移動することをことを意味する。

図 (b) には、応力点が K 点に到達したときの  $f_0 \sim f_4$  を示しており、応力点 (K 点) で  $f_0 \sim f_3$  が接することになる。

このモデルにおいては、仮定されるすべての硬化曲面 (通常 10~20) の配置を算定、記憶しなければならず、計算は一般に煩雑となる。

以上が多曲面モデルの概要である。これを土の繰返しモデルに適用した研究に、Mroz<sup>22)</sup>、Prevost<sup>23)</sup>の研究がある。

### 1. 3. 2 二曲面モデル

Dafalias<sup>3)</sup>は、多曲面モデルの煩雑さを嫌ってこれを単純化した二曲面モデルを提案した。このモデルは、正規降伏曲面  $F$  と負荷曲面  $f$  の二つの曲面を有しており、境界曲面モデルとも呼ばれる。 $f$  は負荷の方向を規定する負荷曲面であるのと同時に、弾性限界を定義する降伏曲面としての機能を持つ。

図 1-6 (a) は、初期の応力点が等方応力状態の O 点にあるときの  $f$  と  $F$  を示している。応力点が、 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  と移動する応力経路を考える。応力点が O A 間にあるとき、すなわち  $f$  の内側にあるときは、弾性変形のみが生じ、 $f$  は移動しない。応力点が A 点を過ぎると弾塑性変形が生じ、 $f$  は応力点の移動に伴って上方へ移動する。図 (b) は、応力点が B 点にあるときの  $f$  と  $F$  を示している。このときの硬化係数  $K_p$  は、応力点 B とそれに対応する  $F$  上の C 点 (共役点) との隔たり  $\delta$  の関数  $K_p(\delta)$  として表される。

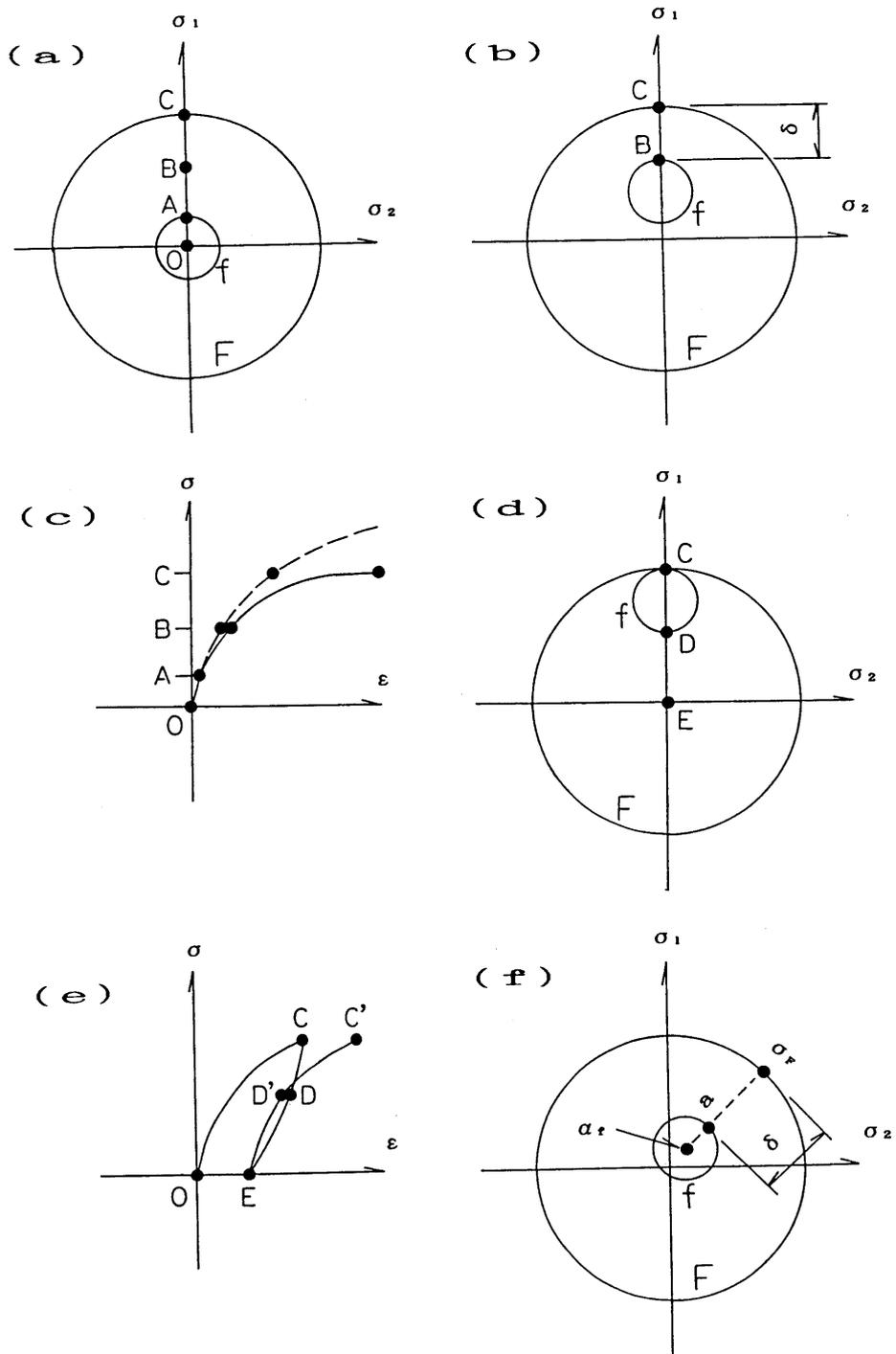


図 1 - 6 二曲面モデルの概要

すなわち、初期降伏時（図（a）のA点）で、 $K_p(\delta)=\infty$ 、F上で $K_p(0)=0$ とし、 $K_p(\delta)$ を単調に減少する $\delta$ の内挿関数とすれば、弾性域から弾塑性域への応力-ひずみ関係の滑らかな遷移を表現することができる。ここに、 $K_p(0)$ は応力点がF上にあるときの硬化係数であり、 $K_p(0)=0$ とすれば、図（c）の実線で示すようにFの拡大（硬化）の生じない応力-ひずみ関係が表現される。また、 $K_p(0) > 0$ とすれば図（c）の破線で示すようにFの硬化が生じる応力-ひずみ関係が表現される。

次に、C点から逆方向への除荷過程（ $C \rightarrow D \rightarrow E$ ）を図（d）に示す。CD間では、応力点は弾性限界を示す $f$ 内にあるため、 $f$ は移動しない。D点を過ぎると、 $f$ はFから離れ応力点の移動に伴って下方へ移動する。

図（e）は、応力点が $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow D' \rightarrow C'$ と移動したとき、すなわち再載荷時の応力-ひずみ関係を示したものである。図中には、再載荷時のD点を $D'$ 、C点を $C'$ で表している。この図から分かるように、再載荷時の $E \rightarrow D' \rightarrow C'$ は、処女載荷時の $O \rightarrow C$ と同一形状を呈し、これらの相違、つまり Masing 効果を表現できない。

図（f）は、多次元の場合の $f$ とFを表している。多次元問題においては、両曲面が決まれば、次に負荷曲面上の応力点 $a$ に対応する正規降伏曲面上の点 $\sigma_f$ （共役点）を決める必要がある。この決定法にはいくつかの考え方があるが、図（f）では $a - \alpha_f$ を結ぶ直線の延長とFとの交点を $\sigma_f$ としている。ここに、 $\alpha_f$ は負荷曲面の中心である。したがって、 $\delta$ は $a - \sigma_f$ 間の距離であり、硬化係数 $K_p$ はこの $\delta$ の内挿関数として決定される。

弾塑性変形中、両曲面はともにその大きさを変えながら（ $f$ とFの大きさは一定とするモデル化も可能である）応力空間を移動するが、両者は互いに接することはあっても交わってはならない。したがって、両曲面が接する場合、接点での両者の外向き法線方向は一致しなければならず、逆に負荷曲面の中心は両曲面の同じ外向き法線方向を有する点を結ぶ直線に沿って移動する。この点は、多曲面モデルの場合と同様である。

### 1. 3. 3 単曲面モデル

Dafaliasら<sup>4)</sup>は、二曲面モデルにおいて負荷曲面を点に縮退させることにより、さらに単純化されたモデルを提案した。このモデルは、正規降伏曲面Fのみを有するため単曲面モデルと呼ばれる。

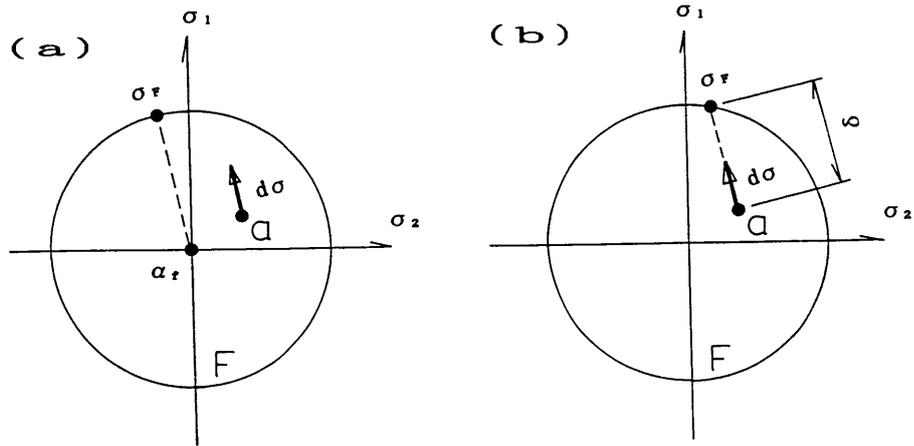


図 1 - 7 単曲面モデルの概要

このモデルにおいては、塑性ひずみ増分方向は正規降伏曲面上の共役点  $\sigma_F$  の外向き法線方向と同じであると仮定される。共役点の決定法には、2種類がある。Dafaliasら<sup>4)</sup>は、図 1 - 7 (a) に示すように正規降伏曲面の中心  $\alpha_F$  から応力増分  $d\sigma$  に平行に引く直線の延長が  $F$  と交わる点を共役点  $\sigma_F$  とした。ここに、図中の  $a$  は、現在の応力点である。

他方、Mrozら<sup>5)</sup>は図 (b) に示すように応力点  $a$  から  $d\sigma$  に平行に出る直線の延長が  $F$  と交わる点を  $\sigma_F$  とした。硬化係数  $K_F$  は、二曲面モデルと同様に  $a - \sigma_F$  間の距離  $\delta$  の内挿関数とすれば滑らかな応力-ひずみ関係を表現することができる。しかしながら、この Mroz らの方法では関数  $F$  が単純な場合を除いて、一般に  $\sigma_F$  を解析的に決定することはできず、数値計算によらなければならない。

本モデルの特徴は、応力が正規降伏曲面の内部にあるとき、応力増分と塑性ひずみ増分の相互依存性を表現できることである。すなわち、 $\sigma_F$  の位置は応力増分  $d\sigma$  によって決まるため、 $\sigma_F$  の外向き法線方向（塑性ひずみ増分方向）は  $d\sigma$  に依存することになる。なお、正規降伏曲面より大きな仮想的な塑性ポテンシャル曲面を導入すれば、応力が正規降伏曲面上にあるときでも、この相互依存性を表現できるように拡張することも可能である<sup>24)</sup>。

本モデルでは弾性領域を仮定しないので、現在の応力点から正規降伏曲面に至る常に滑らかな応力-ひずみ関係を表現することができ、負荷曲面と正規降伏曲面の非交差条件を考える必要がない。しかし、二曲面モデルと同様に処女載荷、除荷、再載荷曲線が同一形状を呈し、Masing 効果は表現されない。また、応力増分  $d\sigma$  が未知な場合、応力増分-

ひずみ増分関係をも組み合わせた非線形連立方程式を解かなければならず、解析上煩雑な問題を生ずる。このようなモデルは、増分非線形モデルと呼ばれる。増分非線形モデルの具体的な解析アルゴリズムについては、Li<sup>26)</sup> の液状化解析プログラム SUMDES に紹介されている。

### 1. 3. 4 無数曲面モデル

多曲面モデルにおいて、仮定する硬化曲面の数を無限に増やすことにより、多曲面モデルを数学的に一般化した無数曲面モデルが Mroz ら<sup>6)</sup> により提案された。

このモデルでは、点から正規降伏曲面に至る無数の硬化曲面が仮定されており、このうち、現在の応力点を通る活動硬化曲面は負荷の方向を規定する負荷曲面として用いられる。このモデルも単曲面モデルと同様に弾性領域が存在しない。また、硬化係数は負荷曲面  $f$  の大きさと正規降伏曲面  $F$  の大きさの比で表されるため、単調載荷時には常に滑らかな応力-ひずみ関係が表現される。

図1-8は、A点で応力反転が生じ、応力点が  $A \rightarrow B$  に移動したときの負荷曲面  $f$  と正規降伏曲面  $F$  を示したものである。応力反転の瞬間負荷曲面  $f$  は、応力反転直前の負荷曲面上の点 (A点) となって表れる。その後、 $A \rightarrow B$  に応力点が移動するのに伴って、同図に示すように  $f$  は応力反転直前の負荷曲面に接しながら拡大することになる。この応力反転直前の負荷曲面は、応力反転曲面  $f_s$  と呼ばれる。多曲面モデルでは仮定したすべての硬化曲面の配置を記憶しなければならないのに対し、このモデルでは負荷曲面  $f$ 、正規降

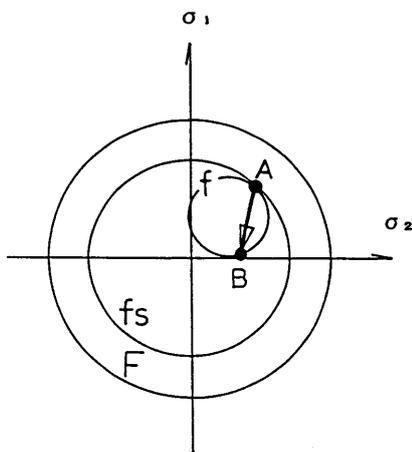


図1-8 無数曲面モデルの概要

伏曲面  $F$  および応力反転曲面  $f_s$  を記憶すれば良いという利点がある。しかし、応力振幅が低下する繰返し载荷においては、すべての応力反転曲面を記憶しなければならない、応力-変形解析は一般に複雑となる。

第2章、第5章で提案する繰返し弾塑性構成モデルは、この無数曲面モデルの範疇に入るものである。提案する繰返しモデルの詳細については、第2章で述べるが、Mrozらのオリジナルの無数曲面モデルに対して、以下の5点を拡張することで、砂地盤の液状化解析に適用可能な、より実用的な構成式になっている。

- ①：Mrozらのオリジナルのモデルが軸対称三軸応力空間で組み立てられているのに対し、本モデルは一般応力空間で組み立てられている。
- ②：一般応力空間でモデルを組み立てるにあたり、中間主応力に基づく異方性を導入している。
- ③：弾性領域を定義する硬化曲面  $f^E$  を導入することで、液状化強度曲線の勾配を調整することができ、より実用的なモデルになっている。
- ④：応力振幅が低下する繰返し载荷時の無数曲面モデルの煩雑さを解消するために、新たな応力反転曲面を導入している。
- ⑤：非共軸性（主応力方向と塑性主ひずみ増分方向が一致しない現象）の評価が積極的に取り入れられている。

### 1. 3. 5 拡張下負荷面モデル

橋口<sup>25)</sup> は、正規降伏曲面  $F$  の内部に常に応力点を通り、これと相似な負荷曲面  $f$  を仮定し、硬化係数はこの両曲面の大きさの比に依存するという考えに基づいて初期下負荷面モデルを提案した。

このモデルでは、処女载荷時には負荷曲面は大きさのない点の状態から応力が上昇するとともに拡大し、最終的に正規降伏曲面に一致する。すなわち、負荷状態においては、正規降伏曲面の大きさに対する負荷曲面の大きさの比  $R$  が増大し、逆に  $R$  が増大するとき負荷状態であると仮定する。一方、除荷時には負荷曲面は縮小し、応力が原点に戻った状態で、再び点に縮小する。この過程では、塑性変形は生じない。

図1-9に、初期下負荷面モデルを繰返し载荷に適用したときの概念を示す。図(a)において、応力点が  $O \rightarrow A \rightarrow B$  と上昇するのにともなって負荷曲面  $f$  は拡大する。同図で

は、A点およびB点での負荷曲面をそれぞれ  $f_A$ 、 $f_B$  で示している。このときの応力-ひずみ関係は、図 (b) の  $O \rightarrow A \rightarrow B$  で表される。その後、応力点が  $B \rightarrow O \rightarrow B \rightarrow O$  と移動したとき、すなわち除荷、再載荷、再び除荷のときの応力-ひずみ関係も図中に併記している。同図では、再載荷時のA、B点をA'、B'で示している。この図では、再載荷時の  $O \rightarrow A' \rightarrow B'$  は処女載荷時の  $O \rightarrow A \rightarrow B$  と同一形状を呈し、Masing 効果を表現できない。また、繰返しにともなって過大な残留ひずみが蓄積されることになる。

繰返し載荷に対する初期下負荷面モデルの上述の問題点を解消するために、橋口<sup>11)</sup> は相似中心といわれる概念を導入した拡張下負荷面モデルを提案した。

図 (c)、(d) は、この拡張下負荷面モデルの概要を示したものである。図 (a) において、応力点が  $O \rightarrow A \rightarrow B$  と上昇するときを考える。初期状態の負荷曲面  $f$  は応力空間の原点における点 (O点) であるが、応力が上昇するにつれて、 $f$  は移動、拡大する。この  $f$  の移動、拡大にともなって塑性変形が生じ、相似中心は応力に追隨して上昇する。図

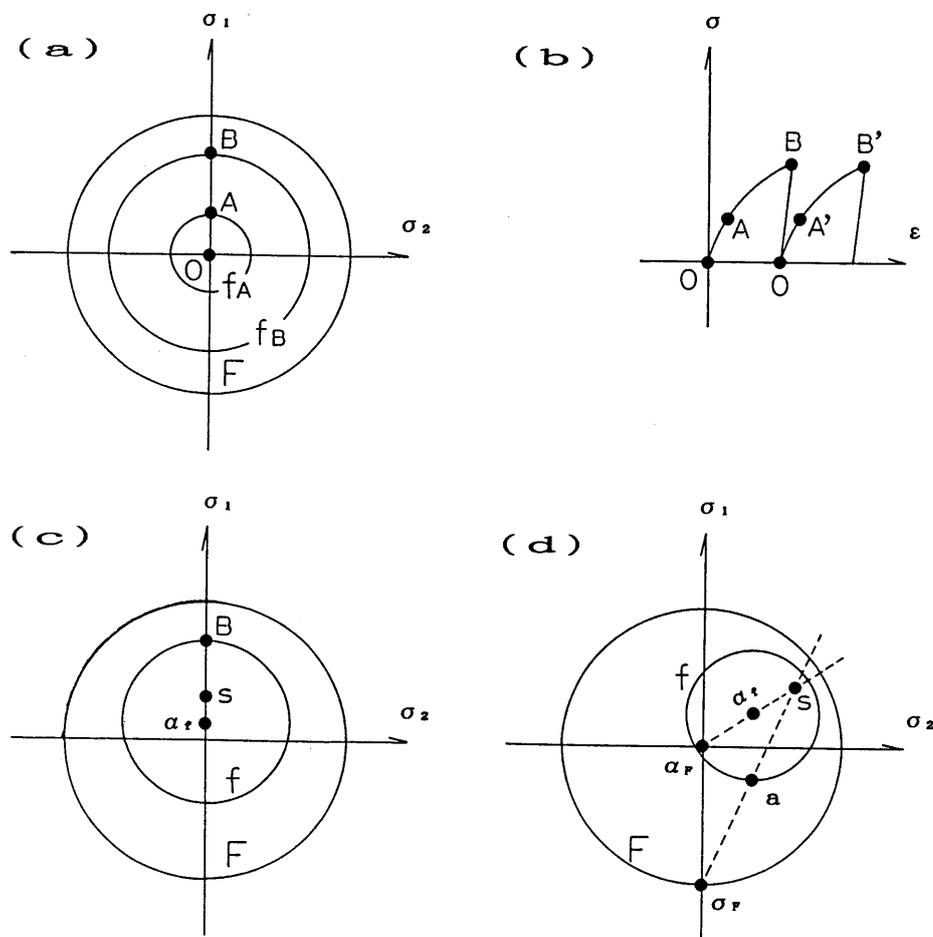


図 1 - 9 初期下負荷面モデルおよび拡張下負荷面モデルの概要

(c) は、応力点が B 点に到達したときの  $f$  を示しており、図中の  $s$  は相似中心、 $\alpha_f$  は負荷曲面の中心である。

一方、 $B \rightarrow A \rightarrow 0$  の除荷時においては、 $f$  は相似中心  $s$  に至るまで収縮し、 $s$  点において再び点に縮退する。この間、塑性変形は生じず、 $s$  は移動しない。しかし、応力が  $s$  点を通過すると、 $f$  は再び膨張して塑性変形が生じ、相似中心は移動する。つまり、応力が原点 (0 点) に戻る前に塑性変形が生じるため、Masing 効果がある程度表現されることになる。

相似中心  $s$  は、最も弾性的な応力との物理的な解釈が与えられている<sup>24)</sup> が、幾何学的な意味は図 (d) のようになると考えられる。同図では、 $s$  は正規降伏曲面  $F$  の中心  $\alpha_F$  と負荷曲面  $f$  の中心  $\alpha_f$  を結ぶ直線と現在の応力点  $a$  と  $F$  上の共役点  $\sigma_F$  を結ぶ直線の交点に位置し、 $a$  点と  $\sigma_F$  点での法線方向が同一であることを意味する。

前述の無数曲面モデルの相似中心は、処女載荷時には応力空間の原点であり、応力反転後は応力反転が生じた点である。

## 1.4 本論文で用いる応力、ひずみの定義

本論文で用いる基本的な応力とひずみの定義をまとめて示すと以下のようになる。まず、第2章、第4章、第5章は、一般応力空間を対象にしている。したがって、主要な応力パラメーターとして、

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad \sqrt{2 J_2} = \sqrt{s_{ij} s_{ij}} \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right\} \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad \dots\dots\dots (1.3)$$

を用いる。ここで、 $\sigma_{ij}$ は応力テンソル、 $p$ は平均主応力、 $s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$ は偏差応力テンソル、 $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ、 $J_2$ は偏差応力の第2次の不変量、 $J_3$ は第3次の不変量であり、本論文では特に断りのない限り、応力はすべて有効応力を意味する。また、 $\theta$ は正八面体上における応力状態を表すパラメーターであり、ローデ角と呼ばれる。

これらの不変量を用いれば、各主応力は次式で表現することができる。

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{4 J_2}{3}} \sin \left\{ \theta - \frac{2}{3} (i - 2) \right\} \quad \dots\dots\dots (1.4)$$

( $i = 1, 2, 3$ )

この各主応力の絶対値の大小関係を  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  とすれば、 $\theta$ は次式の範囲で決定することができる。

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots\dots (1.5)$$

$\theta$ と中間主応力係数  $b$  値との関係は、次式のとおりである。

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{3} \tan(-\theta) + 1 \right\} \quad \dots\dots\dots (1.6)$$

そして、式(1.1)の応力パラメーターに対応するひずみパラメーターとして、

$$v = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} \quad \varepsilon_s = \sqrt{e_{ij} e_{ij}} \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

を用いる。ここに、 $\varepsilon_{ij}$ はひずみテンソル、 $v$ は体積ひずみ、 $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3) v \delta_{ij}$

は偏差ひずみテンソルであり、応力とひずみの符号は、圧縮を負とする。また、テンソルは指標表示し、総和規約を用いる。

第3章は、三軸応力空間において主応力方向が回転しない場合を対象にしている。したがって、軸対称応力状態を考えているので、以下の2つの応力パラメーターで規定する。

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_a + 2\sigma_r) \quad q = \sigma_a - \sigma_r \quad \dots\dots\dots (1.8)$$

ここに、 $\sigma_a$ 、 $\sigma_r$  は、三軸供試体の軸応力および側方応力、 $q$  は軸差応力である。これらの応力パラメーターに対応するひずみパラメーターとして、

$$v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r \quad e = \frac{2}{3} (\varepsilon_a - \varepsilon_r) \quad \dots\dots\dots (1.9)$$

が定義される。ここで、 $\varepsilon_a$ 、 $\varepsilon_r$  は、軸ひずみおよび側方ひずみ、 $e$  は軸差ひずみである。

式(1.1) と式(1.8) および式(1.7) と式(1.9) より、次の関係が得られる。

$$q = \sqrt{3 J_2} \quad e = \sqrt{(2/3)} \varepsilon_s \quad \dots\dots\dots (1.10)$$

## 参考文献 (第1章)

- 1) Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Thurairajah, A. : Yielding of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, Vol.13, No.3, pp.211-240, 1963.
- 2) Mroz, Z. : On the description of anisotropic workhardening, *J.Mech.Phys. Solids*, 15, PP.163-175, 1967.
- 3) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. : Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity, *J.Appl.Mech. (ASME)*, 43, PP.645-651, 1976.
- 4) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. : Cyclic loading for materials with a vanishing elastic domain, *Nucl.Eng.Design*, 41, PP.293-302, 1977.
- 5) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C. : Application of anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils, *Geotechnique*, Vol.29, PP.1-34, 1979.
- 6) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C. : An anisotropic critical state model for soils subject to cyclic loading, *Geotechnique*, Vol.31, PP.451-469, 1981.
- 7) Hashiguchi, K. : Anisotropic hardening model for granular media, *Int.Symp. Soils under Cyclic Trans.Loading*, pp.469-474, 1980.
- 8) 岡 二三生 : 地盤の破壊とひずみの局所化 第1章 総論、(社)土質工学会、pp.3-12, 1994.
- 9) Rundnicki, J.W. and Rice, J.R. : Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J.Mech.Phys.Solids*, 23, pp.371-394, 1975.
- 10) Dafalias, Y.F. : Bounding surface plasticity. I : Mathematical foundation and hypoplasticity, *J.Eng.Mech. ASCE*, 112, pp.966-987, 1986.
- 11) Hashiguchi, K. : Subloading surface model with tangential plasticity, *2nd Int. Symp. Plasticity*, pp.451-454, 1989.

- 12) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I. : General theory of shear bands formation by a noncoaxial Cam-clay model, Soils and Foundations, Vol. 29, No. 3, pp. 41-53, 1989.
- 13) 飯塚 敦、矢富盟祥、八嶋 厚、佐野郁雄、太田秀樹：せん断帯（すべり線）の生成機構と応力誘導異方性、第34回土質工学シンポジウム、pp. 41-53, 1989.
- 14) Gutierrez, M. : Behaviour of sand during rotation of principal stress directions、東京大学学位論文、1989.
- 15) Ashok, P.T. : Sand behaviour during unload-reload cycles including principal stress rotation、東京大学学位論文、1990.
- 16) Sekiguchi, H. and Ohta, H. : Induced anisotropy and time dependency in clays、Proc. Specialty Session 9, 9th ICSMFE, Tokyo, pp. 229-239, 1977.
- 17) Wang, Z.L., Dafalias, Y.F. and Chen, C.K. : Bounding surface hypoplasticity model for sand, J. Eng. Mech. (ASCE), Vol. 116, No. 5, 1990.
- 18) 森尾 敏、日下部伸、安福規之、兵動正幸：非共軸繰返し弾塑性構成モデルの提案、第27回土質工学研究発表会、pp. 819-822, 1992.
- 19) 浜田政則、安田 進、磯山龍二、恵本克利：液状化による地盤の永久変位の測定と考察、土木学会論文集、No. 376/Ⅲ-6, pp. 211-220, 1986.
- 20) 浜田政則、安田 進、磯山龍二、恵本克利：液状化による地盤の永久変位と地震被害に関する研究、土木学会論文集、No. 376/Ⅲ-6, pp. 221-229, 1986.
- 21) 橋口公一：粒状体の力学 3.15 繰返し塑性モデル、(社)土質工学会、pp. 207-219, 1993.
- 22) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C. : An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 2, pp. 203-221, 1978.
- 23) Prevost, J.H. : Mathematical modeling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 1, pp. 195-216, 1977.
- 24) 橋口公一：最新弾塑性学、朝倉書店、1990.
- 25) Hashiguchi, K. and Ueno, M. : Elastoplastic constitutive laws of granular materials, Constitutive Equations of Soils, 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Ses. 9, JSSMFE, pp. 73-82, 1977.

- 26) Li, X.S. : Free field soil response under multidirectional loading, Doctor of philosophy, University of California at Davis, pp.213-218, 1990.
- 27) 松井 保、阿部信晴 : 土の構成式入門 5. 弾塑性体理論と適用 (その2)、土と基礎、Vol.31、No.11、pp.73-79、1983.

## 第2章 非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成式

### 2.1 概説

1960～1980年代、降伏曲面の内部を弾性領域とする前提を捨て、その内部の応力変化による塑性変形の記述を目的として種々の繰返し弾塑性構成モデルが提案された。これらのモデルは、すべて何らかの異方硬化則を導入することで繰返し載荷時の Masing 則あるいはバウシinger効果等の履歴挙動をうまく表現しようとしたものである。このうち、Mrozの塑性硬化係数場モデル<sup>1)</sup>はその後の繰返しモデルの発展の出発点となったモデルで、降伏曲面の内部に一定の硬化係数を有する多数の曲面を配置していることから、多曲面モデルとも呼ばれている。その後、多曲面モデルの煩雑さを嫌ってこのモデルを単純化した二曲面モデル<sup>2)</sup>、二曲面モデルをさらに簡潔にした単曲面モデル<sup>3)、4)</sup>、また多曲面モデルを数学的に一般化した無数曲面モデル<sup>5)</sup>が提案された。また、橋口<sup>6)</sup>は相似中心と呼ばれる概念を導入することで、常に滑らかな応力-ひずみ関係を表現すると共にメイシング効果を制御できる拡張下負荷面モデルを提案している。

しかし、これらのモデルは液状化解析への適用を想定すると、理論的枠組みとしての色彩が強い。さらに、その大部分は材料定数の数が非常に多く、対象材料への適用においては、その意味付け、決定法を確立すると共に圧密履歴、ダイレイタンス特性等の土固有の特性に対する検討が必要であろう。

一方、近年土質工学会では二つの研究委員会<sup>7)、8)</sup>で要素試験、1次元地盤、土構造物、地盤-構造物連成系の問題に対して一斉解析を行い、構成モデルの液状化解析への適用性を調べており、境界値問題としての現実の問題への適用も活発に行われるようになってきた。しかしながら、液状化挙動を解析で求めようとするともだまだ十分でないことも多く、満足できる構成モデルは存在しないといえる。

本章では、一般応力空間での砂の非線形挙動を表現するひとつの繰返し弾塑性構成モデルを提案する。このモデルは、繰返し載荷時の砂の挙動を妥当に説明できると同時に、静

的な荷条件下の挙動を包含するものである。また、本モデルの最大の特徴は、非共軸性（主応力方向と塑性主ひずみ増分方向が一致しない現象）の評価が積極的に取り入れられていることであり、その重要性が実験結果との比較から示される。

## 2.2 繰返し弾塑性構成式

### 2.2.1 モデルの特徴

繰返し弾塑性構成モデルを二次元あるいは三次元の液状化解析に適用する時、次の項目を解決しておかなければならないと考える。

- ①：一般応力空間での応力の反転が考慮できること。すなわち、不変量で記述された構成モデルでは、応力の符号も含めて完全に反転する両振り載荷と応力の符号は反転することのない片振り載荷の区別ができないが、両者が明確に区別できること。
- ②：負荷曲面は、ひずみの増加に伴って塑性状態で正規降伏曲面に漸近するが、交差してはならない。
- ③：土の異方性の影響により、主応力軸の回転に伴う塑性変形を記述できること。

本章では、これらの点を考慮して既に提案している繰返し構成モデル<sup>9)、10)</sup>を拡張し、飽和砂の液状化解析を想定した新たな繰返しモデルを提案する。モデルの特徴は次のとおりで、このうち③～⑥は本モデルの独自性を示すものである。

- ①：本モデルは、塑性硬化係数場理論<sup>1)</sup>に基づく無数曲面モデルの範疇に属し、応力比一定タイプの正規降伏曲面とその内部に定義される無数の硬化曲面によって構成される。硬化曲面は、応力空間において一定の硬化係数を有する応力点を結んだ曲面である。このうち、現在の応力点を通る活動硬化曲面は負荷の方向を規定する負荷曲面として用いられ、その移動、拡大および縮小によって古典弾塑性論で弾性域として取り扱われてきた領域での弾塑性挙動を記述する。
- ②：本モデルで、陽に用いられる曲面は、正規降伏曲面、負荷曲面、最新の応力反転曲面、過去の最大の応力反転曲面および弾性域を定義する硬化曲面の5つで、5曲面モデルと呼ぶこともできる\*。

\* 無数曲面モデルでは、応力点の移動に伴って活動硬化曲面（負荷曲面）は別の硬化曲面に飛び移り、この曲面が新たな負荷曲面になると考えられている。しかし、設定された硬化係数の下で適応条件は暗に満足されると考えれば、応力

点の移動に伴って同一の負荷 曲面が移動、拡大したとみることができる。この意味から、本モデルは5曲面モデルと呼ぶこともできる。

- ③：正規降伏曲面および負荷曲面に、中間主応力の影響を考慮した松岡・中井<sup>11)</sup>の破壊規準によって表現される異方性を組み入れる。このとき、一般応力空間では応力点の移動に伴って対応する正規降伏曲面の半径が変化するため、この変化を考慮した硬化則の設定が必要である。ここでは、偏差応力比を正規降伏曲面の半径で基準化した応力比でモデルを組み立てることでこの問題を解決している。
- ④：モデルは非関連流れ則に基づいており、塑性偏差ひずみ増分の方向は、③負荷曲面の偏差応力空間での外向き法線方向単位テンソル、④応力反転の影響を表す単位テンソル、および⑤過去の応力履歴の影響を表す単位テンソルの線形和によって決定されると仮定する。④、⑤の導入により、増分線形モデルの範疇で繰返し載荷時の非共軸性をうまく表現することができる。
- ⑥：④で決定された偏差ひずみに関する流れ則に基づいて、一般応力空間で非共軸性の程度を表すスカラー変数  $c$  が定義される。この  $c$  をストレス・ダイレイタンスー関係に導入すること、すなわち、非共軸性の評価を取り入れることで応力反転後のダイレイタンスー特性をうまく表現することができる。
- ⑦：過去の最大の応力反転曲面による応力誘導異方性を表す新たな応力反転曲面を導入する。これによって、無数曲面モデルの問題点である応力振幅が低下する載荷に対する応答についてもうまく表現することができる。
- ⑧：モデルの材料定数は、弾性定数も含めて7個と比較的少なく、その意味も明らかである。

## 2. 2. 2 モデルの概要

図2-1は、モデルの構成を簡単のため2次元平面で概念的に示したもので、ここに、 $\sigma_a$  は軸応力、 $\sigma_r$  は側方応力、 $\tau$  はせん断応力、 $p$  は平均主応力である。モデルは、軸差応力比  $((\sigma_a - \sigma_r) / (\sqrt{3} p))$  およびせん断応力比  $(\tau / p)$  を正規降伏曲面  $F$  の半径  $A$  で基準化した空間で組み立てられており、この空間では、 $F$  は半径1の円である。以下、この空間を基準化空間、この空間での応力比を基準化応力比と呼ぶ。

モデルを基準化空間で組み立てることで、負荷状態を正規降伏曲面  $F$  の大きさに対する

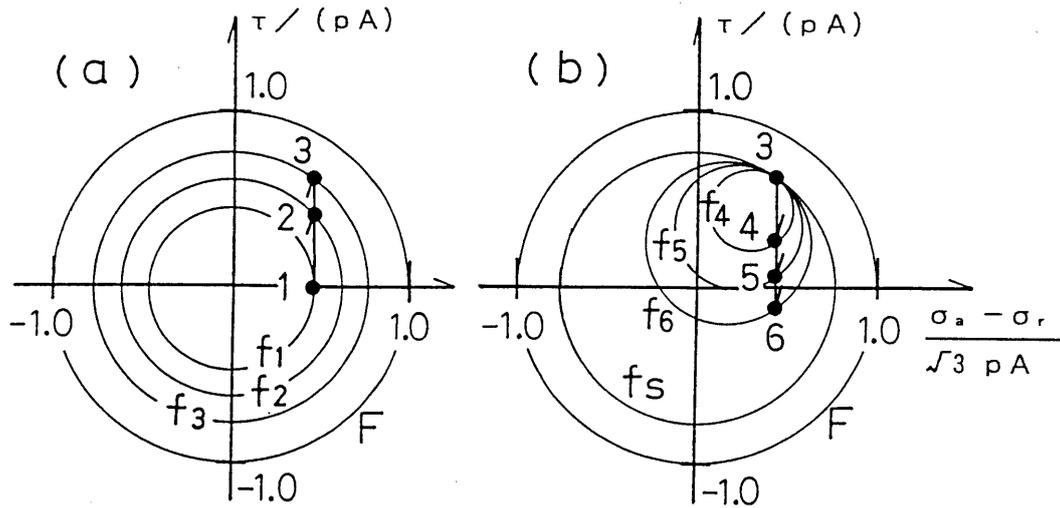


図 2 - 1 本モデルの概要

負荷曲面  $f$  の大きさの比  $R$  で定義することができ、 $F$  の半径  $A$  が変化する一般応力空間での異方硬化則を幾何学的に容易に設定することができる。

同図 (a) は、異方圧密状態 ( $\sigma_a > \sigma_r$ 、 $\tau = 0$ ) の点 1 からのせん断過程 (1 → 3) での負荷曲面  $f$  と正規降伏曲面  $F$  を示す。正規圧密砂の初期状態の  $f$  は、原点を中心とする  $f_1$  で表される。 $\tau$  の増加に伴って  $f$  は次第に拡大し、点 3 で  $f_3$  に達する。同図 (b) は、点 3 からの逆方向のせん断過程 (3 → 6) を示す。応力反転の瞬間に負荷曲面は、 $f_3$  上の点となって現れる。この応力反転が生じる直前の負荷曲面 ( $f_3$ ) を応力反転曲面  $f_s$  と呼ぶ。以後、逆方向のせん断の進行に伴って  $f$  は点 3 に接しながら次第に拡大し、点 6 で  $f_6$  に達する。このことは、1 → 3 のせん断過程において負荷曲面が内側の硬化曲面を引き連れて拡大したことを表し、過去の最大の  $R$  を越えて  $f$  が拡大する時 (処女載荷時) は、 $f$  の中心は常に基準化空間の原点にある。

### 2. 2. 3 正規降伏曲面 $F$ 、負荷曲面 $f$ 、応力反転曲面 $f_s$ および弾性領域を定義する硬化曲面 $f^E$

正規降伏曲面  $F$  は、2 階の応力テンソル  $\sigma_{ij}$  を用いて式 (2.1) で表され、前述のように基準化空間で半径 1 の円である。ここでは、 $F$  の硬化は考慮されておらず、 $F$  は破壊曲面としての意味を持つ。

$$F = R_{ij} R_{ij} - 1^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

ここに、基準化応力比  $R_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{A}$ 、偏差応力比  $\eta_{ij} = \frac{S_{ij}}{P}$ 、平均主応力  $P = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ 、偏差  
 応力  $S_{ij} = \sigma_{ij} - P \delta_{ij}$ 、 $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである。一般応力空間でのFの半  
 径Aは、次式で表される。

$$A = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} G(\theta) \dots\dots\dots (2.2)$$

ここで、 $\theta$ は $\pi$ 平面上における応力状態を表すパラメーターで、ローデ角と呼ばれる。 $\theta$   
 は次式で表される。

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \dots\dots\dots (2.3)$$

ただし、偏差応力の2次不変量  $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ 、3次不変量  $J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}$ であ  
 る。

式(2.2)で用いられる $G(\theta)$ は、中間主応力による強度異方性を考慮し、かつ数学的に  
 取り扱いやすいテンソル不変量表示したもので、色々な式が提案されている。ここでは、  
 SMPの概念に基づく松岡・中井規準<sup>11)</sup>をローデ角 $\theta$ の関数として表示した次式<sup>12)</sup>を用  
 いる。本モデルは、この $G(\theta)$ を変えるだけで種々の強度異方性を表現できるという特徴  
 を有しているが、これについては、2.5で後述する。

$$G(\theta) = \frac{1}{2 \left( -\frac{v}{3} \right)^{1/2} \cos \left( \frac{u}{3} \right)} \dots\dots\dots (2.4a)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{3-k}{3(k-9)}, \quad k = 9 + 8 \tan^2 \phi_c, \quad \cos u = \frac{-s}{2 \left( -\frac{v}{3} \right)^{3/2}}, \\ s &= \frac{2k \sin(3\theta)}{27(k-9)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.4b)$$

であり、 $\phi_c$ は三軸圧縮状態( $\theta = \pi/6$ )での破壊時の内部摩擦角である。すなわち、正  
 規降伏曲面Fの $\pi$ 平面での形はモールクーロン規準の角を滑らかに結んだもので、軸対称  
 応力状態( $\theta = \pm \pi/6$ )でモールクーロン規準と一致する。

負荷曲面fは常に現在の応力点を通るように決定され、次式で表される。

$$f = (R_{ij} - \alpha_{ij})(R_{ij} - \alpha_{ij}) - R^2 = 0 \dots\dots\dots (2.5)$$

ここに、 $\alpha_{ij}$ は基準化空間での  $f$  の中心座標である。また、 $R$  ( $0 \leq R < 1$ ) は基準化空間での  $f$  の半径で、次式で表される一般応力空間での  $f$  の半径  $a$  と  $F$  の半径  $A$  の比である。

$$a = a_0 G(\bar{\theta}) \dots\dots\dots (2.6)$$

上式の  $G(\bar{\theta})$  は式 (2.4) の  $\theta$  を次式の  $\bar{\theta}$  に置き換えたもので、 $a_0$  は後述の式 (2.26)、式 (2.27) の硬化則から決定される。

$$\bar{\theta} = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{J}_3}{\bar{J}_2^{3/2}} \right) \dots\dots\dots (2.7)$$

ただし、 $\bar{J}_2 = (1/2) \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij}$ 、 $\bar{J}_3 = (1/3) \bar{s}_{ij} \bar{s}_{jk} \bar{s}_{ki}$ 、 $\bar{s}_{ij} = s_{ij} - p A \alpha_{ij}$  である。

応力反転曲面  $f_s$  は応力反転が生じる直前の負荷曲面で、 $f$  と同様に式 (2.5) で表される。この曲面は、応力点が曲面の外に出てくるまではその大きさ、位置を変えず、外に出てきたとき  $f_s$  に関する過去の情報は消失する。このうち、最新の応力反転曲面を  $f_s^N$ 、過去の最大の応力反転曲面を  $f_s^M$  と呼び、 $f_s^N$  の半径を  $R_s^N$ 、 $f_s^M$  の半径を  $R_s^M$  で表す。 $f_s^M$  は、基準化空間における過去の最大の負荷曲面を意味する。

弾性領域を定義する半径  $R^E$  の硬化曲面  $f^E$  は、2.4.2 で後述するように液状化強度曲線の下限值（液状化に至る繰返し回数  $N_1 = \infty$  の時の応力比）を制御し、強度曲線の勾配を調整することができる<sup>10)</sup>。  $R^E$  は一定で、材料定数として与えられる。この曲面は、 $R > R^E$  の時  $f$  上の応力点に接しながら移動し、この時弾塑性変形が生じる。応力点が  $f^E$  の内部にある時は、その位置も不変で、弾性変形のみが生じる。本曲面は、弾性領域と弾塑性領域の境界を定義するという意味から、古典弾塑性論における降伏曲面とみなすことができ、 $R^E = 0$  の時降伏曲面は存在しないことになる。また、 $R^E = 1$  の時正規降伏曲面内全域が弾性域となり、古典弾塑性論に帰着する。図 2-1 は  $R^E = 0$  の時の説明図であるが、 $R^E \neq 0$  の時、点 3 及び点 6 の時点での  $f^E$  を示すと図 2-2 のようになる。

## 2.2.4 流れ則

本モデルでは、2種類の流れ則が用いられる。1つは、偏差応力空間での流れ則、もう1つは、 $p - \sqrt{2J_2}$  平面での流れ則である。前者は2.3で後述する実験結果に基づき

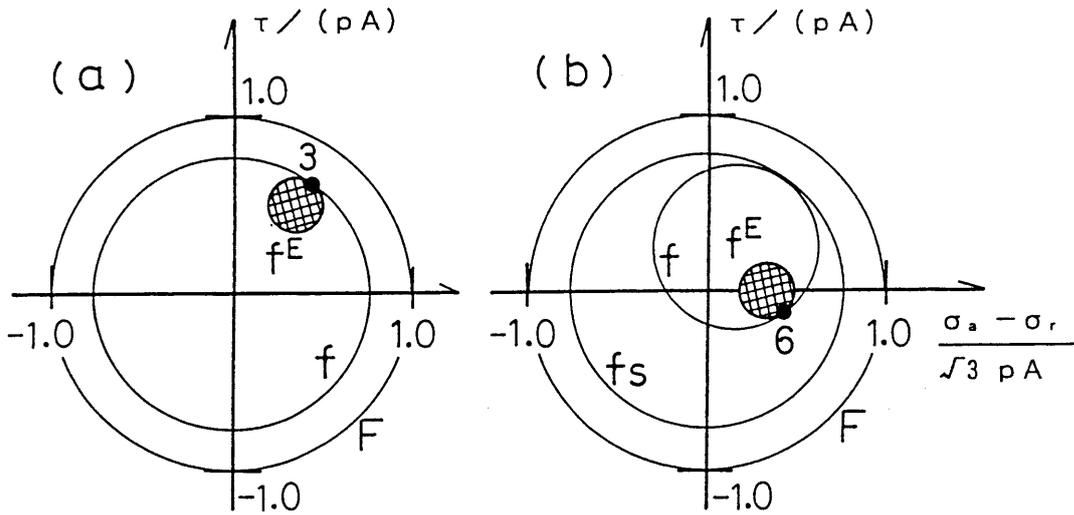


図 2 - 2 弾性領域を定義する硬化曲面  $f^E$

設定されるもので、塑性偏差ひずみ増分  $de^{P_{ij}}$  の方向を定義する。後者は、塑性体積ひずみ増分  $dv^P$  と  $|de^{P_{ij}}|$  の比、すなわち、ストレス-ダイレイタンス-関係を定義する。ここに、 $de^{P_{ij}} = d\varepsilon^{P_{ij}} - (1/3)dv^P \delta_{ij}$ 、 $dv^P = d\varepsilon^{P_{kk}}$ 、 $d\varepsilon^{P_{ij}}$  は塑性ひずみ増分で、 $||$  はテンソルのノルムを表す。

(a) 偏差応力空間での流れ則

まず、塑性偏差ひずみ増分  $de^{P_{ij}}$  に関する流れ則を示す。 $de^{P_{ij}}$  の方向を示す単位テンソル  $G_{ij} (= de^{P_{ij}} / |de^{P_{ij}}|)$  として、次式を用いる。

$$G_{ij} = Q_{ij} / |Q_{ij}| \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

上式の  $Q_{ij}$  として新たに次式を導入する。

$$Q_{ij} = (1 - d) Q^N_{ij} + d \{ Q^L_{ij} + \chi (1 - R_s^M) Q^H_{ij} \} \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

ここで、 $d (0 \leq d \leq 1) = R / R_s^M$ 、 $\chi$  は応力履歴に依存する非共軸性の程度を表す材料定数である。 $Q^L_{ij}$  は負荷曲面  $f$  の偏差応力空間での外向き法線方向単位テンソルで、次式で表される。

$$Q^L_{ij} = - (R_{ij} - \alpha_{ij}) / |R_{ij} - \alpha_{ij}| \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

$Q^N_{ij}$  は現在の応力点から過去の最大の応力反転曲面  $f_s^M$  の中心 (基準化空間の原点) に向かう単位テンソルで、応力反転の影響を表し、次式で示される。

$$Q^N_{ij} = R_{ij} / |R_{ij}| \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

なお、 $R > R_s^M$  の処女載荷時においては、 $d = 1$  であることに留意する必要がある。 $Q^H_{ij}$  は直前の応力経路の方向を示す単位テンソルで、過去の応力履歴の影響を表し、次

式で示される。

$$Q^{H_{ij}} = -(R_{ij} - R^{I_{ij}}) / |R_{ij} - R^{I_{ij}}| \dots\dots\dots (2.12)$$

ここに、 $R^{I_{ij}}$  は前ステップでの基準化応力比である。この応力履歴の影響を表す  $Q^{H_{ij}}$  は、塑性ひずみ増分方向の応力増分方向依存性<sup>1)、4)、5)、10)、13)</sup>を考慮することによって評価される非共軸性に比べ、より強い非共軸性を与えることができる。また、応力増分方向依存性を考慮した増分非線形のモデルは、

- ①：一般に、塑性ひずみ増分方向を定義するのに、応力増分  $d\sigma_{ij}$  と  $F$  の交点（共役点）を求める必要があるが、式 (2.4) のようにローデ角  $\theta$  の関数として異方性を導入したモデルでは、共役点を解析的に決定できない。
- ②：構成関係が増分非線形であるために、2. 2. 8 で後述する弾塑性係数テンソル  $D^{EP_{ijkl}}$  を求めるのに収束計算が必要である。

等の問題点を有する。一方、ここで示すモデルは増分線形であるため、これらの問題が解消され、FEM 解析において計算時間を大幅に低減することができる。

図 2-3 は、上述した  $Q^{L_{ij}}$ 、 $Q^{N_{ij}}$ 、 $Q^{H_{ij}}$  を偏差応力空間で模式的に示したものである。④点で応力反転が生じ④→⑤→③と応力点が移動した時、⑤、③点でのそれぞれの単位テンソルを示している。⑤点では  $0 < d < 1$  で、 $Q_{ij}$  は式 (2.10)、(2.11)、(2.12) の 3

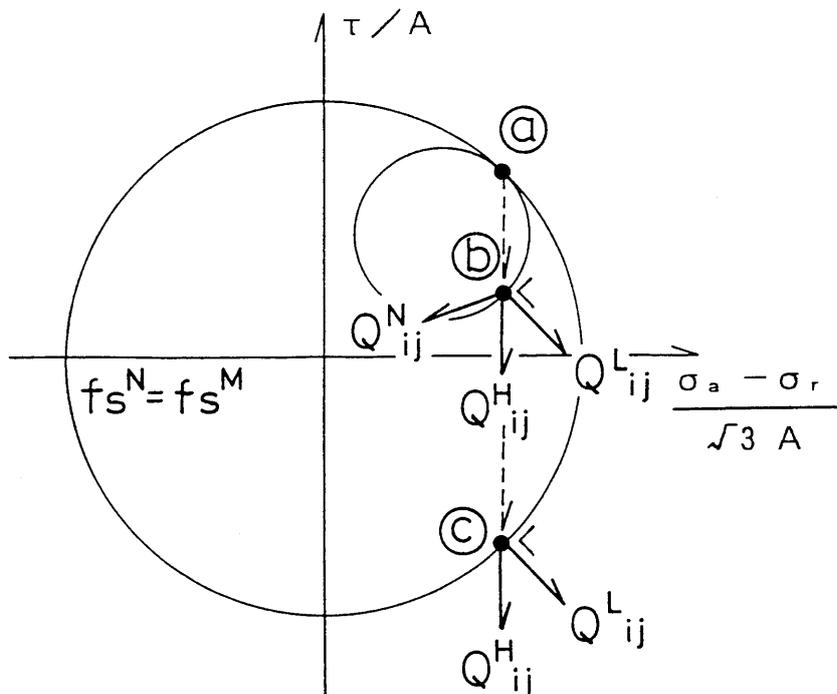


図 2-3 偏差応力空間での流れ則

つの単位テンソルの線形和で表され、 $R$ が小さいほど $Q^{N_{ij}}$ の効果（応力反転の影響）が大きくなる。◎点を越えると $d = 1$ のため、 $Q^{N_{ij}}$ の効果は消失し、 $Q_{ij}$ は $Q^{L_{ij}}$ と $Q^{H_{ij}}$ で記述される。そして、 $R = 1$ 、すなわち、 $f = F$ に接近するにつれて $Q^{H_{ij}}$ の効果は減少し、 $R = 1$ では $Q_{ij}$ は $Q^{L_{ij}}$ のみで記述され、主応力方向と塑性主ひずみ増分方向が一致する共軸性を表すことができる。

材料定数 $\chi$ は、処女載荷時（ $d = 1$ ）に応力履歴に依存する非共軸性の程度を表す。 $\chi = 0$ の時は、 $G_{ij} = Q^{L_{ij}}$ で常に共軸である。 $\chi$ を大きくするほど応力履歴に依存する非共軸性の程度を大きく表現することができ、前ステップの $d\sigma_{ij}$ の方向によってその程度は変化する。

(b)  $p - \sqrt{2J_2}$ 平面での流れ則

次に、上で定義された $G_{ij}$ に $p - \sqrt{2J_2}$ 平面での流れ則、すなわちストレス-ダイレイタンシー関係を重ね合わせて、塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^P_{ij}$ の方向を規定する単位テンソル $g_{ij} (= d\varepsilon^P_{ij} / |d\varepsilon^P_{ij}|)$ を定義する。 $g_{ij}$ は $G_{ij}$ に体積成分を導入することによって次式で表すことができる。

$$g_{ij} = \alpha G_{ij} + (1/3) \alpha \beta \delta_{ij} \dots\dots\dots (2.13)$$

上式の両係数 $\alpha$ 、 $\beta$ を決定するために、本モデルでは次のカムクレイ型のストレス-ダイレイタンシー関係を用いる。

$$- dv^P / d\varepsilon_s^P = M - c \eta \dots\dots\dots (2.14)$$

ここに、 $\eta = |\eta_{ij}|$ 、 $d\varepsilon_s^P = |d\varepsilon^P_{ij}|$ であり、体積最大圧縮時の応力比 $M$ は次式で表される。

$$M = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} G_m(\theta) \dots\dots\dots (2.15)$$

$\phi_{mc}$ を三軸圧縮状態での体積最大圧縮時の内部摩擦角とすると、上式の $G_m(\theta)$ は式(2.4)で使用される $\phi_c$ を $\phi_{mc}$ に置き換えたものとなる。

式(2.14)の $c$  ( $-1 \leq c \leq 1$ )は、本研究で新たに導入した非共軸性の程度を表すスカラー変数で、 $c = 1$ は共軸を、 $c = -1$ は主応力方向と塑性主ひずみ増分方向が逆向きであることを示す。すなわち、式(2.14)はカムクレイ型のストレス-ダイレイタンシー関係に非共軸性の評価を導入したもので、Gutierrez<sup>13)</sup>の2次元平面（平面ひずみ）での提案を一般応力空間での関係式に拡張したものである。以下、その決定法を示す。

カムクレイ・モデルのエネルギー消散式を一般応力空間で表すと次式のようなになる。

$$p \, dv^P + s_{ij} \, de^P_{ij} = M_p \, d\epsilon_s^P \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

上式の左辺第2項は、主応力方向と塑性主ひずみ増分方向が異なる場合、応力とひずみの不変量  $(2J_2)^{1/2}$  および  $d\epsilon_s^P$  を用いると次のように表される。

$$s_{ij} \, de^P_{ij} = c \, (2J_2)^{1/2} d\epsilon_s^P \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

比例定数  $\lambda (= |d\epsilon^P_{ij}|)$  と式(2.13)を用いて、次式が得られる。

$$de^P_{ij} = \lambda \, (\alpha G_{ij}) \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

$$d\epsilon_s^P = \lambda \, \alpha \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

ここに、 $\lambda = df / K_p$ 、 $df (= n_{ij} \, d\sigma_{ij})$  は負荷指標、 $K_p$  は硬化係数、 $n_{ij}$  は負荷の方向を示す単位テンソルである。式(2.18)、(2.19)を式(2.17)に代入すると、 $c$  は次式で与えられる。

$$c = s_{ij} G_{ij} / (2J_2)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

また、式(2.17)を式(2.16)のエネルギー消散式に代入すると、式(2.14)のストレス・ダイレイタンスー関係が得られる。以上から、式(2.14)に式(2.19)と次式を代入すると、

$$dv^P = \lambda \, \alpha \, \beta \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

式(2.13)の係数  $\beta$  は次式で表される。

$$\beta = - (M - c \, \eta) \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

係数  $\alpha$  は、 $|g_{ij}| = 1$  より、次のようになる。

$$\alpha = \{ 3 / (\beta^2 + 3) \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

流れ則の解析手順は、まず、式(2.8) ~ (2.12)から  $G_{ij}$  が決定され、 $G_{ij}$  を式(2.20)に代入して  $c$  が決まる。次に、 $c$  を式(2.22)に代入して  $\beta$  が、式(2.23)で  $\alpha$  が決定される。最後に、 $G_{ij}$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  を式(2.13)に代入して  $g_{ij}$  が定義される。

ここで、 $c$  の影響を調べるため、等方応力状態でせん断応力  $\tau$  が変動する場合を考えてみる。図2-4の左上に示すようなせん断履歴において、①~②および③~④では  $c = 1$ 、②~③および④~⑤では  $c = -1$  である。この結果、式(2.14)は図2-4の実線で示すように実験結果とうまく対応するストレス・ダイレイタンスー関係を表現することができ、 $c$  の符号の反転によってストレス・ダイレイタンスー関係に応力反転の効果が反映される。比較のため、式(2.14)で  $c = 1$  とし、カムクレイ・モデルのストレス・ダイレイタンスー関係をそのまま繰返し載荷に用いた場合は、応力反転後の②~③および④~⑤は破線のようになり、明らかに既往の実験結果<sup>14)</sup> と矛盾し、 $dv^P$  の符号さえ一致しないことが分かる。

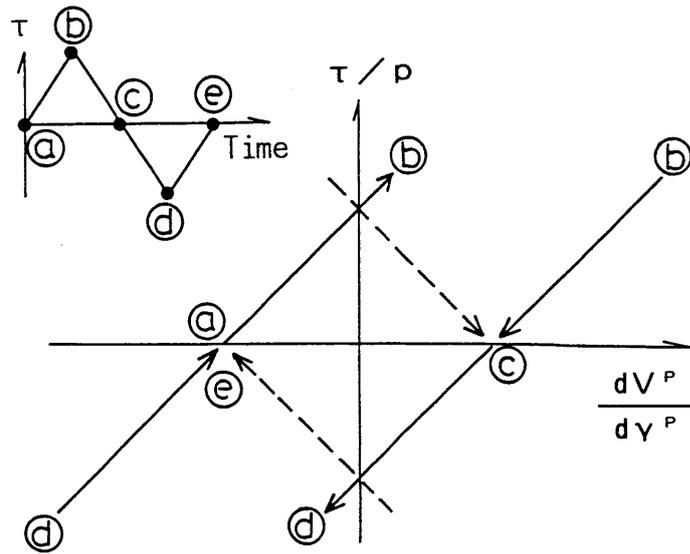


図 2-4 ストレス-ダイレイタンスー関係

### 2. 2. 5 負荷指標 $df$

塑性ひずみ増分  $d\varepsilon^p_{ij}$  の大きさを規定する  $df$  は、式 (2.18)、(2.19) に関連して前述したように次式で与えられ、同式は、同時に載荷、除荷状態を判定する負荷指標として用いられる。

$$df = n_{ij} d\sigma_{ij} \dots\dots\dots (2.24)$$

負荷の方向を示す単位テンソル  $n_{ij}$  は、次式で与えられる。

$$n_{ij} = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) / |\partial f / \partial \sigma_{ij}| \dots\dots\dots (2.25)$$

$\partial f / \partial \sigma_{ij}$  については、2. 2. 10 で具体的に述べる。上式は式 (2.10) との比較から、処女載荷時 ( $d = 1$ ) に  $\alpha = 0$  の時のみ偏差応力空間で負荷の方向が流れの方向と一致することを表す。

式 (2.24) は応力反転の瞬間のみ  $df < 0$  を示し、この時  $f$  は点に縮小する。それ以外はすべて  $df > 0$  で、載荷として取り扱われる。

### 2. 2. 6 硬化則

本モデルでは  $df = 0$  及び  $R \leq R^E$  の場合を除いて、応力点の移動によって常に新しい

負荷曲面  $f$  が形成される。ただし、二曲面および多曲面モデルにおいては、何らかの移動硬化則を設定し、適応条件を介して  $f$  の中心座標  $\alpha_{ij}$  が決定されるのに対し、本モデルではこれを介さずに幾何学的条件だけから  $\alpha_{ij}$  および  $f$  の半径  $R$  を決定することができる。このことは、後述の式 (2.32) で与えられる硬化係数の下で、適応条件を満足する移動則が暗に設定されていると考えることもできる。

具体的には、次式を式 (2.5) に代入し  $R$  に関する 2 次方程式を作成する。

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha^I_{ij} (R_{s^N} - R) + \alpha^N_{ij} (R - R^I)}{(R_{s^N} - R^I)} \dots\dots\dots (2.26)$$

ここに、 $R^I$ 、 $\alpha^I_{ij}$  は前ステップの負荷曲面  $f^I$  の半径と中心座標、 $R_{s^N}$ 、 $\alpha^N_{ij}$  は最新の応力反転曲面  $f_{s^N}$  の半径と中心座標である。 $R$  はこの 2 次方程式の一つの解であり、次式で与えられる。

$$R = \frac{-A2 - (A2^2 - A1A3)^{1/2}}{A1} \dots\dots\dots (2.27a)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A1 &= A_{ij}A_{ij} - 1 & A2 &= A_{ij}B_{ij} & A3 &= B_{ij}B_{ij} \\ A_{ij} &= \frac{\alpha^I_{ij} - \alpha^N_{ij}}{R_{s^N} - R^I} & B_{ij} &= R_{ij} - \frac{\alpha^I_{ij} R_{s^N} + \alpha^N_{ij} R^I}{R_{s^N} - R^I} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.27b)$$

である。また、 $\alpha_{ij}$  は上式で得られた  $R$  を式 (2.26) に代入して決定される。

図 2-5 は、図 2-1 と同じ平面で式 (2.26) を示したものである。同図は、応力点が 1 → 2 に移動したとき  $f^I$  の中心と  $f_{s^N}$  の中心を結ぶ線上に  $f$  の中心が決定され、 $f$ 、 $f^I$  および  $f_{s^N}$  が応力反転の生じた点  $S$  で接し、これらの曲面が交差しないことを表している。別の表現をすると、負荷曲面の中心の移動量  $d\alpha_{ij} (= \alpha_{ij} - \alpha^I_{ij})$  は、半径の拡大量  $dR (= R - R^I)$  を用いて次式で表せることを意味している。

$$d\alpha_{ij} = \frac{\alpha^N_{ij} - \alpha^I_{ij}}{R_{s^N} - R^I} dR \dots\dots\dots (2.28)$$

なお、繰返し載荷時の応力反転を記述するために、応力反転が生じた図 2-5 の点  $S$  を中心とし、等方的に拡大する同心円で負荷曲面を表すモデル<sup>15)</sup> も数多く提案されている。しかしながら、この種のモデルは、一次元応力-ひずみ関係を取り扱う場合には問題ないが、一般応力空間では  $f$  と  $F$  が交差し、 $K_p \neq 0$  で応力点が  $F$  に到達することとなり、塑性状態で  $f$  が  $F$  に漸近する現象をうまく表すことができない。

ところで、本モデルで採用した無数曲面モデルは、応力振幅が低下する繰返し載荷にお

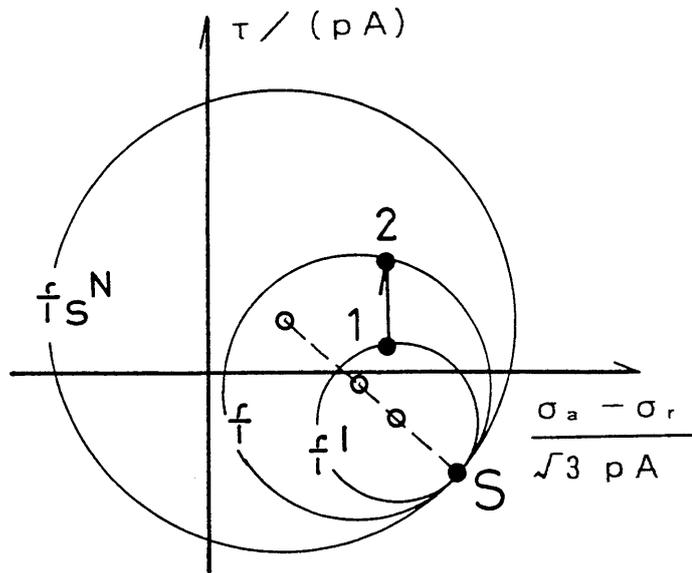


図 2 - 5 負荷曲面の決定法則

いて原理的には、すべての応力反転曲面を記憶せねばならないという問題を持っている。この問題は、Hardin-Drnevich、Ramberg-Osgood等の一次元応力-ひずみモデルに Masing 則を導入する時、除荷開始時の情報を何個まで記憶しておくかという問題と同じである。

この問題に対し、本モデルでは負荷曲面  $f$  および最新の応力反転曲面  $f_s^N$  の半径と中心座標、過去の最大の応力反転曲面  $f_s^M$  が生じた時点での基準化応力比  $R^{M_{ij}}$  を記憶することで、上述した無数曲面モデルの煩雑さを解消している。ここに、 $R_s^M = |R^{M_{ij}}|$  である。この場合、応力振幅が低下する応力反転が 3 回以上発生すると  $f_s^N$  と  $f_s^M$  は接しなくなり、その後応力点が  $f_s^N$  の外側に出てきたとき何らかの工夫が必要になる。この対策として、図 2 - 6 を用意した。同図では、応力点が  $f_s^N$  の外側で  $f_s^M$  の内側に出たとき、破線で示すように  $R^{M_{ij}}$  を通り  $f_s^N$  の外側に接する新たな曲面  $f_s^K$  を定義し、応力点が  $f_s^K$  の内にあるか否かを判定する。内にあるときは、 $f_s^N$  を  $f^I$ 、 $f_s^K$  を新たな応力反転曲面  $f_s^N$  とし、外にあるときは  $f_s^K$  を  $f^I$ 、 $f_s^M$  を  $f_s^N$  として式 (2.26)、式 (2.5) から  $f$  が決定される。このことは、過去の最大基準化応力比  $R^{M_{ij}}$  による応力誘導異方性が  $R < R_s^M$  で存在し、 $R \geq R_s^M$  で消失することを意味する。 $f_s^K$  の半径  $R^K$  および中心座標  $\alpha^{K_{ij}}$  は、式 (2.29)、式 (2.30) で表される。

$$R^K = (1 - t) R_s^M \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

$$\alpha^{K_{ij}} = t R^{M_{ij}} \quad \dots\dots\dots (2.30)$$

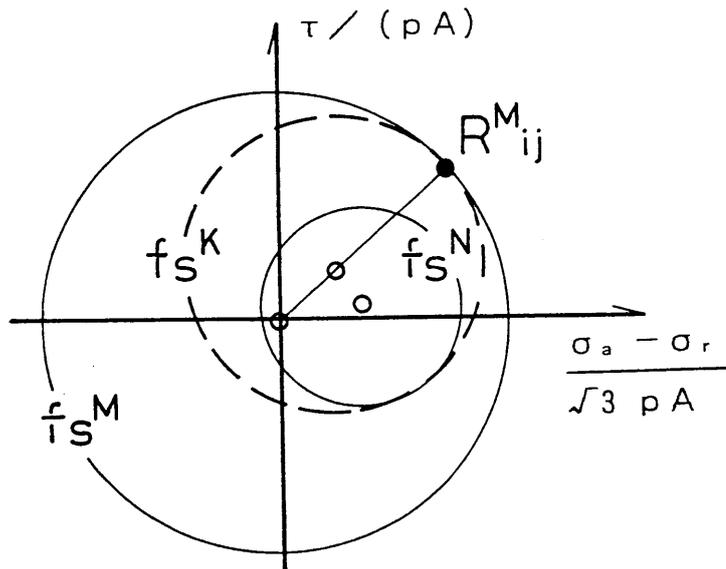


図 2 - 6 新たな応力反転曲面  $f_s^K$

両式は、 $\alpha^{k_{ij}}$  が  $f_s^M$  の中心（基準化空間での原点）と  $R^M_{ij}$  を結ぶ線上に位置することを意味している。ここに、 $t$  は  $R^k$ 、 $\alpha^{k_{ij}}$  を  $R$ 、 $\alpha_{ij}$  として式 (2.5) に代入して得られる方程式の解であり、次式で表される。

$$t = \frac{\alpha^{N_{ij}} \alpha^{N_{ij}} + 2 R_s^M R_s^N - R^M_{ij} R^M_{ij} - (R_s^N)^2}{2 (R^M_{ij} \alpha^{N_{ij}} + R_s^M R_s^N - R^M_{ij} R^M_{ij})} \dots\dots\dots (2.31)$$

この方法を用いることで、負荷曲面の半径  $R$  の滑らかな遷移を表現することができる。同時に、プログラム記憶域を大幅に低減でき、数値計算アルゴリズムの簡略化を図ることができる。また、後述の式 (2.32) で示すように硬化係数  $K_P$  は  $R$  の関数で表されるため、 $K_P$  の滑らかな遷移も表現される。

### 2. 2. 7 硬化係数 $K_P$

応力-ひずみ関係を定義するには、最後に硬化係数  $K_P$  を設定する必要がある。硬化係数  $K_P$  は、負荷曲面の半径  $R$  で規定され、次式で与えられる。

$$K_P = K_{PI} \left( \frac{p}{p_I} \right)^{1/2} \left( \frac{1-R}{1-R^E} \right)^2 \dots\dots\dots (2.32)$$

ここに、 $K_{PI} = r K_I$ 、 $p_I$  は初期平均主応力、 $K_I$  は初期体積弾性係数である。 $r$  は本

モデルの材料定数で、硬化係数の初期値  $K_{P1}$  を初期体積弾性係数  $K_I$  で規準化したものである。

この結果、除荷曲線は処女載荷曲線の半分の曲率をもつことになり、Masing 則が表される。また、 $f = F$  の時、 $R = 1$ 、 $K_P = 0$  であり、塑性状態で  $f$  は  $F$  に限りなく漸近するが、一致することはない。

式 (2.32) は、以下に示すように平均主応力  $p$  一定の等方応力状態で処女載荷時の一次元応力-ひずみ関係を双曲線に表示したことに相当し、材料定数  $r$  は  $\eta - \varepsilon_{s^P}$  関係の初期接線勾配を規定する。まず、 $\eta - \varepsilon_{s^P}$  関係を式 (2.33) の双曲線で表すと、

$$\eta = \frac{A G_t \varepsilon_{s^P}}{A + G_t \varepsilon_{s^P}} \dots\dots\dots (2.33)$$

次式が得られる。

$$d\varepsilon_{s^P} = \frac{d\eta}{G_t (1 - \eta/A)^2} \dots\dots\dots (2.34)$$

ここに、 $G_t$  は双曲線の初期接線勾配である。また、 $A$  は  $F$  の半径で、双曲線の漸近線でもある。一方、本モデルでは、式 (2.19) より次式が成り立つ

$$d\varepsilon_{s^P} = \alpha \frac{n_{ij} d\sigma_{ij}}{K_P} \dots\dots\dots (2.35)$$

ここで、平均主応力  $p$  一定の等方応力状態でせん断応力  $\tau$  が増加するとき、一次元問題では次式が成立する。

$$n_{ij} d\sigma_{ij} = \sqrt{2} d\tau \dots\dots\dots (2.36)$$

$$d\eta = (\sqrt{2}/p) d\tau \dots\dots\dots (2.37)$$

式 (2.36) を式 (2.35) に、式 (2.37) を式 (2.34) に代入し、 $\alpha = 1$  であることを考慮して両者を比べると、次式が得られる。

$$K_P = G_t p (1 - \eta/A)^2 \dots\dots\dots (2.38)$$

処女載荷時は  $\eta = a$  であるから、 $K_{P1} = G_t p$ 、 $R^E = 0$  のとき式 (2.32) と式 (2.38) は一致し、式 (2.32) は双曲線の応力-ひずみ関係を表すことになる。

## 2. 2. 8 弾塑性定数テンソル $D^{EP}_{ijkl}$

上で算定された  $n_{ij}$ 、 $g_{ij}$  および  $K_P$  に基づいて、応力増分  $d\sigma_{ij}$  は、全ひずみ増分

$d\varepsilon_{ij}$  ( $= d\varepsilon^E_{ij} + d\varepsilon^P_{ij}$ ) を用いて次式で表される。

$$d\sigma_{ij} = D^{EP}_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \dots\dots\dots (2.39)$$

弾塑性定数テンソル  $D^{EP}_{ijkl}$  は次のとおりである。

$$D^{EP}_{ijkl} = D^E_{ijkl} - \frac{D^E_{ijmn} g_{mn} n_{st} D^E_{stkl}}{K_P + n_{mn} D^E_{mnst} g_{st}} \dots\dots\dots (2.40)$$

ここに、 $d\varepsilon^E_{ij}$  は弾性ひずみテンソル、 $D^E_{ijkl}$  は弾性定数テンソルで、 $D^E_{ijkl}$  を構成するせん断弾性係数  $G$  および体積弾性係数  $K$  は、次式で与えられる。

$$G = G_I \left( p / p_I \right)^{1/2} \dots\dots\dots (2.41)$$

$$K = K_I \left( p / p_I \right)^{1/2} \dots\dots\dots (2.42)$$

ここに、 $G_I$ 、 $K_I$  は初期平均主応力  $p_I$  のときの  $G$  および  $K$  である。

### 2. 2. 9 本モデルの材料定数

本モデルの材料定数は、2つの弾性定数 ( $G_I$ 、 $K_I$ ) と  $\phi_c$ 、 $\phi_{mc}$ 、 $r$ 、 $\chi$ 、 $R^E$  の7つである。 $\phi_c$  と  $\phi_{mc}$  は三軸圧縮試験から決定され、前者は、式(2.1)において正規降伏曲面  $F$  の半径  $A$  を、後者は式(2.14)において  $d\varepsilon_v^P = 0$  の時の応力比  $M$  を定義する。 $r$ 、 $\chi$ 、 $R^E$  の物理的な意味は本文中に述べたが、これらは液状化強度試験結果のフィッティングによって決定される。まず、 $R^E$  の効果が最も小さい最大応力比での実験結果に合うように  $r$  と  $\chi$  を決め、その後、 $R^E$  で強度曲線の勾配を調整する。

### 2. 2. 10 $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ の評価

負荷曲面  $f$  の外向きテンソル  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  は、式(2.25)で単位テンソルに変換されるため、その大きさは意味を持たない。このため、式(2.5)は次のように書くことができる。

$$f = (\eta_{ij} - A \alpha_{ij})(\eta_{ij} - A \alpha_{ij}) - a^2 \dots\dots\dots (2.43)$$

上式から、 $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = & \frac{2}{p} (\eta_{ij} - A \alpha_{ij}) - \frac{2}{3p} (\eta_{kl} - A \alpha_{kl}) \eta_{kl} \delta_{ij} \\ & - 2 (\eta_{kl} - A \alpha_{kl}) \alpha_{kl} \frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}} - 2 a \frac{\partial a}{\partial \sigma_{ij}} \dots\dots\dots (2.44) \end{aligned}$$

ここに、

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{\partial G(\theta)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial G(\theta)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} = \frac{S G(\theta)^4}{\{1 + (v/3) G(\theta)^2\} \tan(3\theta)}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3 \cos(3\theta)} \frac{\partial \sin(3\theta)}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\frac{\partial \sin(3\theta)}{\partial \sigma_{ij}} = B_1 \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + B_2 \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij}, \quad \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ik} S_{kj} - \frac{2 J_2}{3} \delta_{ij},$$

$$B_1 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \frac{J_3}{J_2^{5/2}}, \quad B_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2 J_2^{3/2}},$$

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma_{ij}} = a_0 \frac{\partial G(\bar{\theta})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial G(\bar{\theta})}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial G(\bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\frac{\partial G(\bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} = \frac{S G(\bar{\theta})^4}{\{1 + (v/3) G(\bar{\theta})^2\} \tan(3\bar{\theta})}, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3 \cos(3\bar{\theta})} \frac{\partial \sin(3\bar{\theta})}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\frac{\partial \sin(3\bar{\theta})}{\partial \sigma_{ij}} = C_1 \frac{\partial \bar{J}_2}{\partial \sigma_{ij}} + C_2 \frac{\partial \bar{J}_3}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\frac{\partial \bar{J}_2}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij} - \frac{A}{3} S_{kl} \alpha_{kl} \delta_{ij} - p S_{kl} \alpha_{kl} \frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\frac{\partial \bar{J}_3}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ik} S_{kj} - \frac{2 \bar{J}_2 - D/3}{3} \delta_{ij} - p \alpha_{lm} S_{mn} S_{nl} \frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$D = -A (\alpha_{kl} S_{lm} S_{mk} + S_{kl} \alpha_{lm} S_{mk} + S_{kl} S_{lm} \alpha_{mk}) \\ + 2 p A^2 (\alpha_{kl} \alpha_{lm} S_{mk} + \alpha_{kl} S_{lm} \alpha_{mk} + S_{kl} \alpha_{lm} \alpha_{mk}) \\ - 3 p^2 A^3 (\alpha_{kl} \alpha_{lm} \alpha_{mk}),$$

$$C_1 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \frac{\bar{J}_3}{\bar{J}_2^{5/2}}, \quad C_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2 \bar{J}_2^{3/2}}$$

である。

## 2.3 非共軸性の程度を表すスカラー変数 $c$

式(2.20)で定義されたスカラー  $c$  は、一般応力空間で非共軸性の程度を表す重要な変数である。以下では、中空ねじりせん断試験機を用いた等方および異方圧密からの非排水単純せん断試験結果に基づいてこの  $c$  を求め、繰返し載荷時の非共軸性について調べる。

### 2.3.1 $c$ の決定法

式(2.20)で用いられる  $G_{ij}$  は次式で表され、塑性偏差ひずみ増分  $de^{P_{ij}}$  の方向を示す単位テンソルである。

$$G_{ij} = de^{P_{ij}} / |de^{P_{ij}}| \quad \dots\dots\dots (2.45)$$

塑性偏差ひずみ増分  $de^{P_{ij}}$  は次式から得られる。

$$de^{P_{ij}} = de_{ij} - ds_{ij} / (2G) \quad \dots\dots\dots (2.46)$$

ここに、 $de_{ij}$  は全偏差ひずみ増分で、非排水単純せん断変形のひずみの境界条件は、 $de_{11} = de_{22} = de_{33} = dv = 0$  である。 $G$  は、式(2.41)で決定される。

### 2.3.2 試験方法および試験結果

供試体は豊浦砂を用いて空中落下法で作成した(高さ20cm、外径10cm、内径6cm)。異方圧密の方法は、まず側方応力  $\sigma_r$  を等方的に載荷後、異方分の軸応力  $d\sigma_a$  を載荷して所定の  $\sigma_a$  とした。非排水単純せん断変形は、供試体の高さを一定に保ち、供試体中空部に満たした水の出入を止める手法<sup>16)</sup>を用いて表現した。

圧密打切り時の間隙比  $e_0$ 、 $\sigma_a$ 、 $\sigma_r$ 、 $B$  値および式(2.41)の  $G_I$  を表2-1に示す。 $G_I$  は微小ひずみ時 ( $2.5 \times 10^{-5}$ ) の実測値である。

異方圧密からのせん断応力振幅一定の液状化強度試験結果を図2-7(a)に、等方圧密からの結果を同図(b)に示す。縦軸はせん断応力  $\tau$  を初期軸応力  $\sigma_{a0}$  で正規化した応力比で表示している。両結果から変数  $c$  を求めた。なお、同図(a)では1/4サイクル毎にA~Fの区間を指定している。

表 2 - 1  $e_o$ 、 $\sigma_a$ 、 $\sigma_r$ 、B 値および  $G_I$

	Void Ratio	$\sigma_a$ (kPa)	$\sigma_r$ (kPa)	B Value	$G_I$ (kPa)
Anisotropic	0.792	-163.66	-65.66	0.98	70000
Isotropic	0.778	-98.00	-98.00	0.95	73500

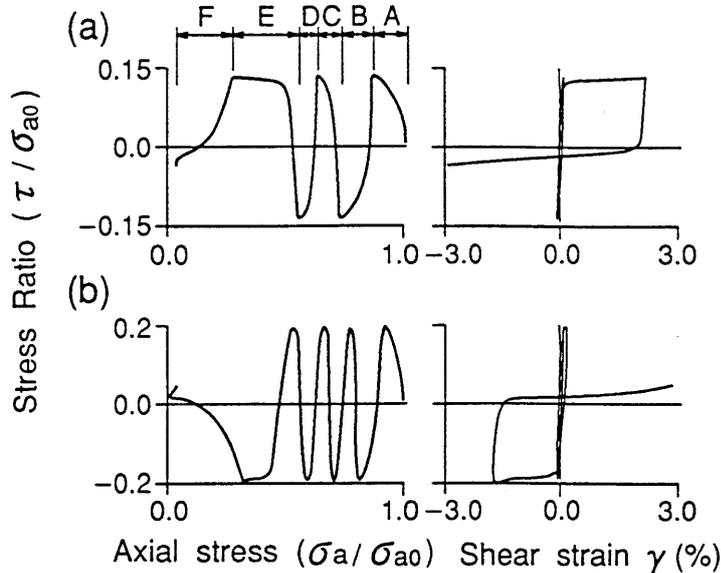


図 2 - 7 液状化強度試験結果

(a) 異方圧密からのせん断試験における  $c$  の特性

A ~ F 区間の  $c$  の変化を図 2 - 8 (a) に実線で示す。対応する  $\tau$  を破線で併記しており、横軸は、応力増分の数である。矢印で示すように、 $\tau$  の符号にかかわらずピークせん断応力時の  $c$  は繰返し载荷に伴って次第に 1 に接近しており、非共軸から共軸へ近づいているのが分かる。ピークせん断応力付近の  $c$  の凸状の変化は除荷直後のもので、この時ひずみ増分は極めて小さくこの現象は無視することができる。

また、応力反転が生じた瞬間  $c = -1$  が表れていること、 $\tau = 0$  付近で  $c = 0$  となっていることも分かる。

この様子を偏差応力空間で模式的にみると図 2 - 9 のようになる。同図では、④点で応力反転が生じ、④→⑤→③と応力点が移動した時、④、⑤、③それぞれの点での主応力の方向を細い実線の矢印、塑性主ひずみ増分を太い実線の矢印で表すことができる。破線は、対応する塑性ポテンシャル曲面の断面である。応力反転直後の④点では両方向はほぼ逆向き ( $c = -1$ ) で、塑性主ひずみ増分は応力経路の方向 (④→⑤) ではなく、応

力空間の原点（応力反転曲面  $f_s^M$  の中心）に向っている。 $\tau = 0$  の三軸圧縮状態の㊦点では両方向は直交（ $c = 0$ ）し、ピークせん断応力時の㊤点では両方向は次第に一致するようになり、 $c = 1$  に接近している。

#### （b）等方圧密からのせん断試験における $c$ の特性

（a）と同様に、変数  $c$  を実線で、対応する  $\tau$  を破線で図 2-8（b）に示す。（a）との違いは、図 2-4 に関連して述べたように応力反転の瞬間に  $c = -1$  になるが、そのまま  $c = -1$  を保ち、 $\tau$  の符号が変わると  $c = 1$  になることで、 $c = 1$  と  $c = -1$  が交互に表れている。

この様子を同様に偏差応力空間でみたのが図 2-9 の㊤'、㊦'、㊤' である。応力反転直後の㊤' から㊦' までは両方向は逆向きで  $c = -1$ 、 $\tau$  の符号が変わる㊦' からピークせん断時の㊤' までは両方向は一致し  $c = 1$  が表れている。

これらの結果は、繰返し載荷時の塑性ポテンシャル曲面の偏差応力空間での断面は原点を中心とする凸な曲面では表せないこと、負荷曲面を塑性ポテンシャル曲面とする関連流れ則（ $G_{ij} = Q^L_{ij}$ ）が適用できないこと、さらに、応力増分  $d\sigma_{ij}$  と正規降伏曲面  $F$  の交点（共役点）での法線方向成分も実験結果に比べ弱い非共軸性しか与えることができないことを示している。前述の式 (2.8) ~ (2.12) はこれらの結果に基づいて導入されたものであり、材料定数を適切に選べば、これらの式は実験結果の特性をうまく表すものと考えられる。

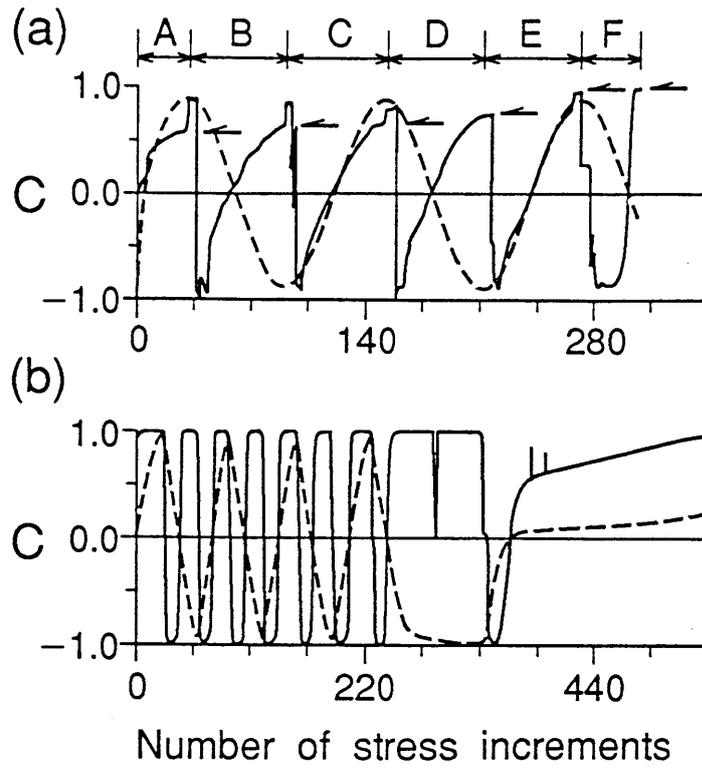


図 2 - 8 非共軸性の程度を表す変数  $c$

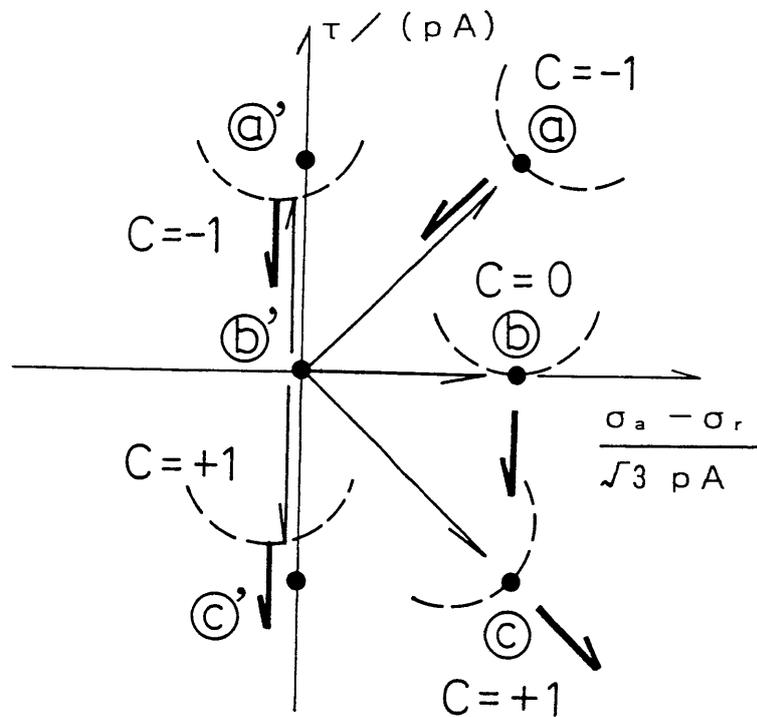


図 2 - 9 主応力の方向と塑性主ひずみ増分の方向

## 2.4 非排水単純せん断試験の解析結果

### 2.4.1 液状化強度試験のシミュレーション解析

2.3に示した異方および等方圧密からの液状化強度試験の解析を行い、式(2.8)～(2.12)で定義した偏差応力空間での流れ則が実験で得られた非共軸性をどの程度表現できるかについて検討する。

解析はひずみ制御方式で行う。せん断ひずみ増分  $d\gamma$  ( $=1 \times 10^{-5}$ ) を順次与え、式(2.39)で得られるせん断応力  $\tau$  の絶対値が所定の値に達したら  $d\gamma$  の符号を変えて繰返し載荷を再現する (APPENDIX A参照)。

#### (a) 異方圧密からの液状化強度試験の解析

ここでは、式(2.9)を便宜的に次式のように変更して表2-2の4ケースの解析を行っており、ケース1からケース4の順に非共軸性が弱くなるよう設定されている。

$$Q_{ij} = \chi_1 (1 - d) Q^{N_{ij}} + d \{ Q^{L_{ij}} + \chi_2 (1 - R_s^M) Q^{H_{ij}} \} \quad \dots\dots (2.47)$$

表2-2において、 $\chi_1 = 1.0$  のケース1～3は式(2.9)のモデルと一致し、ケース数が増えるほど応力履歴の影響を表す  $Q^{H_{ij}}$  の効果を低下させている。ケース4は、 $Q^{N_{ij}}$  と  $Q^{H_{ij}}$  を取り去ったもので、 $G_{ij} = Q^{L_{ij}}$  である。その他の材料定数は共通で、表2-3

(a) に示す。

ケース1～4の解析結果 (応力経路、応力-ひずみ関係) を図2-10に示す。表示法は図2-7と同じで、図中の数字は繰返し回数である。応力履歴の影響を表す  $Q^{H_{ij}}$  による

表2-2 解析ケース

	$\chi_1$	$\chi_2$
Case 1	1.0	10.0
Case 2	1.0	5.0
Case 3	1.0	0.0
Case 4	0.0	0.0

表2-3 材料定数

#### (a) Anisotropic

$G_I = 70000$ kPa	$\phi_c = 31^\circ$
$K_I = 187000$ kPa	$\phi_{mc} = 30^\circ$
$R^E = 0.0$	$r = 10$

#### (b) Isotropic

$G_I = 74000$ kPa	$\phi_c = 31^\circ$
$K_I = 196000$ kPa	$\phi_{mc} = 30^\circ$
$R^E = 0.0$	$r = 7$
$\chi = 10.0$	

非共軸性を最大に評価したケース1 ( $\chi_2 = 10.0$ ) は、図2-7 (a) の実験結果とよい対応関係があることが認められ、2.5 サイクル目にひずみが急増し、2%程度の大ひずみに至る過程をうまく表しているといえる。一方、 $\chi_2$  を小さくして  $Q^{N_i}$  による非共軸性を少なくするほど軸応力  $\sigma_a$  の低下が抑えられ、液状化強度が増加すること、更に、ケース3とケース4を比べると、応力反転の影響を表す  $Q^{N_i}$  による非共軸性を取り去るだけでも液状化強度が増加することなどが分かる。

ケース1～4の変数  $c$  の変化を図2-11に示す。また、ケース1の1000ステップまでの  $c$  の変化を図2-12に拡大して示す。ここに、横軸のステップとは  $d\gamma$  を与えた回数で、図2-12では対応する  $\tau$  を破線で併記している。

図2-11、2-12において、ケース1のピークせん断応力時の  $c$  は 0.75 から1に近づいており、非共軸から共軸に至る図2-8 (a) の様子をうまく表している。また、応力反転の瞬間  $c = -1$  が現れ、 $\tau = 0$  付近で  $c = 0$  となる傾向も表現されている。一方、図2-11のケース2のピークせん断応力時の  $c$  は 0.85 ~ 1 で、ケース1に比べ非共軸の程度が若干低い。ケース3のピークせん断応力時の  $c$  は、常に1 (共軸) である。これらの結果は、異方応力状態の土の繰返し載荷時の非線形挙動を表現する場合、ピーク応力時に

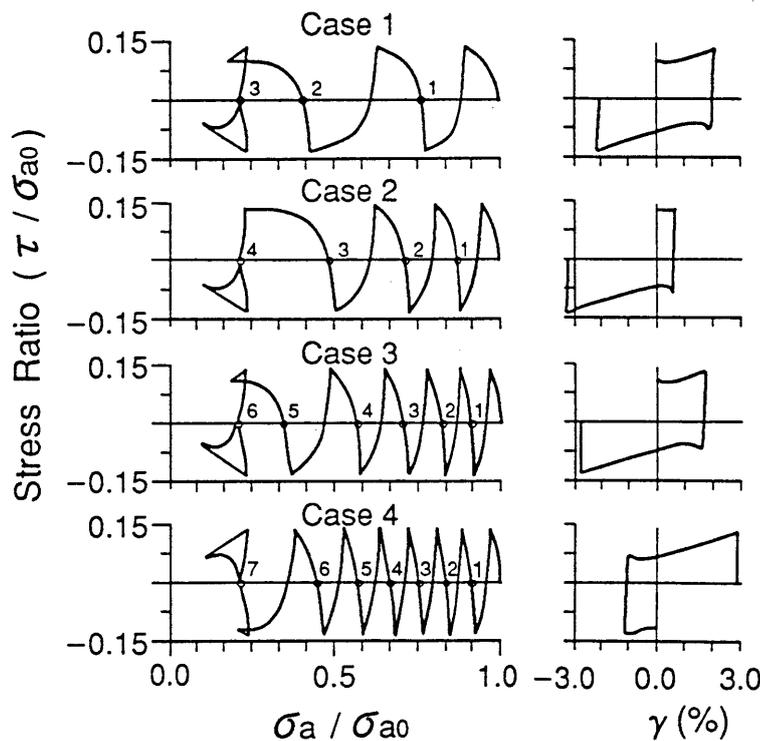


図2-10 応力経路、応力-ひずみ関係

非共軸から共軸に至る過程をいかにモデル化するかが重要であることを示していると考えられる。

ケース4はケース1～3と大きく異なっており、応力反転時に $c = -1$ が表現されていない。この応力反転時の $c = -1$ は、弾性としての挙動が卓越する領域であるが、図2-10のケース3とケース4の違いをみると、この領域での非共軸性も土の非線形挙動に影響していることが分かる。これは、図2-4に関して前述したように、 $c$ の符号の反転によってストレス-ダイレイタンスー関係に応力反転の効果が評価されるためである。

#### (b) 等方圧密からの液状化強度試験の解析

応力経路、応力-ひずみ関係および変数 $c$ の変化を図2-13に示す。用いた材料定数は表2-3(b)に示している。ただし、等方圧密からの解析では $Q^{H_{ij}} = Q^{L_{ij}} = Q^{N_{ij}}$ であるため、 $\chi$ の値は意味をもたない。

図2-13と、図2-7(b)および図2-8(b)の実験結果との対応はよいように思われ、4サイクル目にひずみが急増し、大ひずみに至る過程がうまく表れている。また、応力反転に伴って $c = 1$ と $c = -1$ が交互に現れる様子がうまく表現されている。

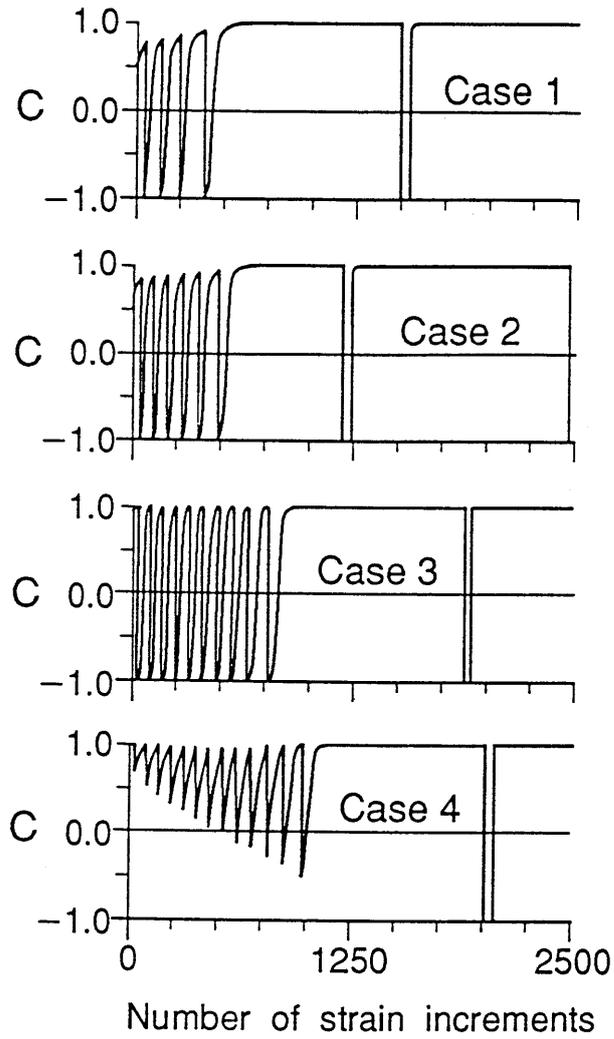


図 2 - 11 c の変化

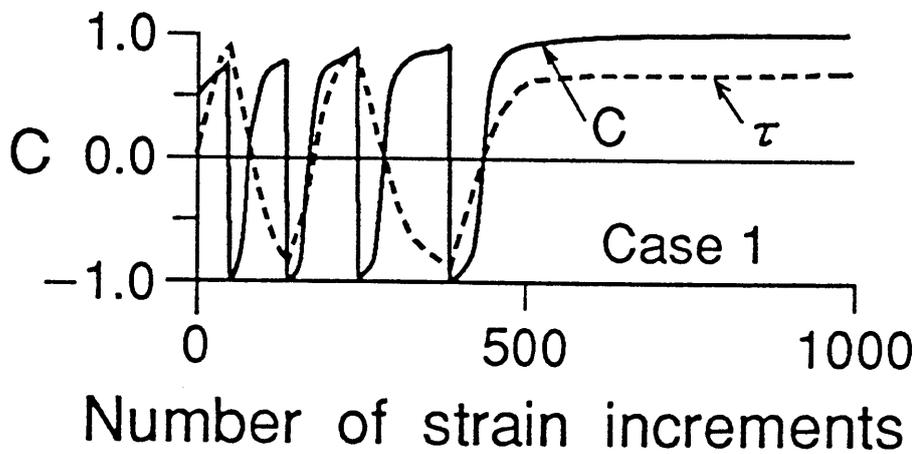


図 2 - 12 ケース 1 の c の変化の拡大図

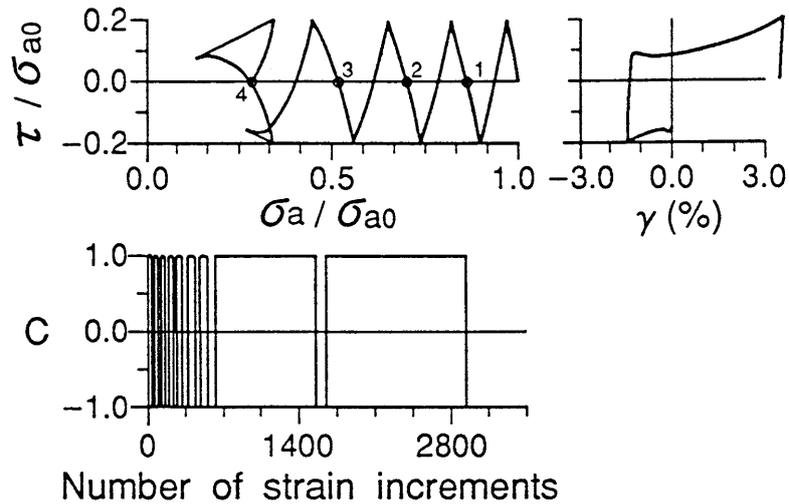


図 2 - 13 等方圧密からの解析結果

#### 2. 4. 2 液状化強度曲線のシミュレーション解析

ここでは、提案したモデルの適用例として非排水繰返し単純せん断試験より求まる液状化強度曲線をシミュレートする。

解析は、初期応力状態として平均主応力  $p_1 = 98 \text{ kPa}$ 、側圧係数  $K_0 (= \sigma_x / \sigma_z) = 0.5$  とし、繰返し最大せん断応力振幅  $\tau_{\max} / p_1 = 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35$  について計算を行った。ここに、 $\sigma_z$  は鉛直方向応力、 $\sigma_x$  は水平方向応力である。解析で得られた応力-ひずみ関係からせん断ひずみ  $\gamma$  の両振幅が 5% に達した繰返し回数を液状化に至る繰返し回数  $N_1$  として図 2 - 14 の実線および破線で示した。

図中の実線は、本モデルの 7 つの材料定数のうち  $r = 15.0$ 、 $R^E = 0.0$  を使い、破線は  $r = 9.0$ 、 $R^E = 0.3$  を用いている。その他の材料定数は同じで、図中に併記している。これらの材料定数は、石原ら<sup>17)</sup>の実験結果 (●印) を参考にして設定したものである。

弾性領域の大きさを定義する  $R^E$  を 0.0 とした実線は、液状化強度曲線の勾配が大きく、実験結果をうまく表現できていない。一方、 $R^E = 0.3$  を用いた破線は、低い応力比での  $N_1$  が増加し、実験結果の傾向をおおむねうまく表現している。

図 2 - 15 に最大せん断応力比  $\tau_{\max} / p_1 = 0.3$  のときの応力-ひずみ関係と応力経路を示す。この解析結果は、図 2 - 14 の実線 ( $r = 15.0$ 、 $R^E = 0.0$ ) のものである。また、図 2 - 16 にこのとき得られたせん断応力比  $\tau / p_1$ 、負荷曲面の半径  $R$ 、非共軸性の程度

を表すスカラー  $c$  および側圧係数  $K_0$  の変化を示す。横軸は、せん断ひずみ増分  $d\gamma$  ( $= 1.0 \times 10^{-5}$ ) を与えた回数である。

図 (a) のせん断応力比  $\tau / p_r$  の変化をみると、非排水条件下での繰返しせん断による材料剛性の低下に伴って所定の最大せん断応力振幅  $\tau_{max}$  を生じさせるのに必要な  $d\gamma$  の回数が増加している。

図 (b) の  $R$  では、応力反転の瞬間に  $R = 0$  が発生し、負荷曲面  $f$  が点に縮小しているのが分かる。また、繰返しせん断に伴って  $R$  は次第に増加し、最終的に負荷曲面  $f$  が正規降伏曲面  $F$  に滑らかに漸近する ( $R \cong 1$ ) 様子が表現されている。

図 (d) の  $K_0$  では、 $K_0 = 0.5$  から出発し、鉛直方向応力  $\sigma_z$  と水平方向応力  $\sigma_x$  の差が小さくなり、等方応力状態に近似する様子がうまく表現されている。

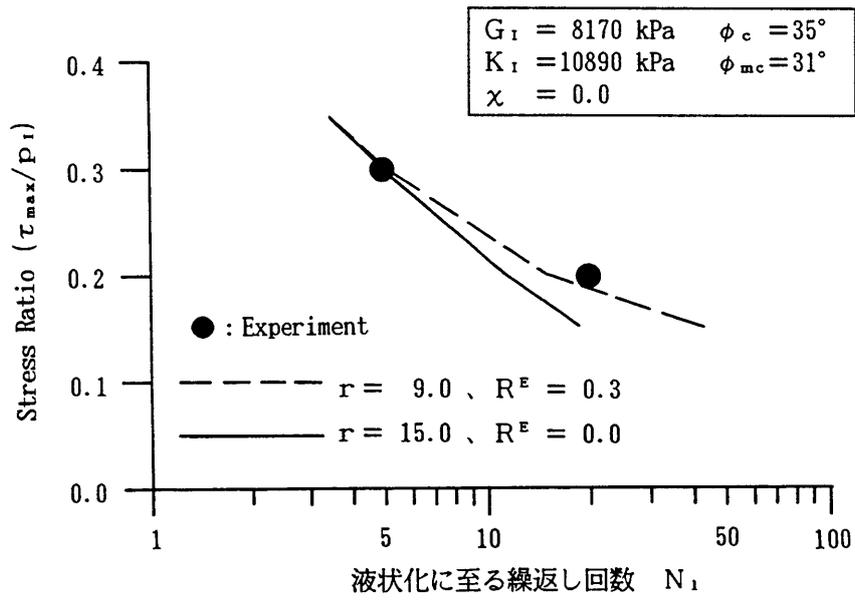


図 2 - 14 液状化強度曲線のシミュレーション

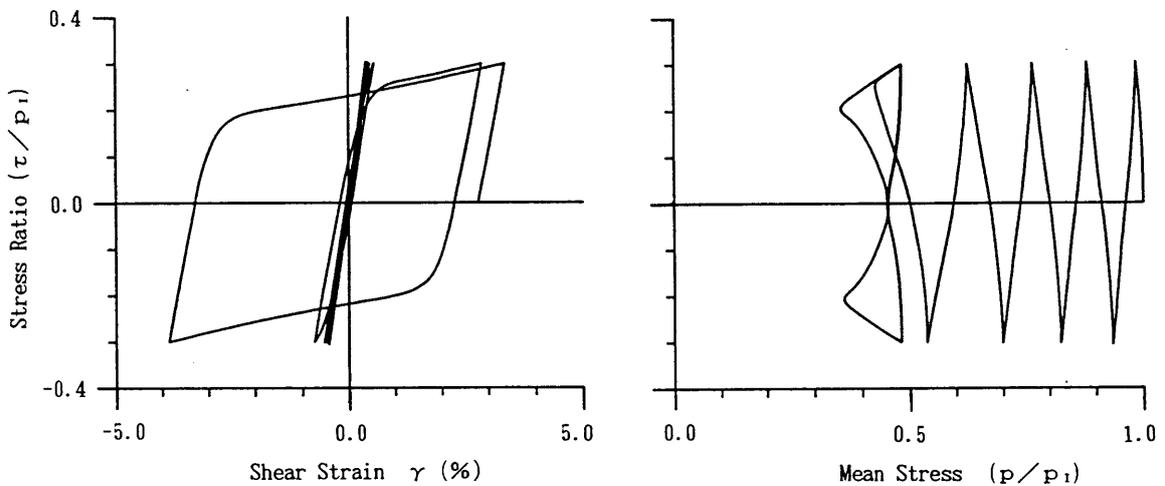


図 2 - 15  $\tau_{\max}/p_1 = 0.3$  のときの応力-ひずみ関係と応力経路

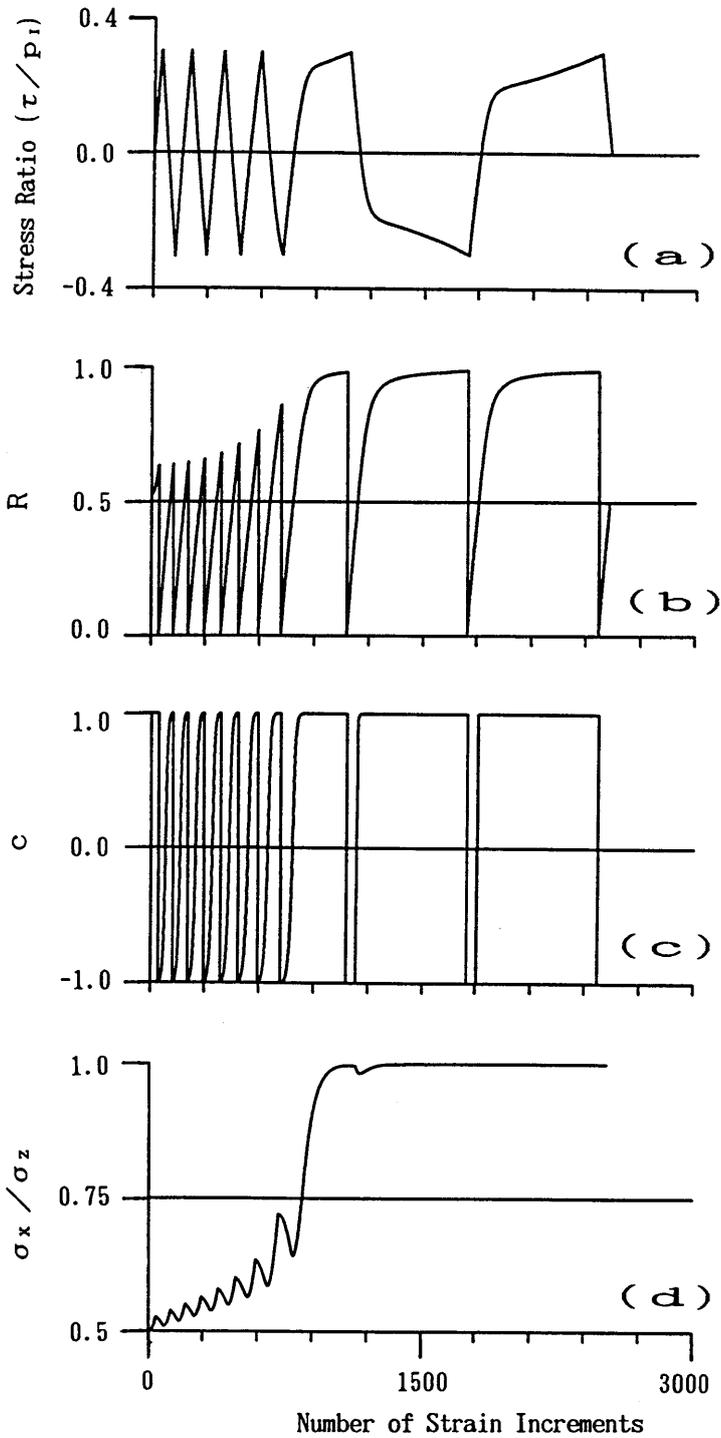


図 2-16  $\tau_{\max}/p_1 = 0.3$  のときの解析結果

## 2.5 中間主応力に基づく異方性の評価

一般応力空間での強度異方性を考えるとき、 $\pi$ 平面上の破壊規準（正規降伏曲面）の評価が重要な課題となる。一方、本モデルは式(2.4)で表される $G(\theta)$ を変えるだけで種々の強度異方性を評価できるという特徴を有している。

図2-17は、三軸圧縮状態での破壊時の内部摩擦角 $\phi_c$ が $35^\circ$ のときの Drucker-Prager規準、Mohr-Coulomb 規準、Lade 規準、橋口<sup>18)</sup>の規準、式(2.4)で用いた松岡・中井規準および第4章で提案する幾何学的に表現される規準の形状を示している。

第5章で後述する二相系有限要素法解析プログラム（NAPOLI）には、上述した6種類の規準が導入されており、以下、これらの破壊規準を $G(\theta)$ の形式で表したときの式を示す。幾何学的に表現される規準については、第4章で後述するためここでは詳細は省略するが、材料定数 $A_r$ を変えることで $\pi$ 平面上の形状を任意に選定することができるという特徴を有している。図2-17では、 $A_r = 0.806$ を用いている。

### ①：Drucker-Prager 規準

Drucker-Prager 規準を $G(\theta)$ の形式で示すと、次式で表される。この規準は、 $\pi$ 平面上では、円で表される。

$$G(\theta) = \frac{6 \sin \phi_c}{3 - \sin \phi_c} \dots\dots\dots (2.48)$$

### ②：Mohr-Coulomb 規準

Mohr-Coulomb 規準は、 $\pi$ 平面上において歪んだ六角形である。この規準は、中間主応力 $\sigma_2$ の影響を考慮しておらず、内部摩擦角 $\phi$ 一定の強度を与える。

$$G(\theta) = \frac{3 \sin \phi_c}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \phi_c \sin \theta} \dots\dots\dots (2.49)$$

③ : Lade 規準

Lade 規準は、式 (2.4) に示した松岡・中井規準と同様に、応力の第 2、第 3 不変量を用いることで、中間主応力  $\sigma_2$  の影響を考慮したものになっている。この規準は、三軸伸張側 ( $\theta = -\pi/6$ ) において Mohr-Coulomb 規準よりも外に凸の曲面を呈し、三軸圧縮側よりも少し大きな内部摩擦角  $\phi$  の値を与えるものである。

$$G(\theta) = \frac{1}{2 \left( -\frac{v}{3} \right)^{1/2} \cos \left( \frac{u}{3} \right)} \dots\dots\dots (2.50a)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{k}{3(27-k)}, & k &= \frac{(3 - \sin \phi_c)^3}{(1 + \sin \phi_c)(1 - \sin \phi_c)^2}, \\ s &= \frac{2k \sin(3\theta)}{27(k-9)}, & \cos u &= \frac{-s}{2 \left( -\frac{v}{3} \right)^{3/2}}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.50b)$$

である。式 (2.50) は式 (2.4) の松岡・中井規準と同形で、両者の違いは  $v$  と  $k$  の定義式の違いのみである。

④ : 橋口の規準

橋口の規準は次式で表され、松岡・中井規準と同様に軸対称応力状態 ( $\theta = \pm \pi/6$ ) で Mohr-Coulomb 規準と一致する。図 2-17 では、この規準は松岡・中井規準とほぼ同一線上にある。

$$G(\theta) = \frac{6 \sin \phi_c}{\left\{ \frac{1}{2} (\phi_A^4 + \phi_B^4) - \frac{1}{2} (\phi_A^4 - \phi_B^4) \right\}^{1/4}} \dots\dots\dots (2.51)$$

ここに、 $\phi_A = 3 + \sin \phi_c$ 、 $\phi_B = 3 - \sin \phi_c$  である。

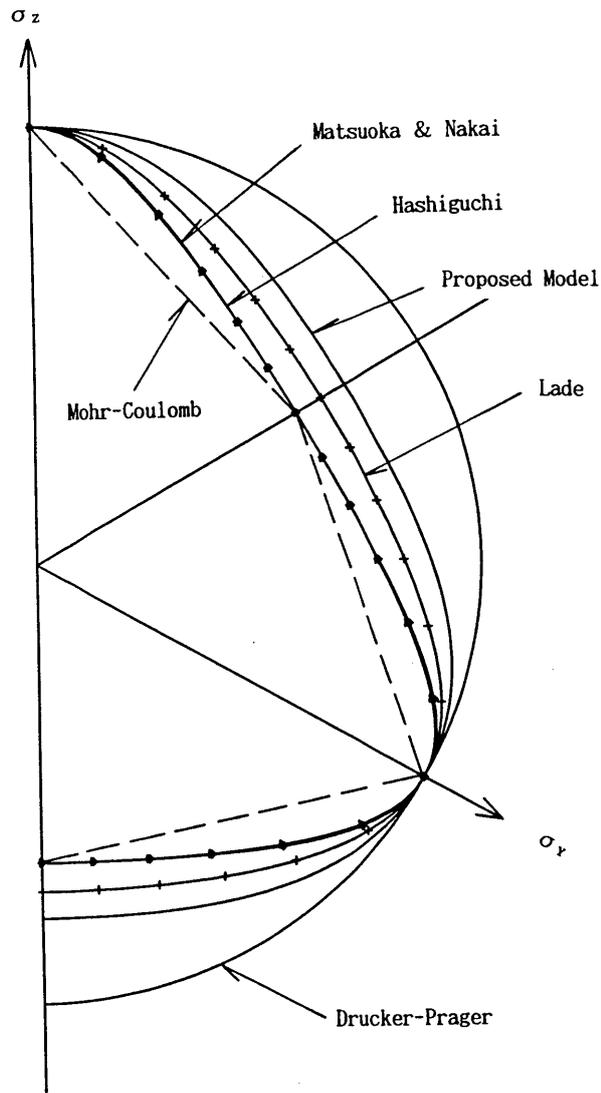


図 2 - 17  $\pi$  平面上の種々の破壊規準 ( $\phi_c = 35^\circ$ )

## 2.6 本章の要約

本章では、有限要素法による二次元あるいは三次元液状化解析への適用を目的として、一般応力空間での砂の非線形挙動を表現するひとつの繰返し弾塑性性構成モデルを提案した。提案したモデルの最大の特徴は、実験結果に基づいて非共軸性の評価が積極的に取り入れられていることである。適用例として実験結果に表れる非共軸性をどの程度表現できるかを示した。

本章の主要な結論は、次のとおりである。

- ①：正規降伏曲面、負荷曲面、応力反転曲面等、すべての曲面が交差しない条件下で、松岡・中井の破壊基準によって表現される異方性を組み込んだモデルが提案された。
- ②：偏差応力空間での流れ則に応力反転の影響を表すテンソル、応力履歴の影響を表すテンソルが導入され、この流れ則に基づいて非共軸性の程度を示すスカラー  $c$  が定義された。この  $c$  をストレス-ダイレイタンスー関係に導入することで、応力反転の効果をうまく評価することができた。
- ③：実験結果に基づく  $c$  と解析で得られた  $c$  の比較から、本モデルは増分線形モデルの範疇で繰返し載荷時の非共軸性をうまく表現できることが分った。
- ④：新たな応力反転曲面  $f_{s^k}$  を用いることで、無数曲面モデルの問題点とされている応力振幅が低下する繰返し載荷をうまく表現することができた。

## 参考文献 (第2章)

- 1) Mroz, Z. : On the description of anisotropic workhardening, J. Mech. Phys. Solids, 15, PP. 163-175, 1967.
- 2) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. : Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity, J. Appl. Mech. (ASME), 43, PP. 645-651, 1976.
- 3) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. : Cyclic loading for materials with a vanishing elastic domain, Nucl. Eng. Design, 41, PP. 293-302, 1977.
- 4) Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C. : Application of anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils, Geotechnique, Vol. 29, PP. 1-34, 1979.
- 5) Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C. : An anisotropic critical state model for soils subject to cyclic loading, Geotechnique, Vol. 31, PP. 451-469, 1981.
- 6) Hashiguchi, K. : Anisotropic hardening model for granular media, Int. Symp. Soils under Cyclic Trans. Loading, pp. 469-474, 1980.
- 7) 地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集、土質工学会、PP. 50-136、1989.
- 8) 地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集、土質工学会、PP. 77-190、1991.
- 9) 森尾 敏、日下部伸、兵動正幸：多曲面モデルによる液状化解析、第35回土質工学シンポジウム発表論文集、pp. 9-16、1990.
- 10) 森尾 敏、日下部伸、安福規之、兵動正幸：非共軸繰返し弾塑性構成モデルの提案、第27回土質工学研究発表会、pp. 819-822、1992.
- 11) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, Proc. of JSCE, No. 232, pp. 59-70, 1974.
- 12) 西川明宏、安福規之、中田幸男、兵動正幸、村田秀一：砂の拘束圧依存性と中間主応力の影響を考慮した構成式について、第28回土質工学研究発表会、pp. 495-498、1993.

- 13) Marte Gutierrez : Behaviour of sand during rotation of principal stress directions, Doctor Eng. Thesis, Univ. of Tokyo, 1989.
- 14) Pradhan, T. B. S. and Tatuoka, F. : Experimental stress-dilatancy relations of sand subjected to cyclic loading, Soils and Foundations, Vol. 29, No. 1, pp. 65-81, 1990.
- 15) Pender, M. J. : A model of the behaviour of overconsolidated soil, Geotechnique, Vol. 28, No. 1, pp. 1-25, 1978.
- 16) プラタン・テージ・B. S.、佐藤靖彦、龍岡文夫 : 地震波荷重に対する砂の非排水応力～ひずみ関係、第19回地震工学研究発表会、pp. 213-216、1987.
- 17) Ishihara, K., Iwamoto, S., Yasuda, S. and Takatsu, H. : Liquefaction of anisotropically consolidated sand , 9th ICSMFE, Vol. 2, pp. 261-264, 1977.
- 18) 橋口公一 : 最新弾塑性学、朝倉書店、1990.
- 19) 橋口公一 : 塑性ストレッチングの応力速度への方向依存性を有する弾塑性構成式、土木学会論文集、NO. 507 / I - 30, pp. 43-52, 1995.
- 20) 森尾 敏、日下部伸、安福規之、兵動正幸 : 非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成モデル、土木学会論文集、NO. 487 / III - 26, pp. 139-148, 1994.

## 第3章 三軸応力状態での飽和砂の不安定挙動の解析的検討

### 3.1 概説

土構造物の破壊は、土要素の不安定挙動によって引き起こされ、一般にこの不安定挙動は応力点が破壊曲面に到達した時に生じると考えられている。しかし、Ladeら<sup>1)~3)</sup>は、非排水条件下の実験結果に基づいて次のことを明らかにした。

- ①：ゆる詰め砂においては、応力点が破壊曲面に到達する前にひずみ軟化を伴う不安定挙動が生じる。
- ②：DruckerおよびHillの安定条件は、不安定挙動の定義には適用できない。
- ③：摩擦性材料の安定には、材料固有の体積変化特性（ダイレイタンス）が重要な役割を演じる。

Ladeらを取り扱った不安定挙動は、いわゆる静的な液状化と呼ばれる現象と同じもので、別の表現をすれば、有効応力経路が排水時の強度に至らないうちに生じる破壊現象であるといえる。

Ladeらの研究におけるひずみ軟化が、せん断時に体積収縮を示すゆる詰め砂に限定されているのに対し、Chuら<sup>4)、5)</sup>、内田ら<sup>6)</sup>は、ひずみ経路制御三軸試験（体積ひずみ増分と軸ひずみ増分の比を一定に制御した三軸試験）と呼ばれる手法を用いて、せん断時に体積膨張を示す中～密詰め砂においてもひずみ軟化を伴う不安定挙動が表れることを示した。また、五十嵐ら<sup>7)</sup>も三軸圧縮試験において排水量を制御することによって静的液状化挙動が表れるとの結論を得ており、小高ら<sup>8)</sup>も同様の実験結果を示している。

本章は、これらのひずみ軟化を伴う不安定挙動を解析的に検討したものである。解析には、第2章で提案した弾塑性構成モデル<sup>9)</sup>を用いた。このモデルは、FEMによる2次元あるいは3次元液状化解析への使用を目的として提案した繰返しモデルである。

本章では、まずモデルを静的な単調载荷の解析に適用した時の構成関係を示す。次に、このモデルを用いてVerdugoら<sup>10)、11)</sup>、兵動ら<sup>12)、13)</sup>が行った非排水三軸圧縮試験のシ

ミュレーション解析を行い、ゆる詰め砂の非排水せん断強度がゼロになり静的液状化に至る挙動、間隙比の減少に伴いひずみ軟化から硬化に至る挙動をうまく表現できることを示す。

さらに、非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験でのひずみ軟化を表現する構成式の安定性について若干の理論的考察を加えたうえで、両試験でのひずみ軟化の判定式を示す。そして、この結果を基に材料固有のダイレイタンス特性に加えて、飽和砂要素に課せられる体積変化、すなわち、排水条件がひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生に重要な役割を演じていることを明らかにする。

本章で取り扱うひずみ軟化は、いわゆる排水時の砂骨格が示すひずみ軟化とは明らかに異なるものである。すなわち、以下に述べるひずみ軟化は、非排水あるいはひずみ経路制御というひずみの条件を課すこと（砂骨格と間隙水にある種の制限をつけること）によって生じた不安定挙動であり、せん断帯形成などに伴う不安定挙動とは異なるものであることを明記しておく。また、本論文における定式化は、微小変形理論の範囲で行う。

## 3.2 単調載荷時のモデルの概要

本モデルは、塑性硬化係数場理論に基づく無数曲面モデルの範疇に属し、応力比一定タイプの正規降伏曲面とその内部に定義される無数の硬化曲面によって構成される。この内、現在の応力点を通る活動硬化曲面は負荷の方向を規定する負荷曲面として用いられ、その移動、拡大および縮小によって古典弾塑性論で弾性域として取り扱われてきた領域での弾塑性挙動を記述する。

また、本モデルで陽に用いられる曲面は、正規降伏曲面、負荷曲面、最新の応力反転曲面、過去の最大の応力反転曲面および弾性域を定義する硬化曲面の5つである。このため、本モデルは5曲面モデルと呼ぶこともできる。

本章では、前述したように静的な単調載荷時の挙動を取り扱うため、以下、静的な単調載荷を考えた時のモデルの基本式（構成関係）を示す。この時用いられる曲面は、正規降伏曲面と負荷曲面の2つで、モデルは等方硬化モデルとなる。

### 3.2.1 正規降伏曲面F、負荷曲面f

正規降伏曲面Fは破壊曲面としての意味を持ち、2階の応力テンソル $\sigma_{ij}$ を用いて次式で表される。

$$F = \eta_{ij} \eta_{ij} - A^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

ここに、偏差応力比 $\eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}$ 、平均主応力 $p = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ 、偏差応力 $s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$ 、

$\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタであり、上式は、式(2.1)の両辺にAの自乗を乗ずることによって得られる。

Fの半径Aは、次式で与えられる。

$$A = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} G(\theta) \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

上式の $G(\theta)$ は、前述の式(2.4)で表され、SMPの概念に基づく松岡・中井規準<sup>14)</sup>をローデ角 $\theta$ の関数として導入したものである。この結果、Fの $\pi$ 平面での形はモールクーロン規準の角を滑らかに結んだ曲線で表され、軸対称応力状態( $\theta = \pm \pi/6$ )でモールクー

ロン規準と一致する。

負荷曲面  $f$  は、次式で与えられる。

$$f = \eta_{ij} \eta_{ij} - a^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

上式は、式 (2.5) の両辺に  $A$  の自乗を乗じ、 $\alpha_{ij} = 0$  を考慮することによって得られる。

ここで、 $a$  は  $f$  の半径であり、次式で与えられる。

$$a = a_0 G(\theta) \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

上式は、式 (2.6) において  $\alpha_{ij} = 0$  を考慮することによって得られる。また、 $a_0$  は現在の応力点を通るように硬化則から決定される。

### 3. 2. 2 流れ則

塑性ひずみ増分  $d\varepsilon^p_{ij}$  の方向を規定する単位テンソル  $g_{ij}$  は、次式で表される。

$$\begin{aligned} g_{ij} &= d\varepsilon^p_{ij} / |d\varepsilon^p_{ij}| \\ &= \alpha G_{ij} + (1/3) \alpha \beta \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (3.5) \end{aligned}$$

上式の両係数  $\alpha$ 、 $\beta$  は、カムクレイ型のストレス-ダイレイタンス-関係に非共軸性（応力主軸と塑性ひずみ増分主軸が一致しない現象）の評価を取り入れることによって、次式で表される<sup>9)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \beta &= -(M - c \eta) \\ \alpha &= \{ 3 / (\beta^2 + 3) \}^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6)$$

ここに、体積最大圧縮時の応力比  $M = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} G_m(\theta)$ 、 $\eta = |\eta_{ij}|$  である。 $\phi_{mc}$  を軸対称応力状態での体積最大圧縮時の内部摩擦角とすると、 $G_m(\theta)$  は  $G(\theta)$  で用いられる  $\phi_c$  を  $\phi_{mc}$  に置き換えたものとなる。また、 $c$  ( $-1 \leq c \leq 1$ ) は、次式で与えられるスカラーで、非共軸性の程度を表す。

$$c = s_{ij} G_{ij} / (2 J_2)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

ここで、 $c = 1$  は共軸を、 $c = -1$  は応力主軸方向と塑性ひずみ増分主軸方向が逆向きであることを示す。ただし、本章で取り上げた解析では、両主軸方向が固定されており、常に共軸 ( $c = 1$ ) である。

式 (3.5)、(3.7) で用いられる  $G_{ij}$  は、塑性偏差ひずみ増分  $d\varepsilon^p_{ij}$  の方向を示す単位テンソルで、次式で与えられる。

$$G_{ij} = de^{P_{ij}} / |de^{P_{ij}}|$$

$$= Q_{ij} / |Q_{ij}| \dots\dots\dots (3.8)$$

ここに、 $de^{P_{ij}} = d\varepsilon^{P_{ij}} - (1/3)d\varepsilon_{kk}^P \delta_{ij}$ である。上式の $Q_{ij}$ は、本章で取り扱う解析では次式で与えられる。同式は、負荷曲面 $f$ の偏差応力空間での外向き法線方向単位テンソルを表す。

$$Q_{ij} = -\eta_{ij} / |\eta_{ij}| \dots\dots\dots (3.9)$$

### 3. 2. 3 負荷指標 $df$ と硬化係数 $K_P$

塑性ひずみ増分  $d\varepsilon^{P_{ij}}$  の大きさを規定する  $df$  は、次式で与えられ、同式は、同時に載荷、除荷状態を判定する負荷指標として用いられる。

$$df = n_{ij} d\sigma_{ij} \dots\dots\dots (3.10)$$

負荷の方向を示す単位テンソル  $n_{ij}$  は、次式で与えられる。

$$n_{ij} = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) / |\partial f / \partial \sigma_{ij}| \dots\dots\dots (3.11)$$

硬化係数  $K_P$  は、応力空間の原点を中心とする負荷曲面  $f$  の大きさ  $a$  と同じく応力空間の中心を原点とする正規降伏曲面  $F$  の大きさ  $A$  の比で与えられ、次式で表される。すなわち、本章での解析はすべて等方硬化則に従う共軸モデル ( $c = 1$ ) を用いた解析である。

$$K_P = K_{P_I} \left( \frac{p}{p_I} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{a}{A} \right)^2 \dots\dots\dots (3.12)$$

ここに、 $K_{P_I} = r K_I$ 、 $p_I$  は初期平均主応力、 $K_I$  は  $p = p_I$  のときの体積弾性係数、 $r$  は硬化係数の初期値  $K_{P_I}$  を  $K_I$  で規準化したパラメーターであり、上式は式 (2.32) において  $R^E = 0$ 、 $R = a / A$  を考慮することによって得られる。

### 3. 2. 4 弾塑性係数テンソル $D^{EP_{ijkl}}$

上で示された  $n_{ij}$ 、 $g_{ij}$ 、 $K_P$  と全ひずみ増分  $d\varepsilon_{ij}$  を用いて、応力増分  $d\sigma_{ij}$  は次式で与えられる。

$$d\sigma_{ij} = D^{EP_{ijkl}} d\varepsilon_{kl} \dots\dots\dots (3.13)$$

上式の弾塑性係数テンソル  $D^{EP_{ijkl}}$  は、次式で表され、

$$D^{EP}_{ijkl} = D^E_{ijkl} - \frac{D^E_{mnlk} n_{mn} D^E_{ijuv} g_{uv}}{K_P + H_S} \dots\dots\dots (3.14)$$

ここに、 $D^E_{ijkl}$  は弾性係数テンソル、 $H_S = D^E_{pqst} n_{pq} g_{st}$  である。 $D^E_{ijkl}$  を構成するせん断弾性係数  $G$  および体積弾性係数  $K$  は、式 (3.15)、(3.16) で与えられる。

$$G = G_I (p/p_I)^{1/2} \dots\dots\dots (3.15)$$

$$K = K_I (p/p_I)^{1/2} \dots\dots\dots (3.16)$$

ここで、 $G_I$ 、 $K_I$  は  $p = p_I$  のときの  $G$  および  $K$  である。

### 3. 2. 5 本モデルの材料定数

用いられる材料定数は、2つの弾性定数 ( $G_I, K_I$ ) と  $\phi_c$ 、 $\phi_{mc}$ 、 $r$  の5つである。このうち、 $\phi_c$ 、 $\phi_{mc}$ 、 $r$  は通常の排水三軸圧縮試験から決定される。すなわち、 $\phi_c$  は  $q/p \sim e$  関係の破壊応力比から決定され、式 (3.1) の応力比  $A$  を、 $\phi_{mc}$  は  $q/p \sim v$  関係のピーク応力比 (体積最大圧縮時の応力比) から決定され、式 (3.6) の応力比  $M$  を定義する。また、 $r$  は  $q \sim e^P$  関係の初期接線勾配から決定され、式 (3.12) において  $a = 0$  のときの硬化係数の初期値  $K_{PI}$  を定義する。ここに、三軸応力状態での応力とひずみの定義は式 (3.17)、(3.18) のとおりで、 $e^P$  は  $e$  の塑性成分を表す。

$$q = \sigma_a - \sigma_r, \quad p = (\sigma_a + 2\sigma_r)/3 \dots\dots\dots (3.17)$$

$$e = (2/3)(\varepsilon_a - \varepsilon_r), \quad v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r \dots\dots\dots (3.18)$$

ただし、 $\sigma_a$  は軸応力、 $\sigma_r$  は側方応力、 $\varepsilon_a$  は軸ひずみ、 $\varepsilon_r$  は側方ひずみで、 $\sigma_a = \sigma_{11}$ 、 $\sigma_r = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ 、 $\varepsilon_a = \varepsilon_{11}$ 、 $\varepsilon_r = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$  である。

これら5つの材料定数のうち、ひずみ軟化挙動に及ぼす  $\phi_{mc}$  の効果については3. 4. 1で述べる。また、残りの  $G_I$ 、 $K_I$ 、 $\phi_c$  および  $r$  の効果については、3. 5で説明する。

### 3.3 非排水三軸圧縮試験のシミュレーション解析結果

本節および次節では、軸対称三軸応力状態を対象にしていることから、式(3.17)および式(3.18)に示した応力とひずみの定義を用いて検討を加える。

Verdugo ら<sup>10)、11)</sup>が行った等方圧密からのひずみ制御非排水三軸圧縮試験結果と解析結果の比較を図3-1(a)、(b)に示している。用いられた砂は豊浦砂で、同図(a)は、極めてゆるく詰められた砂( $D_r = 12\%$ )の応力経路と応力-ひずみ関係を、同図(b)は $D_r = 12\sim 31\%$ の結果を示している。豊浦砂の間隙比 $e_o$ と解析で用いた材料定数を、表3-1(L1~L3、M1~M3)に示す。

これらの結果の比較から、図3-1(a)では、極めてゆるく詰められた砂の非排水せん断強度がゼロとなり、静的液状化が発生する様子、同図(b)では、間隙比 $e_o$ の減少に伴いひずみ軟化からひずみ硬化に至る挙動がうまく表現されていることが分かる。

図3-2は、兵動ら<sup>12)、13)</sup>がひずみ制御で行った豊浦砂の異方圧密からの非排水三軸圧縮試験結果と解析結果を比較したものである。同図において、○、▽、□印は実験結果を実線は解析結果を示している。解析で用いた材料定数は、表3-1(H1~H3)に示されている。

解析結果は、初期せん断 $q_s (= \sigma_{a0} - \sigma_{r0})$ を有するゆる詰め砂( $D_r \cong 30\%$ )のひずみ軟化から硬化に至る挙動をうまく表現している。ここに、 $\sigma_{a0}$ 、 $\sigma_{r0}$ はそれぞれ $\sigma_a$ 、 $\sigma_r$ の初期値である。

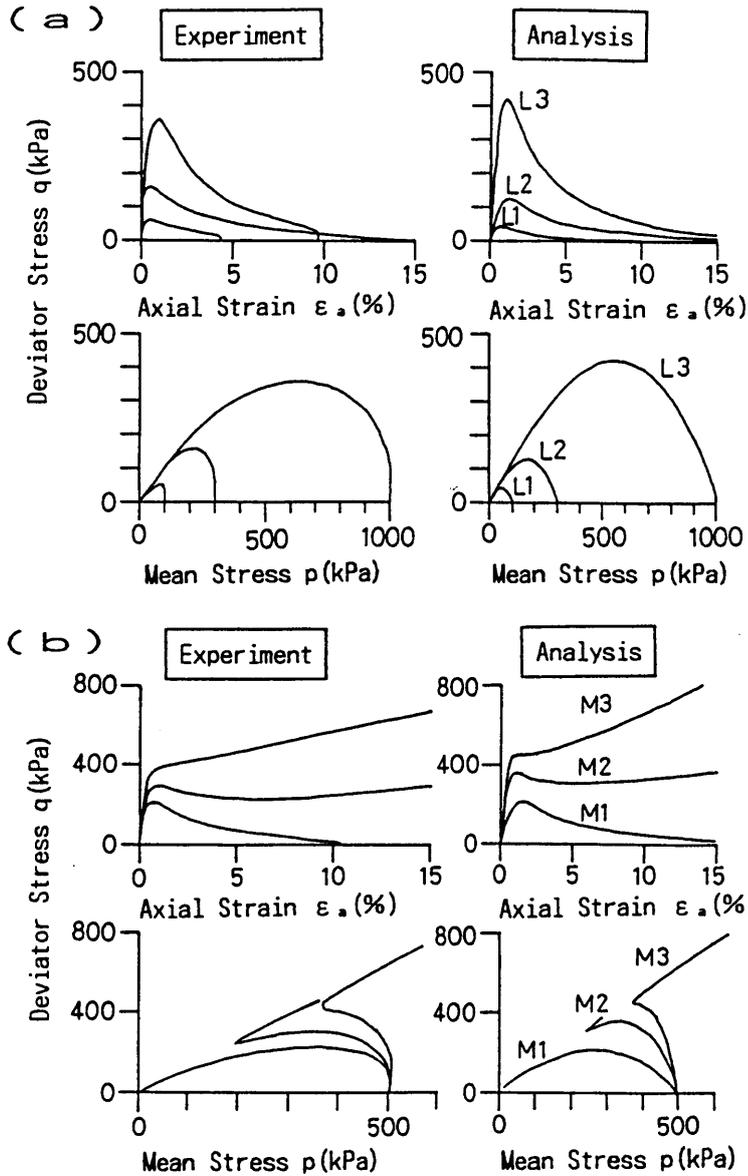


図 3 - 1 Verdugo ら<sup>10), 11)</sup> の実験結果と解析結果

表 3 - 1 間隙比  $e_o$  と材料定数

	$e_o$	$G_r$ (kPa)	$K_r$ (kPa)	$\phi$ deg.	$\phi_m$ deg.	$r$
L1	0.930	5430	14500	31.5	32.0	1.5
L2	0.930	9400	25100	31.5	32.0	1.5
L3	0.933	34400	91600	31.5	32.0	1.5
M1	0.930	12200	32600	31.5	32.0	1.5
M2	0.883	27000	72000	31.5	30.0	4.0
M3	0.861	28200	75400	31.5	30.5	8.0
H1	0.876	10000	10000	33.4	30.4	2.0
H2	0.869	10000	10000	33.4	30.4	2.0
H3	0.856	10000	10000	33.4	30.4	2.0

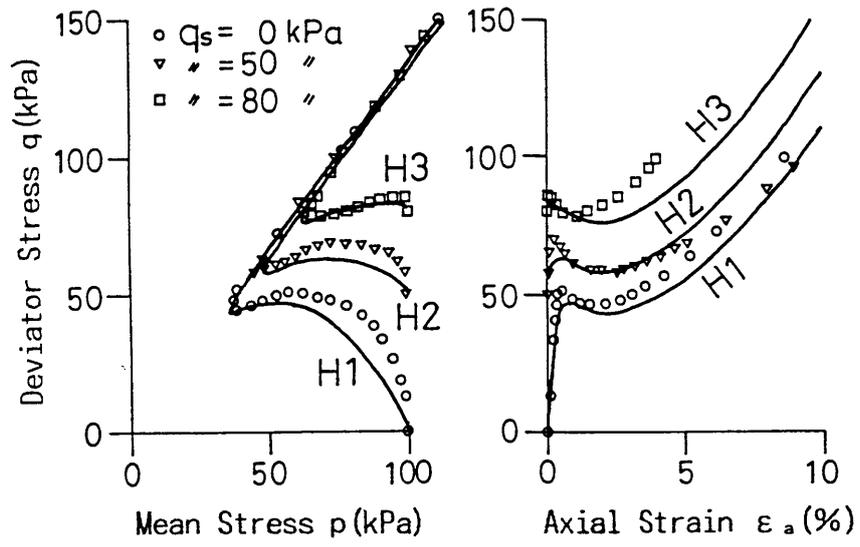


図 3 - 2 兵動ら<sup>12)</sup>、<sup>13)</sup> の実験結果と解析結果

### 3.4 三軸応力状態でのひずみ軟化挙動の理論的考察

以下、非関連流れ則を用いた硬化型のモデル（硬化係数  $K_P > 0$ ）を対象にして、ひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生条件を示し、若干の考察を加える。なお、以下の議論は応力比一定タイプの負荷曲面とカム・クレイ型のストレス・ダイレイタンスー関係を用い、破壊応力比で硬化係数  $K_P$  がゼロとなる硬化則を与える他のモデルにおいても成立する。

三軸応力状態での応力増分とひずみ増分の関係は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} dq \\ dp \end{Bmatrix} &= [D^{EP}] \begin{Bmatrix} de \\ dv \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{K_P + H_s} \begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sp} \\ D_{ps} & D_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} de \\ dv \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.19a) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} H_s &= 3G n_s g_s + K n_P g_P, \\ D_{ss} &= 3G (K_P + K n_P g_P), \quad D_{sp} = -3G K g_s n_P, \\ D_{ps} &= -3G K g_P n_s, \quad D_{pp} = K (K_P + 3G n_s g_s) \end{aligned} \right\} (3.19b)$$

である。また、 $n_P$ 、 $n_s$  は負荷の方向を示す単位ベクトル、 $g_P$ 、 $g_s$  は塑性ひずみ増分の方向を示す単位ベクトルで、前述の単位テンソル  $n_{ij}$ 、 $g_{ij}$  との関係は式 (3.20)、(3.21) のとおりである。

$$n_P = n_{kk}, \quad g_P = g_{kk} \dots\dots\dots (3.20)$$

$$n_s = \frac{2}{3} (n_{11} - n_{33}), \quad g_s = \frac{2}{3} (g_{11} - g_{33}) \dots\dots\dots (3.21)$$

#### 3.4.1 非排水時のひずみ軟化挙動の検討

非排水条件下 ( $dv = 0$ ) では、次式が得られる。

$$dq = \frac{3G (K_P + K n_P g_P)}{K_P + H_s} de \dots\dots\dots (3.22)$$

また、負荷の条件（負荷指標  $df > 0$ ）は次式となる。

$$df = n_s dq + n_P dp = \frac{K_P (3G n_s)}{K_P + H_s} de > 0 \dots\dots\dots (3.23)$$

式 (3.23) において、式 (3.24) が成り立つ (後述の表 3-2 参照) ことを考えると、

$$de_{ns} > 0 \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

次式が得られ、橋口<sup>16)</sup> の主張と一致する。

$$K_P + H_s > 0 \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

この結果、式 (3.22) において式 (3.25) を考慮すると非排水時にひずみ軟化の発生する条件は、式 (3.26) で与えられ、同式は、Ladeら<sup>2)</sup> が導いた安定条件の判定式と一致する。

$$K_P + K_{n_P} g_P < 0 \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

なお、非排水条件下でのひずみ軟化の定義として、式 (3.22) において  $dq \ de < 0$  を用いているが、式 (3.17)、(3.18) を考慮すると  $d\sigma_{ij} \ d\varepsilon_{ij} = dq \ de$  が成立するため、ひずみ軟化の定義として  $d\sigma_{ij} \ d\varepsilon_{ij} < 0$  を採用したものと等価である。

式 (3.26) は、式 (3.19) の弾塑性マトリックス  $D^{EP}$  の対角項  $D_{ss}$  に負が生じること、関連流れ則 ( $n_P = g_P$ ) を用いたモデルでは  $K_P > 0$  のもとでは軟化は生じないこと、および、非排水時のひずみ軟化が、材料固有の体積変化 ( $g_P$  の特性) に支配されることを示している。このとき、 $de^P$  は次式で表され、

$$de^P = \frac{3 G n_s g_s}{K_P + H_s} de \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

上式において、式 (3.25)、(3.26) および  $n_s g_s > 0$  (後述の表 3-2 参照) を考慮すると次式が成立する。

$$\frac{de^P}{de} = \frac{3 G n_s g_s}{(K_P + K_{n_P} g_P) + 3 G n_s g_s} > 1.0 \quad \dots\dots\dots (3.28)$$

同式は、 $de^P$  と  $de$  の符号が同じで、 $de^P$  の絶対値が  $de$  の絶対値より大きいことを表している。

ここで、この時の塑性ポテンシャル曲面  $g$  の接線方向と応力経路の方向との関係を調べてみる。式 (3.24) ~ (3.26) と式 (2.29) が成り立つ (表 3-2 参照) ことを考慮すると、

$$de g_s > 0 \quad \dots\dots\dots (3.29)$$

次式が得られる。

$$\begin{aligned} dg &= g_s dq + g_P dp \\ &= \frac{g_s de (K_P + K_{n_P} g_P) - n_s de g_P^2}{K_P + H_s} < 0 \quad \dots\dots\dots (3.30) \end{aligned}$$

式 (3.23) と式 (3.30) は、ひずみ軟化が生じる時の応力経路が負荷曲面  $f$  の接線方向より外

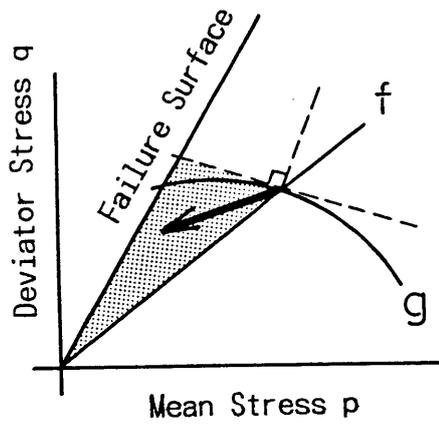


図 3 - 3 ひずみ軟化時の応力経路の方向

側で、塑性ポテンシャル曲面  $g$  の接線方向より内側（図 3 - 3 の着色部）に向かっていることを示す。Ladeら<sup>3)</sup>は、この領域の存在を実験的に確かめ、Wedge Shaped Region と呼んでおり、ここでは軸差応力  $q$  は低下するが、応力比  $q/p$  は増加する。

さて、本モデルでは硬化係数  $K_p$  の補間則として式 (3.12) が用いられ、体積弾性係数  $K$  は式 (3.16) で与えられる。両式を式 (3.26) に代入すると次式が得られ、軟化の条件から  $K_r$ 、 $p$  の影響を取り除くことができる。

$$r (1 - a/A)^2 + n_p g_p < 0 \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

ただし、上式の左辺第 1 項は常に正である。また、本モデルでは前述のように応力比一定タイプの負荷曲面を仮定しており、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} n_p &= C_1 \eta_T^2, & g_p &= -C_2 (M - |\eta_T|) \\ a/A &= C_3 |\eta_T| \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.32)$$

ここで、 $\eta_T = q/p$  で、前述の  $\eta = |\eta_{ij}| = (\eta_{ij} \eta_{ij})^{1/2}$  との関係は、 $\eta = \sqrt{2/3} \eta_T$  である。M は、次式で表され、

$$M = \frac{6 \sin \phi_{mc}}{3 \pm \sin \phi_{mc}} \quad \dots\dots\dots (3.33)$$

上式の符号は、三軸圧縮で -、三軸伸張で + であり、係数  $C_1 \sim C_3$  の符号は正である。また、硬化型のモデルにおいて  $n_p$ 、 $g_p$ 、 $n_s$ 、 $g_s$  および  $de$  の符号は式 (3.17)、(3.18)、(3.20)、(3.21) を考慮すると容易に決定でき、三軸圧縮、三軸伸張状態で表 3 - 2 のとおりである。同表において、 $g_p$  の符号は  $M < |\eta_T|$  で +、 $M > |\eta_T|$  で - である。

式 (3.32) を式 (3.31) に代入すると  $\eta_T$  だけにに関する不等式が得られ、 $p$  および  $q$  の項が単独に含まれないことが分かる。このことは、 $\phi_{mc} > \phi_c$  として  $g_p (< 0)$  の絶対値を

表 3-2 de、 $n_s$ 、 $n_p$ 、 $g_s$  および  $g_p$  の符号

	de	$n_s$	$n_p$	$g_s$	$g_p$
三軸圧縮	-	-	+	-	±
三軸伸張	+	+	+	+	±

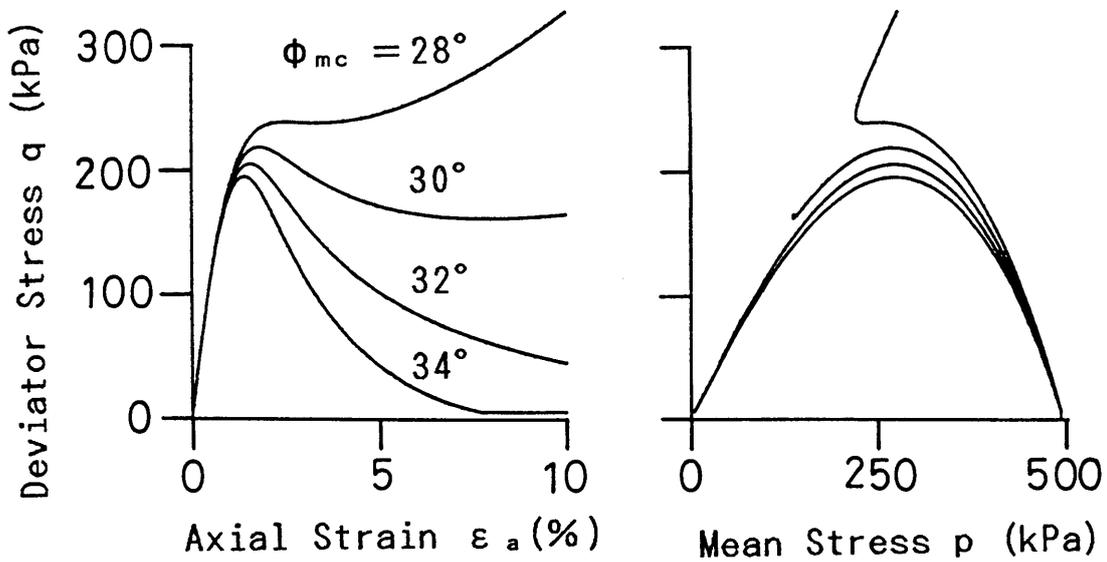


図 3-4  $\phi_{mc}$ だけを変えたときの解析結果

大きく設定すると、ある応力比  $\eta_T$  からひずみ軟化を示し、最終的に非排水せん断強度がゼロになる挙動を表現できることを示す。 $\phi_{mc} > \phi_c$  は、限界状態（変相状態）に至る前に破壊する材料を想定したことになる。前述の図 3-1 (a) の L1~L3、同図 (b) の M1 の解析では、表 3-1 に示したように  $\phi_{mc} = 32^\circ$ 、 $\phi_c = 31.5^\circ$  を用いることでこの現象を表現している。

図 3-4 は、図 3-1 (b) の M1 の材料定数を用いて、 $\phi_{mc}$  だけを  $28^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $34^\circ$  に変えたときの解析結果であり、M1 の  $\phi_{mc} = 32^\circ$  の結果も併記している。 $\phi_{mc}$  を大きくすると急激なひずみ軟化が発生し、収縮型 (Contractive) の挙動を示す。逆に、 $\phi_{mc}$  を小さくするとひずみ硬化が生じ、膨張型 (Dilative) の挙動が表現される。

### 3. 4. 2 ひずみ軟化時の構成式の安定性

ここでは、非排水時にひずみ軟化を示すときの骨格の変形を表現する構成式の安定条件

について検討してみる。まず、Drucker の安定条件（最大塑性仕事の原理）は、2次塑性仕事増分  $d^2W^P$  が正の時、解の安定性が保証されるというもので、この条件を常に満足する材料は安定な材料と呼ばれる。式(3.34)、(3.35)、式(3.23)～(3.26)および式(3.29)を考慮すると、

$$de^P = (df / K_P) g_s \dots\dots\dots (3.34)$$

$$dv^P = (df / K_P) g_P \dots\dots\dots (3.35)$$

式(3.36)が成立し、このDrucker の安定条件は満足されないことが分かる。

$$d^2W^P = d\sigma_{ij} d\varepsilon^P_{ij} = dq de^P + dp dv^P$$

$$= \frac{3G df de}{K_P(K_P + H_s)} \{ g_s(K_P + K n_P g_P) - K g_P^2 n_s \} < 0 \dots\dots (3.36)$$

同時に、式(3.37)が成立し、Drucker の条件より若干広い範囲を定義するHillの安定条件も満足されない（APPENDIX B参照）。

$$d^2W = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = dq de + dp dv < 0 \dots\dots\dots (3.37)$$

Ladeら<sup>3)</sup>は、Drucker およびHillの安定条件は解の安定に対する十分条件であり、必要条件ではないという事実に基づいて、（材料の）不安定挙動の判定には適用できない（式(3.37)の不等号が満たされても不安定な挙動がみられない）と述べている。しかし、この安定性の議論はLadeらの結論に対するDrucker の反論（不均質な変形を考慮するとLadeらの結果をDrucker の条件を基礎に説明可能である）<sup>17)</sup>からも分かるように極めて難しいものである<sup>18)</sup>。両者の立場は、ひずみ軟化を材料特性と考えるか境界値問題の結果として考えるべきかという立場の違いを示しているともいえるが、ここで使用するモデルは材料特性としては軟化の生じない硬化型のモデルであり、図3-1、3-2、3-4等にしたひずみ軟化は、結果的に後者の立場に立脚したものになっている。ただし、これらのひずみ軟化は、前述のように非排水というひずみの拘束を課すことによって生じた挙動であり、排水時の砂骨格が示すせん断帯形成に伴うひずみ軟化とは明らかに異なるものであることに注意が必要である。

ここで、式(3.19)の弾塑性マトリックス  $D^{EP}$  の固有値について調べておく。式(3.25)を考慮すると次式が成立する。

$$\det[D^{EP}] = \frac{D_{ss}D_{pp} - D_{sp}D_{ps}}{(K_P + H_s)^2} = \frac{3G K K_P}{K_P + H_s} > 0 \dots\dots\dots (3.38)$$

同式は、 $D^{EP}$  の2つの固有値が共に正で、ひずみ軟化がせん断帯の発生を伴わない均質な

変形であることを示している<sup>19)</sup>。一方、Bazantら<sup>20)</sup>は非対称マトリックス $D^{EP}$ の安定性は次式で表されるように、マトリックスの対称成分 $D^{EP_s}$ から決定されると述べている。

$$\det[D^{EP_s}] = \det \left\{ \frac{[D^{EP}] + [D^{EP}]^T}{2} \right\} \dots\dots\dots (3.39)$$

ここに、添字Tはマトリックスの転置を意味する。 $\det[D^{EP}] = 0$ が中立平衡極限状態 (Critical state of neutral equilibrium) を表すのに対し、 $\det[D^{EP_s}] = 0$ は安定限界極限状態 (Critical state of stability limit) を表す (APPENDIX B参照)。

$\det[D^{EP_s}]$ は次式で表され、非関連流れ則 ( $g_s n_p \neq g_p n_s$ )を用いると $K_p > 0$ のもとでも負となる場合が生じ得ることが分かる。

$$\det[D^{EP_s}] = \frac{3 G K}{(K_p + H_s)^2} \left\{ K_p (K_p + H_s) - \frac{3}{4} G K (g_s n_p - g_p n_s)^2 \right\} \dots\dots\dots (3.40)$$

図3-5は、図3-1 (b) のM1の解析における $D^{EP}$ および $D^{EP_s}$ の最小固有値 $\lambda_p$ 、 $\lambda_s$ を軸ひずみ $\varepsilon_a$ に対して示したもので、 $\lambda_0$ は $\lambda_p$ の初期値である。同図によると、 $\lambda_p$ は $\varepsilon_a$ の増加に伴って次第にゼロに接近するが、式(3.38)で示されるように常に正である。しかし、 $\lambda_s$ は $\varepsilon_a = 1.5\%$ 付近で $\lambda_s = 0$ を通過しており、それ以降では安定した平衡状態は存在しないことになる。すなわち、本研究で取り扱うひずみ軟化は $D^{EP}$ の最小固有値が常に正の状態が生じ、 $D^{EP_s}$ の最小固有値が負となる屈服形の不安定 (Flattening instability)<sup>21)</sup>挙動と類似の現象であると考えられ、解の唯一性の消失、分岐を伴う座屈型の不安定<sup>21)</sup>挙動とは異なる現象である。

以上の考察は、有効応力に基づく式(3.19)の弾塑性マトリックス $D^{EP}$ についてのものである。以下では、全応力に基づく弾塑性マトリックス $D^{EP_t}$ について検討してみる。

全応力表示の応力増分～ひずみ増分関係は、次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} dq \\ dp_t \end{Bmatrix} = [D^{EP_t}] \begin{Bmatrix} de \\ dv \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.41)$$

$$[D^{EP_t}] = \frac{1}{K_p + H_s} \begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sp} \\ D_{ps} & D_{pp} + (K_p + H_s) \Gamma \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.42)$$

ここに、 $dp_t = d(p + p_w)$ 、 $p_w$ は間隙水圧である。 $\Gamma$ は、次式で与えられ、

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{n}{K_f} + \frac{1-n}{K_m} \dots\dots\dots (3.43)$$

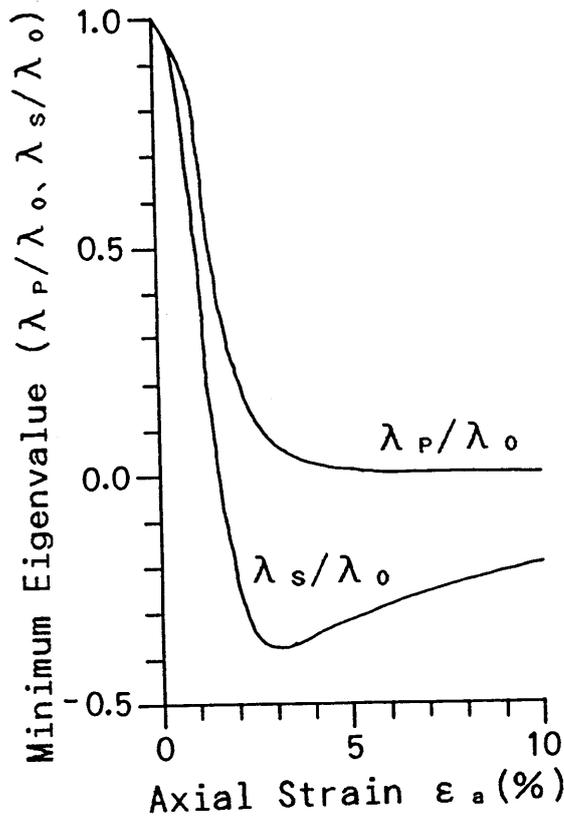


図 3-5  $D^{EP}$ 、 $D^{EP_s}$  の最小固有値  $\lambda_P$ 、 $\lambda_S$

$n$  は間隙率、 $K_f$ 、 $K_m$  はそれぞれ間隙流体および土粒子の体積弾性係数である。

$D^{EP_t}$  の固有値  $\lambda_t$  は、次の 2 次方程式の 2 つの解であり、

$$\lambda_t^2 + A \lambda_t + B = 0 \quad \dots\dots\dots (3.44)$$

$$A = D_{SS} + D_{PP} + (K_P + H_S) \Gamma$$

$$B = D_{SS} \{ D_{PP} + (K_P + H_S) \Gamma \} - D_{SP} D_{PS}$$

最小固有値がゼロになるのは、式 (3.44) の定数項  $B$  がゼロのときである。このとき、 $K_P$  は次式で与えられる。

$$K_P = -H_S \quad \dots\dots\dots (3.45)$$

$$\text{または、} K_P = -K_{n_P} g_P / (1 + K / \Gamma) \quad \dots\dots\dots (3.46)$$

式 (3.45) は、式 (3.25) より意味のない解である。この結果、式 (3.46) が成立するとき  $\lambda_t = 0$  が生じ、解の唯一性が保証されないことが分かる。

ここで、土粒子および間隙流体を非圧縮性とすれば ( $\Gamma = \infty$ )、式 (3.46) は式 (3.26) に示した軟化の生じる条件と一致する。

式 (3.46) は、全応力を制御するいわゆる応力制御試験ではひずみ軟化挙動を再現できな

いことを意味する。一方、前述の式(3.38)は、ひずみ制御非排水試験で得られたひずみ軟化時の有効応力経路をたどるように有効応力を制御すれば、ひずみ軟化挙動を再現できることを示している。

図3-6は、この様子を模式的に示したものである。図中の実線(A→B→C)は、ひずみ軟化時の有効応力経路を、破線(A→B<sub>t</sub>→C<sub>t</sub>)は全応力経路を示す。また、p<sub>wB</sub>およびp<sub>wC</sub>はB点、C点での間隙水圧である。全応力をB<sub>t</sub>点からC<sub>t</sub>点へ低下させると同時に間隙水圧を流入(dp<sub>w</sub> = p<sub>wC</sub> - p<sub>wB</sub>)すれば、有効応力はB→Cへ移動し、ひずみ軟化挙動が再現される。一方、いわゆる応力制御方式で全応力だけをB<sub>t</sub>→C<sub>t</sub>へ低下させても、有効応力はB→Dへ移動し、材料は線形弾性体として挙動することになる。すなわち、式(3.46)はB<sub>t</sub>→C<sub>t</sub>の全応力経路に対して2つの有効応力経路(B→DとB→C)が存在し得ることを意味している。

### 3.4.3 体積ひずみを制御した時のひずみ軟化挙動の検討

近年、せん断中に体積ひずみを膨張側に制御すると、密な砂でもひずみ軟化挙動が現れることが示されている<sup>4) - 6)</sup>。以下、体積ひずみを制御したときのひずみ軟化について検討しておく。

まず、式(3.47)の $\bar{a}$ を用いて体積ひずみ増分と軸ひずみの増分の比を定義すると、

$$dv/d\varepsilon_a = \bar{a} \quad \dots\dots\dots (3.47)$$

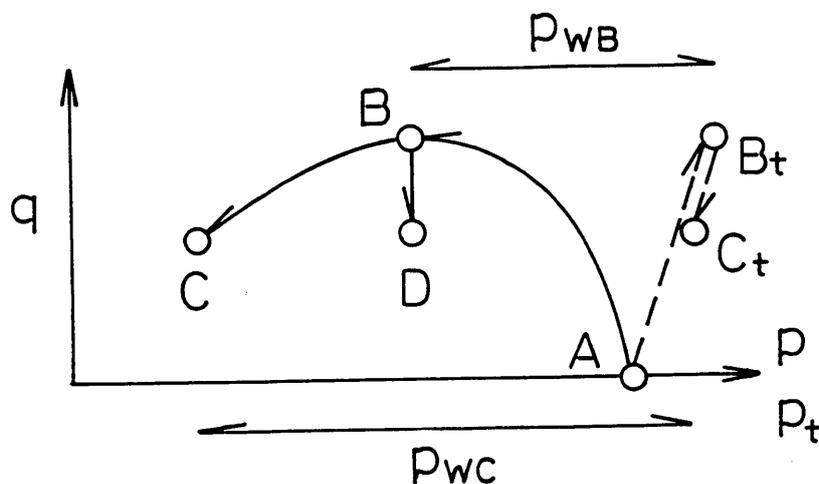


図3-6 有効応力経路と全応力経路

式(3.48)、(3.49)が成り立つ。

$$dv/de = \bar{b} \quad \dots\dots\dots (3.48)$$

$$\bar{b} = 3\bar{a} / (3 - \bar{a}) \quad \dots\dots\dots (3.49)$$

例えば、側方ひずみ拘束 ( $d\varepsilon_r=0$ ) 三軸圧縮試験 (K<sub>0</sub> 圧密試験) は、 $\bar{a} = 1$ 、 $\bar{b} = 1.5$  としたひずみ制御試験、平均主応力 p 一定試験は、次式の  $\bar{b}$  に基づいて  $dv/de$  を制御した試験といえる。

$$\bar{b} = -\frac{D_{PS}}{D_{PP}} = \frac{3Gn_s g_P}{K_P + 3Gn_s g_s} \quad \dots\dots\dots (3.50)$$

平均主応力 p 一定試験においては、式(3.48)、(3.50)より  $dq \sim de$  関係は次式で表され、 $n_s g_s > 0$  を考慮すると  $K_P > 0$  のもとではひずみ軟化は生じない (無条件に安定) ことが分かる。

$$dq = \frac{3GK_P}{K_P + 3Gn_s g_s} de \quad \dots\dots\dots (3.51)$$

体積ひずみ増分を制御する時は、 $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$  の符号は意味をもつ。三軸圧縮では  $\bar{a} < 0$  が膨張を、三軸伸張では  $\bar{a} > 0$  が膨張を意味し、 $\bar{b}$  の符号の意味も同じである。この時、 $dq \sim de$  関係は式(3.52)である。

$$dq = \frac{3G \{K_P + K_{n_P}(g_P - \bar{b}g_s)\}}{K_P + H_s} de \quad \dots\dots\dots (3.52)$$

負荷の条件は次式で与えられる。

$$df = \frac{K_P(3Gn_s + \bar{b}K_{n_P})}{K_P + H_s} de > 0 \quad \dots\dots\dots (3.53)$$

ここで、 $\bar{b}$  を一定にして体積ひずみを膨張側に制御した試験<sup>5)、6)</sup> を考える。この状況は地震中に発生した過剰間隙水圧が下方から流入してくる過程で、不透水層の存在によって上方への水圧の消散が妨げられた場合の近似と考えることができる。この時、式(3.53)において式(3.24)、 $\bar{b} de > 0$ 、 $n_P > 0$  を考慮すると非排水の場合と同様に式(3.25)、式(3.38)が成り立ち、体積ひずみ増分と軸ひずみ増分の比を一定に制御した時のひずみ軟化も均質な変形であることが分かる。また、ひずみ軟化の条件は式(3.54)で与えられ、前述の式(3.26)は、同式の特殊な場合 ( $\bar{b} = 0$ ) とみなすことができる。

$$K_P + K_{n_P}(g_P - \bar{b}g_s) < 0 \quad \dots\dots\dots (3.54)$$

上式で、 $\bar{b}g_s$  は排水条件によって課せられる体積変化を表すと考えることができ、せん断中に体積ひずみを膨張側に制御するとき、 $\bar{b}g_s > 0$  が成り立つ。この結果、非排水時

には式(3.26)が成立しない密な砂でも、体積ひずみを制御すること、すなわち、間隙水を強制的に流入することによって課せられる体積膨張 ( $\bar{b} g_s$ ) が材料固有の体積膨張 ( $g_p$ ) より大きくなると、ひずみ軟化が容易に生じることが分かる。この結論は、内田ら<sup>6)</sup>が実験的に導いた結論を理論的に導いたものになっている。

なお、この時飽和砂の間隙水圧増分  $dp_w$  は、次式で表される。

$$dp_w = \Gamma dv = \Gamma \bar{b} de \dots\dots\dots (3.55)$$

図3-7(a)は、図3-1(b)のM3の材料を用いて、式(3.47)の $\bar{a}$ を一定 ( $\bar{a} = -0.1, -0.3$ ) に制御した時のひずみ制御三軸圧縮試験の解析結果である。同図には、非排水 ( $\bar{a} = 0.0$ ) の場合の結果も併記している。例えば、材料が線形等方弾性体と仮定すれば、応力経路は図3-7(b)に示すように  $dq/dp = \text{一定}$  で移動する。この図から、非排水時にひずみ硬化を示す膨張性材料も体積ひずみを制御することによって、あたかも収縮性材料に変わったかのように、ひずみ軟化を示し、復元力が低下することが分かる。このことは、材料固有のダイレイタンスー特性に加えて、飽和砂要素に課せられる体積変化、すなわち、間隙水の流出入がひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生に重要な役割を演じていることを示している。

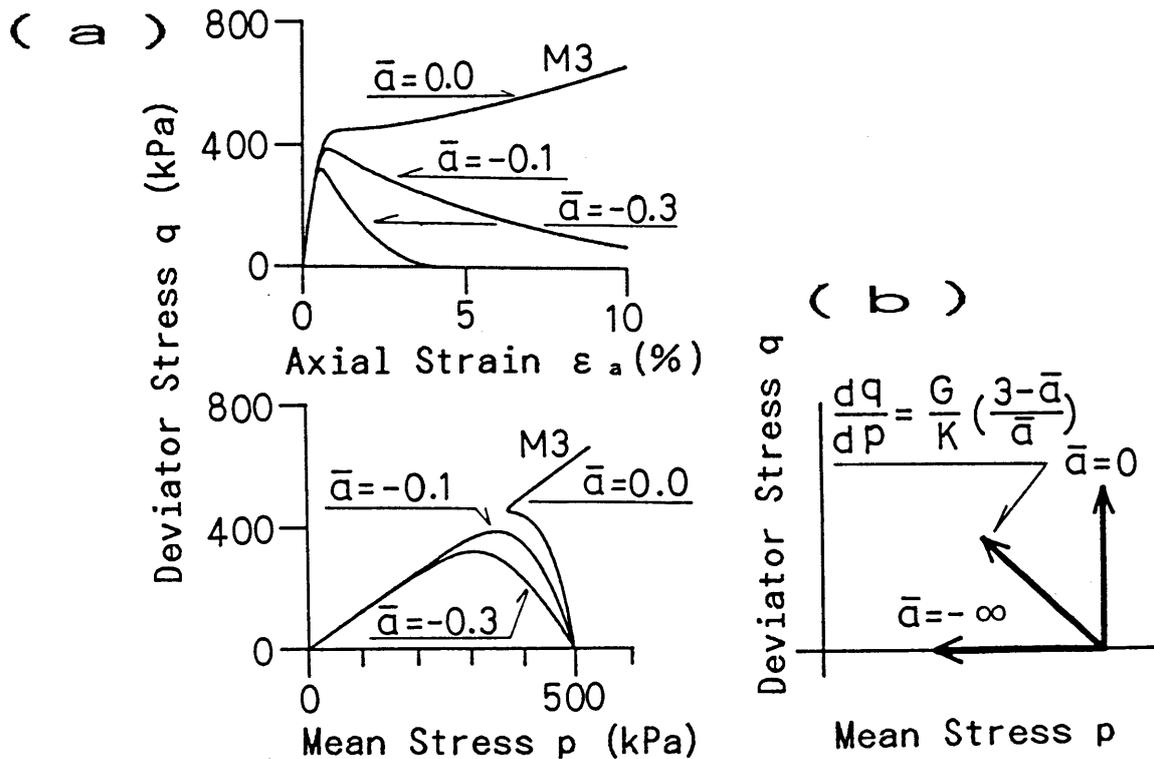


図3-7  $\bar{a}$ を一定に制御したときの解析結果

なお、内田ら<sup>6)</sup>は初期平均主応力  $p_i = 200 \text{ kPa}$  の条件下で水中落下法による比較的密な Ottawa Sand ( $D_r = 60\%$ ) を用いて、式 (3.47) の  $\bar{a}$  を  $-0.3$ 、 $-0.5$ 、 $-0.7$  としたひずみ制御三軸圧縮試験を実施している。図 3-8 はこの結果で、 $\bar{a} = -0.5$ 、 $-0.7$  のとき平均主応力  $p$  が単調に低下する静的液状化が生じている。一方、図 3-7 は  $p_i = 500 \text{ kPa}$  のゆるい豊浦砂 ( $D_r = 31\%$ ) の結果である。同図では、 $\bar{a} = -0.1$ 、 $-0.3$  のとき静的液状化に至っているが、これは、 $p_i$  が大きいこと、密度が低いことが影響しているものと思われる。

三軸状態での極端な例として、異方圧密状態から  $de = 0$  の条件で、体積ひずみだけを膨張側に制御する ( $dv > 0$ ) 試験が考えられる。この時、 $\bar{a} = 3$ 、 $\bar{b} = \infty$  である。負荷の条件は次式で与えられ、

$$df = \frac{K_p K_{np}}{K_p + H_s} dv > 0 \quad \dots\dots\dots (3.56)$$

前述の式 (3.23)、(3.53) と同様に式 (3.25)、(3.38) が成立する。この時、 $dq$  は、次式で与えられる。

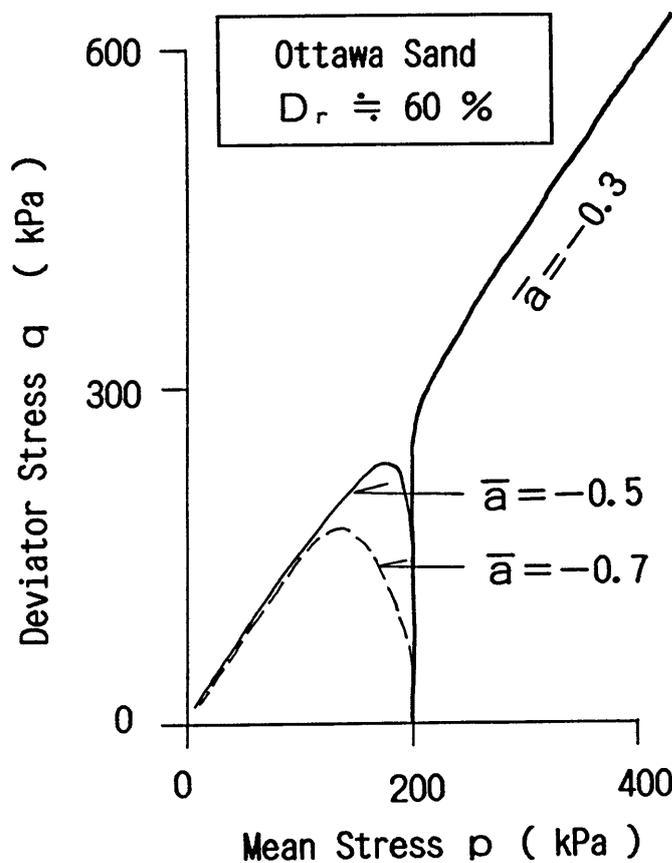


図 3-8 内田ら<sup>6)</sup>のひずみ経路制御三軸圧縮試験結果

$$dq = \frac{-3GK g_s n_p}{K_p + H_s} dv \dots\dots\dots (3.57)$$

上式より、三軸圧縮では  $dq > 0$ 、三軸伸張では  $dq < 0$  が得られ、常に  $q$  の絶対値が低下することが分かる。

図3-9の実線は、初期せん断  $q_s$  を有する図3-2のH2 ( $q_s = 50$  kPa) およびH3 ( $q_s = 80$  kPa) の材料定数を用いて、体積ひずみだけを膨張側に制御した場合の解析結果(応力経路)である。例えば、材料が線形等方弾性体と仮定すれば、応力経路は図中に破線で併記したように  $p$  軸に平行に移動する。同図では、平均主応力  $p$  の低下に伴って初期せん断  $q_s$  も次第に低下しており、間隙水圧の流入による地盤の復元力の低下、すなわち、一種の静的液化現象を表していると考えられる。

図3-9に示すような応力経路(ひずみ経路)は、例えばカム・クレイ型の降伏規準に従う材料では通常弾性域に入る。しかしながら、砂のような粒状体では降伏規準を近似的に応力比一定線とみなすことができることを考慮すれば、この挙動は現実に生じ得る砂の浸透破壊現象とみることができよう。また、図3-7、図3-9に示したような体積ひずみ増分を制御した場合の土要素の挙動に関する検討は、地盤への薬液注入、グラウトおよび水圧破碎問題等への適用も期待できるものと考えられる。

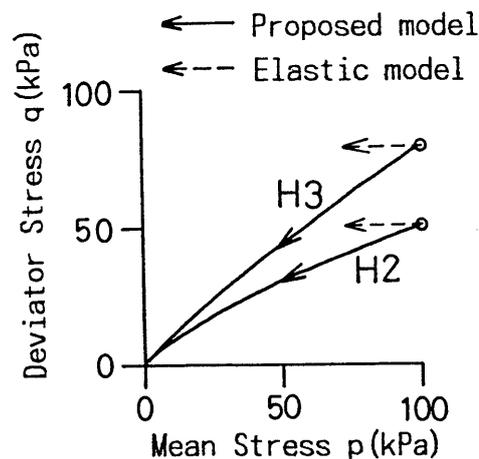


図3-9 体積ひずみだけを膨張側に制御したときの解析結果

## 3.5 パラメトリック・スタディ

3.2.5で述べたように、三軸試験の解析で有効な材料定数は、2つの弾性定数 ( $G_r$ 、 $K_r$ )、三軸応力状態での破壊時の内部摩擦角  $\phi_c$ 、同じく三軸応力状態での体積最大圧縮時の内部摩擦角  $\phi_{mc}$ 、および硬化係数の初期値  $K_{PI}$  を設定する  $r$  の5つである。このうち、 $\phi_{mc}$  のひずみ軟化挙動に及ぼす影響については、図3-4に関連して詳しく述べた。すなわち、 $\phi_{mc}$  を大きくすると急激なひずみ軟化が発生し、収縮型 (Contractive) の挙動を示す。逆に、 $\phi_{mc}$  を小さくするとひずみ硬化が生じ、膨張型 (Dilative) の挙動が表現される。

本節では、残りの4つの材料定数  $G_r$ 、 $K_r$ 、 $\phi_c$ 、 $r$  を変えたパラメトリック・スタディからこれらの材料定数がひずみ軟化挙動に及ぼす影響を調べておく。ただし、 $K_r$  については、式(3.15)、(3.16)からポアソン比  $\nu = \text{一定}$  が得られるため、ここでは  $\nu$  を変えた解析を行う。

図3-10～図3-13は、図3-4と同様に表3-1のM1の材料定数を用いて、それぞれ  $r$ 、 $G_r$ 、 $\phi_c$  および  $\nu$  のみを変えた解析結果である。

図3-10では、 $r$  の増加に伴って応力-ひずみ関係の初期接線剛性が増加し、ひずみ軟化発生時の軸差応力 (ピーク強度) も増加する。また、 $r$  が大きくなると、大ひずみ時にも大きなせん断抵抗を有することが分かる。

図3-11では、 $G_r$  を変えてもピーク強度は変わらないが、 $G_r$  が大きくなるとピーク時のひずみが小さくなり、結果的に急激なひずみ軟化が表現される。

図3-12の  $\phi_c$  の影響は、図3-4の  $\phi_{mc}$  の影響と関連する。すなわち、 $\phi_c$  を大きくすることは  $\phi_{mc}$  を小さくすることに相当し、体積膨張領域の拡大を意味する。逆に、 $\phi_c$  を小さくすることは  $\phi_{mc}$  を大きくすることに相当し、体積収縮領域の拡大を意味している。このため、 $\phi_c$  を大きくするとひずみ硬化が生じ、膨張型 (Dilative) の挙動が表現される。逆に、 $\phi_c$  を小さくすると急激なひずみ軟化が発生し、収縮型 (Contractive) の挙動を示す。

砂の排水せん断強度は、一般に破壊時の内部摩擦角  $\phi_c$  により評価されるが、図3-4、図3-12は砂の非排水せん断強度が、 $\phi_c$  と  $\phi_{mc}$  の相対的な大小関係により決定され

ることを示している。

図3-13の $\nu$ の影響は、 $G_I$ の影響とほぼ同じであり、 $\nu$ を変えてもピーク強度は変わらない。また、 $\nu$ が大きくなると ( $K_I$ が大きくなると) ピーク時のひずみが小さくなり、急激なひずみ軟化が表現される。

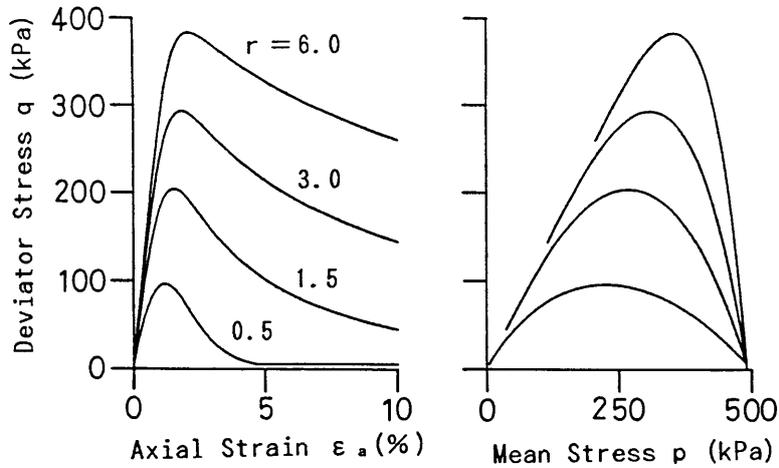


図3-10  $r$ のみを変えたパラメトリック・スタディ

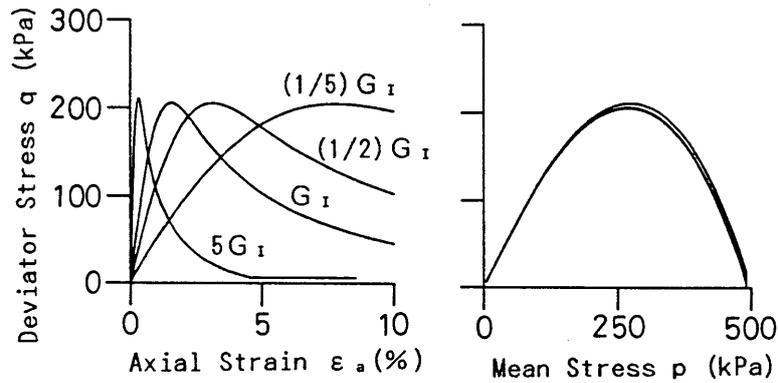


図3-11  $G_I$ のみを変えたパラメトリック・スタディ

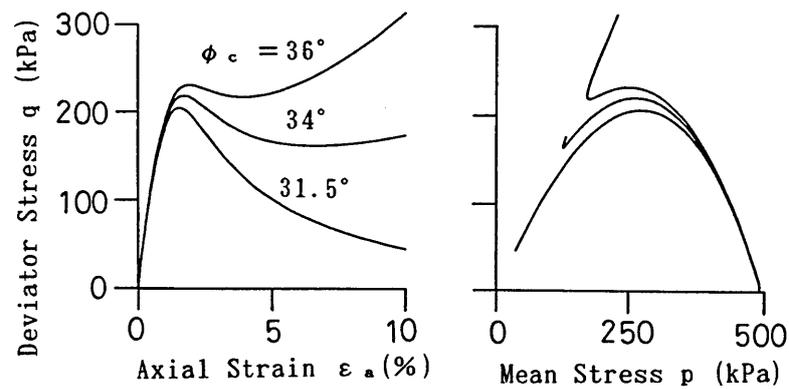


図3-12  $\phi_c$ のみを変えたパラメトリック・スタディ

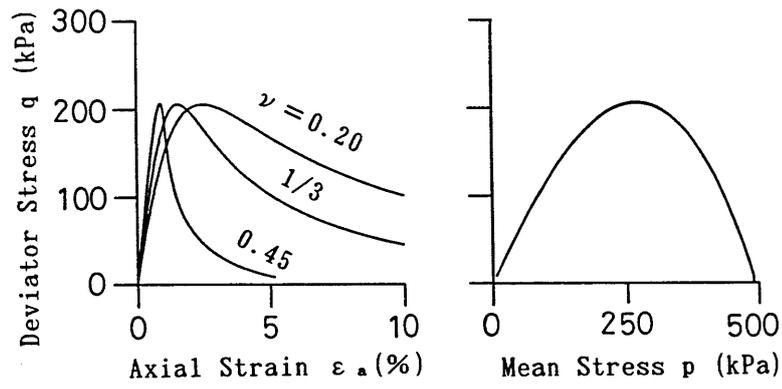


図 3-13  $\nu$ のみを変えたパラメトリック・スタディ

### 3.6 本章の要約

本章では、第2章で提案した繰返し弾塑性構成モデルを非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験（体積ひずみ増分と軸ひずみ増分の比を一定に制御した三軸試験）で表れるひずみ軟化を伴う不安定挙動の解析に適用した。

本章では、まずモデルを静的な単調載荷の解析に適用したときの構成関係を示した。次に、このモデルを用いて非排水三軸圧縮試験のシミュレーション解析を行い、ゆる詰め砂の非排水せん断強度がゼロになり静的液状化に至る挙動をうまく表現できることを示した。さらに、非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験でのひずみ軟化を表現する構成式の安定性について理論的考察を加えたうえで、両試験でのひずみ軟化の判定式を示した。そして、この結果を基に材料固有のダイレイタンスー特性と飽和砂要素に課せられる体積変化、すなわち、排水条件（間隙水の流出入）がひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生に及ぼす役割を明らかにした。

本章の主要な結論は、次のとおりである。

- ①：提案した弾塑性構成モデルは、極めてゆるく詰められた砂において非排水せん断強度がゼロになり、静的液状化が発生する挙動、間隙比の減少に伴いひずみ軟化からひずみ硬化に至る挙動をうまく表現することができる。
- ②：限界状態（変相状態）に至る前に破壊する材料（ $\phi_{mc} > \phi_c$ ）を想定することで静的液状化を表現することができる。
- ③：非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験でひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生する条件は、それぞれ、下に示す式(3.26)と式(3.54)で表され、この時の変形は、せん断帯の発生を伴わない均質なものである。

$$K_P + K_{n_P} g_P < 0 \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

$$K_P + K_{n_P} (g_P - \bar{b} g_s) < 0 \quad \dots\dots\dots (3.54)$$

- ④：式(3.54)から分かるように、ひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生には、材料固有のダイレイタンスーに加えて、排水条件（間隙水の流出入）が重要な役割を演じている。

## 参考文献 (第3章)

- 1) P.V.Lade, R.B.Nelson and Y.M.Ito : Instability of granular materials with nonassociated flow, J. Eng. Mech., ASCE, 114 (12), pp. 2173-2191, 1988
- 2) D.Pradel and P.V.Lade : Instability and plastic flow of soils. II Analytical investigation, J. Eng. Mech., ASCE, 116 (11), pp. 2551-2566, 1990
- 3) P.V.Lade : Static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes, J. Geo. Eng., ASCE, 118 (1), PP. 51-71, 1992
- 4) J.Chu : Discussion of static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes, J. Geo. Eng., ASCE, 119 (2), PP. 385-391, 1993
- 5) J.Chu, S-C.R.Lo and I.K.Lee : Instability of granular soils under strain path testing, J. Geo. Eng., ASCE, 119 (5), PP. 874-891, 1993
- 6) 内田一徳、Y.P.Vaid : ひずみ経路制御三軸試験、第27回土質工学研究発表会、PP. 553-556, 1992
- 7) 五十嵐正剛、山田恭央 : 排水量を制御した砂の静的三軸試験、第27回土質工学研究発表会、PP. 557-558, 1992
- 8) 小高猛司、細岡生也、浅岡 顕 : 砂の初期構造が限界状態時の  $e \sim p' \sim q$  関係に及ぼす影響、第28回土質工学研究発表会、PP. 603-604, 1993
- 9) 森尾 敏、日下部伸、安福規之、兵動正幸 : 非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成モデル、土木学会論文報告集、No. 487 / III-26, PP. 139-148, 1994
- 10) R.Verdugo, K.Ishihara, Y.Miyata : Undrained response of sandy soils, 26th Nat. Conv. of JSSMFE, Nagano, Japan, PP. 529-532, 1991
- 11) R.Verdugo, K.Ishihara : Undrained behavior of silty materials, 27th Nat. Conv. of JSSMFE, PP. 603-606, 1992
- 12) 兵動正幸、村田秀一、安福規之、谷水秀行 : 初期せん断を受けるゆるい飽和砂の非排水せん断挙動、第25回土質工学研究発表会、PP. 743-746, 1990

- 13) Hyodo, M., Tanimizu, H., Yasufuku, N. and Miura, H. : Undrained cyclic and monotonic triaxial behaviour of saturated loose sand, *Soils and Foundations*, Vol. 34, No. 1, PP. 19-32, 1994
- 14) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *Proc. JSCE*, No. 232, pp. 59-70, 1974
- 15) 西川明宏、安福規之、中田幸男、兵動正幸、村田秀一：砂の拘束圧依存性と中間主応力の影響を考慮した構成式について、第28回土質工学研究発表会、pp. 495-498、1993
- 16) 橋口公一：最新弾塑性学、朝倉書店、1990
- 17) Drucker, D.C., and Li, M. : Triaxial instability of a nonassociated flow-rule model、*J. Eng. Mech., ASCE*, 119 (6)、pp. 1188-1204, 1993
- 18) 飛田善雄：標準固体と地盤材料の構成モデル、第28回土質工学研究発表会、pp. 505-508、1993
- 19) Rundnicki, J.W. and Rice, J.R. : Condition for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975
- 20) Z.P. Bazant and L. Cedolin : *Stability of structure*, Oxford Univ. Press, pp. 670-677, 1991
- 21) 川井忠彦：座屈問題解析、コンピューターによる構造工学講座Ⅱ-6-B、培風館、pp. 9-51、1975
- 22) 岡 二三生：4.5 塑性不安定、粒状体の力学、(社) 土質工学会、粒状体力学に関する国内委員会、PP. 258-262、1993
- 23) 北川 浩：弾・塑性力学、裳華房、PP. 114-141、1987
- 24) 橋口公一：塑性ストレッチングの応力速度への方向依存性を有する弾塑性構成式、土木学会論文集、N0. 507 / I - 30, pp. 43-52、1995
- 25) 森尾 敏、日下部伸、安福規之、兵動正幸：三軸応力状態での飽和砂の不安定挙動の解析的検討、土木学会論文集、N0. 499 / III - 28, pp. 157-165、1994

## 第4章 弾塑性構成式に基づく異方性砂の非排水挙動の評価

### 4.1 概説

砂のような粒状体は、通常強い固有異方性<sup>1)</sup>を有しており、堆積面（水平方向）と最大主応力方向のなす角度 $\delta$ によって、その挙動は大きく異なる。一般に、 $\delta$ が $90^\circ$ から減少して強度が低下するのに伴って体積最大圧縮量は増大し、破壊時ひずみも増加する。このため、三軸圧縮状態で膨張的（Dilative）な挙動を示す材料が、伸張状態では収縮的（Contractive）な挙動を示す実験結果が数多く報告されている<sup>2) - 8)</sup>。

一方、近年大地震による液状化の発生予測、影響予測および対策効果の予測が重要な検討課題となってきた。特に、有効応力法による2次元あるいは3次元液状化解析手法の実務への適用は、液状化対策工の設計を実施するうえで急務であり、上で述べた砂の異方的特性をうまく表現できる妥当な弾塑性構成式の確立が望まれている。

本章は、液状化に関連の深い飽和砂の非排水挙動のうち、一般応力空間での両極端の応力状態である三軸圧縮と伸張挙動に着目し、これを統一的に表現する構成式について検討したものである。三軸圧縮と伸張時には、中間主応力に基づく異方性、構造的な異方性の影響が含まれ、砂の非排水挙動に大きな違いがみられるため、一般応力空間でモデルを組み立てる上で両者を統一的に表現できることは重要な課題のひとつである。本章では、第2章、第3章で提案した弾塑性構成式の流れ則を拡張し、これを静的な単調载荷に対して適用している。具体的には、塑性ポテンシャル曲面（流れ則）を定義する体積最大圧縮時の応力比 $M$ の $\pi$ 平面での形状を任意に選定できるモデルを提案している。これによって、飽和砂の非排水三軸圧縮と伸張挙動の大きな違い（異方性）をうまく表現できることを示す。

一般応力空間で提示された繰返し弾塑性構成式には、何らかの異方性を導入することで、三軸圧縮と伸張挙動の違いを表現できるものが多い。 $\pi$ 平面での断面形状に着目すると、西ら<sup>11)</sup>のモデルは破壊曲面と塑性ポテンシャル曲面にモールクーロン規準を、負荷

曲面にDrucker-Prager規準を適用している。そして、これら3曲面の中心位置をすべて初期応力の方向にずらすことで、初期応力による応力誘導異方性を表現している。八嶋らのモデル<sup>12)</sup>も、3曲面の中心位置をすべて初期応力の方向にずらしており、負荷曲面と塑性ポテンシャル曲面はDrucker-Prager規準、破壊曲面はモールクーロン規準である。平井<sup>13)</sup>のモデルとPastorら<sup>14)</sup>のモデルは、3つの曲面をローデ角 $\theta$ を用いて設定し、3曲面とも同じ定義式が用いられているが、両者の $\pi$ 平面での形状は異なっている。また、第2章、第3章で提案したモデルも3つの曲面にローデ角 $\theta$ を用いて設定した松岡・中井規準を用いている。

これらのモデルでは、強度特性および体積変化特性（ダイレイタンスー特性）のそれぞれの特性に及ぼす中間主応力の影響は表現される。しかしながら、三軸圧縮時に膨張的な挙動を示す材料が、三軸伸張時に収縮一方となるような強い異方性を表現することは困難である。

本章では、まず砂のせん断過程における体積変化特性に関する既往の実験結果を、構造的な異方性に着目して整理し、その結果に基づいて、流れ則を定義する体積最大圧縮時の応力比 $M$ の $\pi$ 平面での形状を任意に選定できるモデルの重要性を示す。次に、この特性を表現できる構成式（流れ則）を提示し、平均主応力一定排水せん断試験および、いくつかの非排水三軸圧縮・伸張試験結果との比較から、本モデルの適用性を調べる。

砂の構造的な異方性を表現する方法に修正応力を用いる方法<sup>23)</sup>がある。ここで提案する構成式は、砂の非排水挙動で表れる構造的な異方性を通常の三軸圧縮と伸張試験に基づいて比較的簡単に表現しようとしたもので、構造的な異方性と中間主応力に依存する異方性を一体として取り扱ったものである。修正応力を用いる方法との対応については、本モデルは降伏・破壊曲面と塑性ポテンシャル曲面にそれぞれ異なる構造テンソルを適用したことに相当すると考えられる。

## 4. 2 実験結果に基づく体積変化特性の定量的評価

既往の研究において、破壊時の内部摩擦角  $\phi$  の異方性（強度異方性）に関する研究は数多くみられるが、体積最大圧縮時の応力比  $M$  の異方性に関する研究は、比較的少ない。本節では、既往のデータから体積最大圧縮時の内部摩擦角  $\phi_m$ （変相角に相当する）を求め、その異方性の程度が試料、供試体作成方法および相対密度等によって大きく異なることを示す。

### 4. 2. 1 三主応力制御試験における富士川砂の体積変化特性

山田ら<sup>2)</sup>は、平均主応力  $p$  一定（98 kPa）の排水条件下で、立方体供試体を用いた真の三軸せん断試験（三主応力制御試験）を行った。供試体は、飽和した富士川砂を鉛直方向に注入して作成された。

図4-1はこの結果で、●印は体積最大圧縮時の応力比を、△印は破壊時の応力比を表している。ここでは、応力比を  $\tau_{oct}/p$  で表示しており、 $\tau_{oct}$  は八面体せん断応力である。また、図中の ZC は通常の三軸装置での圧縮試験（ $\sigma_1 = \sigma_z, \sigma_3 = \sigma_x = \sigma_y$ ）に、ZEは伸張試験（ $\sigma_1 = \sigma_x = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z$ ）に相当する。一方、YCは  $\sigma_1 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_x = \sigma_z$  の条件下での圧縮試験、XEは  $\sigma_1 = \sigma_y = \sigma_z, \sigma_3 = \sigma_x$  での伸張試験である。ただし、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  は最大、中間および最小主応力を意味し、絶対値の最大のを最大主応力、最小のを最小主応力という。 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  の定義は図4-2（a）のとおりで、一例としてXEの場合の主応力を同図（b）に示す。

応力比～体積ひずみ関係図から、三軸圧縮時（ZC、YC）と三軸伸張時（ZE、XE）の体積最大圧縮時の応力比を読み取り、そのときの内部摩擦角  $\phi_{mc}$ 、 $\phi_{me}$  を表4-1（実験番号1、2）に示した。この試験では、 $\phi_{me}$  は  $\phi_{mc}$  よりかなり大きく、その差は8～10°であることが分かる。

ZCでの内部摩擦角  $\phi_{mc} = 34.9^\circ$  を用いたモールクーロン規準、Lade 規準および後述の式(4.10)で表される新たに導入した幾何学的規準<sup>15)、16)、17)</sup>による応力比を図4-1中に併記した。幾何学的規準の材料定数として、 $A_m = 0.806$  を用いたが、これについては

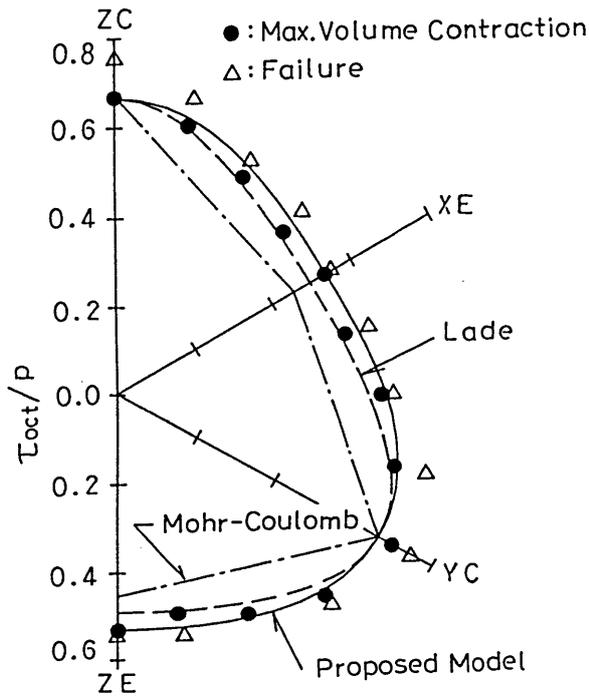


図 4-1 π 平面での体積最大圧縮時の応力比<sup>2)</sup>

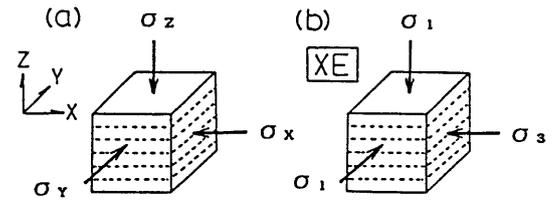


図 4-2  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  の定義

表 4-1 既往の実験から得られた  $\phi_{mc}$ 、 $\phi_{me}$ 、 $R_m$

実験番号	文献名	砂の種類	供試体の作成方法	試験方法	$p$ 、 $\sigma_r$ (kPa)	$D_r$ (%)	$\phi_{mc}$ (deg.)	$\phi_{me}$ (deg.)	$R_m$
1	山田ら <sup>2)</sup>	富士川砂	Pouring	$p$ 一定	98	34	34.9	44.7	1.186
2					98	34	36.3	43.8	1.138
3	石原ら <sup>5)</sup>	富士川砂	pouring	$p$ 一定	98	38	32.5	34.8	1.053
4	龍岡ら <sup>10)</sup>	富士川砂	水中落下	$p$ 一定	98	53	31.6	35.8	1.098
5					196	53	34.1	35.8	1.037
6					294	53	36.0	35.8	0.998
7	三浦ら <sup>3)</sup>	豊浦砂	MSP Dry Tapping Wet Rodding	$\sigma_r$ 一定	196	55	30.1	29.7	0.990
8					196	55	30.1	32.6	1.064
9					196	55	29.2	34.4	1.133
10	Pradhan ら <sup>4)</sup>	豊浦砂	空中落下	$p$ 一定	24.5 ~ 147	30~90	27.7	27.5	0.994
11	安福ら <sup>19)</sup>	豊浦砂	水中落下	$p$ 一定 $\sigma_r$ 一定	980 784 ~ 1764	40	32.3	32.0	0.992
12	安福ら <sup>15, 16)</sup>	秋穂砂	空中落下	$p$ 一定	98	60	25.4	25.4	1.000
13	安福ら	カーボネイト砂 (Dogs Bay砂)	空中落下	$p$ 一定	98	40	36.9	34.4	0.950
14					98	80	36.9	40.6	1.070
15	Vaidら <sup>20)</sup>	Ottawa砂	水中落下	非排水	196 ~ 2500	33~43	28.2	29.2	1.028

4. 3. 3で詳述する。●印は、すべてモールクーロン規準より外側にある。また、三軸伸張時にはLade規準 ( $\phi_{me}=39.7^\circ$ ) よりさらに外側にあり、特に軸対称応力条件下では幾何学的規準と実験結果との対応は良いようである。なお、この幾何学的規準では、 $\phi_{me}=44.7^\circ$ 、Drucker-Prager規準では、 $\phi_{me}=67.7^\circ$  である。

#### 4. 2. 2 供試体作成法の違いによる豊浦砂の体積変化特性

三浦ら<sup>3)</sup>は、側圧 $\sigma_r$ 一定(196 kPa)の排水条件下で、通常の円柱供試体を用いた三軸圧縮および伸張試験を行った。材料は豊浦砂で、多重ふるい落下法(MSP法)、Dry Tapping法、Wet Rodding法と呼ばれる3種類の方法を用いて供試体を作成している。

図4-3は、この結果である。同図の三軸伸張側の結果をみると、体積最大圧縮量は、MSP法>Dry Tapping法>Wet Rodding法の順にあるのに対し、このときの応力比( $q/p$ )の絶対値は、MSP法<Dry Tapping法<Wet Rodding法の順で、順番が逆転しているのが特徴的である。ここに、 $q = \sigma_1 - \sigma_3$  である。体積最大圧縮の応力比からそのときの内部摩擦角 $\phi_{mc}$ 、 $\phi_{me}$ を求め、表4-1(実験番号7~9)に示した。

MSP法によって作成された供試体は、堆積方向への载荷に対して変形しにくいという異

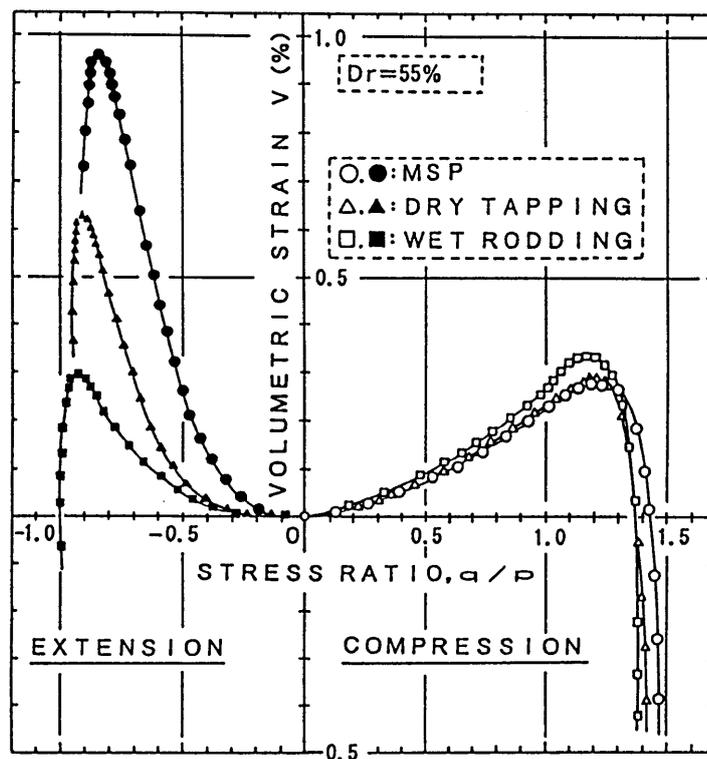


図4-3 供試体作成法の違いによる体積変化特性<sup>3)</sup>

方性を有している<sup>3)</sup>が、表4-1(実験番号7~9)では、異方性の強いものほど $\phi_{mc}$ と $\phi_{me}$ が近い値を示している。また、MSP法、Dry Tapping法、Wet Rodding法の順に砂の構造が乱され、固有異方性が取り除かれていると考えれば、固有異方性が消失するのに伴って $\phi_{me}$ が $\phi_{mc}$ より大きくなるといえそうである。別の表現をすれば、体積最大圧縮時の応力比の $\pi$ 平面での位置は、三軸伸張状態でモールクーロン規準より外側にあり、異方性の強い材料ほどモールクーロン規準に接近することを示している。

ただし、材料が膨張的挙動を示すか、収縮的挙動を示すかは、この $\phi_{me}$ と $\phi_{mc}$ の大小関係だけで決まるものではなく、4.5で後述するように破壊時の内部摩擦角 $\phi$ と体積最大圧縮時の内部摩擦角 $\phi_m$ の相対的な大小関係( $\phi$ と $\phi_m$ の異方性の違い)に基づいて考察する必要がある。

#### 4.2.3 空中落下法による豊浦砂の体積変化特性

Pradhanら<sup>4)</sup>は、平均主応力 $p$ 一定の排水条件下で、種々の繰返し三軸試験を行った。材料は豊浦砂で、供試体の作成方法は空中落下法である。

実験で得られた $\phi_{mc}$ と $\phi_{me}$ を表4-1(実験番号10)に示している。この実験で、彼らは「 $\phi_{mc}$ と $\phi_{me}$ は、それぞれ $27.7^\circ$ と $27.5^\circ$ でほぼ等しい。また、この値は供試体密度、応力経路、応力履歴、圧力レベルによらない」との結論を出している。この結果は、前述の三浦らの行ったMSP法による結果と対応しているものと判断できる。

#### 4.2.4 Dogs Bay砂の体積変化特性

安福らは、平均主応力 $p$ 一定(98 kPa)の排水条件下で三軸圧縮および伸張試験を行った。材料は、カーボネイト系の破碎しやすい砂(以下、Dogs Bay砂と呼ぶ)で、供試体の作成方法は空中落下法である。

実験で得られた $\phi_{mc}$ 、 $\phi_{me}$ を表4-1(実験番号13、14)に示している。この実験では、 $\phi_{mc}$ は相対密度 $D_r$ によらず一定( $36.9^\circ$ )である。これに対し、 $\phi_{me}$ は $D_r$ の低下に伴って低下しており、 $D_r=40\%$ の $\phi_{me}$ は、 $80\%$ の $\phi_{me}$ より $6^\circ$ 程度小さいことが分かる。

#### 4. 2. 5 体積変化特性の定量的評価

4. 2. 1～4. 2. 4の結果は、砂の有する固有異方性の程度によって、体積最大圧縮時の応力比が三軸圧縮と三軸伸張において相対的に大きく異なることを示している。このことを、次式で定義される指標  $R_m$  を用いて評価することを考える。

$$R_m = \frac{\eta_{mc} (3 + \eta_{mc})}{3 \eta_{mc}} \dots\dots\dots (4.1)$$

指標  $R_m$  は、拘束圧による違いも含めて実験結果を統一的に解釈するためのものではなく、既往のモールクーロン、Lade、Drucker-Prager等の規準が実験結果に表れる構造的な異方性をどの程度表現できるかを定量的に調べるために導入したものである。ここに、 $\eta_{mc}$ 、 $\eta_{me}$ は三軸圧縮および伸張時の体積最大圧縮時の応力比 ( $q/p$ ) の絶対値を意味する。この指標は、 $R_m = 1$  のときモールクーロン規準に一致し、 $R_m = 1 + \eta_{mc}/3$  のとき Drucker-Prager規準に一致するという特徴を有している。

表-1に、前述した実験で得られた  $R_m$  を示している。同表には、富士川砂を用いた石原ら<sup>5)</sup>の実験(実験番号3)、同じく富士川砂を用いた龍岡ら<sup>18)</sup>の実験(実験番号4～6)、豊浦砂、秋穂砂を用いた安福ら<sup>15)、16)、19)</sup>の実験(実験番号11、12)および Ottawa 砂を用いた Vaid ら<sup>20)</sup>の実験(実験番号15)から求めた  $R_m$  もあわせて示している。

図4-4は、表-1の  $R_m$  を  $\eta_{mc}$  に対してプロットしたものであり、図中の数字は表4-1の実験番号である。図中にはモールクーロン規準を適用したときの  $R_m (= 1)$  を実線で、Lade規準を適用したときの  $R_m$  を破線で、Drucker-Prager規準を適用したときの  $R_m$  を一点鎖線で併記している。Lade規準に従うと、 $R_m - \eta_{mc}$  関係はやや右上りの曲線で表される。また、Drucker-Prager規準も同じく右上り(勾配 1/3)の直線である。

同図において、強い固有異方性を有すると考えられる MSP法(実験番号7)と Pradhan らの実験(実験番号10)では  $R_m < 1$  であり、 $\eta_{mc}$  がモールクーロン規準より内側にあることが分かる。

一方、山田らの実験(実験番号1、2)と三浦らによる Wet Rodding法(実験番号9)の  $R_m$  は、Lade 規準の  $R_m$  よりかなり大きく、 $\eta_{mc}$  が Lade 規準に従う曲線と Drucker-Prager 規準によるもの間にあることを示している。

龍岡らの実験(実験番号4～6)から平均主応力  $p$  の影響をみると、実験番号4、5、

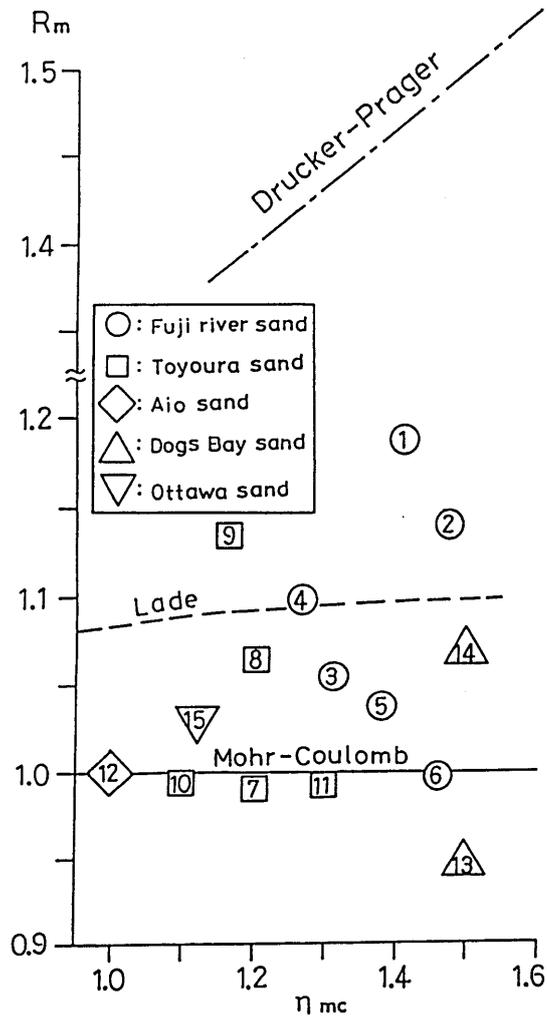


図 4-4  $R_m \sim \eta_{mc}$  関係

6の順に  $p$  が大きくなるが、これに伴って  $R_m$  は次第に低下し、モールクーロン規準に接近していることが分かる。このことは、高圧下の豊浦砂（実験番号11）の実験において  $R_m$  が1より小さくなることと整合している。

ただし、高拘束圧下で  $R_m = 1$  に接近することが、強い構造的異方性を意味するものではないことに注意が必要である。砂の異方的な挙動は、 $\phi$  と  $\phi_m$  の異方性の違いに基づいて考察する必要がある。拘束圧が大きくなると、 $\phi$  と  $\phi_m$  は共にモールクーロン規準に接近し、両者の異方性の程度の違いが少なくなり、その結果、砂の挙動（応力経路、応力～ひずみ関係）に表れる異方的特性は小さくなるものと考えられる。

以上、既往の実験結果に基づいて、体積最大圧縮時の応力比  $M$  に表れる固有異方性の強さを式(4.1)で示す指標  $R_m$  を使って検討した。図4-4の結果によると  $R_m$  の値は0.95～1.20とかなりの幅で分布し、ひとつの規準だけで異方性の程度を表すことの難しさが理解できる。材料の特性、供試体の作成方法、あるいは拘束圧の大きさ等によって異方性が

変動するのであるから、この様な特性をひとつの規準を使って評価するための有効な方法として、中間主応力係数（ $b$  値）に応じて体積最大圧縮時の応力比  $M$  が任意に設定できる規準、すなわち、 $M$  の  $\pi$  平面での形状を任意に設定できる規準を考える必要のあることをこの結果は示している。ここで、 $b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$  である。次節では、この特性を表現できる流れ則について言及する。

### 4.3 構成式の概要と流れ則への新たな異方性の導入

本モデルは、塑性硬化係数場理論に基づく無数曲面モデルの範疇に属し、応力比一定タイプの正規降伏曲面（破壊曲面）とその内部に定義される無数の硬化曲面および流れ則、硬化則（硬化係数）によって構成されている。硬化曲面のうち、現在の応力点を通る活動硬化曲面は、負荷の方向を規定する負荷曲面として用いられ、その移動、拡大および縮小によって古典弾塑性論で弾性域として取り扱われてきた正規降伏曲面内領域での弾塑性挙動を記述している。

本章では、前述したように静的な単調載荷時の挙動を取り扱う。このとき、陽に用いられる曲面は正規降伏曲面と負荷曲面の2つである。以下、静的な単調載荷時のモデルの基本式（構成関係）のうち、正規降伏曲面  $F$ 、負荷曲面  $f$  および流れ則について述べる。硬化則は第2章、第3章と同じであり、静的な単調載荷時には負荷曲面が応力空間の原点を中心にして拡大する等方硬化型モデルとなる。

#### 4.3.1 第2章、第3章のモデルの正規降伏曲面 $F$ 、負荷曲面 $f$ および流れ則

単調載荷時の正規降伏曲面  $F$  は、2階の応力テンソル  $\sigma_{ij}$  を用いて次式で表される。

$$F = \eta_{ij} \eta_{ij} - A^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

ここに、

$$\eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}, \quad p = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} \text{はクロネッカーのデルタである。}$$

$A$  は、 $F$  の半径で、次式で与えられる。

$$A = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} G(\theta) \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

上式の  $G(\theta)$  は次式で表され、同式は、松岡・中井<sup>21)</sup> の破壊規準に基づいて中間主応力の影響をローデ角  $\theta$  の関数として導入<sup>9)、17)</sup> したものである。

$$G(\theta) = \frac{1}{2 \left( -\frac{v}{3} \right)^{1/2} \cos \left( \frac{u}{3} \right)} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

ここに、

$$v = \frac{3 - k}{3(k - 9)}, \quad k = 9 + 8 \tan^2 \phi_c, \quad \cos u = \frac{-s}{2 \left( -\frac{v}{3} \right)^{3/2}},$$

$$s = \frac{2k \sin(3\theta)}{27(k - 9)}$$

であり、 $\phi_c$  は三軸圧縮時 ( $\theta = \pi/6$ ) の破壊時の内部摩擦角である。 $\theta$  は、次式で表され、

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right\} \dots\dots\dots (4.5)$$

$J_3 = (1/3) s_{ij} s_{jk} s_{ki}$ 、 $J_2 = (1/2) s_{ij} s_{ij}$  である。この結果、 $F$  の  $\pi$  平面での形はモールクーロン規準のひずんだ六角形に外接する凸な曲線、オムスピ形となり、軸対称応力状態 ( $\theta = \pm \pi/6$ ) でモールクーロン規準と一致する。

負荷曲面  $f$  は、式 (4.2) の  $A$  を次式の  $a$  に置き換えたものであり、 $F$  と同じ  $G(\theta)$  を用いて中間主応力の影響が  $\theta$  の関数として導入されている。

$$a = a_0 G(\theta) \dots\dots\dots (4.6)$$

ここに、 $a$  は  $f$  の半径で、 $a_0$  は現在の応力点を通るように硬化則から決定される。

軸対称応力状態での静的な単調載荷時の流れ則 (ストレス-ダイレイタンス-関係) は、次式で表され、カム・クレイモデルと一致する。

$$-\frac{dv^P}{d\varepsilon_s^P} = M - \eta \dots\dots\dots (4.7)$$

ここに、 $dv^P = d\varepsilon_{kk}^P$ 、 $d\varepsilon_s^P = |de_{ij}^P|$ 、 $de_{ij}^P = d\varepsilon_{ij}^P - (1/3)dv^P \delta_{ij}$ 、 $d\varepsilon_{ij}^P$  は塑性ひずみ増分、 $\eta = |\eta_{ij}|$  である。 $||$  はテンソルのノルムを表す。式 (4.7) で用いられる体積最大圧縮時の応力比  $M$  も、 $\theta$  の関数  $G_m(\theta)$  を用いて次式で与えられる。

$$M = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} G_m(\theta) \dots\dots\dots (4.8)$$

ここで、 $G_m(\theta)$  は、式 (4.4) で用いられる  $\phi_c$  を  $\phi_{mc}$  に置き換えたものであり、 $\phi_{mc}$  は前述したように三軸圧縮状態での体積最大圧縮時の内部摩擦角である。

すなわち、第2章、第3章のモデルでは破壊および負荷に関して  $\theta$  の影響を定義する  $G(\theta)$  と流れ則に関して  $\theta$  の影響を定義する  $G_m(\theta)$  が同じ定義式 (松岡・中井規準<sup>21)</sup>)

)に基づいて設定されている。

#### 4. 3. 2 流れ則への新たな異方性の導入

ここでは、中間主応力の影響を表す $G(\theta)$  および  $G_m(\theta)$  に安福ら<sup>15)、16)、17)</sup> の導入した幾何学的に表現される規準を適用する。これは、 $G(\theta)$  と  $G_m(\theta)$  を独立に設定することで、前節で述べたダイレイタンシー特性をよりの確に表現し、これによって非排水時のひずみ軟化 (Contractive) から硬化 (Dilative) に至る挙動をうまく表現しようと試みたものである。この試みは、軽部ら<sup>22)</sup> の結論 (ダイレイタンシーとせん断強度は直接には関係のない現象であり、破壊曲面がモールクーロンの破壊六角錐に外接する曲面で表せるのに対し、等ダイレイタンシー線は $\pi$ 平面で静水圧軸を中心とする同心円群となる) とも整合するものである。

本モデルに組み込まれた幾何学的に表現される破壊規準を $G(\theta)$  の形式で表すと、次式となる。

$$G(\theta) = \frac{\eta_{rc} A_r}{\{A_r^2 \cos^2(1.5\theta_0) + \sin^2(1.5\theta_0)\}^{1/2}} \dots\dots\dots (4.9)$$

ここに、 $\theta_0 = \theta - \pi/6$ である。 $\eta_{rc}$ は三軸圧縮状態での破壊時の応力比であり、次式で表される。

$$\eta_{rc} = \frac{6 \sin\phi_c}{3 - \sin\phi_c} \dots\dots\dots (4.10)$$

$A_r$ は材料定数であり、 $A_r = 1$ と置くと $G(\theta)$ は $\pi$ 平面で円 (Drucker-Prager規準) となり、 $A_r = 3/(3 + \eta_{rc})$ と置くと三軸圧縮と伸張状態でモールクーロン規準を満足する歪んだ楕円となる。したがって、この規準の有用性は $A_r$ の値を変えることにより、 $\pi$ 平面での形状を任意に選定できるという点にある。

図4-5は、 $\phi_c = 40^\circ$ において  $A_r = 1.0$ 、 $0.9$ 、 $0.8$ 、 $0.75$ のときの $G(\theta)$ の形状を $\pi$ 平面上に描いたものである。 $A_r$ の値を変えることにより、 $\pi$ 平面での形状を任意に選定できることが分かる。

また、 $\pi$ 面上のMの特性を評価する  $G_m(\theta)$  は、 $G(\theta)$  と同形の次式で与える。

$$G_m(\theta) = \frac{\eta_{mc} A_m}{\{A_m^2 \cos^2(1.5\theta_0) + \sin^2(1.5\theta_0)\}^{1/2}} \dots\dots\dots (4.11)$$

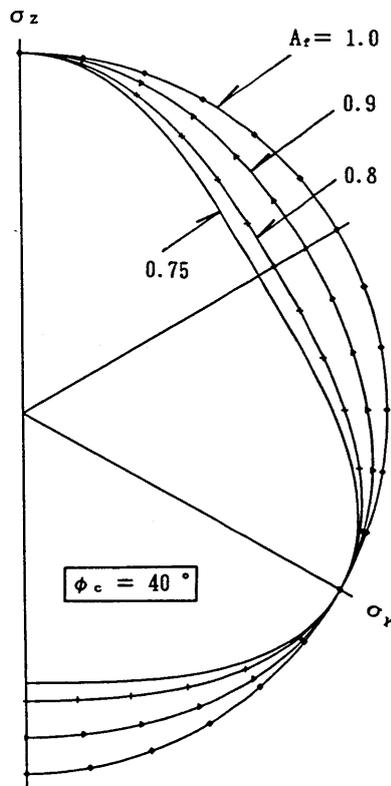


図 4-5  $A_r$  を変えたときの  $\pi$  平面上の  $G(\theta)$  の形状

ここに、 $\eta_{mc}$  は式 (4.1) で用いた三軸圧縮状態での体積最大圧縮時の応力比であり、次式で表される。

$$\eta_{mc} = \frac{6 \sin \phi_{mc}}{3 - \sin \phi_{mc}} \dots\dots\dots (4.12)$$

また、 $A_m$  は  $A_r$  と同じ特徴を有する材料定数であり、それぞれ独立に与えられる。

### 4. 3. 3 本モデルの材料定数

モデルの材料定数は、2つの弾性定数（初期せん断弾性係数  $G_I$  とポアソン比  $\nu$ ）、 $\phi_c$ 、 $\phi_{mc}$ 、硬化係数の初期値を設定する  $r$  および今回新たに導入した  $A_r$ 、 $A_m$  の7つである。このうち、 $\phi_c$  と  $\phi_{mc}$  は三軸圧縮時の破壊時の応力比  $\eta_{rc}$  および体積最大圧縮時の応力比  $\eta_{mc}$  を用いて、次式で与えられる。

$$\sin \phi_c = \frac{3 \eta_{rc}}{6 + \eta_{rc}} \dots\dots\dots (4.13)$$

$$\sin \phi_{mc} = \frac{3 \eta_{mc}}{6 + \eta_{mc}} \dots\dots\dots (4.14)$$

また、 $A_r$ と $A_m$ は三軸伸張時の破壊時の応力比 $\eta_{re}$ および体積最大圧縮時の応力比 $\eta_{me}$ を用いて次式で与えられる。

$$A_r = \eta_{re} / \eta_{rc} \dots\dots\dots (4.15)$$

$$A_m = \eta_{me} / \eta_{mc} \dots\dots\dots (4.16)$$

前述した図4-1の実線は、式(4.16)から決定された $A_m = 0.806$ を用いて描いた $G_m(\theta)$ の $\pi$ 平面での形状を示しているが、実験結果との対応は全体的に良好である。

## 4. 4 実験結果と解析結果の比較

### 4. 4. 1 平均主応力一定、 $\theta$ 一定排水せん断試験の解析

まず、表4-1（実験番号12）で前述した安福ら<sup>15）、16）</sup>が行った平均主応力 $p$ 一定（98 kPa）、 $\theta$ 一定排水せん断試験の解析を行う。用いた材料は $D_r=60\%$ の秋穂砂で、供試体の作成方法は空中落下法である。

図4-6は、式(4.7)で予測される応力比（ $\sqrt{3/2} \eta$ ）～塑性ひずみ増分比（ $\sqrt{3/2} dv^p / d\epsilon_s^p$ ）関係と実験結果を比較したもので、○印が実験結果、実線が予測結果である。また、図4-7は応力比（ $\sqrt{3/2} \eta$ ）～体積ひずみ（ $v$ ）関係、図4-8は応力比（ $\sqrt{3/2} \eta$ ）～せん断ひずみ（ $\sqrt{2/3} \epsilon_s$ ）関係の予測値と実験結果を比較したものである。図中には、 $\theta$ が $30^\circ$ （三軸圧縮）、 $15^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $-15^\circ$ 、 $-30^\circ$ （三軸伸張）の場合の比較が示されている。ただし、図4-6の実験結果においては、全ひずみを塑性ひずみとしてプロットしている。

解析に用いた材料定数は、表4-2に示している。図4-6～図4-8において、予測値はストレス-ダイレイタンス関係、体積変化特性および応力比～せん断ひずみ関係の $\theta$ 依存性をうまく表現しているといえる。

図4-9は、三軸圧縮と伸張時の応力比（ $\sqrt{3/2} \eta$ ）～主ひずみ関係の予測値と実測値を比較したものである。図（a）が三軸圧縮、図（b）が伸張時の結果であるが、軸対称応力状態における予測される主ひずみ値と実測値との対応も良好である。

### 4. 4. 2 非排水三軸圧縮および伸張試験の解析

非排水時の解析を行うにあたり、 $\phi_c$ 、 $\phi_{mc}$ 、 $A_r$ 、 $A_m$ の決定法は4.3.3で述べたとおりである。まず、 $A_r$ については、実際に行った非排水試験結果において三軸圧縮と伸張時の破壊時の内部摩擦角 $\phi$ がほぼ等しいという実験結果に基づいて、 $A_r=3/(3+\eta_{rc})$ で与えている。また、 $A_m$ についてはこれをパラメトリックに動かして、実験結果にフィッティングする値を選定している。これは、ゆる詰め砂の非排水三軸伸張試験では、体積収縮一

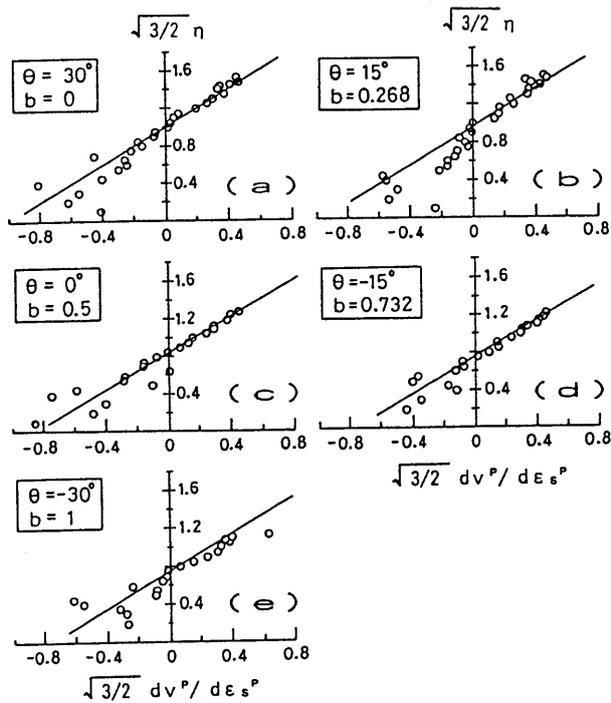


図 4-6 応力比～塑性ひずみ増分比関係

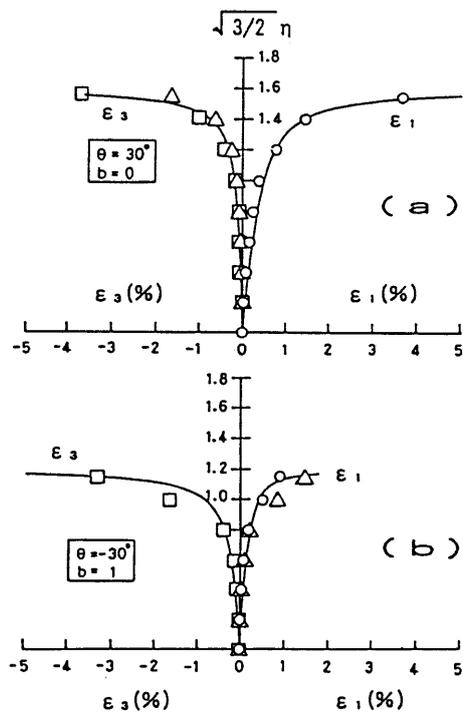


図 4-9 応力比～主ひずみ関係

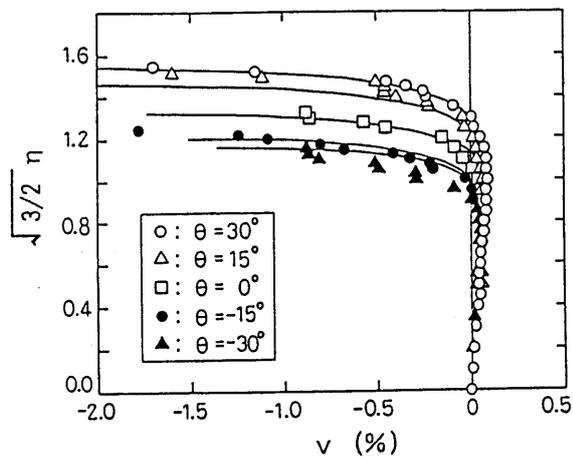


図 4-7 応力比～体積ひずみ関係

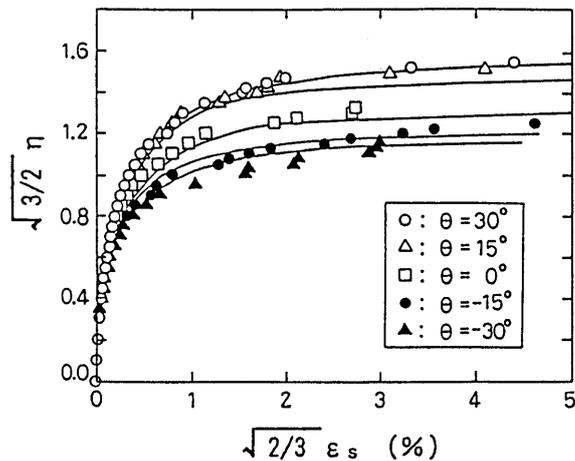


図 4-8 応力比～せん断ひずみ関係

表 4-2 解析に用いた材料定数

$G_I$ (kPa)	$\nu$	$\phi_c$ (deg.)	$\phi_{mc}$ (deg.)	$r$	$A_m$	$A_r$
25000	1/4	39.2	25.4	2.0	0.751	0.750

方の挙動を示し（後述の図4-10参照）、 $\eta_{me}$ を一義的に決定できないこと、また特に伸張側では応力経路が反転する点の平均主応力がかなり小さく、 $\eta_{me}$ の正確な決定が困難なことによっている。

(a) 豊浦砂の非排水三軸試験の解析

図4-10は、兵動ら<sup>6)</sup>がひずみ制御で行った豊浦砂 ( $Dr \approx 30\%$ ) の異方圧密からの非排水三軸圧縮および伸張試験結果と解析結果を応力経路と応力-ひずみ関係で比較したものである。同図において、○、▽、□印は圧縮試験結果、●、■印は伸張試験結果を、実線は解析結果を示している。解析で用いた材料定数は、表4-3 (Hの記号) に示している。解析で採用した  $\phi_c = 33.4^\circ$  での圧縮側と伸張側の応力比を、図中に破線で併記している。

解析結果は、初期せん断  $q_s (= \sigma_{a0} - \sigma_{r0})$  を有するゆる詰め砂の非排水挙動をうまく表現している。ここに、 $\sigma_{a0}$ 、 $\sigma_{r0}$ は鉛直応力、側方応力の初期値である。特に、三軸圧縮状態では一旦ひずみ軟化が生じた後硬化に転じるのに対し、伸張状態では急激なひずみ軟化が生じ、静的な液状化に至る様子がうまく表現されている。

このような非排水時の強い異方性を表現するには、前述したように  $G_m(\theta)$  を  $G(\theta)$  と独立に設定するための  $A_m$  の導入が不可欠であると考えられる。このことをパラメトリックに詳細に検討したのが、図4-11である。同図は、図4-10と同じ材料定数を用いて、 $A_m$

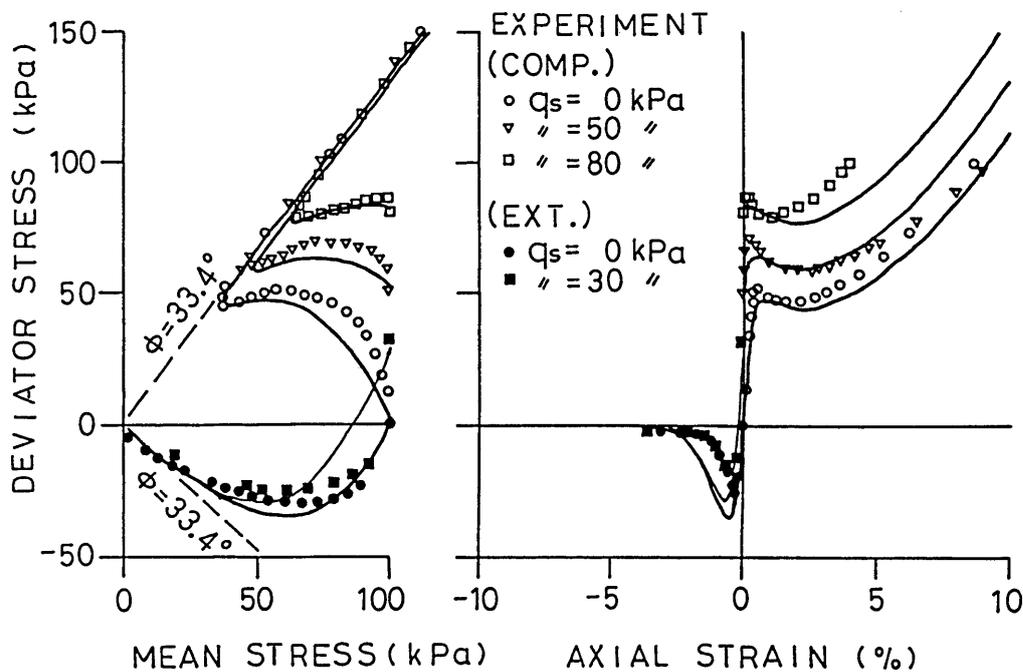


図4-10 兵動らの実験結果<sup>6)</sup>と解析結果の比較

だけを 0.8、0.711 に変えたときの三軸伸張時の解析結果を示している。図中には図 4-10 で用いた  $A_m = 1.0$  の結果も併記している。なお、 $A_m$  は式 (4.11) から分かるように三軸圧縮時にはその効果が消失する ( $\theta = \pi/6$  のとき、分母と分子の  $A_m$  が相殺される) ため、圧縮時の解析結果は、すべて同じである。また、 $A_m = 0.711$  は伸張時にもモール・クーロン規準を満足するように、 $A_m = 3/(3 + \eta_{mc})$  から設定したものである。

同図において、 $A_m = 1.0$  に接近するにつれて急激なひずみ軟化が生じ、結果として Contractive な挙動をうまく表現している。これは、流れ則を定義する体積最大圧縮時の応力比  $M$  が  $\pi$  平面で円 (Drucker-Prager 規準) に近いことを示しており、前述した軽部らの結論とも一致するものである。

### (b) しらすの非排水三軸試験の解析

図 4-12 は、岡林ら<sup>7)</sup>が行った乱したしらす ( $Dr = 60\%$ ) の非排水三軸圧縮・伸張試験結果と解析結果を比較したものである。解析に用いた材料定数は、表 4-3 (K1~K3) に示しており、解析で採用した  $\phi_c = 36.9^\circ$  での圧縮側と伸張側の応力比を図中に破線で併記している。

解析結果は、三軸圧縮および伸張時の非排水挙動の大きな違いをうまく表現しており、伸張時にわずかではあるが軟化点を有する特徴も表現されている。

この解析では、 $A_m = 0.810$  を用いている。ここで、 $A_m = 3/(3 + \eta_{mc}) = 0.724$  と置けば三軸伸張時にモール・クーロン規準と一致すること、また、 $A_m = 0.788$  と置けば Lade 規準と一致することを考慮すると、三軸伸張時の  $M$  は、Lade 規準と Drucker-Prager 規準の間で、Lade 規準に近い値を設定したことになる。

表 4-3 解析に用いた材料定数

	$G_i$ (kPa)	$\nu$	$\phi_c$ (deg.)	$\phi_{mc}$ (deg.)	$r$	$A_m$
H	10000	1/8	33.4	30.4	1.0	1.000
K1	1000	1/3	36.9	28.7	1.5	0.810
K2	2300	1/3	36.9	28.7	1.5	0.810
K3	5560	1/3	36.9	28.7	1.5	0.810
V1	7600	1/3	35.0	30.0	1.5	0.850
V2	10000	1/3	35.0	30.0	1.5	0.790
V3	15500	1/3	35.0	30.0	1.5	0.790
M1	12200	1/3	31.5	28.0	1.5	1.000

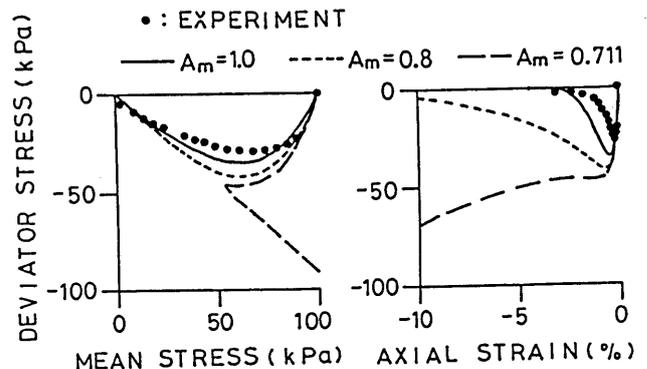


図 4-10  $A_m$  を変えたときの解析結果  
(三軸伸張)

(c) Tailings sand の非排水三軸試験の解析

図4-13は、Vaidら<sup>8)</sup>が行った Uniform tailings sand ( $D_r = 33 \sim 40\%$ ) の非排水三軸圧縮・伸張試験結果と解析結果を比較したものである。解析で用いた材料定数は表4-3 (V1~V3) に示しており、 $\phi_c = 35.0^\circ$  での圧縮側と伸張側の応力比を図中に破線で併記している。図4-10、図4-12、図4-13において、三軸圧縮と伸張時の $\phi$ はほぼ同じであり、前述したように $A_r = 3 / (3 + \eta_{rc})$  に固定してもおおむね妥当であることが分かる。ただし、図4-13の応力経路の横軸は、図4-10~図4-12とは異なり、実験の整理方法に合わせて $(\sigma_a + \sigma_r) / 2$ を用いているので注意が必要である。解析結果は、実験に比べて伸張時の最大強度が若干大きいものの、三軸圧縮と伸張時の非排水挙動の特徴的な違いをおおむね表現している。

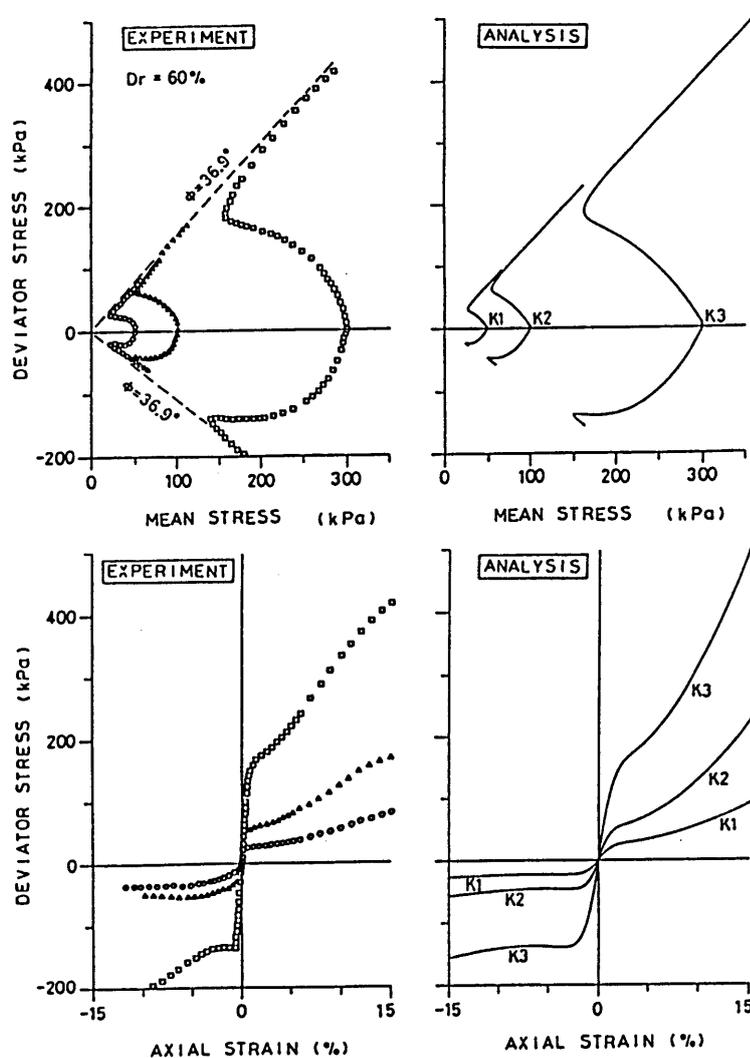


図4-12 岡林らの実験結果<sup>7)</sup>と解析結果の比較

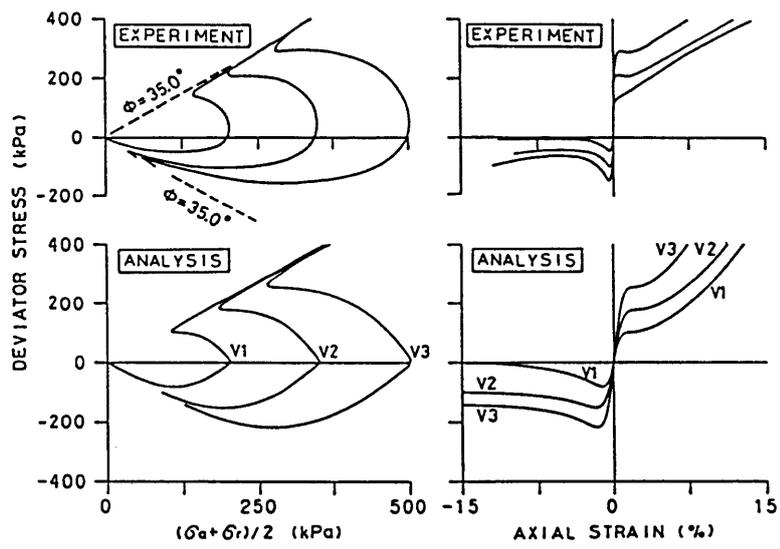


図 4-13 Vaidらの実験結果<sup>8)</sup>と解析結果の比較

## 4.5 $\phi$ と $\phi_m$ の相対的な大小関係

軸対称応力状態でひずみ軟化が発生し、静的な液状化に至る条件、その理論的背景については、第3章で詳述した。ここでは、 $\phi$ と $\phi_m$ の相対的な大小関係がひずみ軟化の発生に与える影響について具体的に考察する。

図4-14は、表4-3の材料定数(M1)を用いて、 $\phi_{mc}$ だけを28、30、32、34°に変えた時の非排水三軸圧縮試験の解析結果である。ただし、三軸圧縮試験の解析であるため、前述のように $A_m$ の値はこの結果に何ら影響を及ぼさない。同図において、 $\phi_{mc}$ を大きく( $\phi_{mc} > \phi_c$ )すると急激なひずみ軟化が発生し、Contractiveな挙動を示す。逆に、 $\phi_{mc}$ を小さく( $\phi_{mc} < \phi_c$ )するとひずみ硬化が生じ、Dilativeな挙動が表現される。

このように、 $\phi_c$ と $\phi_{mc}$ の大小関係によって、破壊時近傍のダイレイタンシー特性の逆転が表現できることは、既にいくつか報告されている<sup>10)、24)</sup>。

図4-15は、同様に表-3の材料定数(M1)を用いて、非排水三軸圧縮試験(Comp.,  $b=0$ )、非排水三軸伸張試験(Ext.,  $b=1$ )および等方圧密からの非排水単純せん断試験(S.S.,  $b=0.5$ )の解析結果を比較したものである。ここで、せん断応力は $\sqrt{3}J_2$ を用いており、図中の圧縮試験結果(Comp.)は、図4-14の $\phi_{mc}=28^\circ$ の結果と同じである。

この解析では、 $A_m=1.0$ を用いて $G_m(\theta)$ を設定した。また、 $A_r=3/(3+\eta_{rc})=0.703$ を与えた。この結果、三軸圧縮で $\phi=31.5^\circ$ 、 $\phi_m=28.0^\circ$ 、単純せん断で $\phi=$

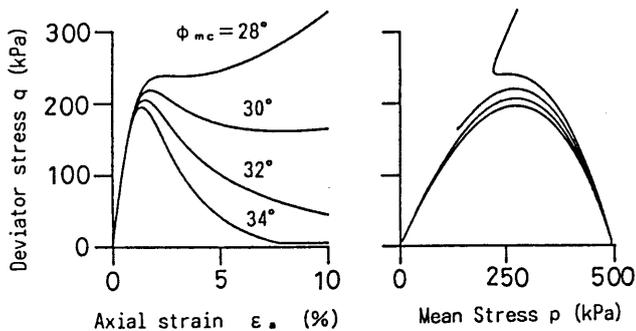


図4-14  $\phi_{mc}$ を変えたときの解析結果  
(三軸圧縮)

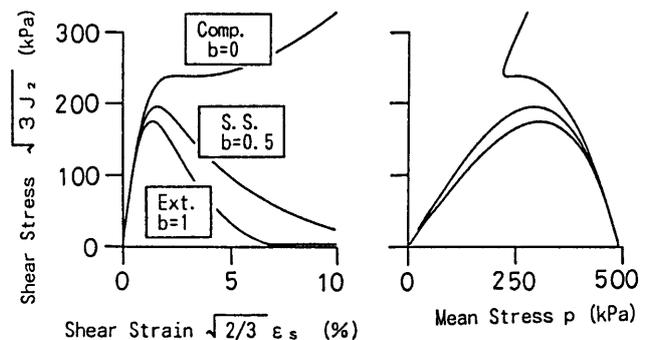


図4-15 三軸圧縮、伸張および  
単純せん断試験の解析

33.8°、 $\phi_m = 40.0^\circ$ 、三軸伸張で $\phi = 31.5^\circ$ 、 $\phi_m = 43.1^\circ$  が得られ、 $\phi_m$  が $\phi$ より相対的に大きいほどContractiveな挙動が強く表現されることになる。

このように、本モデルでは $A_f$ と $A_m$ をそれぞれ独立に与えることで、中間主応力係数 $b$ 値に応じて $\phi$ と $\phi_m$ の相対的な大小関係を自由に与えることができる。この結果、今までのモデル<sup>11) - 14)</sup>では表わすことのできなかつた図4-10に示したような三軸圧縮と伸張時でダイレイタンスー特性が逆転する強い異方性を比較的容易に表現することができる。

一方、今までのモデルでは破壊曲面、負荷曲面および塑性ポテンシャル曲面の $\pi$ 平面での断面形状(異方性)を定義する規準が固定されているため、解析の適用範囲は限定されたものとなる。

## 4.6 本章の要約

本章では、液状化に関連の深い飽和砂の非排水挙動に着目し、一般応力空間での両極端の応力状態である三軸圧縮と伸張挙動を統一的に表現する構成式について解析的に検討した。

本章では、まず砂のせん断過程における体積変化特性に関する既往の実験結果を、構造的な異方性に着目して整理し、その結果に基づいて、流れ則を定義する体積最大圧縮時の応力比 $M$ の $\pi$ 平面での形状を任意に選定できるモデルの重要性を示した。次に、この特性を表現できる構成式（流れ則）を提示し、平均主応力一定排水せん断試験および、いくつかの非排水三軸圧縮・伸張試験結果との比較から、本モデルの適用性を調べた。このモデルは、第2章で提案した繰返しモデルの流れ則を拡張し、これを静的な単調載荷に対して適用したものである。

本章の主要な結論は、次のとおりである。

- ①：平均主応力一定および側圧一定の排水せん断試験において、既往のモール・クーロン、Lade、Drucker-Prager等の規準が構造的な異方性の程度をどの程度表現できるかを定量的に示すための指標  $R_m$  を提示した。
- ②：①で提示した  $R_m$  は、材料の特性、供試体の作成方法、あるいは拘束圧の大きさ等によって大きく変動しており、このような特性をひとつの規準を使って評価するための有効な方法として、体積最大圧縮時の応力比 $M$ の $\pi$ 平面での形状を任意に選定できる規準を考える必要があることを示した。
- ③：②の結果に基づき、破壊時の応力比 $A$ の $\pi$ 平面での形状と独立に、 $M$ の $\pi$ 平面での形状を任意に選定できるモデルを提示した。
- ④：③のモデルを用いることにより、三軸圧縮時にはひずみ硬化する材料が、三軸伸張時にはひずみ軟化を示すような特性（強い異方性）をうまく表せることを示した。
- ⑤：④の結果は、 $M$ の異方性（ $\pi$ 平面での形状）をいかに設定するかが砂の非排水挙動の解析に重要であることを示している。

## 参考文献 (第4章)

- 1) 龍岡文夫、朴春植：砂の変形・強度特性の異方性 I、講座「地盤の異方性」、土と基礎、Vol.41、No.7、pp.79-87、1993
- 2) Yamada, Y. and Ishihara, K. : Anisotropic deformation characteristics of sand under three dimensional stress conditions, Soils and Foundations, Vol.19, No.2, pp.79-94, 1979
- 3) Miura, S. and Toki, S. : A sample preparation method and its effect on static and cyclic deformation-strength properties of sand, Soils and Foundations, Vol.22, No.1, pp.61-77, 1982
- 4) Pradhan, T.B.S., Tatsuoka, F et.al : Experimental stress-dilatancy relations of sand subjected to cyclic loading, Soils and Foundations, Vol.29, No.1, pp.45-64, 1989
- 5) 石原研而、山田恭央、北川久雄：三主応力を変化させた砂のせん断特性、第10回土質工学研究発表会、pp.161-164、1975
- 6) Hyodo, M., Tanimizu, H., Yasufuku, N. and Murata, H. : Undrained cyclic and monotonic triaxial behaviour of saturated loose sand, Soils and Foundations, Vol.34, No.1, PP.19-32, 1994
- 7) 岡林巧、村田秀一、兵動正幸、安福規之：乱したしらすの圧密非排水三軸せん断特性、第48回土木学会年次学術講演会、pp.912-913、1993
- 8) Vaid, Y.P. and Pillai, V.S. : Discussion of the critical state of sands, Geotechnique 42, No.4, pp.658-660, 1992
- 9) 森尾敏、日下部伸、安福規之、兵動正幸、：非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成モデル、土木学会論文集、No.487/Ⅲ-26、PP.139-148、1994
- 10) 森尾敏、日下部伸、安福規之、兵動正幸、：三軸応力状態での飽和砂の不安定挙動の解析的検討、土木学会論文集、No.499/Ⅲ-28、PP.157-165、1994
- 11) Nishi, K. and Kanatani, M. : Constitutive relations for sand under cyclic loading based on elasto-plasticity theory, Soils and Foundations, Vol.30, No.2,

pp. 43-59, 1990

- 12) 八嶋厚、岡二三生、柴田徹、渦岡良介：4.11 LIQCAによる解析、地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集、pp.165-174、1991.1
- 13) 平井弘義：繰返し載荷を受ける砂の塑性・異方硬化モデル、土木学会論文集、第382号、pp.217-225、1987.6
- 14) Pstor, M., Zienkiewicz, O. C. and Chan, H. C. : Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour, Int. Jour. for Nume. and Anal. Meth. in Geom., Vol. 14, pp. 151-190, 1990
- 15) 安福規之：広範な応力域における異方圧密砂の降伏特性と弾塑性構成式に関する研究、九州大学学位論文、1990
- 16) Yasufuku, N. and Ochiai, H. : Anisotropic hardening model for sandy soils over a wide stress region, Memoirs of the Faculty of Eng., Kyusyu Univ., Vol. 51, No. 2, 1991
- 17) 西川明宏、安福規之、兵動正幸、村田秀一：砂の拘束圧依存性と中間主応力の影響を考慮した構成式について、第28回土質工学研究発表会、pp. 495-498、1993
- 18) 龍岡文夫：三軸せん断装置による砂の変形特性に関する基礎的研究、東京大学学位論文、1972
- 19) Miura, N., Murata, H. and Yasufuku, N. : Stress-strain characteristics of sand in a particle-crushing region, Soils and Foundations, Vol. 24, NO. 1, pp. 77-89, 1984
- 20) Vaid, Y. P., Chung, E. K. F. and Kuerbis, R. H. : Preshearing and undrained response of sand, Soils and Foundations, Vol. 29, No. 4, pp. 49-61, 1989
- 21) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, JSCE, No. 232, pp. 59-70, 1974
- 22) 軽部大蔵、栗原則夫：繰返し粘土のダイレタンシーとせん断強度について、土木学会論文集、第135号、pp. 16-24、1966
- 23) 飛田善雄：地盤の異方性 5. 構造テンソルによる異方性の表現、土と基礎、41-9、pp. 77-83、1993
- 24) 岡二三生、八嶋厚、加藤満、中島豊：弾塑性構成式を用いた浸透破壊解析法とその応用、土木学会論文集、No. 493/Ⅲ-27、PP. 127-135、1994

## 第5章 繰返し弾塑性構成式の有限要素法による液状化解析への適用

### 5.1 概説

繰返し載荷時の土の変形挙動は、初期応力状態およびその後の応力経路に強く依存することが知られており、これらの土固有の特性を表現できる精度の高い構成式が要求されている。現在までに提案された土の構成式の主流は、弾塑性理論に立脚したものである。そして、これらの大部分は等方硬化則に基づいているが、特に繰返し載荷時の体積ひずみの累積、Masing 則あるいはバウシinger効果等の履歴挙動を適正に表現するには、異方硬化則の導入が不可欠であると考えられる。

1. 3で前述したように、異方硬化則を導入した繰返しモデルにも色々なモデルがあるが、これらを有限要素法解析プログラムに導入し、境界値問題としての現実の問題に適用した例は、まだ多くない。

本章では、有限要素法による二次元あるいは三次元液状化解析を目的として、まずひとつの比較的簡単な繰返し弾塑性構成モデルを提案する。構成モデルを解析プログラムに組み込むにあたり、扱いやすさを考えてモデルはできるだけ単純で、材料定数の数もできるだけ少ないものであることが望ましい。このため、ここでは有限要素法による解析の第一ステップとして第2章で提案した繰返しモデルをさらに単純化したモデルを提示する。

次に、このモデルを有効応力に基づく二相系有限要素法解析プログラム（NAPOLI）に組み込み、土質工学会・地盤と土構造物の地震時の挙動に関する研究委員会<sup>1)</sup>で取り上げられた新潟地震での川岸町地盤の液状化解析（一次元問題）および遠心力載荷実験のシミュレーション解析（二次元問題）を行い、同委員会で示された7種類の構成モデルによる解析結果と比較するとともに、本モデルの液状化解析への適用性について検討する。

## 5. 2 繰返し弾塑性構成式の定式化

### 5. 2. 1 繰返し弾塑性構成式の概要

まず、本章で提案するモデルの特徴を以下の①～⑤に示す。このうち、①については第2章に示した繰返しモデルと同じであり、②～⑤については、第2章のモデルをさらに単純化したものになっている。

- ①：本モデルは、塑性硬化係数場理論<sup>2)</sup>に基づく無数曲面モデルの範疇に属し、応力比一定タイプの正規降伏曲面とその内部に定義される無数の硬化曲面によって構成される。硬化曲面は、応力空間において一定の硬化係数を有する応力点を結んだ曲面である。このうち、現在の応力点を通る活動硬化曲面は、負荷の方向を規定する負荷曲面として使用され、その移動、拡大および縮小によって古典弾塑性論で弾性域として取り扱われてきた正規降伏曲面内領域での弾塑性挙動を記述する。この点は、第2章で提案したモデルと同じである。
- ②：本モデルで、陽に用いられる曲面は正規降伏曲面、負荷曲面および最新の応力反転曲面の3つであり、第2章のモデルで使用した過去の最大の応力反転曲面と弾性領域を定義する硬化曲面は使用しない。
- ③：正規降伏曲面および負荷曲面の $\pi$ 平面での規準、すなわち式(2.4)の $G(\theta)$ として式(2.48)によって表される Drucker-Prager 規準を用いる。同規準は、応力点の移動にかかわらず正規降伏曲面の半径が一定であるため、幾何学的な硬化則の設定がより簡単である。
- ④：塑性ポテンシャル曲面 $g$ は、第2章のモデルと同様にカム・クレイ型である。ただし、第2章のモデルで導入した非共軸性の評価を取り除き、関口・太田モデル<sup>3)</sup>と同型のストレス・ダイレイタンスー関係を用いる。
- ⑤：第2章では、新たな応力反転曲面を定義し、これを用いて応力振幅の低下する繰返し載荷を表現したが、本章ではさらに単純化した応力反転曲面を用いている。

図5-1は、本モデルの構成を簡単のため二次元平面で概念的に示したもので、図(a)は、異方応力状態の点1からのせん断過程(1→3)での負荷曲面 $f$ と正規降伏曲面 $F$

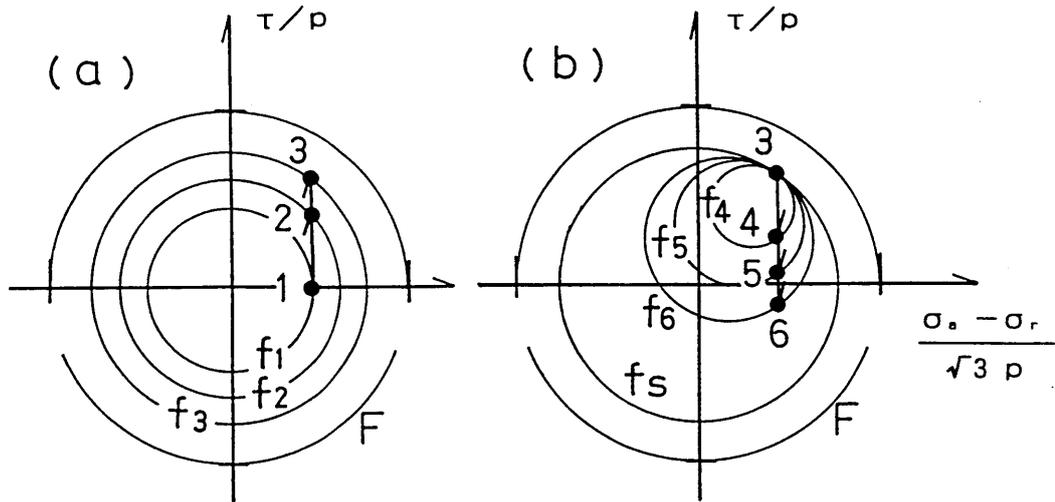


図5-1 本モデルの概要

を、図 (b) は点3からの逆方向のせん断過程 (3 → 6) での  $f$  と  $F$  を示す。図2-1との違いは、横軸および縦軸の表示法のみである。すなわち、本モデルでは応力点の移動にかかわらず正規降伏曲面の半径が一定であるため、横軸を軸差応力比  $((\sigma_a - \sigma_r) / (\sqrt{3} p))$ 、縦軸をせん断応力比  $(\tau / p)$  とする応力比空間において、すべての曲面が交差しない条件下で幾何学的な異方硬化則を設定することができる。

### 5. 2. 2 正規降伏曲面 $F$ 、負荷曲面 $f$ および最新の応力反転曲面 $f_s^N$

正規降伏曲面  $F$  は次式で表され、同式は粘着力  $c_0 = 0$  の場合の Drucker-Prager 規準と一致する。

$$F = \eta_{ij} \eta_{ij} - A^2 = 0 \dots \dots \dots (5.1)$$

ここに、 $\eta_{ij} = \frac{S_{ij}}{p}$ 、 $p = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ 、 $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}$ 、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。 $F$  の半径  $A$  は、三軸圧縮状態での破壊時の内部摩擦角  $\phi_0$  を用いて次式で定義される。

$$A = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{6 \sin \phi_0}{3 - \sin \phi_0} \dots \dots \dots (5.2)$$

上式は、式 (2.2) の  $G(\theta)$  に式 (2.48) を代入することによって得られる。本モデルでは  $F$  の硬化は考えていないため、 $F$  は破壊曲面としての役割を行う。

負荷曲面  $f$  は、次式で表される。

$$f = (\eta_{ij} - \alpha_{ij})(\eta_{ij} - \alpha_{ij}) - a^2 = 0 \dots\dots\dots (5.3)$$

ここに、 $\alpha_{ij}$  は  $f$  の中心座標である。また、 $a$  は  $f$  の半径で、常に現在の応力点を通るように後述の式 (5.13) の硬化則から決定される。粘着力  $c_0$  を有する材料では、式 (5.1) および式 (5.3) において平均主応力  $p$  の代わりに  $p + c_0 \cot \phi_0$  を用いれば同様の取り扱いが可能である。

応力反転曲面  $f_s$  は応力反転が生ずる直前の負荷曲面で、 $f$  と同様に式 (5.3) で表される。この曲面は、応力点が曲面の外に出てくるまではその大きさ、位置を変えず、外に出てきたとき  $f_s$  に関する過去の情報は消失する。この点は、第 2 章のモデルと同じである。ただし、第 2 章のモデルでは最新の応力反転曲面  $f_s^N$  と過去の最大の応力反転曲面  $f_s^M$  の 2 つの応力反転曲面を記憶したのに対し、本モデルでは最新の応力反転曲面  $f_s^N$  のみを記憶する。

また、第 2 章で導入した弾性領域を定義する硬化曲面  $f^E$  については、簡単のため  $R^E = 0$  を用いる。 $R^E = 0$  は、 $f^E$  が点に縮退し、降伏曲面が存在しないことを意味する。

### 5. 2. 3 流れ則

塑性ひずみ増分  $d\varepsilon_{ij}^P$  は、負荷指標  $df$ 、塑性ひずみ増分を規定する単位ベクトル  $g_{ij}$  および硬化係数  $K_P$  を用いて次式で表される。

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{df}{K_P} g_{ij} \dots\dots\dots (5.4)$$

上式の  $df$  は次式で与えられ、同式は同時に載荷、除荷状態を判定する負荷指標として用いられる。

$$df = n_{ij} d\sigma_{ij} \dots\dots\dots (5.5)$$

ここに、 $n_{ij}$  は負荷曲面の単位法線ベクトル、 $d\sigma_{ij}$  は応力増分である。また、 $n_{ij}$ 、 $g_{ij}$  は式 (5.6)、(5.7) で与えられ、

$$n_{ij} = \frac{\partial f / \partial \sigma_{ij}}{\{(\partial f / \partial \sigma_{ij})(\partial f / \partial \sigma_{ij})\}^{1/2}} \dots\dots\dots (5.6)$$

$$g_{ij} = \frac{\partial g / \partial \sigma_{ij}}{\{(\partial g / \partial \sigma_{ij})(\partial g / \partial \sigma_{ij})\}^{1/2}} \dots\dots\dots (5.7)$$

式 (5.6) の  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  は、式 (5.3) より次のように得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{2}{p} \left\{ (\eta_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{1}{3} (\eta_{k1} - \alpha_{k1}) \eta_{k1} \delta_{ij} \right\} \dots\dots\dots (5.8)$$

式 (5.7) で使用される塑性ポテンシャル曲面  $g$  として、次式で定義されるカム・クレイ型の曲面が用いられる。

$$g = \frac{a}{M} + \ln p \dots\dots\dots (5.9)$$

上式で用いられる体積最大圧縮時の応力比  $M$  は、三軸圧縮状態での体積最大圧縮時の内部摩擦角  $\phi_{mc}$  を用いて次式で与えられる。

$$M = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{6 \sin \phi_{mc}}{3 - \sin \phi_{mc}} \dots\dots\dots (5.10)$$

式 (5.9) より、次式が得られ、

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{a p M} \left[ (\eta_{ij} - \alpha_{ij}) + \frac{1}{3} \left\{ a M - (\eta_{k1} - \alpha_{k1}) \eta_{k1} \right\} \delta_{ij} \right] \dots\dots\dots (5.11)$$

上式より、式 (2.14) に対応するストレス・ダイレイタンスー関係を求めると、次のようになる。

$$-\frac{dv^p}{d\varepsilon_s^p} = M - \frac{(\eta_{k1} - \alpha_{k1})}{|\eta_{k1} - \alpha_{k1}|} \eta_{k1} \dots\dots\dots (5.12)$$

ここで、 $\alpha_{k1} = \eta_{k1}^0$  と置けば、上式は関口・太田モデル<sup>3)</sup>のストレス・ダイレイタンスー関係と一致する。ただし、 $\eta_{k1}^0$  は初期状態での偏差応力比  $\eta_{ij}$  である。また、 $\alpha_{k1} = 0$  と置けば、 $c = 1$  とした式 (2.14)、すなわちカム・クレイモデルと一致する。

#### 5. 2. 4 硬化則

本モデルは、 $df = 0$  および  $f = F$  の場合を除いて、偏差応力比 ( $\eta_{ij}$ ) 空間での応力比の移動によって常に新しい負荷曲面  $f$  が形成される。このため、偏差応力比空間における応力比の移動はすべて負荷（硬化）にとらえられ、常に塑性変形が生じる。このとき、 $f$  の中心座標  $\alpha_{ij}$  と半径  $a$  は式 (5.13) と前述の式 (5.3) を満足するように決定される。

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha^I_{ij} (a^N - a) + \alpha^N_{ij} (a - a^I)}{a^N - a^I} \dots\dots\dots (5.13)$$

ここに、 $a^I$ 、 $\alpha^I_{ij}$  は前ステップの負荷曲面  $f^I$  の半径と中心座標、 $a^N$ 、 $\alpha^N_{ij}$  は最

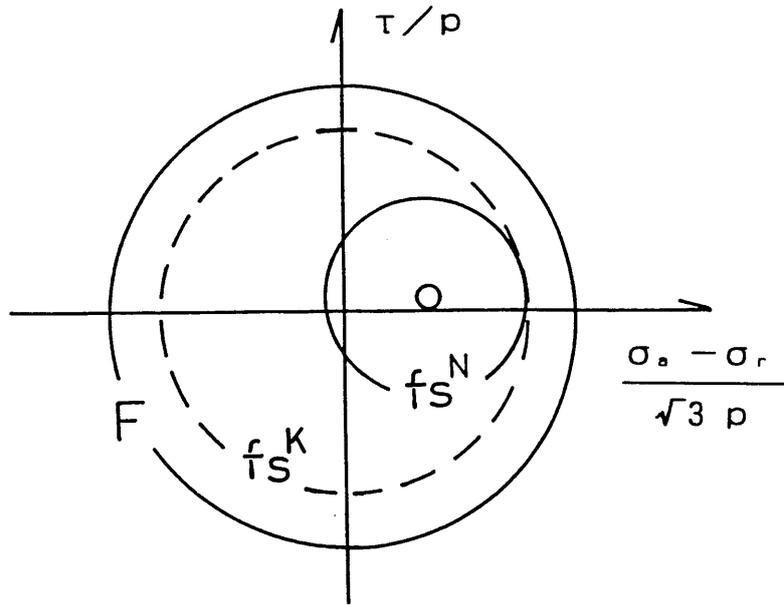


図5-2 新たな応力反転曲面

新の応力反転曲面  $f_{s^N}$  の半径と中心座標である。上式と、第2章で提案したモデルの硬化則、式(2.26)との違いは、前者が偏差応力比空間で組み立てられているのに対し、後者が基準化空間 ( $R_{ij}$ 空間) で組み立てられていることだけである。すなわち、上式は、式(2.26)において、 $R_{s^N} \rightarrow a^N$ 、 $R^I \rightarrow a^I$ 、 $R \rightarrow a$  と置くことによって得られる。

前述のように、無数曲面モデルでは応力振幅が低下する繰り返し载荷のとき、無数の応力反転曲面を記憶する必要があり、モデルを複雑なものにしている。この問題に対し、本モデルでは応力反転曲面は最新のを1つだけ記憶することで、モデルをより単純化したものとしている。応力点がこの最新の応力反転曲面を越えた場合、図5-2の破線で示す新たな応力反転曲面  $f_{s^K}$  を定義する。同図では、応力点がこの最新の応力反転曲面  $f_{s^N}$  の外側に出てきたとき、応力空間の原点を中心とし、 $f_{s^N}$  に外接する新たな応力反転曲面  $f_{s^K}$  を定義している。現在の負荷曲面の中心座標  $a_{ij}$  と半径  $a$  は、 $f_{s^N}$  を前ステップでの負荷曲面  $f^I$ 、 $f_{s^K}$  を  $f_{s^N}$  として式(5.13)と式(5.3) から決定される。

このモデル化においても、第2章の硬化則と同様に負荷曲面の半径  $a$  および硬化係数  $K_P$  の滑らかな遷移を表現することができる。また、過去の最大の応力反転曲面を記憶する必要がないため、プログラム記憶域をさらに低減することができる。

$K_P$  の補間則は、次式が用いられる。

$$K_P = K_{PI} \left( \frac{P}{P_I} \right)^n \left( 1 - \frac{a}{A} \right)^2 \dots\dots\dots (5.14)$$

ここに、 $K_{PI} = r G_I$ 、 $p_I$  は初期平均応力、 $G_I$  は初期せん断弾性係数である。 $r$  は本モデルの材料定数で、硬化係数の初期値  $K_{PI}$  を初期せん断弾性係数  $G_I$  で規準化したものである。第2章の式(2.32)では、 $K_{PI}$  を初期体積弾性係数  $K_I$  で規準化した材料定数  $r$  を用いたが、両者はポアソン比  $\nu$  を用いて、次式から変換することができる。

$$K_I = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G_I \quad \dots\dots\dots (5.15)$$

式(5.14)の変数  $n$  については、式(2.32)では  $n = 1/2$  を用いているが、ここでは  $n = 1.0$  を用いる。 $n = 1.0$  の場合、式(2.38)と式(5.14)の比較から、平均主応力  $p$  が一定でないときにも、式(5.14)は処女載荷時の一次元応力-ひずみ関係を双曲線で表現することになる。

### 5. 2. 5 弾塑係数テンソル $D^{EP}_{ijkl}$ および本モデルの材料定数

弾塑係数テンソル  $D^{EP}_{ijkl}$  は、式(5.16)で表される。また、弾性係数テンソル  $D^E_{ijkl}$  を構成するせん断弾性係数  $G$  および体積弾性係数は、式(5.17)、(5.18)で与えられる。これらは、第2章の式(2.40)～式(2.42)と同じである。

$$D^{EP}_{ijkl} = D^E_{ijkl} - \frac{D^E_{ijmn} g_{mn} n_{st} D^E_{stkl}}{K_P + n_{mn} D^E_{mnst} g_{st}} \quad \dots\dots\dots (5.16)$$

$$G = G_I (p/p_I)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (5.17)$$

$$K = K_I (p/p_I)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (5.18)$$

また、本モデルの材料定数は、2つの弾性係数 ( $G_I$ 、 $K_I$ ) と式(5.2)において正規降伏曲面  $F$  の半径  $A$  を定義する  $\phi_0$ 、式(5.10)において体積最大圧縮時の応力比  $M$  を定義する  $\phi_{mc}$ 、および式(5.14)において応力-ひずみ関係の初期接線係数を規定する  $r$  の5つである。

## 5.3 液状化解析プログラム

### 5.3.1 二次元液状化解析プログラムの一覧

液状化を考慮した地盤の地震応答解析として、これまでに色々な方法が提案されている。また、これらを実地震での動態観測、振動台実験、遠心力载荷実験のシミュレーション解析に用い、解析と観測値、あるいは実験結果との対応関係も次第に明らかにされつつある。

これらの解析方法の違いとして、以下の項目が考えられる<sup>1)</sup>。

- ①：基礎方程式
- ②：構成式（応力-ひずみ関係）
- ③：運動方程式の解法

表5-1に、現在までに有限要素法による2次元液状化解析プログラムとして発表されているプログラム名を示す。間隙水をどのような未知数で表すか等の定式化に若干の相違はあるが、ほとんどのプログラムで基礎方程式として Biot<sup>26)</sup>の二相系混合体の運動方程式を用い、土骨格の変形と間隙水の相互作用を評価している。同表では、間隙水をどのような未知数で表すかによって、以下の3つの形式に分類している。

- u - p<sub>w</sub> 形式：土骨格の変形 u と間隙水圧 p<sub>w</sub> を未知数とする
- u - W 形式：土骨格の変形 u と土骨格に対する間隙水の相対変位 W を未知数とする
- u - U 形式：土骨格の変形 u と間隙水の絶対変位 U を未知数とする

本研究では、Zienkiewiczら<sup>6)</sup>の開発した液状化解析プログラム DIANA-Gをベースにして、これに新たな機能と構成式を追加してプログラムを拡張し、NAPOLI (Nonlinear Analysis Program evaluating the effect Of LIquefaction) と名付けた。表5-2に、

NAPOLI の解析機能一覧を示す。なお、Zienkiewicz らの開発した液状化解析プログラムは、日本でもいくつかの企業に導入され、DIANA というプログラム名で土木学会、土質工学会等に数多く発表されているが、オランダの TNO (オランダ応用科学研究機関) で開発された汎用非線形有限要素法解析プログラム DIANA<sup>30)</sup> の著作権を犯すことになるため、この名前を使用することはできない。

表5-1 液状化解析プログラムの一覧

プログラム名	開発者	未知数	構成式または 間隙水圧発生モデル
TARA-3	Finnら <sup>4)、5)</sup>	u-pw	応力-ひずみ関係は双曲線モデル 間隙水圧は体積ひずみモデルで予測
DIANA-G	Zienkiewicz ら <sup>6)</sup>	u-U	P-Z モデル <sup>21)</sup> 、R-S モデル <sup>22)</sup> 、M-M モデル <sup>23)</sup> 、 Densification モデル <sup>24)</sup>
DINAFLOW	Prevost <sup>7)</sup>	u-U	多曲面モデル
ALISS	大槻ら <sup>8)、9)、10)</sup>	u-pw	応力-ひずみ関係は R-0モデル 間隙水圧は体積ひずみモデルで予測
NONSOLAN	田中 <sup>11)</sup>	u-pw	Densification モデル <sup>25)</sup>
FILIP	井合ら <sup>12)、13)</sup>	u-pw	応力-ひずみ関係は双曲線モデル 間隙水圧は体積ひずみモデルで予測
NAFSS	西ら <sup>14)、15)、16)</sup>	u-W	西モデル
LIQCA	八嶋ら <sup>17)</sup>	u-pw	岡・足立モデル
MuDIAN	塩見ら <sup>18)</sup>	u-U	P-Z モデル <sup>21)</sup> 、Densification モデル <sup>24)</sup>
NAPOLI	森尾ら <sup>19)、20)</sup>	u-U	無数曲面モデル <sup>19)</sup> 、Densification モデル <sup>20)</sup>

表5-2 NAPOLI の解析機能一覧

外力	任意点加振、地震入力、入射波入力
初期	初期応力
荷重	節点荷重、面荷重
要素	粘性ダンパー要素（2節点、3節点）、 梁要素（2節点、3節点）、軸ばね要素、 二次元四角形要素（4節点、8節点、9節点） 剛体要素、剛棒要素、ジョイント要素 六面体三次元要素（8節点、20節点）
解析法	Newton-Raphson法、初期応力法、BFGS法
積分法	Newmark $\beta$ 法、SSPJ法
ソルバー	インコア・スカイライン法
固有値	パワー法、ダブル QR 法
その他	バンド幅最小化
構成式	Trescaモデル、Von-Mises モデル、 Mohr-Coulombモデル（関連流れ則、非関連流れ則）、 Drucker-Pragerモデル（関連流れ則、非関連流れ則）、 Pastor-Zienkiewicz モデル <sup>21)</sup> 、Reflecting Surfaceモデル <sup>22)</sup> 、 Multi-Mechanism モデル <sup>23)</sup> 、Densification モデル <sup>20)、24)</sup> 、 無数曲面モデル <sup>19)</sup>

### 5. 3. 2 u-U形式の基礎方程式

水で飽和した二相系混合体の運動方程式は、最初に Biot<sup>26)</sup>により提案された。また、有限要素法による数値解析解は、線形問題について Ghaboussiら<sup>27)</sup>によって、非線形問題について Zienkiewiczら<sup>24)</sup>によって最初に求められた。本節では、微小変形を仮定した二相系材料のu-U形式の基礎方程式<sup>6)、28)、29)</sup>について述べる。

応力の釣り合い式は、土骨格に対して次式が成立し、

$$\sigma_{ij,j} + (1-n) p_{w,i} - (1-n) \rho_s \ddot{u}_i + (1-n) \rho_s b_i + R_i = 0 \quad \dots (5.19)$$

水に対して次式が成り立つ。

$$-n p_{w,i} - n \rho_f \ddot{U}_i + n \rho_f b_i - R_i = 0 \quad \dots (5.20)$$

ここで、 $u_i$ 、 $U_i$ はそれぞれ土骨格および水の変位であり、 $(\cdot)$ は時間による微分を意味する。また、 $\sigma_{ij}$ は有効応力、 $p_w$ は間隙水圧、 $\rho_s$ 、 $\rho_f$ は土粒子および水の質量密度、 $n$ は間隙率、 $b_i$ は物体力である。 $R_i$ は、Darcy則によって表される多孔質体とその中を流れる水の相互作用項であり、次式で与えられる。

$$R_i = n^2 (\dot{U}_i - \dot{u}_i) / k \quad \dots (5.21)$$

ここに、 $k$ は透水係数である。式(5.19)と式(5.20)は、混合体の単位体積あたりに占める土骨格の体積 $(1-n)$ と水の体積比率 $n$ に対して表されている。土骨格と水の混合体の平均密度は、次式で与えられる。

$$\rho = (1-n) \rho_s + n \rho_f \quad \dots (5.22)$$

土骨格の有効応力増分 $d\sigma_{ij}$ とひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ の関係は、次式で表され、

$$d\sigma_{ij} = D^{EP}_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad \dots (5.23)$$

ここに、 $D^{EP}_{ijkl}$ は弾塑性係数テンソル(接線剛性)である。水については、通常弾性であると仮定して、次式が成立するものとする。

$$(1-n) \varepsilon_{ii} + n \theta_w = -p_w / \Gamma \quad \dots (5.24)$$

ここで、 $\varepsilon_{ii}$ は土骨格の体積ひずみ、 $\theta_w$ は水の体積ひずみである。 $\Gamma$ は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{n}{K_f} + \frac{1-n}{K_m} \quad \dots (5.25)$$

ただし、 $K_f$ は水の体積弾性係数、 $K_m$ は土粒子の体積弾性係数である。土粒子の体積弾性係数 $K_m$ を無限大とみなせる場合は、 $\Gamma$ は次式で表される。

$$\Gamma = K_f / n \quad \dots\dots\dots (5.26)$$

また、有効応力  $\sigma_{ij}$  と全応力  $\sigma^t_{ij}$  の関係は、次式で与えられる。

$$\sigma^t_{ij} = \sigma_{ij} - p_w \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (5.27)$$

変位とひずみの関係は、一相系連続体と同じように、土骨格について次式で表され、

$$\varepsilon_{ij} = (1/2) (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \dots\dots\dots (5.28)$$

水について次式で表される。

$$\theta_w = U_{i,i} \quad \dots\dots\dots (5.29)$$

式(5.19)、式(5.20)の釣り合い式に、構成式(5.23)、(5.24)および変位とひずみの関係式(5.28)、(5.29)を代入し、土骨格の変位  $u$  および水の変位  $U$  を未知数として運動方程式を解くことができる。この解法は、 $u-U$ 形式と呼ばれる。

実際の境界値問題を解くためには、有限要素法が用いられる。この解析方法については、文献19) に詳しいためここでは詳細は省略するが、最終的に得られる離散化された支配方程式は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & \\ & \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \\ \ddot{U} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \\ & \\ C_2^T & C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \\ \dot{U} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ & \\ K_2^T & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_u \\ \\ f_U \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (5.30)$$

ここに、 $M_1$ 、 $M_2$ は質量マトリックス、 $C_1 \sim C_3$ は減衰マトリックス、 $K_1 \sim K_3$ は剛性マトリックス、 $f_u$ 、 $f_U$ は外力ベクトルであり、第1行が式(5.19)の土骨格の釣り合い式を、第2行が式(5.20)の水の釣り合い式を表している。上式において、弾塑性構成モデルを用いる弾塑性解析では、 $K_1$ と $u$ の関係が非線形となる。

### 5.3.3 非線形方程式の解法

非線形方程式の解法として、表5-2に示すように NAPOLI には、初期応力法、Newton-Raphson法、 $K_{T1}$ 法、 $K_{T2}$ 法、BFGS法等の種々の解法が導入されている<sup>31)</sup>が、5.4の解析では、このうち初期応力法を用いている。初期応力法とは、各積分ステップにおける不均衡力に対する変形を常に初期剛性を用いて求め、この不均衡力が設定された値以下になるまで収束計算を行う方法で、反復回数は多くなるが、接線剛性を計算する必要がないという利点がある。

時間積分法は、Newmark の  $\beta$ 法を用いる。この方法では、 $n+1$ ステップ(時刻  $t+dt$ )

における変位  $u_{n+1}$ 、速度  $v_{n+1}$  は、 $n$  ステップ（時刻  $t$ ）での変位  $u_n$ 、速度  $v_n$ 、加速度  $a_n$  および  $n+1$  ステップでの加速度  $a_{n+1}$  を用いて次式で表される。

$$u_{n+1} = u_n + dt v_n + \left[ \frac{1}{2} - \beta_a \right] dt^2 a_n + \beta_a dt^2 a_{n+1} \quad \dots\dots\dots (5.31)$$

$$v_{n+1} = v_n + (1 - \gamma_a) dt a_n + \gamma_a dt a_{n+1} \quad \dots\dots\dots (5.32)$$

ここに、 $\gamma_a$ 、 $\beta_a$  は Newmark の  $\beta$  法のパラメーターで、 $0 < \gamma_a < 1$ 、 $0 < \beta_a < 1$  の値を取る。なお、 $\gamma_a = 1/2$  として  $v_{n+1}$  を求める方法は、Crank-Nicholson 法と呼ばれ、一般的に良く用いられている。

ここで、式 (5.30) の支配方程式を簡単のため、次式で記述する。

$$M_m a_{n+1} + S_{n+1} = f_{n+1} \quad \dots\dots\dots (5.33)$$

ただし、 $M_m$  は質量マトリックス、 $S_{n+1}$  は  $n+1$  ステップでの内力ベクトルで変位  $u_{n+1}$ 、速度  $v_{n+1}$  の関数、 $f_{n+1}$  は外力ベクトルである。式 (5.33) が線形の場合には、式 (5.31) と式 (5.32) を式 (5.33) に代入して  $a_{n+1}$  を求め、これを式 (5.31)、(5.32) に代入して  $u_{n+1}$ 、 $v_{n+1}$  を求めることができる。しかし、式 (5.33) が非線形の場合には、一義的に解を求めることはできなくなり、上で述べた初期応力法と組み合わせた収束計算により解を求めることになる。

この方法は、予測子修正子法と呼ばれ、予測子として Newmark の  $\beta$  法を、修正子として初期応力法を用いている。表 5-3 に、5.4 の解析で用いた予測子修正子法の計算手順<sup>32)</sup>を示す。同表では、2 の predictor phase においては、 $a_{n+1}^{(0)} = 0$  を設定しており、 $a_{n+1}^{(0)}$  は predictor phase における加速度の予測値の初期値である。

なお、初期応力法において収束過程で降伏が一方向に進む場合、収束過程を応力履歴とみなすことができる。しかし、5.4 の二相系混合体の動的解析では収束過程で小さな除荷（応力反転）が生じた（静的解析では生じなかった）。本モデルでは、この除荷を応力履歴とみなすことができないため、常に各収束計算開始時のひずみを記憶しておき、この収束計算開始時のひずみからのひずみ増分により応力増分を計算している。

表 5 - 3 予測子修正子法の計算手順

1 : Set iteration counter $i=0$
2 : Begin predictor phase in which we set $u_{n+1}^{(1)} = u_{n+1}^* = u_n + dt v_n + dt^2 (1-2\beta_a) a_n / 2$ $v_{n+1}^{(1)} = v_{n+1}^* = v_n + dt (1-\gamma_a) a_n$ $a_{n+1}^{(1)} = [u_{n+1}^{(1)} - u_{n+1}^*] / (dt^2 \beta_a) = 0$
3 : Evaluate residual forces using the equation $\psi^{(1)} = f_{n+1} - M_n a_{n+1}^{(1)} - S(u_{n+1}^{(1)}, v_{n+1}^{(1)})$
4 : Solve the equation using the initial stiffness matrix $K^*$ $K^* du^{(1)} = \psi^{(1)}$
5 : Enter corrector phase in which we set $u_{n+1}^{(i+1)} = u_{n+1}^{(i)} + du^{(i)}$ $a_{n+1}^{(i+1)} = [u_{n+1}^{(i+1)} - u_{n+1}^*] / (dt^2 \beta_a)$ $v_{n+1}^{(i+1)} = v_{n+1}^{(i)} + dt \gamma_a a_{n+1}^{(i+1)}$
6 : If $du^{(i)}$ and/or $\psi^{(i)}$ do not satisfy the convergence condition then set $i=i+1$ and go to step 3 , otherwise continue.
7 : Set $u_{n+1} = u_{n+1}^{(i+1)}$ $v_{n+1} = v_{n+1}^{(i+1)}$ $a_{n+1} = a_{n+1}^{(i+1)}$ <p>for use in next time step. Also set <math>n=n+1</math> and begin next time step.</p>

## 5. 4 液状化解析への適用

### 5. 4. 1 新潟地震における川岸町地盤の液状化解析（一次元問題）

#### (a) 解析条件

土質工学会委員会で指定されたとおりに、新潟地震で液状化による被害の生じた川岸町地盤（深さ70 m、地下水位GL-2m）を表5-4に示すように20要素に分割した。この解析モデル底面に粘性ダンパーを結合し、その下端から最大120 cm/s<sup>2</sup>（入射波の2倍）の地震波を入力して解析を行った。入力地震波を図5-3に示す。この波は、秋田県庁地階で記録された強震記録を震央距離、距離減衰の違いを考慮して修正された<sup>1)</sup>ものである。初期応力状態は $K_0 = 0.5$ とした。ここに、 $K_0 = \sigma_{x0} / \sigma_{z0}$ で、 $\sigma_{x0}$ は初期水平方向応力、 $\sigma_{z0}$ は初期鉛直方向応力である。また、排水条件は全要素非排水とした。時間積分法

表5-4 川岸町地盤の解析モデル

Depth (m)	Element Number	Vs (m/s)	Density (t/m <sup>3</sup> )	Relative Density D <sub>r</sub> (%)	G <sub>r</sub> (kPa)	$\sigma_{z0}$ (kPa)	$\phi_c$ (Degree)	$\tau_{max} / \sigma_{z0}$		r
								R <sub>s</sub>	R <sub>z0</sub>	
1	1	110	1.8		21780	8.82	30			
2	2					26.46				
3.5	3	110	1.9	30~40	22990	41.90	31	0.10	0.09	5
5	4					55.13				
6.5	5	150	1.9	45	42750	68.36	35	0.15	0.11	8
8	6					81.59				
10	7	185	1.9	50~55	65030	97.02	37	0.20	0.14	12
12	8					114.70				
14	9					132.30				
17	10					157.30				
20	11	230	2.1	80~85	111100	189.60	44	0.70	0.50	
24	12					227.40				
28	13					270.50				
34	14					327.30				
40	15					397.90				
46	16					468.40				
52	17	270	2.2	90	160400	539.00	45	0.90	0.60	
58	18					609.60				
64	19					680.10				
70	20					750.70				
		350	2.3	$\phi_{nc} = 28^\circ$ (GL-2~14 m), Poisson's Ratio $\nu = 0.2$ (All Element)						

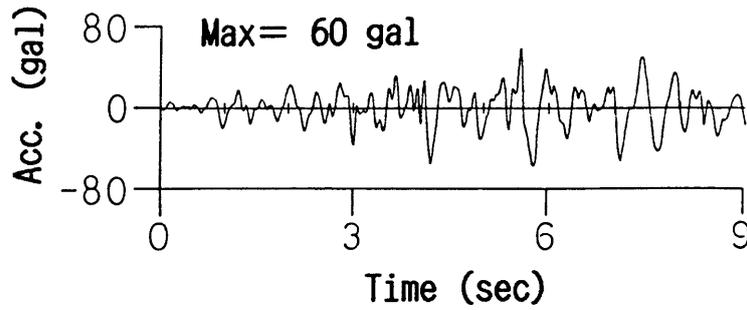


図 5 - 3 入力地震波

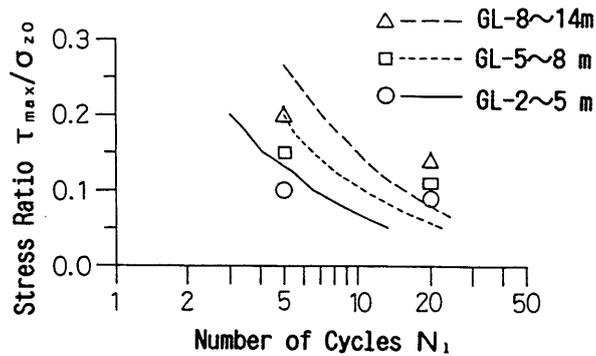


図 5 - 4 川岸町地盤の液状化強度曲線

は前述のように Newmark の  $\beta$  法で、積分時間間隔  $dt$  は 0.005 秒、レイレイ減衰の係数は  $\alpha = 0.0$ 、 $\beta = 0.001$  を用いた。

本モデルの 5 つ材料定数のうち、 $G_1$ 、 $\phi_c$ 、 $r$  を表 5 - 4 中に示した。 $K_1$  は、ポアソン比  $\nu = 0.2$  と  $G_1$  から決定し、 $\phi_{mc} = 28^\circ$  を用いた。これらの材料定数を用いた液状化強度曲線を図 5 - 4 に示す。図中に委員会で指定されたそれぞれの深さでの液状化強度を  $\circ$ 、 $\square$ 、 $\triangle$  印で併記した。この液状化強度は、表 5 - 2 中の  $R_5$ 、 $R_{20}$  であり、 $R_5$  は繰返し回数  $N = 5$  で液状化に至るせん断応力比 ( $\tau_{max}/\sigma_{z0}$ )、 $R_{20}$  は  $N = 20$  で液状化に至るせん断応力比である。

なお、GL-0~2m は線形弾性、GL-14 ~ 70m では Drucker-Prager モデルを用いた。

#### (b) 解析結果

図 5 - 5、5 - 6、5 - 7 に委員会で指定された出力地点での加速度、せん断応力および間隙水圧の時刻歴図を示す。図 5 - 7 の間隙水圧時刻歴において、GL-3.5 ~ 5m では 4 秒付近、GL-2 ~ 3.5 m では 6 秒付近で間隙水圧が初期鉛直方向応力に等しくなり、液

状化に至っている。この結果は、委員会報告書に示された7種類の解析モデルによる結果と大きな差はない。ただし、細かくみると本モデルではGL-2～3.5m および GL-10～12m での間隙水圧の上昇が若干大きい。これは、図5-4に示したように、本モデルでは液状化強度曲線の勾配が若干大きく、低い応力比での間隙水圧の上昇が過大に評価されたためと思われる。図5-5の加速度時刻歴、5-6のせん断応力時刻歴では、GL-3.5～5m で液状化が発生した4秒付近以後、この層より上の層ではせん断応力振幅、加速度振幅が小さくなっており、液状化した地盤、振動台実験等で観察される典型的な応答を示している。これは、液状化の発生に伴い地盤剛性が低下し、せん断波が上方へ伝播できなくなったためである。

図5-8に最大加速度、最大変位の深度分布を示す。分布形状、絶対値とも7種類の解析モデルによる結果と大きな差はなく、最初に液状化の発生したGL-3.5～5m より上部で最大加速度が低下している。ただし、細かくみると、地中のGL-5～12m 付近の値が若干大きめである。しかしながら、減衰、収束判定規準等に関する指定がなされていないため両者の直接の比較はできない。この最大加速度は、図5-5の中に矢印で示したように6秒付近で生じている。

図5-9(a)にGL-3.5～5m とGL-6.5～8m での水平方向応力 $\sigma_x$ 、鉛直方向応力 $\sigma_z$  および平均主応力 $p$ の時刻歴を示し、同図(b)に $\sigma_x \sim \sigma_z$  平面での応力経路を示す。同様に、GL-3.5～5m とGL-6.5～8m での応力経路(せん断応力 $\tau \sim$ 平均主応力 $p$ )と応力-ひずみ関係(せん断応力 $\tau \sim$ せん断ひずみ $\gamma$ )を図5-10に示す。

図5-10では、間隙水圧の上昇に伴って応力-ひずみ関係の割線剛性が低下し、履歴減衰が大きくなる傾向が表現されている。特に、GL-3.5～5m では残留ひずみが累積され、1.4%程度の大ひずみが発生している。また、サイクリック・モビリティ現象が表れると、応力-ひずみ関係にわずかに反り返りがみられる。

図5-9では、 $K_0 = 0.5$  から出発して水平方向応力 $\sigma_x$  があまり低下しない早い時期に鉛直方向応力 $\sigma_y$  が大きく低下し、 $K_0 = 1.0$  に至る様子がうまく表現されている。

図5-6、5-10のGL-6.5～8m の図には、6秒付近の最大加速度に対応するピークせん断応力を矢印で示した。変相線に沿って有効応力が回復することによって大きなせん断応力が発生し、この結果GL-5～12m 付近の加速度が大きくなったと考えられる。

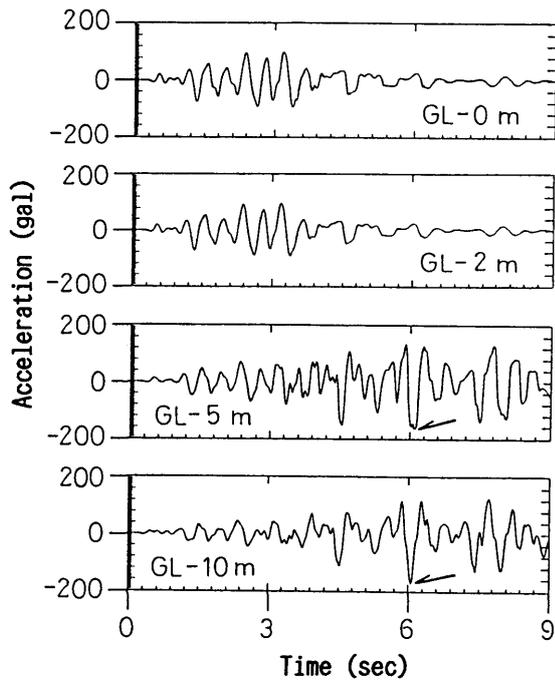


図 5 - 5 絶対加速度の時刻歴

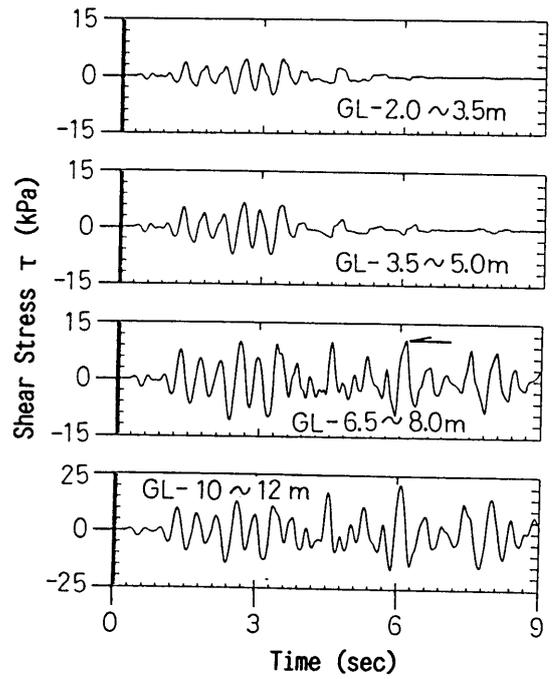


図 5 - 6 せん断応力の時刻歴

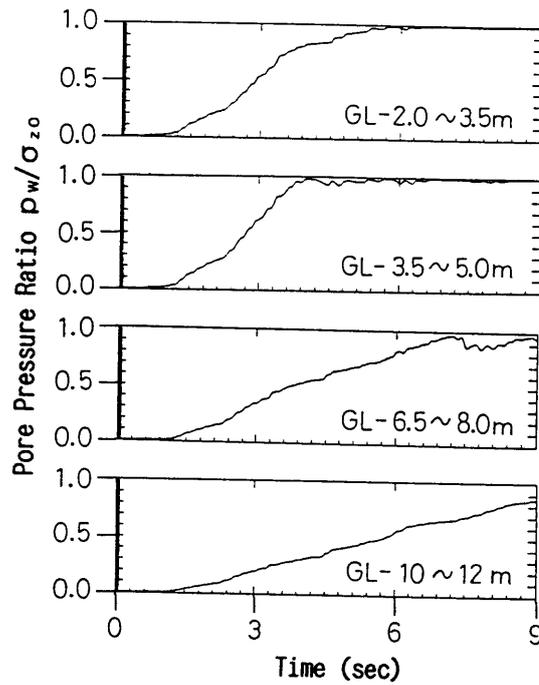


図 5 - 7 間隙水圧の時刻歴

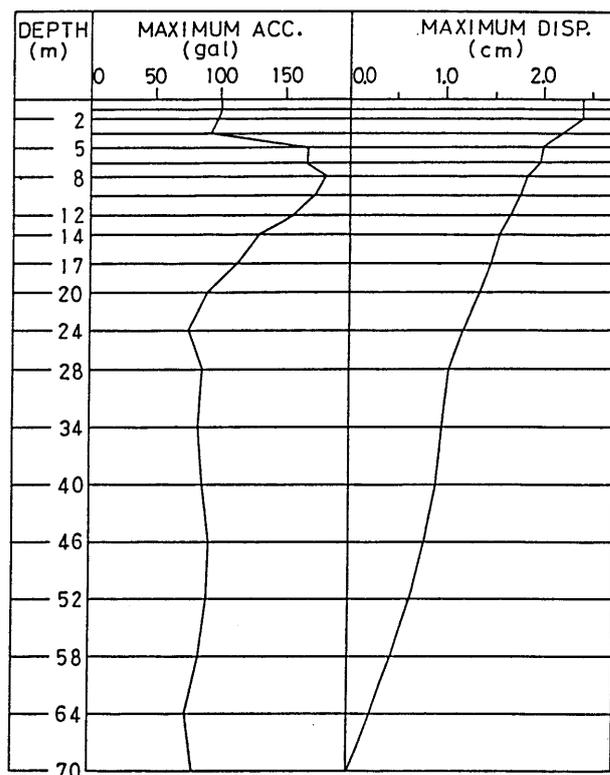


図 5 - 8 最大加速度および最大変位

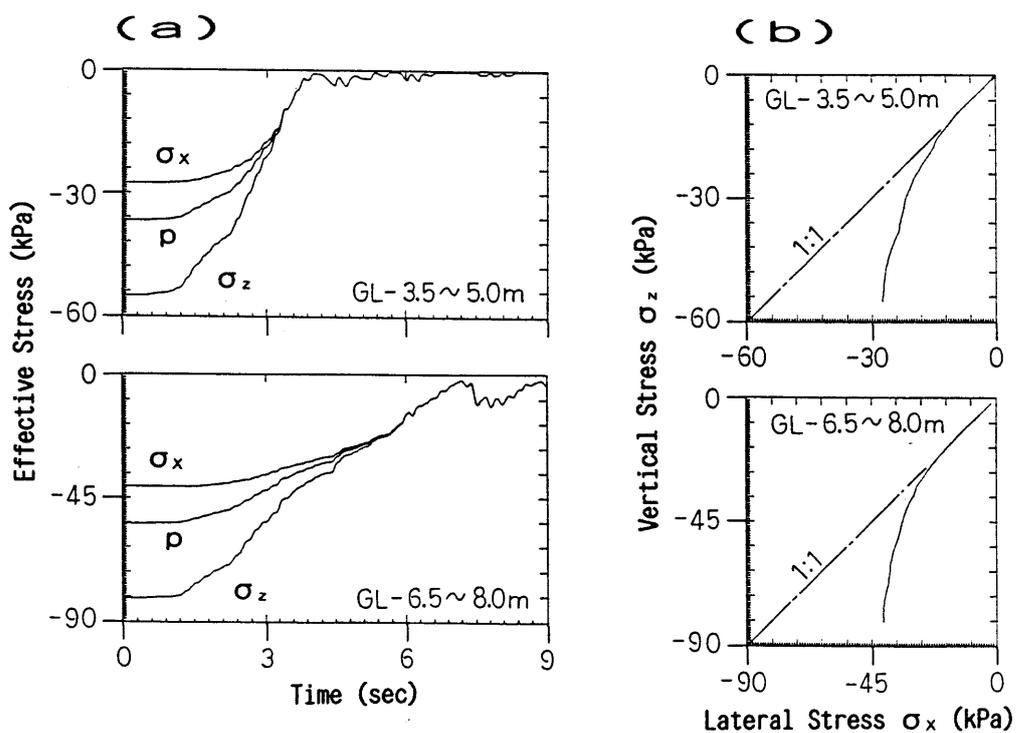


図 5 - 9 有効応力の時刻歴と応力経路

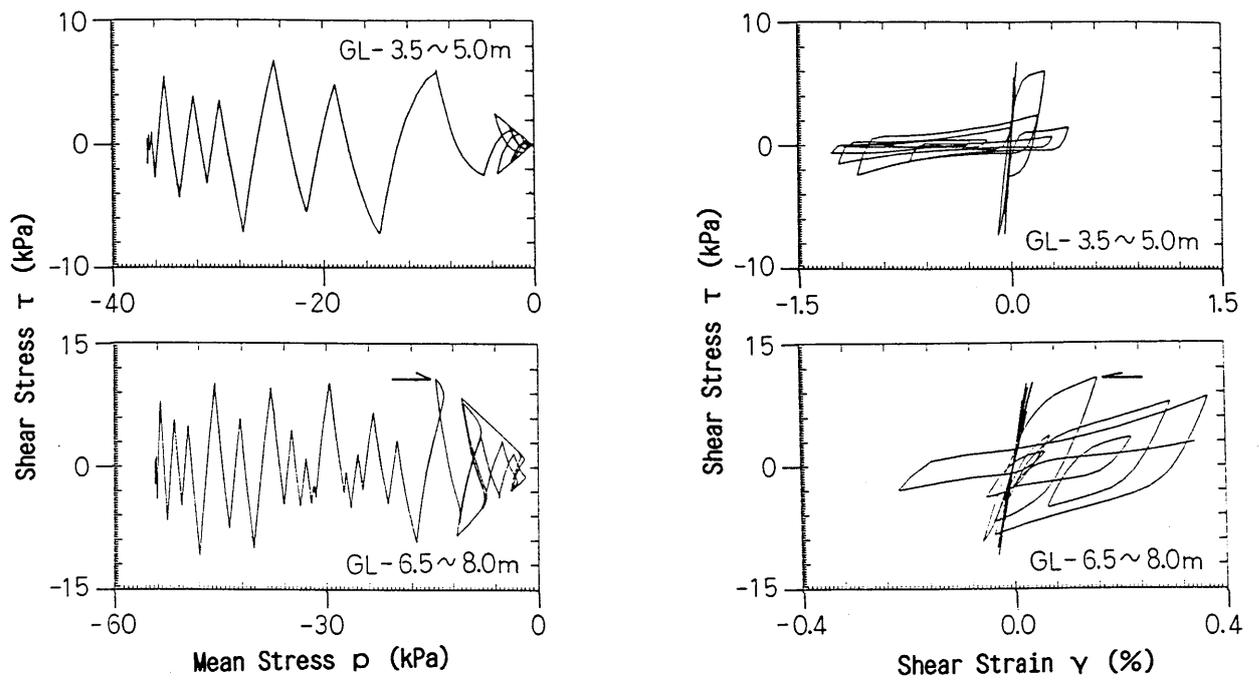


図5-10 応力経路と応力-ひずみ関係

## 5. 4. 2 遠心力载荷実験のシミュレーション解析（二次元問題）

### （a） 解析条件

対象とした実験は、Cambridge 大学所有の振動型遠心载荷装置による水浸（シリコンオイル使用）盛土の振動実験である。実験は、41.8 g の遠心力場で行われている。入力地震波は、58.8 Hz の疑似正弦波、最大加速度は 20 % G（41.8 g の何%に相当するかを示す）で、解析には 200 Hz のローパスフィルターをかけた図 5-11 を用いた。解析に用いた要素分割を図 5-12 に示す。図中に、実験結果と解析結果を比較した節点番号（NP）、要素番号（四角で囲んだ数字）を示した。

モデルは天端まで水没しており、非排水とした。初期応力は、土質工学会委員会とほぼ同様の手順で決定した。まず、41.8 g の場で線形自重解析を行い、得られた各要素の平均主応力  $p$  から  $G_r = 8672 (p)^{1/2}$  kPa を用いて初期せん断弾性係数  $G_r$  を決めた。この  $G_r$  とポアソン比  $\nu = 0.3$  を用いて再度線形自重解析を行い、得られた応力を初期応力と

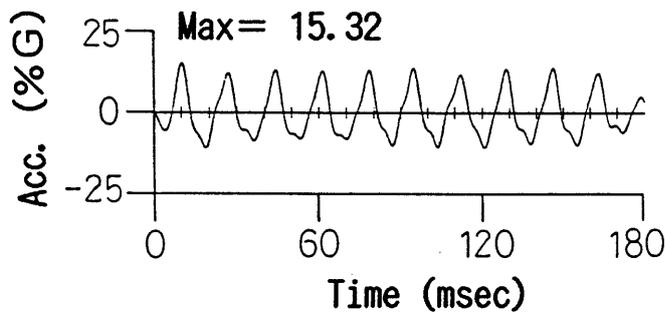


図 5-11 入力地震波

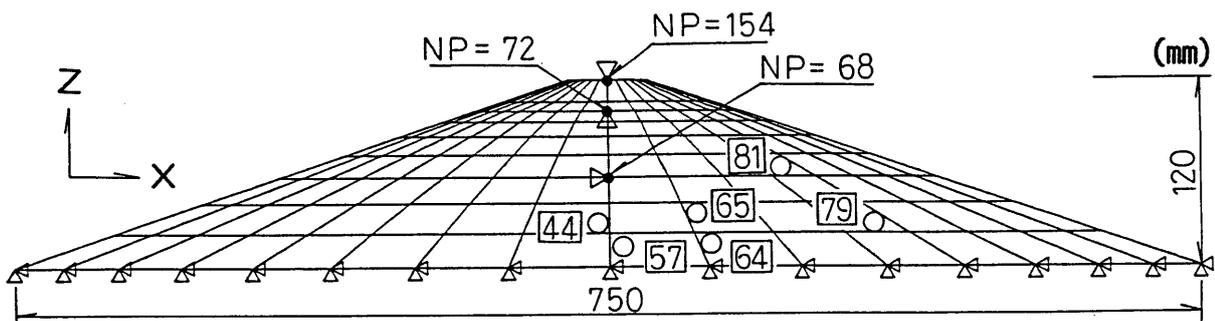


図 5-12 要素分割

した。ただし、側方応力と鉛直応力の比  $K_0$  が 0.4 を下回る要素は、 $K_0 = 0.4$  になるように側方応力を設定し直した。

時間積分法、レイレイ減衰の係数は、前節の 5.4.1 と同じで、積分時間間隔は 0.1 msec とした。実験に用いられた砂の物性値を表 5-3 に示す。同表には、本モデルの 5 つの材料定数のうち  $G_1$ 、 $\phi_c$ 、 $\phi_{mc}$  を併記している。 $K_1$  はポアソン比  $\nu = 0.3$  と  $G_1$  より決定し、 $r = 25$  を用いた。盛土中央付近の初期平均主応力  $p_1$  において、これらの材料定数を用いた液状化強度曲線を図 5-13 に実線で示す。図中の○印は委員会で設定された液状化強度である。一つしか指定されていないため、着色部のような強度曲線を想定し、図 5-4 と同様にこの中央を通るように材料定数を決めた。

(b) 解析結果

図 5-14 に間隙水圧時刻歴、図 5-15 に加速度時刻歴の解析結果と実験結果の比較を示

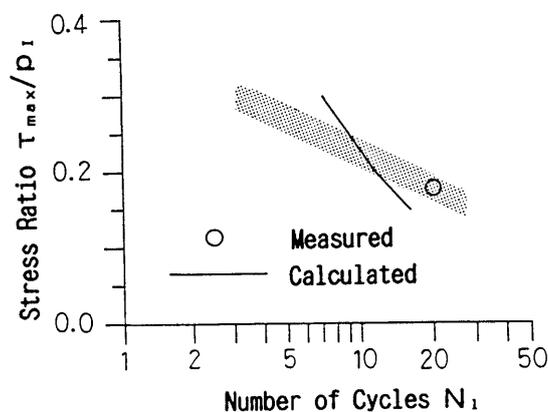


図 5-13 遠心力载荷実験の液状化強度曲線

表 5-1 実験に用いられた砂の物性

True Specific Gravity	$G_s$	2.65
Relative Density	$D_r$	60 %
Initial Void Ratio	$e_0$	0.8
Initial Shear Modulus ( at $p_1 = 98$ kPa )	$G_1$	85838 kPa
Poisson's Ratio	$\nu$	0.3
Angle of Shear Resistance	$\phi_c$	39°
Angle of Phase Transformation Line	$\phi_{mc}$	32°
Resistance against Liquefaction $\tau_{max}/p_1$ ( Cyclic Number $N=20$ )	$R_{20}$	0.18

す。間隙水圧時刻歴は、実験との対応はおおむね良好である。ただし、実験では間隙水圧が大きく変動しながら上昇しているのに対し、解析の変動は小さい。これは、実験では貯水の動水圧の効果が表れたためではないかと考えられる。間隙水圧の変動は、全応力の変化によるもの、サイクリック・モビリティによるものがあるが、解析の小さな変動の周期は入力波の周期に一致しており前者によるものである。一方、加速度時刻歴は実験との対応はあまり良くない。実験では、間隙水圧の上昇に伴って加速度振幅が低下しているのに対し、解析の加速度振幅はほぼ一定である。この原因は定かではないが、解析では初期平均主応力  $p_i$  が大きめに入力された可能性が考えられる。

図5-16に要素44と要素57のせん断応力-せん断ひずみ関係、応力経路を示す。要素44は堤体の左側に位置しており、-の初期せん断応力を有する。一方、要素57は右側に位置しており、+の初期せん断応力を有する。図5-16では、この初期せん断の方向にせん断ひずみが累積される傾向が表現されている。これは、初期せん断の方向にせん断応力が作用するときの硬化係数  $K_p$  が小さくなる（負荷曲面の半径  $a$  が大きくなる）ためである。また、間隙水圧の上昇に伴って6波目（100 msec付近）以後せん断応力振幅が低下する傾向が表現されている。

図5-17に地震終了時（0.18秒）での変形と間隙水圧のコンターを示す。間隙水圧=0の線より上方では、0 ~ -3 kPa 程度の小さな負の間隙水圧が発生している。実験での堤体天端の最終沈下量は、2 mm 位と報告されている<sup>1)</sup>。一方、解析結果は 0.1 mm 程度でかなり小さい。

図5-17に示した変形は、図5-16で述べた（残留）せん断ひずみによる変形と間隙水圧上昇に伴う剛性低下が重力のもとで生み出す変形の和を表している。本解析は非排水条件で行ったため、最終沈下量が実験値に比べかなり小さくなっているが、地震中あるいは地震後の間隙水圧の消散を考慮すると異なった結果が算出されることが予想される。

図5-18は各時刻における盛土の変形と間隙水圧のコンターを同時にみたもので、NAPOLI による動的解析結果を画像処理システムを用いてアニメーション・ビデオに収録し、この映像の静止画面を写真にとったものである。赤色は間隙水圧の高い領域を、青色は低い領域を示しているが、盛土下端中心のA点付近から間隙水圧が増加し、これに伴って自重により盛土天端が沈下し、両側にはらみ出す変形モードが表現されている。また、静止画面では分からないが、アニメーション・ビデオでは入力波の周期と同じ周期で全応力の変化に伴い、間隙水圧のコンターが左右に大きく揺れ動く様子を見ることが出来る。

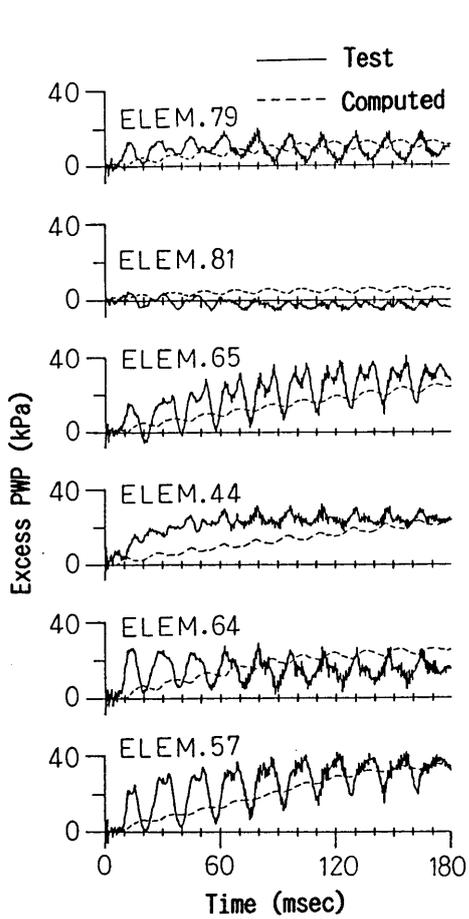


図 5 - 14 間隙水圧の時刻歴

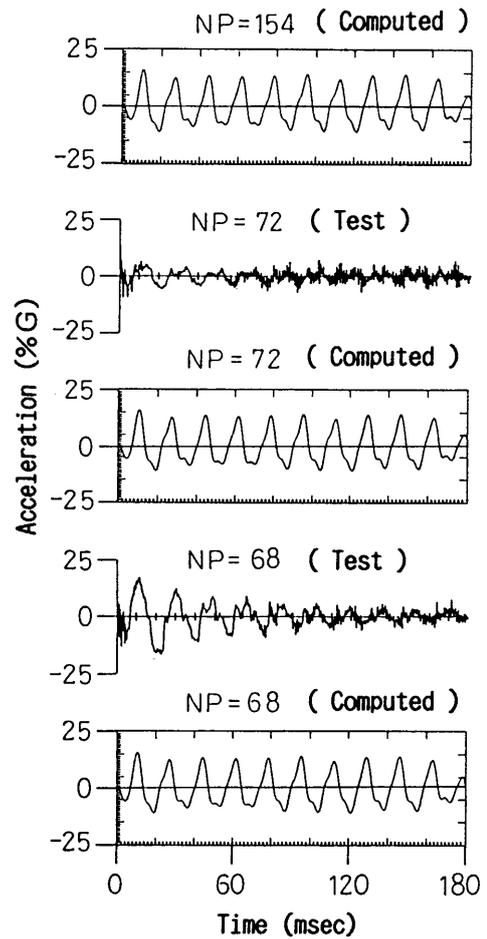


図 5 - 15 加速度の時刻歴

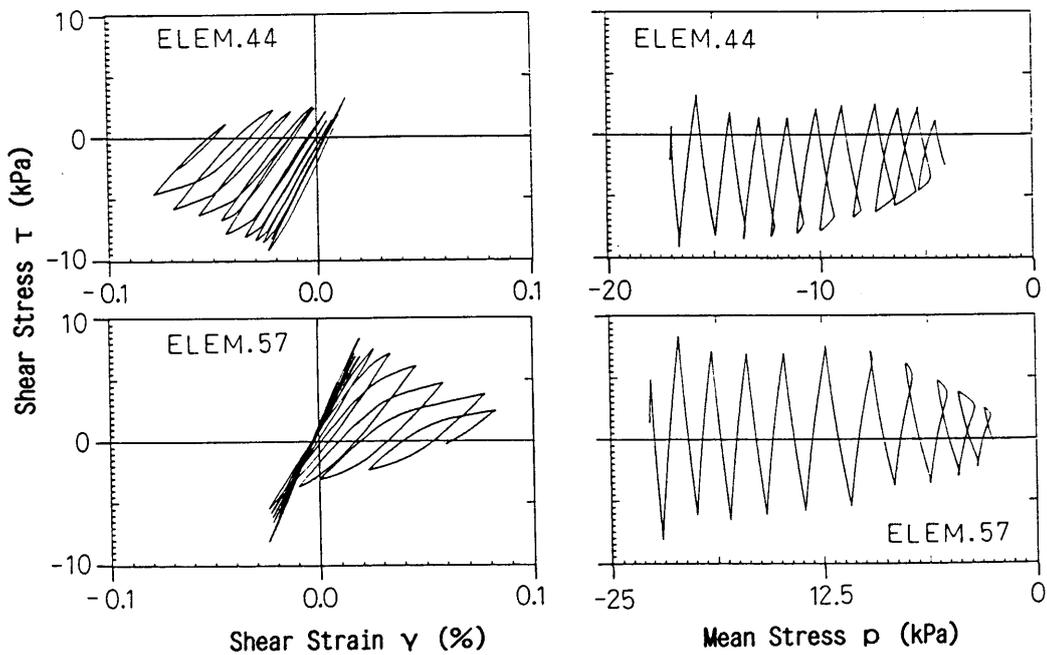


図 5 - 16 応力経路と応力-ひずみ関係



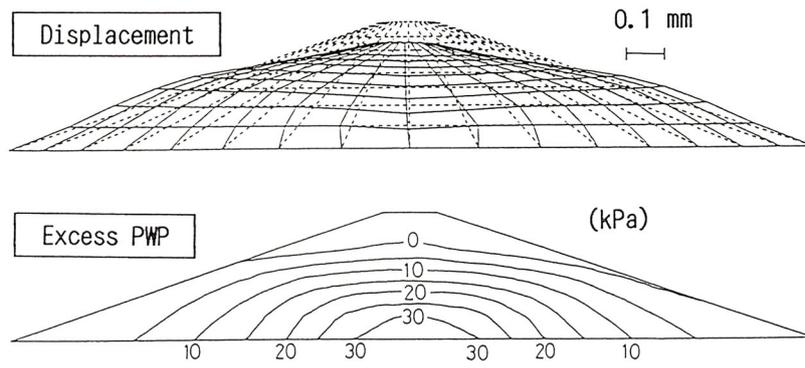


図 5 - 17 地震終了時の変形と間隙水圧

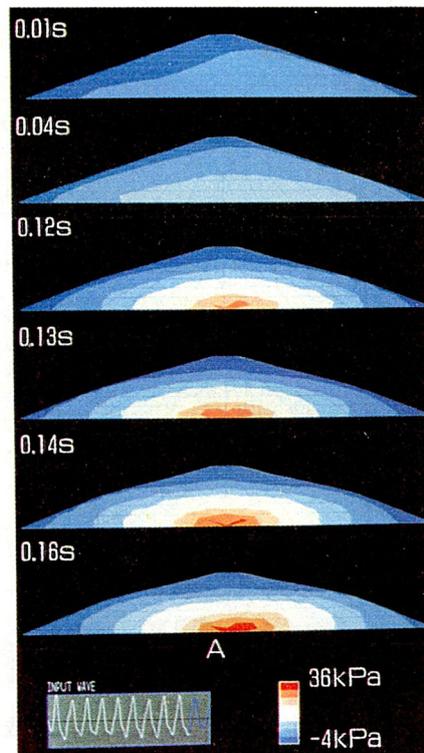


図 5 - 18 盛土の変形と間隙水圧のカウンター



## 5.5 本章の要約

本章は、第2章で提案した砂の繰返し弾塑性構成モデルを、構造骨格と間隙水の二相系からなる有限要素法による液状化解析へ適用したものである。具体的には、土質工学会・地盤と土構造物の地震時の挙動に関する研究委員会で取り上げられた新潟地震での川岸町地盤の液状化解析（一次元問題）および水浸盛土の透遠心力載荷実験のシミュレーション解析（二次元問題）を実施し、同委員会で示された7種類のモデルによる解析結果と比較するとともに、本モデルの液状化解析への適用性について検討した。

ただし、構成モデルを有限要素法解析プログラムに組み込むにあたり、扱い易さを考えてモデルはできるだけ単純で、材料定数の数もできるだけ少ないものであることが望ましい。このため、本章では、有限要素法による液状化解析の第一ステップとして、第2章で提案した繰返しモデルをさらに単純化したものを使用している。

本章の主要な結論は、次のとおりである。

- ①：新潟地震での川岸町地盤の液状化解析（一次元問題）において、液状化した地盤や振動台実験で観察される地震時の典型的な応答（間隙水圧の上昇に伴い、せん断波が上方へ伝播できなくなり、加速度振幅、せん断応力振幅が低下する現象）を表現することができた。
- ②：水浸盛土の透遠心力載荷実験のシミュレーション解析（二次元問題）において、間隙水圧時刻歴の解析結果と実験結果の対応はおおむね良好であった。また、初期せん断応力が存在することによって生じる残留変形を表現することができた。
- ③：①、②の結果は、土質工学会・委員会で示された7種類の構成モデルによる解析結果と類似したものであり、本モデルは液状化解析の有用な手法となりうるものと考えられる。

なお、5.4.2の二次元動的解析のCPU時間は、IBM-4381(3.8 MIPS)で75分であった。

## 参考文献 (第5章)

- 1) 石原研而、吉田 望、塩見忠彦、福武毅芳、井合 進、西 好一、田中忠次ほか：地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集 I. 委員会報告、pp.50 ~136、1989
- 2) Mroz, Z. : On the description of anisotropic work hardening, J. Mech. Phys. Solids, 15, pp. 163-175, 1967.
- 3) Sekiguchi, H. and Ohta, H. : Induced anisotropy and time dependency in clays, Proc. Specialty Session 9, 9th ICSMFE, Tokyo, pp. 229-239, 1977.
- 4) 吉田 望、W.D.L.Finn：有効応力解析プログラム TARA-3 による解析、地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集、pp. 64-73, 1989.
- 5) 吉田 望：TARA-3による解析、地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集、pp. 105-114, 1991.
- 6) Zienkiewicz, O. C. and Shiomi, T. : Dynamic behaviour of saturated porous media The generalized Biot formulation and its numerical solution, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geom., Vol. 8, pp. 71-96, 1984.
- 7) Prevost, J. H., Abdel-Ghaffar, M. and Lacy, S. J. : Nonlinear dynamic analyses of an earth dam, ASCE, Vol. 111, No. GT7, 1985.
- 8) Ohtsuki, A. and Itoh, T. : Two-dimensional effective stress analysis of liquefaction of irregular ground including soil-structure interaction, EESD, Vol. 15, pp. 345-366, 1987.
- 9) 福武毅芳、大槻 明：ALISS による解析、地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集、pp. 84-93, 1989.
- 10) 福武毅芳、大槻 明：ALISS による解析、地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集、pp. 125-134, 1991.
- 11) 田中忠次：NONSOLANによる液状化解析、地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集、pp. 124-133, 1989.
- 12) 井合 進：FLIPによる解析、地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発

- 表論文集、pp.94-103、1989.
- 13) 井合 進、松永康男：FLIPによる解析、地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集、pp.135-144、1991.
  - 14) Nishi,K.and Kanatani,M. : Constitutive relations for sand based on elasto-plasticity theory,Soils and Foundations,Vol.30,No.2,pp.43-59、1990.
  - 15) 西 好一、金谷 守、大波正行、 : NAFSS による解析、地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集、pp.114-123、1989.
  - 16) 金谷 守、西 好一、大波正行、 : NAFSS による解析、地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集、pp.155-164、1991.
  - 17) 八嶋 厚、岡 二三生、柴田 徹、渦岡良介：LIQCA による解析、地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集、pp.165-174、1991.
  - 18) 重野喜政、塩見忠彦：MuDIANによる解析、地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集、pp.145-154、1991.
  - 19) 森尾 敏、日下部伸、塚本耕治：多曲面モデルによる解析、地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集、pp.175-184、1991.
  - 20) 森尾 敏、日下部伸、三原正哉：Densification モデルによる振動台液状化実験のシミュレーション、地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集、pp.197-204、1989.
  - 21) Pastor,M.and Zienkiewicz,O.C. : A generalized plasticity,hierarchical model for sand under monotonic and cyclic loading,Int.Sym.on Num.Models in Geome.,Ghent,pp.131-150、1986.
  - 22) Pande,G.N.and Pietruszczak,St. : Reflecting surface model for soils,Int.Sym.on Num.Models in Geome.,Zurich,pp.50-64、1982.
  - 23) Kabilamany,K. : Modeling of cyclic behaviour of sands and its application to seismic response analysis,東京大学学位論文、1986.
  - 24) Zienkiewicz,O.C.,Chang,C.T.and Hinton,E. : Non-linear seismic response and liquefaction,Int.J.for Num.Anal.Meth.in Geome.,Vol.2(4),pp.381-404、1978
  - 25) 田中忠次、谷 茂：ENDOCHRONIC 理論に基づく砂の繰返し三軸試験の液状化解析、農業土木学会論文集、第 132号、pp.51-61、1987.
  - 26) Biot,M.A. : General theory of three-dimensional condition,J.Appl.Phys.,Vol.

- 12, pp. 155-164, 1941.
- 27) Ghaboussi, J. and Wilson, E.L. : Dynamic stress analysis of porous elastic solid saturated with compressible fluid, EERC Report 71-6, Univ. of California, Berkeley, 1971.
- 28) Shiomi, T. and Zienkiewicz, O.C. : Dynamic behaviour of saturated porous media The generalized Biot formulation and its numerical solution, Takenaka Technical Research Report, NO. 31, pp. 101-130, 1984.
- 29) 塩見忠彦 : 粒状体の力学 1.12 二相系、土質工学会、pp. 45-49, 1993.
- 30) 松田 宏、須田隆文、佐光浩継 : 建設工学分野向け汎用システム DIANA、計算工学、Vol. 1, No. 5, pp. 8-9, 1994.
- 31) DIANA 概要書 VERSION 2.0、ソフトウェアサイエンス研究所、1987.8.
- 32) Owen, D.R.J. and Hinton, E. : Finite elements in plasticity, Pineridge Press Limited, Swansea, UK, pp. 431-437, 1980.

## 第6章 総括

本論文は、一般応力空間での砂質土の非線形挙動を表現する繰返し弾塑性構成式を開発すること、さらに、これを有限要素法による砂地盤の液状化解析に応用することを主要な目的としたものである。

各章に得られた成果をまとめているが、それを総括すると以下のようなものである。

### 第1章 序論

本章では、本研究の目的と着目点、および繰返し弾塑性構成モデルに関する既往の研究の概観を述べた。第2章、第5章で提案する繰返しモデルは無数曲面モデルの範疇に入るが、研究の概観のなかで既往の無数曲面モデルと提案モデルの違いについても説明した。

### 第2章 非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成式

本章では、有限要素法による二次元あるいは三次元液状化解析への適用を目的として、一般応力空間での砂の非線形挙動を表現するひとつの繰返し弾塑性構成モデルを提案した。このモデルは、一般応力空間での応力反転等の履歴挙動が妥当に説明できること、負荷曲面はひずみの増加に伴って塑性状態で破壊曲面に漸近するが、両曲面は交差しないこと、土の異方性の影響により、応力主軸の回転に伴う塑性変形を記述できること等を考慮して組み立てたものであり、繰返し載荷時の砂の挙動を妥当に説明できると同時に静的な載荷条件下の挙動を包含するものである。

本モデルの最大の特徴は、実験結果に基づいて非共軸性の評価が積極的に取り入れられていることであり、適用例として実験結果に表れる非共軸性をどの程度表現できるかを示した。また、非共軸性を評価することの重要性を実験結果（非排水単純せん断試験）との比較から示した。

本章で得られた主要な結論は、次のとおりである。

- ①：正規降伏曲面、負荷曲面、応力反転曲面等、すべての曲面が交差しない条件下で、松岡・中井の破壊基準によって表現される異方性を組み込んだモデルが提案

された。

- ②：偏差応力空間での流れ則に応力反転の影響を表すテンソル、応力履歴の影響を表すテンソルが導入され、この流れ則に基づいて非共軸性の程度を示すスカラー  $c$  が定義された。この  $c$  をストレス-ダイレイタンスー関係に導入することで、応力反転の効果をうまく評価することができた。
- ③：実験結果に基づく  $c$  と解析で得られた  $c$  の比較から、本モデルは増分線形モデルの範疇で繰返し載荷時の非共軸性をうまく表現できることが分った。
- ④：新たな応力反転曲面  $f_{s^k}$  を用いることで、無数曲面モデルの問題点とされている応力振幅が低下する繰返し載荷をうまく表現することができた。

### 第3章 三軸応力状態での飽和砂の不安定挙動の解析的検討

本章では、第2章で提案した繰返しモデルを非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験（体積ひずみ増分と軸ひずみ増分の比を一定に制御した三軸試験）で表れるひずみ軟化を伴う不安定挙動の解析に適用した。

本章では、まずモデルを静的な単調載荷の解析に適用したときの構成関係を示した。次に、このモデルを用いて非排水三軸圧縮試験のシミュレーション解析を行い、本モデルの非排水三軸圧縮試験への適用性を示した。さらに、非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験でのひずみ軟化を表現する構成式の安定性について理論的考察を加えたうえで、両試験でのひずみ軟化の判定式を示した。そして、この結果を基に材料固有のダイレイタンスー特性と飽和砂要素に課せられる体積変化、すなわち、排水条件（間隙水の流出入）がひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生に及ぼす役割を明らかにした。

本章で得られた主要な結論は、次のとおりである。

- ①：提案した弾塑性構成モデルは、極めてゆるく詰められた砂において非排水せん断強度がゼロになり、静的液状化が発生する挙動、間隙比の減少に伴いひずみ軟化からひずみ硬化に至る挙動をうまく表現することができる。
- ②：限界状態（変相状態）に至る前に破壊する材料（ $\phi_{mc} > \phi_c$ ）を想定することで静的液状化を表現することができる。
- ③：非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験でひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生する条件は、それぞれ、下に示す式(3.26)と式(3.54)で表され、この時の変形は、せん断帯の発生を伴わない均質なものである。

$$K_P + K_{n_P} g_P < 0 \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

$$K_P + K_{n_P} (g_P - \bar{b} g_s) < 0 \quad \dots\dots\dots (3.54)$$

④：式(3.54)から分かるように、ひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生には、材料固有のダイレイタンスーに加えて、排水条件（間隙水の流出入）が重要な役割を演じている。

#### 第4章 弾塑性構成式に基づく異方性砂の非排水挙動の評価

本章では、液状化に関連の深い砂の非排水挙動に着目し、一般応力空間での両極端の応力状態である三軸圧縮と伸張挙動を統一的に表現する構成式について解析的に検討した。三軸圧縮と伸張時には中間主応力に基づく異方性、構造的な異方性の影響が含まれ、砂の非排水挙動に大きな違いがみられるため、一般応力空間でモデルを組み立てる上で両者を統一的に表現できることは、重要である。

本章では、第2章で提案したモデルの流れ則を拡張し、これを静的な単調载荷に対して適用した。具体的には、塑性ポテンシャル曲面（流れ則）を定義する体積最大圧縮時の応力比Mの $\pi$ 平面での形状を任意に選定できるモデルを提案した。このモデルにより、飽和砂の非排水三軸圧縮と伸張挙動の大きな違い（異方性）をどの程度表現できるかを示した。

本章で得られた主要な結論は、次のとおりである。

- ①：平均主応力一定および側圧一定の排水せん断試験において、既往のモールクーロン、Lade、Drucker-Prager等の規準が構造的な異方性の程度をどの程度表現できるかを定量的に示すための指標  $R_m$  を提示した。
- ②：①で提示した  $R_m$  は、材料の特性、供試体の作成方法、あるいは拘束圧の大きさ等によって大きく変動しており、このような特性をひとつの規準を使って評価するための有効な方法として、体積最大圧縮時の応力比Mの $\pi$ 平面での形状を任意に選定できる規準を考える必要があることを示した。
- ③：②の結果に基づき、破壊時の応力比Aの $\pi$ 平面での形状と独立に、Mの $\pi$ 平面での形状を任意に選定できるモデルを提示した。
- ④：③のモデルを用いることにより、三軸圧縮時にはひずみ硬化する材料が、三軸伸張時にはひずみ軟化を示すような特性（強い異方性）をうまく表せることを示した。

- ⑤：④の結果は、Mの異方性（ $\pi$ 平面での形状）をいかに設定するかが砂の非排水挙動の解析に重要であることを示している。

## 第5章 繰返し弾塑性構成式の有限要素法による液状化解析への適用

本章では、第2章で提案した砂の繰返し弾塑性構成モデルを、構造骨格と間隙水の二相系からなる有限要素法による液状化解析に適用した。具体的には、「(社)土質工学会・地盤と土構造物の地震時の挙動に関する研究委員会」で取り上げられた新潟地震での川岸町地盤の液状化解析（一次元問題）および水浸盛土の遠心力載荷実験のシミュレーション解析（二次元問題）を実施し、同委員会で示された7種類のモデルによる解析結果と比較するとともに、本モデルの液状化解析への適用性について検討した。

ただし、構成モデルを有限要素法解析プログラムに組み込むにあたり、扱い易さを考えてモデルはできるだけ単純で、材料定数の数もできるだけ少ないものであることが望ましい。このため、本章では、有限要素法による液状化解析の第一ステップとして、第2章で提案したモデルをさらに単純化したものを使用した。

本章で得られた主要な結論は、次のとおりである。

- ①：新潟地震での川岸町地盤の液状化解析（一次元問題）において、液状化した地盤や振動台実験で観察される地震時の典型的な応答（間隙水圧の上昇に伴い、せん断波が上方へ伝播できなくなり、加速度振幅、せん断応力振幅が低下する現象）を表現することができた。
- ②：水浸盛土の透遠心力載荷実験のシミュレーション解析（二次元問題）において、間隙水圧時刻歴の解析結果と実験結果の対応はおおむね良好であった。また、初期せん断応力が存在することによって生じる残留変形を表現することができた。
- ③：①、②の結果は、土質工学会・委員会で示された7種類の構成モデルによる解析結果と類似したものであり、本モデルは液状化解析の有用な手法となりうるものと考えられる。

## 記号説明

$A$	: 正規降伏曲面 $F$ の半径
$A_f$	: 正規降伏曲面 $F$ の $\pi$ 平面での形状を規定する材料定数
$A_m$	: 体積最大圧縮時の応力比 $M$ の $\pi$ 平面での形状を規定する材料定数
$a$	: 負荷曲面 $f$ の半径
$a^I$	: 前ステップでの負荷曲面 $f^I$ の半径
$a^N$	: 最新の応力反転曲面 $f_s^N$ の半径
$a_0$	: 負荷曲面 $f$ の半径 $a$ を定義する変数
$\alpha$	: 塑性ひずみ増分の方向を表す単位テンソル $g_{ij}$ を定義する係数
$\alpha_{ij}$	: 負荷曲面 $f$ の中心座標
$\alpha^I_{ij}$	: 前ステップでの負荷曲面 $f^I$ の中心座標
$\alpha^k_{ij}$	: 新しい応力反転曲面 $f_s^k$ の中心座標
$\alpha^N_{ij}$	: 最新の応力反転曲面 $f_s^N$ の中心座標
$\bar{a}$	: ひずみ制御三軸試験における $dv/d\varepsilon_a$
$B$	: 間隙水圧係数
$b$	: 中間主応力係数 ( $= (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ )
$\bar{b}$	: ひずみ制御三軸試験における $dv/de$
$\beta$	: 塑性ひずみ増分の方向を表す単位テンソル $g_{ij}$ を定義する係数
$c$	: 非共軸性の程度を示すスカラー変数
$c_0$	: 粘着力
$D^{E_{ijkl}}$	: 弾性係数テンソル
$D^{EP_{ijkl}}$	: 弾塑性係数テンソル
$D^{EP}$	: 三軸応力空間での有効応力に関する弾塑性マトリックス ( $2 \times 2$ )
$D^{EP_s}$	: $D^{EP}$ の対称マトリックス ( $2 \times 2$ )
$D^{EP_t}$	: 三軸応力空間での全応力に関する弾塑性マトリックス ( $2 \times 2$ )
$D_{SS}, D_{SP}, D_{PS}, D_{PP}$	: $D^{EP}$ の各成分
$D_r$	: 相対密度

$d$	: $R / R_s^M$ ( $0 \leq d \leq 1$ )
$df$	: 負荷指標 ( $= n_{ij} d\sigma_{ij}$ )
$dg$	: $g_{ij} d\sigma_{ij}$
$d^2W$	: 2次仕事増分
$d^2W^P$	: 2次塑性仕事増分
$\delta$	: 現在の応力点と共役点 ( $\sigma_F$ ) との距離
$\delta_{ij}$	: クロネッカーのデルタ
$\varepsilon_{ij}$	: ひずみテンソル
$\varepsilon^E_{ij}$	: 弾性ひずみテンソル
$\varepsilon^P_{ij}$	: 塑性ひずみテンソル
$\varepsilon_a, \varepsilon_r$	: 三軸試験での軸ひずみ、側方ひずみ
$\varepsilon_s$	: $ e_{ij} $
$\varepsilon_s^P$	: $ e^P_{ij} $
$e_{ij}$	: 偏差ひずみ ( $= \varepsilon_{ij} - (1/3) \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ )
$e^P_{ij}$	: 塑性偏差ひずみ ( $= \varepsilon^P_{ij} - (1/3) \varepsilon^P_{kk} \delta_{ij}$ )
$e$	: 軸差ひずみ ( $= (2/3) (\varepsilon_a - \varepsilon_r)$ )
$e^P$	: $e$ の塑性成分
$e_o$	: 初期間隙比
$\eta_{ij}$	: 偏差応力比 ( $= s_{ij} / p$ )
$\eta_{ij}^0$	: 初期状態での $\eta_{ij}$
$\eta$	: $ \eta_{ij} $
$\eta_{rc}, \eta_{re}$	: 三軸圧縮および伸張状態での破壊時の応力比
$\eta_{mc}, \eta_{me}$	: 三軸圧縮および伸張状態での体積最大圧縮時の応力比
$F$	: 正規降伏曲面
$f$	: 負荷曲面
$f_s$	: 応力反転曲面
$f_s^N$	: 最新の応力反転曲面
$f_s^M$	: 過去の最大の応力反転曲面
$f_s^K$	: 新たな応力反転曲面
$f^E$	: 弾性領域を定義する硬化曲面

$f^I$	: 前ステップでの負荷曲面
$G$	: せん断弾性係数
$G_I$	: 初期平均主応力 $p_I$ での $G$
$G_{ij}$	: 塑性偏差ひずみ増分 $de_{ij}$ の方向を定義する単位テンソル
$G(\theta)$	: 正規降伏曲面 $F$ の $\pi$ 平面での形状を表す関数
$G(\bar{\theta})$	: 負荷曲面 $F$ の $\pi$ 平面での形状を表す関数
$G_m(\theta)$	: 体積最大圧縮時の応力比 $M$ の $\pi$ 平面での形状を表す関数
$G_s$	: 土粒子の比重
$g$	: 塑性ポテンシャル曲面
$g_{ij}$	: 塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ の方向を定義する単位テンソル
$\gamma$	: せん断ひずみ ( $= 2\varepsilon_{12}$ )
$\gamma^P$	: 塑性せん断ひずみ ( $= 2\varepsilon^P_{12}$ )
$H_s$	: $= n_{mn} D^E_{mnst} g_{st}$ (一般応力空間) $= 3G n_s g_s + K n_p g_p$ (三軸応力空間)
$J_2$	: 偏差応力 $s_{ij}$ の 2 次不変量
$J_3$	: 偏差応力 $s_{ij}$ の 3 次不変量
$\bar{J}_2$	: $\bar{s}_{ij}$ の 2 次不変量
$\bar{J}_3$	: $\bar{s}_{ij}$ の 3 次不変量
$K$	: 体積弾性係数
$K_I$	: 初期平均主応力 $p_I$ での $K$
$K_f$	: 間隙流体の体積弾性係数
$K_m$	: 土粒子の体積弾性係数
$K_p$	: 硬化係数
$K_{pI}$	: $K_p$ の初期値
$K_o$	: 側圧係数 ( $= \sigma_x / \sigma_z$ )
$k$	: 透水係数
$\chi$	: 非共軸性の程度を表す材料定数 (式 (2.9))
$\chi_1, \chi_2$	: 非共軸性の程度を表す定数 (式 (2.37))
$M$	: 体積最大圧縮時の応力比
$\nu$	: ポアソン比

$N_1$	: 液状化に至る繰返し回数
$n$	: 間隙率
$n_{ij}$	: 負荷の方向を規定する単位テンソル
$n_s, n_p$	: 三軸応力空間での負荷の方向を規定する単位ベクトル
$p$	: 平均主応力 ( $= (1/3) \sigma_{kk}$ )
$p_1$	: 初期状態での $p$
$p_w$	: 間隙水圧
$\phi$	: 破壊時の内部摩擦角
$\phi_c$	: 三軸圧縮状態での破壊時の内部摩擦角
$\phi_m$	: 体積最大圧縮時の内部摩擦角
$\phi_{mc}$	: 三軸圧縮状態での体積最大圧縮時の内部摩擦角
$Q_{ij}$	: $G_{ij}$ を定義するテンソル
$Q^N_{ij}$	: 応力反転の影響を表す単位テンソル
$Q^L_{ij}$	: 負荷曲面 $f$ の偏差応力空間での外向き法線方向単位テンソル
$Q^H_{ij}$	: 過去の応力履歴の影響を表す単位テンソル
$q$	: 軸差応力 ( $= \sigma_a - \sigma_r$ )
$q_s$	: 初期状態での $q$ ( $= \sigma_{a0} - \sigma_{r0}$ )
$R$	: 負荷曲面 $f$ と正規降伏曲面 $F$ の半径の比 ( $= a/A$ )
$R^E$	: $f^E$ の基準化空間での半径
$R_s^N$	: $f_s^N$ の基準化空間での半径
$R_s^M$	: $f_s^M$ の基準化空間での半径
$R^I$	: $f^I$ の基準化空間での半径
$R^K$	: $f_s^K$ の基準化空間での半径
$R_{ij}$	: 基準化応力比 ( $\eta_{ij}/A$ )
$R^I_{ij}$	: 前ステップでの $R_{ij}$
$R^M_{ij}$	: 過去の最大の $R_{ij}$
$R_5$	: 繰返し回数 $N = 5$ で液状化に至るせん断応力比 ( $\tau_{max}/p_1$ )
$R_{20}$	: 繰返し回数 $N = 20$ で液状化に至るせん断応力比 ( $\tau_{max}/p_1$ )
$R_m$	: 構造的な異方性の程度を表す指標
$r$	: 応力-ひずみ曲線を規定する材料定数

$\rho$	: 土粒子と水の混合体の平均密度
$\rho_f$	: 間隙水の密度
$\rho_s$	: 土粒子の密度
$\lambda$	: 塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^p_{ij}$ の大きさを規定する比例定数 ( $=  d\varepsilon^p_{ij} $ )
$\lambda_p$	: $D^{EP}$ の最小固有値
$\lambda_s$	: $D^{EP_s}$ の最小固有値
$\lambda_t$	: $D^{EP_t}$ の固有値
$\lambda_0$	: $\lambda_p$ の初期値
$S_{ij}$	: 偏差応力 ( $= \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$ )
$\bar{S}_{ij}$	: $S_{ij} - p A \alpha_{ij}$
$S$	: 相似中心
$\theta$	: ローデ角
$\bar{\theta}$	: $\bar{S}_{ij}$ を用いて定義されるローデ角
$\theta_w$	: 間隙水の体積ひずみ
$\theta_0$	: $\theta - \pi/6$
$\sigma_{ij}$	: 有効応力テンソル
$\sigma^t_{ij}$	: 全応力テンソル
$\sigma_a, \sigma_r$	: 三軸試験での軸応力、側方応力
$\sigma_{a0}, \sigma_{r0}$	: $\sigma_a, \sigma_r$ の初期値
$\sigma_F$	: 共役応力
$\sigma_x, \sigma_y$	: 水平方向応力
$\sigma_z$	: 鉛直方向応力
$\sigma_{x0}, \sigma_{y0}$	: $\sigma_x, \sigma_y$ の初期値
$\sigma_{z0}$	: $\sigma_z$ の初期値
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	: 最大、中間、最小主応力
$\tau$	: せん断応力 ( $= \sigma_{12}$ )
$\tau_{max}$	: 繰返し最大せん断応力
$\tau_{oct}$	: 八面体せん断応力
$u$	: 土骨格の変位
$U$	: 間隙水の変位

$V_s$  : せん断波速度  
 $v$  : 体積ひずみ  
 $v^p$  : 塑性体積ひずみ

# APPENDIX A: 要素試験のシミュレーション解析法

応力増分  $d\sigma_{ij}$  と全ひずみ増分  $d\varepsilon_{ij}$  は、弾塑性係数テンソル  $D^{EP}_{ijkl}$  およびその逆テンソル  $D^{EP}_{ijkl}^{-1}$  を介して、次式で関係づけられる。

$$d\sigma_{ij} = D^{EP}_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad \dots\dots\dots (A.1)$$

$$d\varepsilon_{ij} = D^{EP}_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} \quad \dots\dots\dots (A.2)$$

式(A.1) は、 $d\varepsilon_{ij}$  を与えて  $d\sigma_{ij}$  を算定することであり、ひずみ制御試験に、式(A.2) は  $d\sigma_{ij}$  を与えて  $d\varepsilon_{ij}$  を算定することであり、応力制御試験に相当する。ここでは、本論文で取り扱った要素試験を含めて、種々の要素試験のシミュレーション解析法について具体的に説明する。

ここでは、応力とひずみは下式のようにベクトル表示する。ただし、Zは鉛直方向を、XとYは水平方向を意味する。

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{12} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (A.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{zx} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ 2 d\varepsilon_{12} \\ 2 d\varepsilon_{23} \\ 2 d\varepsilon_{31} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (A.4)$$

## ①: 繰返し非排水単純せん断試験

第2章(2.4)では、繰返し非排水単純せん断試験のシミュレーション解析を行った。この試験は、ひずみ制御方式であり、ひずみの境界条件は下のとおりである。

$$\left. \begin{array}{l} d\varepsilon_x = d\varepsilon_y = d\varepsilon_z = d\gamma_{xy} = d\gamma_{yz} = 0 \\ d\gamma_{zx} \neq 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (A.5)$$

このため、式(A.1)において微小の  $d\gamma_{zx}$  を順次与え、 $d\sigma_{ij}$  を算定し、 $d\sigma_{ij}$  を累積することによって現在の応力  $\sigma_{ij}$  を求める。この  $\sigma_{ij}$  のうち、せん断応力  $\tau_{zx}$  をモニターし

ておき、 $\tau_{zx}$ の絶対値が所定の最大せん断応力 $\tau_{max}$ を越えた時点で $d\gamma_{zx}$ の符号を変えて繰返しせん断をシミュレートする。2.4の解析では、微小の $d\gamma_{zx}$ として $1 \times 10^{-5}$ を用いた。

②：非排水三軸試験

第3章(3.3、3.5)および第4章(4.4.2)では、非排水三軸試験の解析を行った。この試験は、ひずみ制御方式であり、ひずみの境界条件は下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} d\gamma_{xy} = d\gamma_{yz} = d\gamma_{zx} = 0 \\ d\varepsilon_z \neq 0, \quad d\varepsilon_x = d\varepsilon_y = -(1/2)d\varepsilon_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.6)$$

このため、式(A.1)において微小の $d\varepsilon_z$ と $d\varepsilon_x = d\varepsilon_y (= -(1/2)d\varepsilon_z)$ を順次与え、 $d\sigma_{ij}$ を算定し、 $d\sigma_{ij}$ を累積することによって現在の応力 $\sigma_{ij}$ を求める。解析では、微小の $d\varepsilon_z$ として $1 \times 10^{-5}$ を用いた。なお、三軸圧縮試験は $d\varepsilon_z < 0$ 、三軸伸張試験は $d\varepsilon_z > 0$ である。

繰返し三軸試験をシミュレートするには、上で得られた $\sigma_{ij}$ から軸差応力 $q (= \sigma_z - \sigma_x)$ を求め、これをモニターしておき、 $q$ の絶対値が所定の最大軸差応力 $q_{max}$ に達した時点で $d\varepsilon_z$ の符号を変える。

③：ひずみ経路制御三軸試験

第3章(3.4)の図3-7では、 $\bar{a}$ を一定としたひずみ経路制御三軸試験の解析を行った。ここに、 $\bar{a}$ は体積ひずみ増分 $dv$ と軸ひずみ増分 $d\varepsilon_z$ の比であり、次式で表される。

$$\bar{a} = dv / d\varepsilon_z \quad \dots\dots\dots (A.7)$$

この試験もひずみ制御方式である。ひずみの境界条件は下のとおりであり、

$$\left. \begin{aligned} d\gamma_{xy} = d\gamma_{yz} = d\gamma_{zx} = 0 \\ d\varepsilon_z \neq 0, \quad d\varepsilon_x = d\varepsilon_y = (\bar{a} - 1)d\varepsilon_z / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.8)$$

$\bar{a} = 0$ のとき、②の非排水三軸試験の解析に一致する。図3-7の解析では、 $d\varepsilon_z = -1 \times 10^{-5}$ を用いた。

④： $de = 0$ の条件下で体積ひずみを膨張側に制御する( $dv > 0$ )三軸試験

第3章(3.4)の図3-8では、 $de = 0$ の条件下で体積ひずみを膨張側に制御する

( $dv > 0$ ) 三軸試験の解析を行った。この試験もひずみ制御方式であり、ひずみの境界条件は下のとおりである。

$$\left. \begin{array}{l} d\gamma_{xy} = d\gamma_{yz} = d\gamma_{zx} = 0 \\ d\varepsilon_z = d\varepsilon_x = d\varepsilon_y > 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (A.9)$$

解析では、 $d\varepsilon_z = d\varepsilon_x = d\varepsilon_y = 1 \times 10^{-5}$ を用いた。なお、 $d\varepsilon_z = d\varepsilon_x = d\varepsilon_y < 0$ は、 $de = 0$ の条件下で体積ひずみを収縮側に制御する( $dv < 0$ ) 三軸試験になる。

⑤：その他の種々の三軸試験

側方ひずみ拘束三軸圧縮試験 (K。圧密試験) はひずみ制御方式であり、ひずみの境界条件は下のとおりである。

$$\left. \begin{array}{l} d\varepsilon_x = d\varepsilon_y = d\gamma_{xy} = d\gamma_{yz} = d\gamma_{zx} = 0 \\ d\varepsilon_z < 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (A.10)$$

側圧一定三軸試験は、応力制御方式である。応力の境界条件は下のとおりであり、

$$\left. \begin{array}{l} d\sigma_x = d\sigma_y = d\tau_{xy} = d\tau_{yz} = d\tau_{zx} = 0 \\ d\sigma_z \neq 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (A.11)$$

$d\sigma_z < 0$ は側圧一定三軸圧縮試験、 $d\sigma_z > 0$ は側圧一定三軸伸張試験になる。

平均主応力一定三軸試験は応力制御方式であり、応力の境界条件は下のとおりである。

$$\left. \begin{array}{l} d\tau_{xy} = d\tau_{yz} = d\tau_{zx} = 0 \\ d\sigma_z \neq 0, \quad d\sigma_x = d\sigma_y = -(1/2)d\sigma_z \end{array} \right\} \dots\dots\dots (A.12)$$

この試験は、式 (A.6) の非排水三軸試験のひずみの境界条件を応力に変換したものになっている。

⑥：平均主応力一定、 $\theta$ 一定排水せん断試験

第4章 (4.4.1) では、平均主応力一定、 $\theta$ 一定排水せん断試験の解析を行った。ここで、 $\theta = 30^\circ$  (三軸圧縮)、 $15^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $-15^\circ$ 、 $-30^\circ$  (三軸伸張) であり、この試験は応力制御方式である。また、 $\theta$ と中間主応力係数  $b$  値との関係は、第1章の式 (1.6) のとおりであり、上の  $\theta$  での  $b$  値はそれぞれ 0.0、0.268、0.5、0.732、1.0 である。

$\theta = \pm 30^\circ$  (軸対称応力状態) での応力の境界条件は、上の式 (B.12) であり、 $d\sigma_z < 0$ が、 $\theta = 30^\circ$  (三軸圧縮試験)、 $d\sigma_z > 0$ が  $\theta = -30^\circ$  (三軸伸張試験) である。

$\theta = 0^\circ$  の応力の境界条件は、下のとおりであり、

$$\left. \begin{array}{l} d\sigma_y = d\tau_{xy} = d\tau_{yz} = d\tau_{zx} = 0 \\ d\sigma_z \neq 0, \quad d\sigma_x = -d\sigma_z \end{array} \right\} \dots\dots\dots (A.13)$$

$d\sigma_z$  の向き (符号) は、 $\theta$  および  $b$  値では表現できない。

$\theta = \pm 15^\circ$  での応力の境界条件は、下のとおりであり、

$$\left. \begin{array}{l} d\tau_{xy} = d\tau_{yz} = d\tau_{zx} = 0 \\ d\sigma_z \neq 0, \quad d\sigma_x = -0.732 d\sigma_z, \quad d\sigma_y = -0.268 d\sigma_z \end{array} \right\} \dots\dots\dots (A.14)$$

$d\sigma_z < 0$  が  $\theta = 15^\circ$  ( $b = 0.268$ )、 $d\sigma_z > 0$  が  $\theta = -15^\circ$  ( $b = 0.732$ ) である。

## APPENDIX B: 材料の安定性に関する理論

弾塑性理論の枠内で、材料の安定性に関して種々の仮定が提案されている。このうち、Drucker の仮定とHillの仮定はエネルギー理論に基づくものであり、Mandelの仮定は波動伝播理論に基づくものである<sup>22)</sup>。Drucker および Hill の仮定は、それぞれ式 (B.1)、(B.2) で表されるが、

$$d^2W^P = d\sigma_{ij} d\varepsilon^P_{ij} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (B.1)$$

$$d^2W = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (B.2)$$

弾性ひずみ増分  $d\varepsilon^E_{ij}$  が十分小さい破壊近傍では、両者はほぼ一致する。また、 $d\sigma_{ij} d\varepsilon^E_{ij} > 0$ であることを考えると、Hillの仮定は Druckerの仮定より若干広い範囲を規定している。

Hillの仮定は、解の唯一性に対する十分条件であり、解の唯一性の保証は、その解が定める状態が安定であることを意味している。しかし、その逆はいえず、解が唯一でなくても安定である場合が存在しうる。すなわち、安定な変形の分岐を生じ得る可能性が残されている<sup>23)</sup>。

また、橋口<sup>16)、24)</sup>はこの両仮定より制限のゆるい仕事率・剛性緩和と呼ばれる仮定を主張している。まず、ある応力状態から微小な変形を生じさせる場合に、応力のなす2次の仕事率 $d^2\bar{W}$ について、次の関係が成り立つ。

$$d^2\bar{W} = d^2\bar{W}^E - d^2\bar{W}^P \quad \dots\dots\dots (B.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2\bar{W} = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad d\sigma_{ij} = D^E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \\ d^2\bar{W}^E = d\sigma^E_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad d\sigma^E_{ij} = D^E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \\ d^2\bar{W}^P = d\sigma^P_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad d\sigma^P_{ij} = D^E_{ijkl} d\varepsilon^P_{kl} \end{array} \right.$$

ここで、 $d\sigma^E_{ij}$ 、 $d\sigma^P_{ij}$  はそれぞれ弾性応力増分、塑性緩和応力増分、また、 $d^2\bar{W}^E$ 、 $d^2\bar{W}^P$  はそれぞれ弾性応力仕事率、塑性緩和仕事率と呼ばれる。ただし、 $d^2\bar{W}^P$  は式 (B.1) の2次の仕事率 $d^2W^P$ とは異なることに注意が必要である。

橋口の仮定は、「ある所定の微小な変形が生じる場合になされる仕事が、弾性状態として算定される仕事より大となる場合は起こり得ない」とするもので、次式で表される。

$$d^2\bar{W}^P \geq 0 \quad \dots\dots\dots (B.4)$$

上式の $d^2\bar{W}^P$ に式(3.27)を代入し、式(3.25)および $n_s g_s > 0$ を考慮すると次式が成立

する。

$$d^2\bar{W}^p = \frac{9 G^2 n_s g_s}{K_p + H_s} de^2 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (B.5)$$

すなわち、本論文で取り上げた非排水三軸試験におけるひずみ軟化は、橋口の仕事率・剛性緩和の仮定を満たしていることが分かる。

一方、Bazant<sup>20)</sup> は非対称接線剛性マトリックス [A] の極限状態 (Critical state) は次式で与えられ、

$$\{du\}^T [A] \{du\} = 0 \quad \dots\dots\dots (B.6)$$

上式は、次の2つの場合に成立することを示している。

$$[A] \{du\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (B.7)$$

$$\{du\}^T \{dF\} = 0 \quad \dots\dots\dots (B.8)$$

ここに、{du} は変位ベクトル、{dF} = [A] {du} である。

式 (B.7) は、中立平衡極限状態を表し、この状態は  $\det[A] = 0$  で与えられる。一方、式 (B.8) は安定限界極限状態を表し、{dF} ( $\neq \{0\}$ ) と {du} が直交することを示す。この状態は、 $\det[A_s] = 0$  で与えられる。ここに、[A<sub>s</sub>] は [A] の対称成分で、 $[A_s] = ([A] + [A]^T) / 2$  である。

このため、[A] が非対称のときは、 $\det[A] = 0$  で  $\det[A_s] \neq 0$  あるいは、 $\det[A] \neq 0$  で  $\det[A_s] = 0$  の場合が生じ得る。前者は、安定した状態で解の唯一性の消失 (分岐) が生じる場合であり、後者は解の唯一性の消失は生じないが、安定性が保てない場合である。

ここで、安定とは平衡状態にある系に任意の外乱を加えたとき、外乱が小さければそれによって生じる変形も小さく抑えられる場合であり、不安定 (安定性が保てない) とは、外乱が小さくてもそれによって大変形に至る場合である<sup>23)</sup>。

## 謝辞

本論文は、著者が昭和51年4月から平成5年3月までの18年間、(株)奥村組・技術研究所に所属していた時期に行った研究のうち、後半約6年間の成果をとりまとめたものである。このような学位申請論文をまとめることができるまでには、多くの方々にお世話になり、御支援と御助力をいただきました。

山口大学工学部教授村田秀一先生には、工学部長の忙しい公務の間をぬって本論文をまとめるにあたり懇切な御教示を仰ぎました。筆者が社会建設工学科の最初の論文博士ということもあって、多くの御配慮を頂きました。今後は、筆者が地盤工学研究室の発展のためにお役に立ちたいと考えています。また、山口大学工学部教授會田忠義先生、同教授三浦房紀先生、同助教授兵動正幸先生、同助教授松田博先生には、本論文の内容について貴重な御意見を頂戴致しました。ここに、あわせて深甚の謝意を表す次第です。

著者が土の構成式を含めた液状化解析に関する研究を始めたのは昭和55年頃からで、当時九州大学教授であった山内豊聰先生（九州大学名誉教授）の研究室を訪れたとき、当時東海大学工学部講師であった兵動先生（前記）を紹介されて以来である。その後、兵動先生、九州大学工学部助教授安福規之先生（前山口大学工学部講師）らとの共同研究を通して特に土の構成式に関してより深い研究ができたことは、著者にとっては幸運であったと考えています。

兵動先生には、著者の研究全般にわたって長い間直接的に数多くの御教示を頂き、また良き相談相手になって頂きました。話は発散しがちでしたが、著者は気楽な気分で研究室に伺うことができました。平成3年に先生に連れられて行った Clifornia大学・Davis 校で、境界曲面モデルの Y.F.Dafalias 教授と議論できたことは著者にとっては大変な感激でした。

安福先生（前記）には、特に土の構成式に関して厳しい御指導と御鞭撻を賜りました。本論文の主要な部分である第2章、第3章、第4章に関連する論文の投稿にあたり、真っ黒に記入された原稿をみて、先生の研究に対する厳しさと情熱を教えられました。著者が山口大学（宇部）へ出かけるたび、いつも愛車（ノマド）で小郡まで送って頂きました。

平成7年5月30日に他界された故東京大学名誉教授久保慶三郎先生には(株)奥村組・技術

研究所での研究テーマの推進にあたり、また数多くの論文の投稿にあたり貴重な御教示を頂きました。学位論文をまとめるにあたり、厳しい心構えを教えてくださいました。完成した学位論文を先生にお渡しできなかつたのが心残りです。心よりご冥福をお祈り致します。

平成7年4月から山口大学工学部助手になった中田幸男先生と安福先生のいた室は、著者にはなぜか居心地の良い所でした。中田先生の学位論文も著者と同じ土の繰返し載荷時の構成式に関するものであり、今後も具体的な話ができればと考えています。

東北学院大学工学部助教授飛田善雄先生には、第3章に関連する論文の投稿にあたり、極めて貴重な御指摘を頂き、また数多くの資料、論文を送っていただきました。

東京大学工学部教授東畑郁生先生には、学会発表のおり、また当社技術研究所においても有効応力法液状化解析の限界を指摘していただきました。

第5章で使用した有限要素法液状解析プログラム NAPOLI は、Wales大学（英国）のO.C.Zienkiewicz 教授らが開発したパイロットプログラムを基に、東京理科大学工学部石原研而教授（前東京大学工学部教授）の技術指導を受けて、DIANAプロジェクト（委員長：川井忠彦東京大学名誉教授）において共同開発されたものである。本プロジェクトにおいて、(株)竹中工務店・塩見忠彦博士、佐藤工業(株)・吉田 望博士ら多くの方々に、有益な議論をして頂きました。

(株)奥村組においては、液状化解析を含めた土の動的挙動に関する研究テーマに着手する機会と御支援を戴きました奥村正太郎社長、井上堯之技術本部副本部長をはじめ歴代の技術研究所長であります河原畑良弘博士、兼松哲夫前部長、関西支社営業部中江新太郎部長に深く感謝致します。本論文をまとめるにあたっては、著者が所属する本社電算センター北角 哲所長に少なからぬ御助力戴きました。また、技術研究所土木研究室の前室長小田恵之輔課長には、技術研究所に所属していた時期から現在の部署においてもお世話になりました。

技術研究所地盤研究室日下部 伸主任研究員、技術開発部有本勝二課長とは、昭和60年頃初めて繰返し三軸試験機を入れて以来、深いつき合いになりました。解析屋の著者には、日下部さんの実験結果はなくてはならないものであり、筆者とは全く異なる視点からの意見は新鮮であり、研究を進める上で極めて貴重なものでした。ここに、皆様に深く感謝致します。

本論文の草稿を書き上げたのは平成6年12月末であったが、その後、平成7年1月17日阪神大震災が発生した。著者もポートアイランド、淀川河口等液状化の後を数回見て回

り、被害の大きさを痛感した。現在、土質工学会・阪神大震災調査委員会（地盤震動特性分科会、主査：京都大学防災研究所佐藤忠信教授）および土木学会・阪神大震災調査研究委員会（コンクリート分科会、委員長：京都大学工学部藤井 学教授）で地盤およびコンクリート構造物の震動解析を進めている。一人の研究者、技術者として、今後の地震災害の低減に少しでも役立てば幸いである。

最後に、長崎で2人で暮らす両親、京都の義母、そして妻に感謝します。

